arXiv:2602.00651v1 [math.QA] 31 Jan 2026

Nichols 代数讲义

Simon D.
Lentner 汉堡大学

2025/2026 冬季学期

目录

1 预备知识 5
1.1 李代数预备知识 .5 1.2 编织张量范畴预备知识 .10 1.3 量子群预备知识 .13

2 Nichols代数 1 **5**
2.1 通过量子对称化算子构造 Nichols 代数 .15 2.1.1 范畴代数 .15 2.1.2 量子对称化算子 .15 2.1.3 Nichols 代数 .17 2.1.4 首批例子 .18 2.2 作为普适 Hopf 代数的 Nichols 代数 .21 2.2.1 范畴 Hopf 代数 .21 2.2.2 Nichols 代数 .22

3 根系 **27**
3.1 Nichols 代数的根系 .27 3.2 广义根系的公理化 .36 3.2.1 超平面排列 .36 3.2.2 嘉当图与 Weyl 群胚 .37 3.3 秩 2 中的分类 .39 3.4 反射函子与 PBW 基 .42

4 表示范畴 4 **5**
4.1 Nichols代数的表示 .45 4.2 Drinfeld中心 .46 4.3 Radford 双积 .49 4.4 Radford投影定理 .49 4.5 量子群 .51 4.6 附录：生成元与关系 .53

5 超越对角情形的Nichols代数 5 **7**
5.1 非阿贝尔群上的情形 .57 5.2 其他 Nichols 代数上的情形 .64 5.3 探索新例子 .68

6 重构结果 **71**
6.1 Andruskiewitsch-Schneider计划 .71 6.2 范畴交换代数.74 6.3 Schauenburg函子 .75

7 应用于分析与共形场论 7 **7**
7.1 Knizhnik–Zamolodchikov方程与量子群 .78 7.2 Nichols 代数与 Varchenko-Selberg 积分.79 7.3 共形场论与顶点代数 .81 7.4 Nichols 代数与筛选算子 .85 7.5 Kapranov-Schechtmann等价 .86

本讲的目标

本讲介绍 Nichols代数，采用鲜明的范畴论视角，并在最后一章探讨其与共形场论的联系。

我想让大家了解 Nichols 代数的五个小奇迹：

- 它们附属于一种完全一般的情形（即任意编织张量范畴中的任意对象）
- 它们的表示产生一个非半单张量范畴（因为它们是编织张量范畴内部的 Hopf 代数）
- 它们仅凭结构上的必然性，作为具有泛性质的 Hopf 代数，就产生了高度非平凡的代数关系和 PBW型基（例如，带有量子 Serre 关系和根截断关系的量子 Borel 部分）。
- 它们具有一种在概念上颇为自然的广义根系，这种根系本身就很有趣，而且可以进行分类。作为一个特例，这也有助于我们更好地理解李超代数。
- 它们存在于任何 Hopf 代数中，更一般地说，也存在于任何张量范畴中，作为一种非半单的构建模块。

本讲主要参考 Heckenberger 和 Schneider 的优秀著作《Hopf 代数与根系》 [HS20] ，并在相应章节和定理处加以引用，读者可在那里找到完整的细节。

不过，在本讲中，我希望从范畴论视角来发展这套理论，面向的是对 Hopf 代数理论并不熟悉的听众。与全面详尽的著作不同，我也可以逐步介绍新的背景知识，并且只介绍理解当前主题所必需的内容。我希望这能大幅降低进入 Nichols 代数这一迷人理论的门槛。出于同样的原因，我会先强调 Cuntz 提出的、以超平面排列为基础的广义根系这一优美几何定义，然后再介绍年代更早、技术上更适用，并在 [HS20]中使用的 Cartan 图公理化。

这些笔记显然没有充分涉及一些重要的进阶代数主题：我对非阿贝尔群分次向量空间的 Drinfeld 中心中的 Nichols 代数作了详尽且注重实践的介绍；这类例子是对角情形之外研究最多的一类。不过，我只简要概述了这一情形下的分类进展，尽管过去 20 年来，这一直是一个令人着迷且成果丰硕、至今仍在持续的研究领域。直到篇末，我才简略勾勒出颇具影响力的 Andruskiewitsch-Schneider Hopf 代数分类纲领；该纲领一直是研究 Nichols 代数的主要动机，也是相关论述的典型起点。此外，我还补充了一些自己的成果，旨在将这一研究拓展至 Hopf 代数框架之外。在我看来，Andruskiewitsch-Schneider 纲领有望极大助益的核心范畴论问题，最终或许可以表述为：

问题 1. 对于给定的半单编织张量范畴 $\mathcal{C}$，如何用 *Nichols* 代数 $\mathfrak{B}$ 对 $\mathcal{C}$ 中所有非半单张量范畴，以及所有极大半单部分固定的编织张量范畴 $\mathcal{C}$ 进行分类（具体含义尚待定义，见下文）。

本讲座的目标之一是为 *Nichols* 代数 ${}^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ 构造并推广非半单模张量范畴 $\mathfrak{B}$ *in* $\mathcal{C}$，而且在我看来，这是否已经涵盖了所有此类例子，完全是一个开放问题。换一个角度来问：所有非半单模张量范畴的维特类中，是否都包含一个半单模张量范畴?

我将尽可能以范畴化的方式表述所有构造和论述。事实上，许多理论可以在一般范畴中完成，而这样做也会使若干已确立的构造获得新的视角。为此，我也会提及自己在这方面的技术成果。尽管框架相当宽泛，仍需提醒读者，本书中发展出的更深层定理 [HS20] 是在某一类编织幺半范畴中证明的。我们通过给这些论述标注相应的

假设 1。作为 [HS20] 中的标准设置，我们考虑域上的 *Hopf* 代数（其反粒子为双射）上的有限维*Yetter-Drinfeld*模所构成的编织张量范畴。

其中包括对角编织向量空间的情形，这也是我们主要研究的情形。在这种情形下，我更倾向于采用略有不同的设置，即阿贝尔群上分次向量空间的编织范畴，其编织由双特征标 χ 给出。我认为，进行一般性的范畴论处理在很大程度上是可行且值得的，但这无疑需要大量研究，而我也提出了相应的问题

问题 2. 在一般的编织幺半范畴设置下，发展 *Nichols* 代数理论，尤其是根系理论。

我们使用编织张量范畴的语言，但不要求读者具备多少先前知识。预备知识部分会重述一些预备内容和相关的初步例子。讲座期间将介绍以下涉及代数与范畴论交叉领域的概念；这些概念本身也很有趣

- 第 2.1.1 节中张量范畴中的代数这一显然的概念。
- Hopf 代数 H 在编织张量范畴中的概念 $\mathcal{C}$ 及其表示的张量范畴 $\mathrm{Rep}(H)(\mathcal{C})$（见第 2.2.2
- 第4.3-4.4节中 Radford 双积与投影定理的范畴版本。
- Drinfeld中心与相对Drinfeld中心 $\mathcal{Z}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$，针对给定的张量范畴 $\mathcal{C}$ 以及一个（中心的）辫子张量子范畴 $\mathcal{B}$，见第4.2节。作为特例，相对中心或$\mathrm{Rep}(H)(\mathcal{C})$即为Yetter-Drinfeld模 ${}^{H}_{H}\mathcal{YD}(\mathcal{C})$。本讲的一个要点是说明这如何再现量子群，其中$H$ 为一个Nichols 代数，而 $\mathcal{C}$ 为权空间的编织范畴。
- 第 6.2 节编织张量范畴中的交换代数、模、局部模与重构陈述

第1章

预备知识

我们假定读者至少对以下概念略有了解，我将在本节中简要介绍这些概念

- 李代数的概念，例如 $\mathfrak{sl}_3$ 以及通过根系对有限维李代数进行分类。
- 编织幺半范畴的概念，尤其是 Γ分次向量空间范畴 $\mathrm{Vect}_\Gamma^{\sigma,\omega}$，它具有非平凡的编织和结合子。
- 量子群的概念，例如 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$，它是 $\mathfrak{g}$的包络代数的一种变形。

1.1 李代数预备知识

李代数 $\mathfrak{g}$ 是一个向量空间，其上定义了一个括号运算 $[-,-]\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$，该运算是双线性的、反对称的 $[x,y]=-[y,x]$，并满足雅可比恒等式 $[x,[y,z]]=[[x,y],z]+[y,[x,z]]$。我将它写成了类似导子的莱布尼茨法则的形式。

最简单的例子是括号运算为零的阿贝尔李代数。主要的例子是带有交换子 $[x,y]=xy-yx$的代数，或是在交换子运算下封闭的这类代数的子空间，例如某些矩阵或微分算子。在向量空间上，李代数的表示是一个线性映射 $\rho\colon \mathfrak{g}\to\mathrm{End}(V)$，它将抽象的括号运算 $\mathfrak{g}$ 映射为 $\mathrm{End}(V)$中线性自同态的交换子。总可以在一维向量空间上定义由零映射给出的平凡表示。重新整理雅可比恒等式可知，李代数自身连同其括号运算构成一个表示，称为伴随表示，

理解李代数表示的一种强大方法，是选取一个极大阿贝尔李子代数（称为嘉当代数），并将该子代数的作用同时对角化。进一步地，将这一方法应用于伴随表示，可以根据同时特征值的分布（称为根系）对一类李代数进行分类；根系还可以被公理化并加以分类。这一过程的推广是本讲座的重点之一。现在我们通过一个主要例子来回顾这一方法

例 1.1.1。迹为零的复数 2×2 矩阵向量空间在交换子 $[-,-]$ 下封闭，并定义了一个称为 $\mathfrak{sl}_2$的李代数。我们选择由 $H_1=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$张成的对角矩阵作为极大阿贝尔子代数 $\mathfrak{h}$（嘉当代数）。如果我们通过 $[H_1,-]$ 计算 $\mathfrak{g}$ 上的伴随作用，并确定特征向量——这是一个很好的简短习题——就会发现， $\mathfrak{g}$ 具有如下特征基，其特征值为 2、 -2、 0

$$E_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\qquad F_1=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\qquad H_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

我们将分解称为 $\mathfrak{g}$的三角分解：由具有正特征值的特征子空间（称为正波莱尔部分）、具有负特征值的特征子空间（称为负波莱尔部分）以及具有零特征值的特征子空间（即 *Cartan* 部分 $\mathfrak{h}$）组成。

同样，无迹 3×3 矩阵的复李代数 $\mathfrak{sl}_3$ 也具有三角分解，其正波莱尔部分的一组基为

$$E_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad E_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad [E_1,E_2]=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

类似地，负波莱尔部分的一组基为 F_1、 F_2、 $[F_1,F_2]$; *Cartan* 部分在此处同样由对角矩阵组成，其一组基为

$$H_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad H_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

同样，这组基是关于可交换自同态$[H_i,-]$的共同特征基。为明确起见，我们将 $\mathfrak{sl}_3$ 的所有这些关系明确列出如下

$$\begin{aligned}[H_1,H_i]&=0 & [H_2,H_i]&=0\\ [H_1,E_1]&=(+2)E_1 & [H_2,E_1]&=(-1)E_1\\ [H_1,E_2]&=(-1)E_1 & [H_2,E_1]&=(+2)E_1\\ [H_1,[E_1,E_2]]&=(+1)[E_1,E_2] & [H_2,[E_1,E_2]]&=(+1)[E_1,E_2]\\ [H_1,F_1]&=(-2)F_1 & [H_2,F_1]&=(+1)F_1\\ [H_1,F_2]&=(+1)F_1 & [H_2,F_2]&=(-2)F_2\\ [H_1,[F_1,F_2]]&=(-1)[F_1,F_2] & [H_2,[F_1,F_2]]&=(-1)[F_1,F_2]\end{aligned}$$

所有共同的非零特征值构成的集合，以线性映射 $\alpha:\ \mathfrak{h}\to\mathbb{C}$表示，在我们的例子中如下所示，同时列出相应的负值

$\boxed{\mathfrak{sl}_2}$

$$\alpha_1(H_1)\ =2$$

$\boxed{\mathfrak{sl}_3}$

$$\begin{aligned}(\alpha_1(H_1)\ \alpha_1(H_2))\ &=(2,-1)\\ (\alpha_2(H_1)\ \alpha_2(H_2))\ &=(-1,\ 2)\\ (\alpha_{12}(H_1)\ \alpha_{12}(H_2))\ &=(1,1)\end{aligned}$$

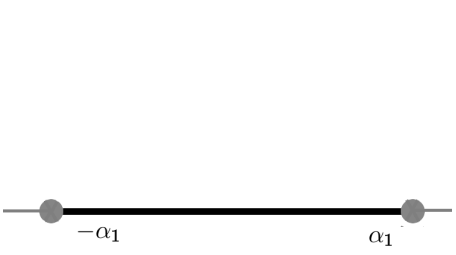
简记为 $\alpha_{12}=\alpha_1+\alpha_2$。注意，由雅可比恒等式可知，两个特征向量的交换子仍是一个特征向量，其特征值为这两个特征值之和。

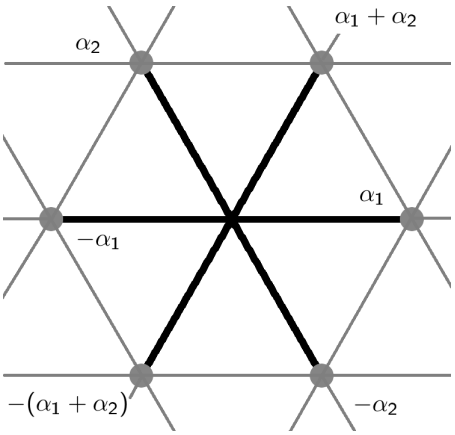
一个根系 主要由 $\mathbb{R}^n$ 中称为根的向量集 Φ 构成。附属于半单李代数的根系由相对于一组极大交换元的同时特征值构成。因此，上面的两个例子 $\mathfrak{sl}_2$ 和 $\mathfrak{sl}_3$ 具有根

$\boxed{\mathfrak{sl}_2}$ $\boxed{\mathfrak{sl}_3}$

$\Phi = \{\pm\alpha_1\}$ $\Phi = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm\alpha_{12}\}$

这些根系分别称为 A_1 和 A_2。选取一组基 α_1 和 α_1， α_2 称为单根集。我们绘出根集，并以 Killing 型给出的标量积为依据。





从几何上看，根系定义了一组超平面 $\alpha^\perp$ ，并为所有根 $\alpha \in \Phi$选定法向量 α 。根系的第一条主要公理指出，根集在超平面 $\alpha_i^\perp$上的反射 s_i 下封闭；这些反射生成一个 Coxeter 群，即根系的 *Weyl* 群 。在我们的例子中，这些群分别是 $\mathbb{S}_2$ 和 $\mathbb{S}_3$ ，其中 $s_1 = (12)$ 和 $s_1 = (12)$ $s_2 = (23)$。反射 s_i 可以表示为减去某个量 α_i 若干次

$$s_i : \alpha_j \mapsto \alpha_j - \mathsf{c}_{ij}\alpha_i, \qquad \mathsf{c}_{ij} := \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \text{ (Cartan matrix)}$$

根系的第二条主要公理指出，这些结构常数 c^{ij} 是整数，这称为晶体学条件。在我们的例子中，Cartan 矩阵为

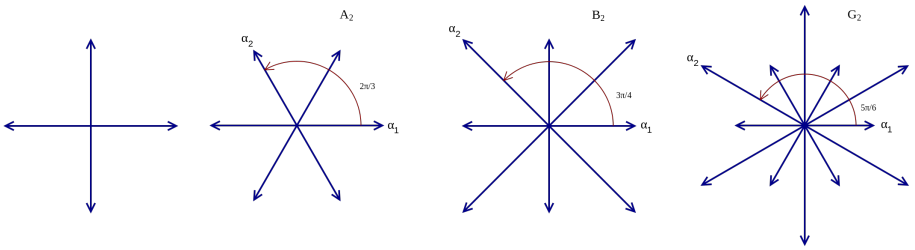
$\boxed{\mathfrak{sl}_2}$ $\boxed{\mathfrak{sl}_3}$

$\mathsf{c}_{ij} = (2)$ $\mathsf{c}_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

与此同时，非负整数 $-\mathsf{c}^{ij}$ 是使得 $\alpha_j + (-\mathsf{c}^{ij})\alpha_i \in \Phi$ （根串）成立的最大数；因此它们决定了称为*Serre* 关系的迭代交换子关系，在我们的第二个例子中 $\mathfrak{sl}_3$ 分别 A_2 这些是:

$$[E_1, [E_1, E_2]] = 0, \qquad [E_2, [E_2, E_1]] = 0$$

对于秩 2（两个正单根），对称超平面配置是正则的 N 边形。不难看出，唯一存在一组满足晶体学条件的法向量的配置是



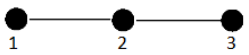
根系	$A_1 \times A_1$	A_2	B_2	G_2
$(\alpha_i,\ \alpha_j)$ $=$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$
c_{ij} $=$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

请注意，第三种超平面排列还存在另一种法向量选择，称为 C_2，其中 α_1 为长根，α_2 为短根；不过，只要交换 α_1，α_2，两种选择便等价。为分类秩为 n 的根系，我们绘制 *Dynkin* 图，其节点是单根 α_1，……，α_n，边则对应于上述 Cartan 矩阵的四种情形



在秩 3 的情况下，我们会遇到五种柏拉图立体，其中三种（四面体、立方体、八面体）能够铺满空间，因此是晶体学的。

例 1.1.2 (类型 A_3)。 类型为 A_3 的根系可以由以下 *Dynkin* 图构造

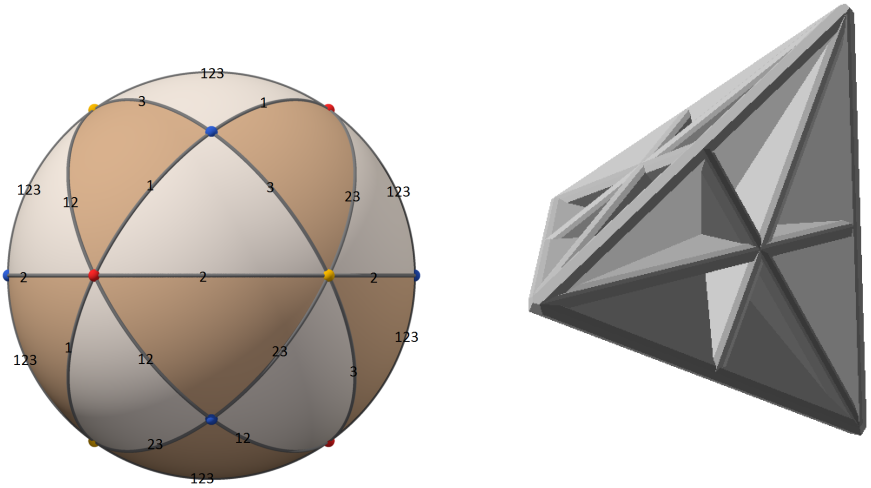


$$(\alpha_i, \alpha_j) = c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

它的根如下，例如我们将 $\alpha_{12} = \alpha_1 + \alpha_2$ 简写为

$$\Phi = \pm\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_{12},\ \alpha_{23},\ \alpha_{123}\}$$

从几何上看，它是在四面体中以通过原点的方式排列的六个超平面



相应的 *Weyl* 群同构于 $\mathbb{S}_4$。更准确地说，简单反射s_1、 s_2、 s_3 分别对应于对换 (12)、(23)、(34)，而所有反射的集合对应于对换的共轭类 (ij) ，其中24 个元素对应于球面上的24 个三角区域（*Weyl* 室）。例如，反射

$$s_2 : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \mapsto \alpha_{12}, -\alpha_2, \alpha_{23}$$

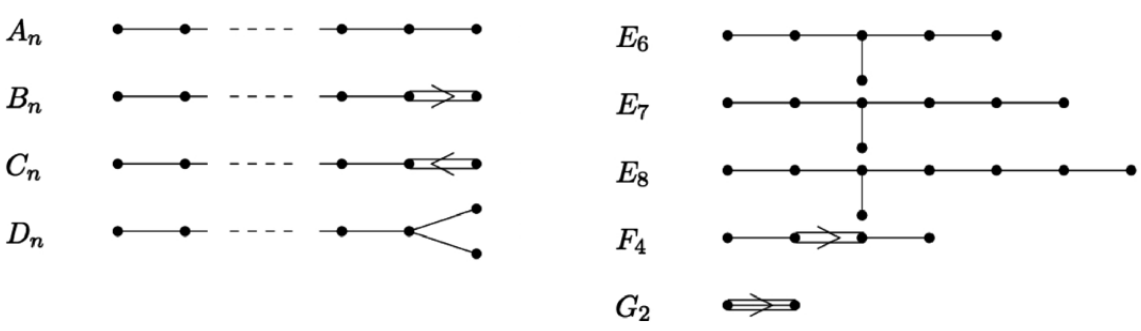
它是图中赤道平面上的反射，并将三个非单根（通过加法性或计算标量积）映射

$$\alpha_{12}, \alpha_{123}, \alpha_{23} \mapsto \alpha_1, \alpha_{123}, \alpha_3$$

因此，反射 s_2 置换了根，并将一个正根 α_2 变为负根。

这个根系描述了李代数 $\mathfrak{sl}_4$，参见习题*1.1.3*。*Weyl* 群 $\mathbb{S}_4$对应于 SL_4中的置换矩阵。

因此，有限根系的分类呈现出 4 个无限族和 5 个例外根系（Killing，Cartan ~ 1890）



习题 1.1.3. 求出 $\mathfrak{sl}_4$ 中下列矩阵之间的所有迭代交换子

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

另请验证它们是 $[H_i, -]$ 的特征向量

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

并由此得出，迭代对易子也是 $[H_i, -]$ 的特征向量。

计算 $\mathfrak{so}_5$ 中下列矩阵之间的所有迭代对易子：

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

并验证它们是 $[H_i, -]$ 的特征向量

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题 1.1.4. 考虑 B_3 和 D_4 的情形，即

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \qquad (\alpha_i, \alpha_j) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

从单根和反射开始，找出所有根。

1.2 辫张量范畴预备知识

定义 1.2.1。 一个 编织张量范畴 $\mathcal{C}$ 由以下部分组成：

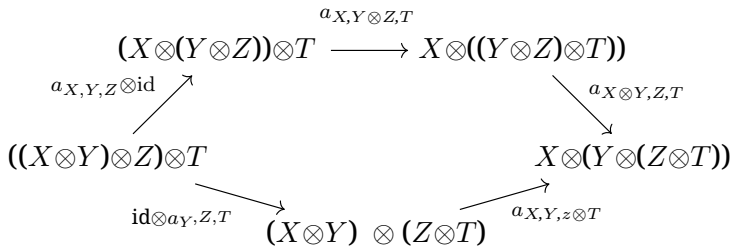
- 对象 $X, Y, \ldots$ 与态射 $f\colon X \to Y$它们之间。我们感兴趣的主要具体数据是：– 简单对象 的列表，即那些没有真子对象的对象

– 是否所有对象都是半单对象，即单模的直和– 否则是关于不可分解扩张 $A \to X \to B$的信息，– 最终是射影对象 以及$\mathrm{Ext}^\bullet(A, B)$的结构。

- 张量积 $X \otimes Y$和单位对象 1。
- 实现结合律的自然同构的选择

$$a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\sim} X \otimes (Y \otimes Z)$$

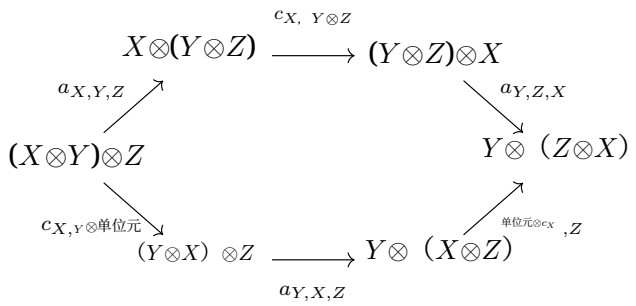
并且作为相容条件，我们要求以下图表可交换。这称为五边形恒等式，它确保不同的重新加括号方式得到相同结果



- 实现交换性的自然同构的选择

$$X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$$

并且，作为相容条件，我们要求满足以下六边形恒等式，它表达了与张量积交换等价于分别与各个张量因子交换。



以及一个在 c 的第一个位置中带有张量积的第二种版本。

这个自然同构称为编织，因为由此可知它满足辫群关系或杨-巴克斯特方程。请注意，双重编织通常并非恒等映射。

例 1.2.2。向量空间范畴是一个编织张量范畴，具有平凡结合子和编织。唯一的简单对象是一维向量空间。关于基存在性的标准定理意味着，任意向量空间都是一维向量空间的直和。

例 1.2.3。对于群 Γ，范畴 Vect_Γ 中的 Γ 分次 $\mathbb{K}$ 向量空间的简单对象为 $\mathbb{K}_a$, $a \in \Gamma$，即次数为 a 的一维向量空间；任意对象都是这些对象的直和，因此该范畴是半单的。

与向量空间范畴类似，它成为一个带有平凡结合子的幺半范畴，并且当 Γ 为阿贝尔时带有平凡编织。但我们也可以通过适当选取标量 $\omega\colon\ \Gamma\times\Gamma\times\Gamma\to\mathbb{K}^\times$ 与 $\sigma\colon\ \Gamma\times\Gamma\to\mathbb{K}^\times$ 来修改它们，如下：

$$\begin{array}{ccc}(\mathbb{K}_a\otimes\mathbb{K}_b)\otimes\mathbb{K}_c & \xrightarrow{a_{\mathbb{K}_a,\mathbb{K}_b,\mathbb{K}_c}} & \mathbb{K}_a\otimes(\mathbb{K}_b\otimes\mathbb{K}_c)\\ \| & & \|\\ \mathbb{K}_{a+b+c} & \xrightarrow{\omega(a,b,c)} & \mathbb{K}_{a+b+c}\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccc}\mathbb{K}_a\otimes\mathbb{K}_b & \xrightarrow{c_{\mathbb{K}_a,\mathbb{K}_b}} & \mathbb{K}_b\otimes\mathbb{K}_a\\ \| & & \|\\ \mathbb{K}_{a+b} & \xrightarrow{\sigma(a,b)} & \mathbb{K}_{b+a}\end{array}$$

标量的选择（ω，σ）在自然等价关系下由阿贝尔群上的二次型分类 Γ，见 [Mac52, JS93]。编织非退化当且仅当二次型非退化。

例1.2.4。群 G 或李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示成为一个编织张量范畴：对于表示 V、W，我们考虑向量空间的张量积，并赋予其一个作用

$$g.(v\otimes w)=g.v\otimes g.w,\qquad g\in G$$

$$x.(v\otimes w)=x.v\otimes w+v\otimes x.w,\qquad x\in\mathfrak{g}$$

由于该指派是对称的，向量空间的平凡编织与这一作用相容，而且它与向量空间的结合子是严格结合的。

例如，回忆一下，$\mathfrak{sl}_2$ 有任意维数 $n=2j+1$的简单表示 V_j，且张量积按照 *Clebsch-Gordan* 规则分解

$$V_j\otimes V_{j'}=V_{j+j'}\oplus\cdots\oplus V_{|j-j'|}$$

下面给出一些习题，帮助熟悉非半单情形：

习题 1.2.5. 对于域 $\mathbb{K}$ 上特征 $\mathbb{Z}_2=\langle g\rangle$ 为2 的群 $\mathbb{Z}_2=\langle g\rangle$ 的表示，证明由 g 置换基向量的表示 $P=\mathbb{K}^2$ 是一个不可分解扩张

$$1\to P\to 1$$

事实上，它是唯一的投射对象。试着计算并分解 $P\otimes P$。

习题 1.2.6. 请确认，单变量多项式环 $\mathbb{C}[x]$ 的表示可以用若尔当标准形来理解；特别是，简单对象是一维的 $\mathbb{C}_\lambda$，而不可分解对象由若尔当块$\mathbb{C}_{\lambda,\ k}$标记。

现在将其视为一个1维李代数的泛包络代数：计算张量积 $\mathbb{C}_\lambda\otimes\mathbb{C}_\mu$ 和$\mathbb{C}_{0,\ 2}\otimes\mathbb{C}_{0,\ 2}$。

此外，亦回顾编织张量范畴的如下构造

1.3 量子群预备知识

量子群的标准参考文献是下列著作 [Lus10，Jan96，Kas98]。量子群是 q-变形，即有限维复半单李代数的包络代数的变形，由Jimbo和Drinfeld在20世纪80年代定义 [Dri89]。例如，量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$具有生成元 E，F，$K=\exp(H)$以及关系

$$KE=q^2EK,\qquad KF=q^{-2}FK,\qquad [E,F]=\frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}$$

当 q 不是单位根时，表示论与李代数的情形完全相同：存在由最高权向量自由生成的 Verma 模

$$Kv=q^{\lambda}v,\qquad Ev=0$$

其基为 F^kv，$k\geq 0$，且对于整数 λ，存在有限维商模。

量子群之所以有趣，关键在于它们在张量积（Hopf 代数，见下文）上有如下作用：

$$\Delta(K)=K\otimes K,\qquad \Delta(E)=K\otimes E+E\otimes 1,\qquad \Delta(F)=1\otimes F+F\otimes K^{-1}$$

同样，张量积遵循熟悉的 Clebsch-Gordan 规则，但还存在非平凡的编织。

练习 1.3.1。明确说明，对于 $\lambda=1$，*Verma*模有一个 2 维商模。写出两个这样的 *Verma* 模的张量积，并将其分解为一个1 维模和一个 3 维模。

对于 q 一个本原 n 次单位根，Lusztig（他此前曾分类有限特征下 Lie 型有限单群的表示）发现，表示论会变成非半单的；从某种意义上说，这是因为相差 n 的权会变得相等，并且可能出现循环行为，这与有限特征下的李代数类似（见下文例 2.2.4）。令人惊讶的是，在 Hopf 代数层面，商 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 的表示上存在一个张量积 E^n，$F^n=0$。本讲中，我们想要系统地理解这类启发式行为。

第2章

Nichols代数

参考文献。一些重要的原创论文包括 [Nic78]（第一个例子），[Wor89，Ros98]（量子洗牌方法），[Lus10]（量子群的系统性介绍），[AS10]（*Hopf*代数分类的关键部分）以及 [Hec09]（对角代数的分类）。

2.1 通过量子对称化算子构造Nichols代数

2.1.1 范畴代数

在任意张量范畴中，都有一个直接明了的代数概念（A，μ，η），其具有μ：$A\otimes A\to A$和η：$1\to A$；此外，还有一个关于 A 在 $\mathcal{C}$中的表示的概念。

例 2.1.1. 范畴 Γ分次向量空间 $\mathcal{C}=\mathrm{Vect}_\Gamma$ 中的代数 A 是一个Γ分次代数。在 $\mathcal{C}$ 中的 A 模是一个 Γ分次向量空间，带有 A的作用，且该作用与 A 和 M的 Γ分次相容

例 2.1.2. 对于任意幺半范畴中的对象 X，我们都可以构造张量代数

$$\mathfrak{T}(X):=\bigoplus_{n\geq 0}X^{\otimes n}$$

其乘法由并置给出

$$\bigoplus_{n\geq 0}X^{\otimes n}\otimes\bigoplus_{m\geq 0}X^{\otimes m}\to\bigoplus_{n,m\geq 0}X^{\otimes(n+m)}$$

其表示(Y,ρ) 与态射 $\rho|_X$：$X\otimes Y\to Y$构成双射。

2.1.2 量子对称化算子

回忆一下由 n 个字母构成的对称群 $\mathbb{S}_n$。它由 $n-1$ 个相邻换位 $\tau_i=(i,\ i+1)$ 生成。根据 Matsumoto 的定理，下列关系是

定义关系

$$(\tau_i)^2 = 1, \qquad \tau_i\tau_{i+1}\tau_i = \tau_{i+1}\tau_i\tau_{i+1}, \qquad \tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i, \quad |i-j| > 1$$

置换 $\sigma \in \mathbb{S}_n$ 的长度 $|\sigma|$ 是将 σ 表示为生成元 τ_i构成的字所需的最小长度。这样的最短字称为约化表达式。

习题 2.1.3. 用归纳法证明，$\ell(\sigma)$ 等于满足条件 $1 \leq i < j \leq n$的数对的个数，其中 $\sigma(i) > \sigma(j)$。

回顾由 n股辫构成的群 $\mathbb{B}_n$。它由 $n-1$上交叉辫 $c_{i,\ i+1}$生成。定义关系是对称群的第二和第三个关系，而 $(c_{i,\ i+1})^2$ 是非平凡的。

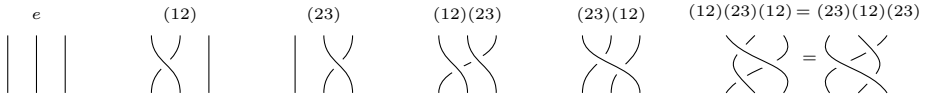
定义 2.1.4 (Matsumoto截面)。 考虑显然的群同态 $\mathbb{B}_n \to \mathbb{S}_n$.它不能分裂为群同态。但存在一个定义良好的集合截面

$$s : \mathbb{B}_n \leftarrow \mathbb{S}_n$$

它将相邻换位 τ_i 映射到上交叉辫 $c_{i,\ i+1}$，并将任意约化表达式映射到相应的辫乘积。

Matsumoto截面是定义良好的，因为Matsumoto定理还断言，对于 $\mathbb{S}_n$ 中同一元素的任意两个约化表达式，我们只需使用第二和第三个关系即可在它们之间转换。由于这些是辫群的定义关系，因此到 $\mathbb{B}_n$ 的截面是定义良好的。

例 2.1.5 $(n = 3)$。 *Matsumoto*截面将对称群 $\mathbb{S}_3$ 中的6 个元素映射为 $\mathbb{B}_3$ 中的以下辫。在本讲义中，我们从上到下阅读辫。



The 最后一个元素有两个不同的约化表达式，它们被映射为等价的辫 *s.*

定义 2.1.6 ([HS20] 定义 1.8.7)。 量子对称化算子或辫对称化算子是 中的以下形式元素，即辫群的 $\mathbb{Z}$-张成空间

$$Ш_n := \sum_{\tau \in \mathbb{S}_n} s(\tau)$$

为后续使用，我们还定义量子洗牌

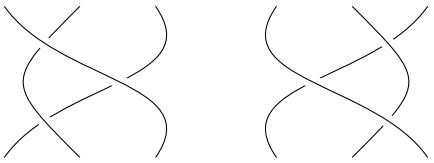
$$Ш_{i,n-i} := \sum_{\tau \in \mathbb{S}_{i,n-i}} s(\tau^{-1})$$

其中 $\mathbb{S}_{i,n-i}$ 表示洗牌子群，即满足以下条件的置换 τ： $\tau(1) < \cdots < \tau(i)$ 以及 $\tau(i+1) < \cdots < \tau(n)$。

2.1.3 Nichols代数

现在设 $X \in \mathcal{C}$ 是编织幺半范畴中的一个对象。辫编织同构c： $X \otimes X \to X \otimes X$ 在 $X \otimes X \otimes X$ 上满足辫群关系或杨-巴克斯特方程

$$(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id}) \quad = \quad (\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c)$$



因此，它对任意 $k \geq 0$延拓为辫群在 $X^{\otimes k}$ 的张量幂上的作用：

$$\rho : \mathbb{B}_k \to \mathrm{End}(X^{\otimes k})$$

注意，在一般的编织幺半范畴中，这些公式里存在结合子，我们在图示中将其省略。

定义 2.1.7. *Nichols* 代数 $\mathfrak{B}(X)$ 是张量代数（自由代数）对量子对称化算子作用的核取商所得的代数

$$\mathfrak{B}(X) := \bigoplus_{k \geq 0} X^{\otimes k} / \ker(\rho(\amalg_k))$$

引理 2.1.8. 该核确实是一个理想，因此这确实定义了一个代数 $\mathfrak{B}(X)$。

证明. 我们证明该核是右理想（左理想的情形类似）：

将 $\mathbb{S}_n \subset \mathbb{S}_{n+1}$ 视为固定 $n+1$的置换子群。$\mathbb{S}_{n,1}$ 中的元素是 $\mathbb{S}_{n+1}$中右 $\mathbb{S}_n$-陪集的陪集代表元。具体来说：任意一个 $1, \ldots, n, n+1$ 的置换，都可以唯一地写成一个对 $1, \ldots, n$ 的置换（保持它们彼此之间指定的位置关系），后接将 $n+1$ 平移至其指定位置，同时保持其他元素的相对次序。

一个关键观察是，这些陪集代表元与长度函数相容。换言之， $\mathbb{S}_n$ 中的任意一个约化表达式与 $\mathbb{S}_{n,1}$ 中陪集代表元的约化表达式拼接后，仍是一个约化表达式。这一点显然，因为根据构造，被 $\mathbb{S}_n$ 逆序的任何一对 (i, j)，都不会再被 $\mathbb{S}_{n,1}$逆序。

因此，我们得到了量子对称化算子 $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}'_{n,1}\mathbf{X}_n = \mathbf{X}_n\mathbf{X}_{n,1}$ 的一个分解，其中 $\mathbf{X}'_{n,1}$ 是不采用逆元约定的洗牌元。特别地，将 $\mathbf{X}_n$ 的核中的元素右乘某个 $(n+1)$-因子 X，所得结果仍在核中。

□

注意，证明以归纳方式给出了一个分解

$$\amalg_n = \amalg_{1,1}\amalg_{2,1}\cdots\amalg_{n-1,1} \tag{2.1}$$

参见 [HS20] 推论 1.8.8，以及第 1.8 节的全部内容，其中还有更多此类公式。

Nichols 代数衡量编织在多大程度上不能通过对称群S_n分解，以及 Matsumoto 截面在多大程度上不是群同态。

2.1.4 第一个例子

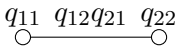
例 2.1.9 (编织向量空间，对角编织)。 主要感兴趣的例子是编织向量空间(X, c)。

一类重要的例子是对角型编织向量空间，也就是说， X带有一个特选基 $x_1, \dots, x_n$，且编织具有如下形式

$$c_q : X \otimes X \to X \otimes X$$

$$x_i \otimes x_j \mapsto q_{ij}(x_j \otimes x_i)$$

对于编织矩阵 (q_{ij})，其由任意非零标量组成。按照 *Heckenberger* 的做法，我们用一个 q 图来表示这种编织：每个 α_i对应一个节点，节点上标注自编织 q_{ii}；从 α_i 到α_j的边上标注双重编织$q_{ij}q_{ji}$，且仅当 $q_{ij}q_{ji} \neq 1$时才绘制该边：



这并不能完全确定编织，但事实证明，它包含了所有相关信息。

请注意，Nichols 代数的定义只取决于辫群在 $X^{\otimes k}$上的作用，而不取决于环境编织幺半范畴。任何对角编织都可以在 $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}^n}^{\chi,1}$ 中实现：将q_{ij} 乘性扩张为一个双特征标。

$$\chi : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{K}^\times$$

$$\chi(\alpha_i, \alpha_j) = q_{ij}$$

当然，也可以针对其他阿贝尔群实现 $\mathbb{Z}^\to\Gamma$，但对于大多数问题，这不会造成差别。[1] 从 $\mathrm{Vect}_\Gamma^{\omega,\sigma}$ 的范畴论视角来看，它编码了二次型及其关联的双乘性形式，这恰恰是在编织张量范畴等价下保持不变的信息。

习题 2.1.10。证明，对于任意编织矩阵(c_q q_{ij})，都满足辫关系 n.

例 2.1.11 $(k = 2)$。 第一个非平凡项是

$$\mathrm{III}_2 = \mathrm{id}_{X,X} + c_{X,X}$$

[1]例如，计算所有可能的提升确实严重依赖于 Γ。对于某些论证，只需要求 Γ 足够大，使得所有根（PBW生成元的次数）彼此不同；我们在 [CLR23]中称这种情况为充分展开。

如果编织是对称的 $c^2 =$ 恒等映射，那么恒等映射 $-c$ 的像属于核，这意味着我们有一个编织交换子关系

$$[x,y]_c := x\otimes y - c(x\otimes y) = 0, \quad for\ c^2 = \mathrm{id}$$

例如，对于具有对角编织的编织向量空间

$$[x,y]_q := x_ix_j - q_{ij}x_jx_i = 0, \quad for\ q_{ij}q_{ji} = 1$$

正如通过计算量子对称化算子可以明确看出的那样

$$\amalg_{q,2}[x,y]_q = (x_ix_j - q_{ij}x_jx_i) + (q_{ij}x_jx_i - q_{ij}q_{ji}x_ix_j) = 0$$

对于非对称编织，编织交换子关系将不一致，因为如果 $q_{ij}q_{ji}\neq 1$，$x_ix_j - q_{ij}x_jx_i = 0$ 和 $x_jx_i - q_{ji}x_ix_j = 0$ 会相互矛盾。然而，在某些 (q_{ij}) 组合中，高阶关系可能是一致的。对于“随机”编织，*Nichols* 代数就是自由代数。

定义 2.1.12. 设 $X,(q_{ij})$ 为对角编织向量空间，则我们定义自由代数中任意两个元素的编织交换子，其中底层向量空间为 X：

$$[x_{i_1}\cdots x_{j_n}, x_{j_1}\cdots x_{j_m}]_q = (x_{i_1}\cdots x_{i_n})(x_{j_1}\cdots x_{j_m}) - \left(\prod_{a=1}^{n}\prod_{b=1}^{m} q_{i_aj_b}\right)(x_{j_1}\cdots x_{j_m})(x_{i_1}\cdots x_{i_n})$$

例 2.1.13 (秩 1). 设 $X = \langle x\rangle_{\mathbb{K}}$ 具有对角编织 $q_{11} = q$，则

$$\mathfrak{B}(X) = \begin{cases} \mathbb{K}[x]/x^\ell, & if\ 1+q+q^2+\cdots+q^{\ell-1} = 1 \\ \mathbb{K}[x], & else \end{cases}$$

第一种情形的条件例如在 q 是 ℓ 次单位根，或 $q = 1$和 ℓ 整除基域 $\mathbb{K}$的特征时成立。

证明。 空间 $X^{\otimes k}$ 由单个基向量（$x\otimes\cdots\otimes x$）张成，任意辫群生成元 $c_{i,\ i+1}$ 都通过乘以 q来作用。接下来我们计算

$$\begin{aligned}\amalg_{q,k}(x\otimes\cdots\otimes x) &= \left(\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_k} q^{|\sigma|}\right)(x\otimes\cdots\otimes x) \\ &= \left(\prod_{1\le i\le k}\frac{q^i-1}{q-1}\right)(x\otimes\cdots\otimes x)\end{aligned}$$

我们列出最初的几种情形

$$\begin{aligned}\amalg_{q,2}(x\otimes x) &= (1+q)(x\otimes x) \\ \amalg_{q,3}(x\otimes x\otimes x) &= (1+q+q+q^2+q^2+q^3)(x\otimes x\otimes x) \\ &= (1+q)(1+q+q^2)(x\otimes x\otimes x)\end{aligned}$$

这种因式分解出现在不变量理论中，但它也是将$\amalg_n$ 分解为公式（2.1）中洗牌置换的一种非常一般的分解的特例。 □

习题 2.1.14。对于对称群 $g \in \mathbb{S}_n$ 中的任意元素，令 $|\sigma|$ 为满足 $i<j$ 且 $\sigma(i) > \sigma(j)$的数对(i,j) 的个数。直接证明生成函数的下列因式分解

$$\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_k} q^{|\sigma|} = \prod_{1\le i\le k} \frac{q^i-1}{q-1}$$

还要证明，$|\sigma|$ 是将 σ 表示为相邻换位的乘积$(i,i+1)$时任意最短表达式的长度。我们指出，将$\mathbb{S}_n$ 解释为根系 A_{n-1}的 *Weyl* 群，还能得到其他解释；但在我们的语境中，这可能会使对称群的两种不同作用混淆。

引理 2.1.15 (Rosso 引理 14 [Ros98], 系统证明见 [HS20] 引理 15.1.1)。设 X 具有对角编织 $(q_{ij}) = q$ 则两个元素之间有如下关系

$$\text{Ш}_{q,n+1}\underbrace{[x_i,[x_i,\cdots[x_i}_{n},x_j]_q]_q]_q = 0$$

且当且仅当 n 较小时，该关系不成立

$$1+q_{ii}+\cdots+q_{ii}^{n-1}=0 \qquad or \qquad q_{ii}^{n-1}q_{ij}q_{ji}=1$$

"Truncation case" **"Cartan case"**

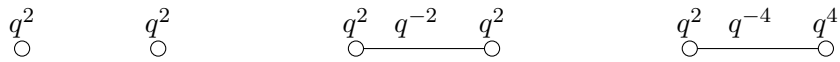
注意，这只取决于 q_{ii} 和$q_{ij}q_{ji}$，而这正是 q-图中的信息。

情形 $n=1$ 可归结为前述交换性陈述

习题 2.1.16. 通过计算量子对称化算子，手动检验 $n=2$ 这一情形。

例 2.1.17 (量子 Borel 部分)。设 $\mathfrak{g}$ 是一个半单有限维李代数 $\mathfrak{g}$，其单根为 α_i，根格为 Λ，*Killing* 型为 $(\alpha_i,\ \alpha_j)$。固定 $q\in\mathbb{C}^\times$。我们定义对角编织 $q_{ij}=q^{(\alpha_i,\alpha_j)}$。

那么 $\mathfrak{B}(q) = u_q(\mathfrak{g})^+$ 是量子群或小量子群的 *Borel* 部分（当 q 是单位根时）。例如，类型为 $A_1\times A_1$、A_2 和 B_2 的 $\mathfrak{g}$ 的 q-图为



我们注意到，这里 *Rosso* 引理 *2.1.15* 中的第二种情形导出了量子 *Serre* 关系（因此称为 *"Cartan* 情形*"*）：李代数的 *Cartan* 矩阵定义如下

$$\mathsf{c}_{ij} = \frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}$$

因此，编织矩阵 $q_{ij}=q^{(\alpha_i,\alpha_j)}$ 恰好满足条件$q_{11}^{n-1}q_{12}q_{21}=0$ 对于

$$(n-1)(\alpha_i,\alpha_i)+2(\alpha_i,\alpha_j)=0$$

即对于 $n = 1 - c_{ij}$。但请注意，对于小阶单位根，截断条件可以在更小的 n 值下得到满足，参见例 *3.1.8*

同样，李超代数的量子 *Borel* 部分也是 *Nichols*代数。对于费米子根，*Rosso* 引理中有“截断情形”。

习题 2.1.18 ([Len16])。 对于 $\mathfrak{g} = G_2$ 和 q 本原四次单位根，参照 *Rosso* 引理，与通常的量子 *Serre* 关系（即一般 q）相比，量子 *Serre* 关系是什么？

如果我们用通常的量子 *Serre* 关系取张量代数的商，找出一个次数更高的额外原始元。计算它与生成元 x_1、x_2 的编织，并画出 q-图。验证它具有相同的编织矩阵，因此与 A_3 具有相同的一组 *Serre* 关系。

习题 2.1.19 ([HS20]例 7.1.3)。 作为一个病态例子：设 V 是一个向量空间，且 $c = \mathrm{id}_{V\otimes V}$。计算特征为 $\mathbb{K}$ 的基域 p上的 *Nichols* 代数。

2.2 Nichols 代数作为普适 Hopf 代数

事实证明，Nichols 代数具有更多结构

2.2.1 范畴 Hopf 代数

定义 2.2.1. 编织幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中的双代数 H 是其中的一个代数$\mathcal{C}$，并带有称为余乘法和余单位的代数态射

$$\Delta : H \to H \otimes H, \qquad \epsilon : H \to 1$$

它满足的公理与代数中乘法和单位的公理互为对偶

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta, \qquad (\epsilon \otimes \mathrm{id})\Delta = (\mathrm{id} \otimes \epsilon)\Delta = \mathrm{id}$$

通常使用Sweedler记号 $\Delta(h) = h^{(1)} \otimes h^{(2)}$，其中隐含对可能存在的多个基本张量求和。特别是，此时余结合律写作

$$(h^{(1)})^{(1)} \otimes (h^{(1)})^{(2)} \otimes h^{(2)} = h^{(1)} \otimes (h^{(2)})^{(1)} \otimes (h^{(2)})^{(2)}$$

并对这两个表达式都使用简写记号 $h^{(1)} \otimes h^{(2)} \otimes h^{(3)}$，类似于我们将三重乘积 abc 简写为 $(ab)c = a(bc)$。

为了定义代数态射 $H \to H \otimes H$ 的概念，我们需要在 $H \otimes H$ 上定义代数结构，而这通常要求在 $\mathcal{C}$上定义编织，即：

$$(H\otimes H)\otimes(H\otimes H) \cong H\otimes(H\otimes H)\otimes H \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes c\otimes \mathrm{id}} H\otimes(H\otimes H)\otimes H \cong (H\otimes H)\otimes(H\otimes H) \xrightarrow{\mu\otimes\mu} H\otimes H$$

关于向量空间中的 Hopf 代数，优秀的参考文献包括 [Mon93，Kas98，Sch95]。从范畴论的角度看，双代数的附加结构赋予范畴

Rep(H)($\mathcal{C}$)，即 H 在 $\mathcal{C}$ 中的表示范畴，带有幺半积（即通过 Δ实现的 $V \otimes_{\mathcal{C}} W$和 H-作用）以及一个单位对象（即通过 ϵ实现的 $1_{\mathcal{C}}$ 和 H-作用）。双代数赋予其相应结构。反粒子进一步赋予该范畴对偶。

例 2.2.2. 设 $\mathcal{C}$ 为带平凡编织的向量空间范畴。以下是两个非常熟悉的 *Hopf* 代数例子，它们为该理论的许多内容提供了启发：

- 设 G 为一个群，那么群代数 $\mathbb{K}G$ 是由 G 张成的向量空间，其乘法继承自 G。它通过以下结构成为一个 *Hopf* 代数

$$\Delta(g) = g \otimes g, \qquad \varepsilon(g) = 1, \qquad S(g) = g^{-1}.$$

  这些附加结构描述了群通常如何作用于张量积、平凡表示和对偶表示上。

- 设 $\mathfrak{g}$ 为一个李代数，那么泛包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的张量代数（即以 $\mathfrak{g}$ 的基为基的自由代数）模去关系 $xy - yx = [x, y]_{\mathfrak{g}}$ 得到的。它通过以下结构成为一个 *Hopf* 代数

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \qquad \varepsilon(x) = 0, \qquad S(x) = -x.$$

  这些附加结构描述了李代数（例如导子代数）通常如何作用于张量积、平凡表示和对偶表示上。

2.2.2 Nichols代数

Nichols代数 $\mathfrak{B}(X)$ 是赋予编织幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中对象 X 的通用 Hopf 代数。它是由原始元 X 生成的最小 Hopf 代数。

定义 2.2.3。 设 X 是编织幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中的任意对象。张量代数

$$\mathfrak{T}(X) = \bigoplus_{k \geq 0} X^{\otimes k}$$

可通过如下定义唯一地赋予 *Hopf* 代数结构：

$$\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1, \quad \epsilon(x) = 0, \quad S(x) = -x, \quad x \in X,$$

（这样的元素称为原始元），并将其乘法扩张为代数映射。

乘法扩张依赖于 $H \otimes H$ 上的代数结构，因而依赖于编织。这可能会导致意外情况，例如一个原始元的某个幂本身也可能是原始元。在进入编织情形之前，我们先在一个具有平凡编织的有限特征例子中讨论同样的效应：

例 2.2.4. 设 $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$ （比如说，一个导子），并设基域的特征为 ℓ。则

$$\Delta(x^\ell) = \sum_{i=0}^{\ell} \binom{\ell}{i} (x^i \otimes x^j) = 1 \otimes x^\ell + x^\ell \otimes 1$$

由于 $\ell | \binom{\ell}{i}$ 对于素数 ℓ 且 $i \neq 0, \ell$，它再次是原始元。因此，存在一个商*Hopf*代数，将 $x^\ell = 0$ 或另一个原始元置为零。这引出了有限特征域上经典的 ℓ-限制李代数概念。它与前面通过量子对称化算子给出的定义相吻合，因为它就是 $\text{Ш}_n = n!$，当$n \geq \ell$时它为零。

Lusztig 注意到，在非平凡编织下，特征零时也会发生同样的情况：

例 2.2.5。 取 $\mathcal{C} = \text{Vect}_\Gamma^{\omega\,\sigma}$，并令 $X = \mathbb{K}_a$ 为次数 $a \in \Gamma$ 上以 x 为基的一维向量空间。我们计算

$$\Delta(x^2) = \Delta(x)^2 = (1 \otimes x + x \otimes 1)^2 = x^2 \otimes 1 + (x \otimes x) + \sigma(a,a)(x \otimes x) + x^2 \otimes 1.$$

特别地，若 $\sigma(a,a) = -1$，则 x^2 再次是原始元。类似地，若 $\sigma(a,a)$ 是一个本原的 ℓ 次单位根，则 x^ℓ 是原始元。由以下计算可知：

引理2.2.6 （[HS20] 第1.9节）。 遵循*Gauß* [Gau08][2] 我们定义

$$\begin{aligned}
(n)_q &= \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + \cdots + q^{n-1} \\
(n)_q! &= (n)_q (n)_{q-1} \cdots (1)_q \\
\binom{n}{k}_q &= \frac{(n)_q!}{(k)_q!(n-k)_q!}
\end{aligned}$$

对于 $0 \leq k \leq n$，否则为零。这些概念具有以下性质

$$\begin{aligned}
(n)_q &= (k)_q + q^k (n)_q \\
(n)_q &= 0 \ \textit{for } q \ \textit{an } n\textit{-th root of unity}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}_q &= \binom{n}{n-k}_q \\
\binom{n}{k}_q &= \binom{n-1}{k-1}_q + q^k \binom{n-1}{k}_q = q^{n-k} \binom{n-1}{k-1}_q + \binom{n-1}{k}_q \\
\binom{n}{k}_q &\in \mathbb{Z}[q] \\
\binom{n}{k}_q &= 0 \ \textit{for } 0 \lneq k \lneq n \ \textit{and } q \ \textit{a primitive } n\textit{-th root of unity.}
\end{aligned}$$

对于 $q \to 1$，它们退化为自然数、阶乘和二项式系数。注意，$\binom{n}{k}_q$ 具有不同的组合解释，例如受限划分的个数以及域 $\mathbb{F}_q$中完全旗的个数。与我们的背景直接相关的是所有（k，$n-k$）-洗牌置换的量子对称化算子，见 [HS20] 例*1.9.6*。

[2]这项工作的最初用途是通过将其改写为关于$\sum_k (-1)^k \binom{p-1}{k}_q$ 的交错和，以确定 p次高斯和的符号，其中 q 是一个 p次单位根。

习题 2.2.7. 证明前一个关于 q-项式的引理。

习题 2.2.8。 证明对于编织 $x \otimes x \mapsto q(x \otimes x)$ 我们有

$$\Delta(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q (x^k \otimes x^{n-k})$$

高阶原始元的这一意外出现具有如下含义：通常，对于原始元 x，任何代数关系 $x^\ell = 0$ 以及与 Δ的相容性都会迫使所有低次幂（包括 x 本身）均为零。然而，如果 $\Delta(x^\ell)$ 中的所有混合项恰好像上面那样相互抵消，那么 $x^\ell = 0$ 就与 Δ相容。换言之，(x^ℓ) 是一个 Hopf 理想。反过来，任何分次 Hopf 代数商都具有一个按分次取的最小元素，而该元素必为原始元。

定义 2.2.9。 设 X 是编织幺半范畴中的任意对象 $\mathcal{C}$。那么 *Nichols* 代数 $\mathfrak{B}(X)$ 可以定义为 $\mathfrak{T}(X)$ 的一个 ***Hopf***代数商，它满足以下性质；至少在编织向量空间的情形下，这些性质由 [HS20] 定理 *7.1.2*证明彼此等价

(a) $\mathfrak{B}(X)$ 不存在任何在 X 上为单射的分次***Hopf***代数商。

(b) $\mathfrak{B}(X)$ 除了 X 外没有其他原始元。

(c) $\mathfrak{B}(X)$ 是根据定义*2.1.*中的量子对称化算子定义的代数。 *7.*

(d) 由 $X \otimes X^* \to 1$ 诱导的 ***Hopf***代数配对 $\mathfrak{T}(X) \otimes \mathfrak{T}(X^*) \to 1$ 可因子化为 $\mathfrak{B}(X) \otimes \mathfrak{B}(X^*)$ 上的非退化配对。这里，***Hopf*** 配对 $\langle -, - \rangle$ 是满足以下条件的线性映射 $H \otimes L \to \mathbb{K}$： $\langle a, bc \rangle$ 与插入 $\langle -, b \rangle \langle -, c \rangle$ 中的 a 的余乘法相关，参见 [*HS*20]定义 *3.3.7*。

(e) 所有斜导子 ∂_i 的核中唯一的元素是 *1*。这里， ∂_i 定义为$\partial_i(x_j) = \delta_{ij}$，且 $\partial_i(ab) = \partial_i(a)b + K_i(a)\partial_i(b)$，其中 K_i 是由$K_i(x_j) = q_{ij}$ 和 $K_i(ab) = K_i(a)K_i(b)$ 给出的自同构。参见 [*HS*20] 第 *7.3* 章。

当然，在一般的范畴中，原始元必须替换为等化子子对象。

Nichols 在研究新型双代数的实证研究中，实际上采用了最后一种定义；而倒数第二种定义则是 Nichols代数最初的刻画，出现在 Lusztig 的量子群著作中 [Lus10], 中称为 代数 $\mathfrak{f}$。

问题 3。应当严谨地证明，这些定义在一般的范畴论框架中是等价的。这将是一个合适的硕士课题。

我们来快速概述这些等价背后的思路：

- 等价（a） $\Leftrightarrow$（b）此前已说明其动机。一个方向是清楚的，因为原始元本身就是余理想，并且它生成一个 Hopf 理想。另一个方向，注意到对每个分次余理想而言，次数最小的元素 n 的余乘法位于次数（i, j）中，其中 $i+j=n$，并且由所假定的极小性，只有（$n, 0$）与（$0, n$）。于是余单位性表明该元素是原始元。

• 等价（b） $\Leftrightarrow$ （c）使用如下关于$\mathfrak{T}$（X）中余乘法的、用洗牌置换表示的显式公式，参见 [HS20] 定理 6.4.9：

$$\bigoplus_{n\geq 0} X^{\otimes n} \to \bigoplus_{i\geq 0} X^{\otimes i} \otimes \bigoplus_{j\geq 0} X^{\otimes j}$$

$$\Delta = \bigoplus_{i,j} \text{Ш}_{i,j}$$

这可通过简单归纳法证明：再乘上一个 $\Delta(x) = 1\otimes x + x\otimes 1$，并使用适当的编织即可。作为一个具体例子， $X^{\otimes n}$ 的 n 次余乘法在次数 $(1,\dots,1)$ 中的分量就是量子对称化算子。

• 等价关系 (c) $\Leftrightarrow(d)$ 显而易见，因为计算乘积的配对时，必须计算乘积的余乘法。

• 等价关系 (c) $\Leftrightarrow(e)$ 成立，因为斜导子本质上分别是次数为 $(1, n-1)$ 和 $(n-1,1)$ 的项。因此，它们在手算中实用且高效。

习题 2.2.10. 验证对角编织向量空间中 $\mathfrak{T}(X)$ 的余乘法公式在次数 $n = 4$ 时成立。

习题 2.2.11。 考虑 X 一个秩为 1 的编织向量空间的例子。回顾并补充说明，在此情况下，*Nichols* 代数的定义 *(a)-(c)* 都产生相同的结果。对于 *(e)*，证明

$$\partial x^n = (n)_q x^{n-1}$$

另外，找出第 k 阶导子的公式。

可选：对于 *(d)*，证明

$$((x^*)^n, x^m) = \delta_{n,m}[n]_q!$$

习题 2.2.12。 证明对于 $q_{ij}q_{ji} = 1$ ，编织交换子 $[x_i, x_j]_q$ 是一个原始元。

习题 2.2.13。 证明以下关于 x_i、x_j 在对角编织下的显式公式(q_{ij})，从而得到 *Rosso* 引理和量子 *Serre* 关系，参见 [HS20] 命题 *4.3.12*：

$$\underbrace{[x_i,[x_i,\cdots[x_i}_{n},x_j]_q]_q]_q = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k q_{ij}^k q_{ii}^{k(k-1)/2}\binom{n}{k}_q x_i^{n-k}x_j x_i^k$$

$$\Delta(\underbrace{[x_i,[x_i,\cdots[x_i}_{n},x_j]_q]_q]_q) = \underbrace{[x_i,[x_i,\cdots[x_i}_{n},x_j]_q]_q]_q \otimes 1 + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_q \prod_{l=k}^{n-1}(1-q_{ii}\,q_{ij}q_{ji})x_1^{n-k}\otimes \underbrace{[x_i,[x_i,\cdots[x_i}_{k},x_j]_q]_q]_q$$

并且对于更小的 n 非零，当且仅当

$$1 + q_{ii} + \cdots + q_{ii}^{n-1} = 0 \ \textit{or}\ q_{ii}^{n-1}q_{ij}q_{ji} = 1$$

第3章

根系

Nichols代数由一种略作推广的根系所控制，而这些根系仍然可以分类。

3.1 Nichols代数的根系

我们首先讨论作为附属于Nichols代数的组合数据的根系。我们将在接下来的小节中讨论公理化与分类（因此严格来说，顺序应该颠倒）。最后，我们讨论根系能告诉我们哪些关于Nichols代数结构的信息，例如PBW基；不过要到第3.4 节稍后，我们才能解释Nichols代数及其反射在范畴意义上的关联，并概述PBW 定理的证明方法。本节内容取自 [HS20] 第13章和第15章，讨论Hopf代数上的Yetter-Drinfeld 模范畴。

设 $\mathcal{C}$ 为一个编织幺半范畴，且 X 为一个可分解为简单直和项的对象

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$$

我们称 n 的 秩。对于一般的 Hopf 代数 H，在编织幺半范畴中，存在一个 H 在自身上的伴随作用，参见 [HS20] 第 3.7 节。原始元 x 的伴随作用与编织交换子 $\mathrm{ad}_x(y) = [x, y]_c$相同。

在 Nichols 代数 $\mathfrak{B}(X)$中，我们可以反复计算 X_i 在X_j 上的伴随作用，并观察它在哪一步终止。回想一下，对于李代数，我们将这些称为根串：

定义 3.1.1 ([HS20] 定义 13.4.2)。 *Cartan* 矩阵定义为

$$\mathsf{c}_{ij} := -\max\{n \in \mathbb{N} \mid \mathrm{ad}(X_i)^n(X_j) \neq 0\}, \quad \mathsf{c}_{ii} := 2$$

当然，最大值也可能永远无法取到。如果最大值可以取到，则称 X 是 i-有限的；下文中我们将假设这一点。

对于对角编织向量空间，根据 Rosso 引理，我们有一个显式公式2.1.15：

引理 3.1.2. 对于 $X,(q_{ij})$ 对角编织向量空间，其 *Cartan* 矩阵 is

$$\mathsf{c}_{ij} := -\max\{m \mid 1 + q_{ii} + \cdots + q_{ii}^{m-1} \neq 0 \ and \ q_{ii}^{m-1} q_{ij} q_{ji} \neq 1\}$$

换言之， $m = -\mathsf{c}_{ij}$ 是满足下述条件的最小数

$$[m+1]_{q_i i} = 0 \qquad \text{or} \qquad q_{ii}^m q_{ij} q_{ji} = 1$$

Truncation case **Cartan case**

请注意，这些条件仅取决于 q-图。当然，两种情况可能同时适用，例如 $u_q^+(\mathfrak{sl}_3)$ 在 $q^4 = 1$ 处。

有了 Cartan 矩阵的形式化定义，我们便可通过取根串中相应的最后一项，形式化地定义 X 的反射。Nichols代数之间存在微妙的关联，我们将在稍后讨论。

定义 3.1.3 ([HS20]第 13.4 节)**.** 我们定义 a 的反射

$$R_i(X) := \mathrm{ad}^{-\mathsf{c}_{i1}}(X_i)(X_1) \oplus \cdots \oplus X_k^* \oplus \mathrm{ad}^{-\mathsf{c}_{in}}(X_i)(X_n)$$

与之相伴的是形式空间 $\mathbb{Z}^n$ 上的一个加性对合，其基为 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$，定义如下

$$s_k : \alpha_j \mapsto \begin{cases} \alpha_j - \mathsf{c}_{kj}\alpha_k, & for\ j = k \\ -\alpha_k, & for\ j = k \end{cases}$$

在这一层次上，根系 $\Phi \subset \mathbb{Z}^n$ 是某个单根基（外尔房）下，经反复反射得到的所有基向量原像的集合。

问题 4. 一个重要的断言 [HS20] 在他们的设定中，推论 *13.4.3* 断言反射后的直和项是不可约的。这个证明应当在带对偶的范畴的一般情形下展开。

例 3.1.4 （对角情形）。 假设范畴是 $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}^n}^{\chi\,1}$，并且

$$X = \mathbb{K}_{\alpha_1} \oplus \cdots \mathbb{K}_{\alpha_n}$$

那么反射之后，我们确实有

$$R_k(X) = \mathbb{K}_{s_k(\alpha_1)} \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}_{s_k(\alpha_n)}$$

新的编织

$$R_k(q)_{ij} = \chi(s_k(\alpha_i), s_k(\alpha_j))$$

可由 (q_{ij}) 乘法扩张为一个双特征标 χ，满足 $\chi(\alpha_i,\alpha_j) = q_{ij}$。关于 $(R_k(q)^{ij})$ 用 (q_{ij}) 表示的显式一般公式见 [HS20] 引理 *15.1.8*。

一般来说， $R_i(X)$ 可能与 X大不相同。特别是，它可能具有不同的q-图，甚至不同的 Cartan 矩阵。这种现象在李超代数中早已为人所知。我们预计，采用下文讨论的反射理论来处理李超代数会顺畅得多；事实上，我们所说的广义根系早已在这些例子中有所预见，见 [Ser96]。

例 3.1.5。 假设 $\mathsf{c}_{12} = -1$。那么，反射会产生一个新的编织向量空间 $R_k(X)$，其基为 x_1^*, x_{12}，编织矩阵为

$$(R_1(q)_{ij}) = \begin{pmatrix} \chi(-\alpha_1, -\alpha_1) & \chi(-\alpha_1, \alpha_{12}) \\ \chi(\alpha_{12}, -\alpha_1) & \chi(\alpha_{12}, \alpha_{12}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{11}^{-1} q_{12}^{-1} \\ q_{11}^{-1} q_{21}^{-1} & q_{11} q_{12} q_{21} q_{22} \end{pmatrix}$$

请注意，计算新的 q-图所需的信息只有旧的 q-图。

Rosso 引理中有两个关于 $\mathsf{c}_{12} = -1$ 的条件。在这两种情况下，我们都进一步计算：

$$\textit{Cartan case:} \quad q_{11} q_{12} q_{21} = 1, \qquad (R_1(q)_{ij}) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix}$$

因此，编织可能会改变，但 q-图以及 *Cartan* 矩阵不会改变。

$$\textit{Truncation case:} \quad q_{11} = -1, \qquad (R_1(q)_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & -q_{12}^{-1} \\ -q_{21}^{-1} & -q_{12} q_{21} q_{22} \end{pmatrix}$$

因此，在这种情况下， q-图以及 *Cartan* 矩阵都可能发生变化。这与另一种情况不同：

第一种情况是一般情形的一部分

引理 3.1.6。 反射 R_i 其中 c_{ij} 对所有 j均属于 *Rosso* 引理中的 *Cartan* 情形，不会改变 q-图。

证明。 设 $q_{ii}^m q_{ij} q_{ji} = 1$

$$\begin{aligned} R_i(q)_{ij} R_i(q)_{ji} &= \chi(-\alpha_i, m\alpha_i + \alpha_j)\chi(-\alpha_i, m\alpha_i + \alpha_j) \\ &= q_{ii}^{-m} q_{ij}^{-1} \cdot q_{ii}^{-m} q_{ji}^{-1} 0 \\ &= q_{ij} q_{ji} \end{aligned}$$

现在设 $q_{ii}^{m'} q_{ij'} q_{j'i} = 1$ 和 $q_{ii}^{m''} q_{ij} q_{ji} = 1$，则

$$\begin{aligned} R_i(q)_{j'j''} R_i(q)_{j''j'} &= \chi(m'\alpha_i + \alpha_{j'}, m''\alpha_i + \alpha_{j''})\chi(m''\alpha_i + \alpha_{j''}, m'\alpha_i + \alpha_{j'}) \\ &= q_{ii}^{m'm''} q_{ij'}^{m'} q_{j''i}^{m''} q_{j',j''} \cdot q_{ii}^{m''m'} q_{ij''}^{m''} q_{j'i}^{m'} q_{j'',j'} \\ &= q_{j',j''} q_{j'',j'} \end{aligned}$$

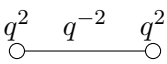
□

另一方面，对于 $c_{12} = -m$ 的截断情形，新的编织矩阵为

$$(R_1(q)_{ij}) = \begin{pmatrix} \chi(-\alpha_1, -\alpha_1) & \chi(-\alpha_1, m\alpha_1 + \alpha_2) \\ \chi(m\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1) & \chi(m\alpha_1 + \alpha_2, m\alpha_1 + \alpha_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{11}^{-m} q_{12}^{-1} \\ q_{11}^{-m} q_{21}^{-1} & q_{11}^{(m^2)} (q_{12} q_{21})^m q_{22} \end{pmatrix}$$

现在我们给出两个显式例子，用以说明 $c_{12} = -1$ 的两种情形：

例 3.1.7 ($\mathfrak{sl}_3$)**.** 考虑一个秩为2 的对角编织向量空间，它具有某个编织矩阵(q_{ij}) 以及如下 q-图



对于某个复数 $q \neq 0$。*Cartan* 矩阵可由 *Rosso* 引理计算得到*3.1.2*，*Cartan* 情形：

$$\mathsf{c}_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

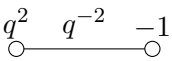
对于两个反射， q图不变。对于与 $q_{12} = q_{21} = q^{-1}$相关的通常选择 $\mathfrak{sl}_3$ 在例 *2.1.17* 中，甚至编织矩阵 (q_{ij}) 也不发生变化。根系正如预期，是 $\mathfrak{sl}_3$ 类型

$$\Phi^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}\}$$

其中 $\alpha_{12} = \alpha_1 + \alpha_2$。我们继续将此根系称为 A_2。

下面这个非常相似的例子与李超代数 $\mathfrak{sl}(2|1)$ 有关：

例 3.1.8 ($\mathfrak{sl}(2|1)$)。 考虑一个秩为 2 的对角编织向量空间，其编织矩阵为(q_{ij}) ，具有 q-图



对于某个复数 $q \neq 0$。*Cartan* 矩阵与前一个例子中的相同

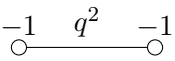
$$\mathsf{c}_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

其中第一项 -1 来自 *Rosso* 引理中的截断情形，第二项 -1 则来自 $q_{22} = -1$ （费米的）所对应的第一种情形。

对第一个直和项的反射已在前一个例子中描述过， q-图不变。然而，对第二个直和项的反射根据前面的公式得到

$$(R_2(q_{ij})) = \begin{pmatrix} -1 & -q_{12}^{-1} \\ -q_{21}^{-1} & -1 \end{pmatrix}$$

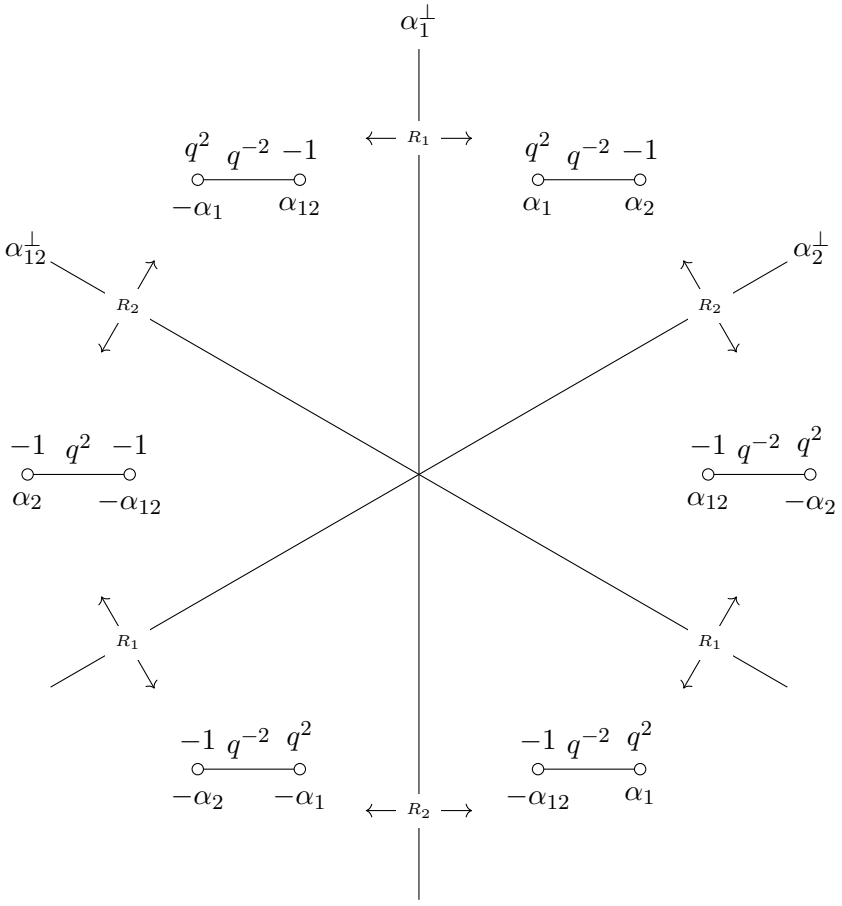
以及一个新的 q-图



它再次具有相同的 *Cartan* 矩阵，但现在两次都是引理 *3.1.2* 中的第二种情形。因此根系再次为 A_2

$$\Phi^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}\}$$

现在我们更明确地给出所有反射，上面的计算对此已经足够。注意，这些直线现在表示与 A_2 中的根正交的超平面，而这些图被绘制在 *Weyl* 室中，它们对应于由相邻超平面给出的单根选取。



我们可以通过为每个根标注其自编织，进一步理解这一点

$$\chi(\alpha_1, \alpha_1) = q^2, \qquad \chi(\alpha_2, \alpha_2) = \chi(\alpha_{12}, \alpha_{12}) = -1$$

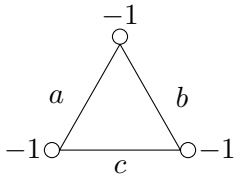
这实际上也表明了对该根进行反射时适用 *Rosso* 引理的哪种情形。

在这种情况下，所有外尔室都具有相同的 *Cartan* 矩阵（否则它就不是根系 A_2），但从 q-图来看，外尔室有两种不同的类型：一种有两个费米子单根，另一种有一个费米子单根和一个q^2 单根。

下面的例子表明，甚至 Cartan 矩阵也可能发生变化。它与李超代数以及 $D(2|1, \alpha)$ 有关：

例 3.1.9 $(D(2|1,\alpha))$。 考虑对角编织向量空间 $X = x_1\mathbb{C} +$

$x_2\mathbb{C}+x_3\mathbb{C}$ 对于属于以下 q-图示的某个编织矩阵 (q_{ij})

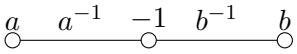


对于 $abc=1$。每条边都是前一个例子的副本。*Cartan* 矩阵为

$$\left(\mathsf{c}_{ij}^{\mathrm{I}}\right)=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}.$$

我们计算由 x_{12},x_2^*,x_{23} 张成的反射 $R_2(X)$ 。与 α_2 相邻的 q-图中的所有元素都可以从前一个例子中读出，以下情况除外，我们现在来计算它们

$$\begin{aligned}R_2(q)_{13}R_2(q)_{31}&=\chi(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3)\chi(\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2)\\&=(q_{12}q_{13}q_{22}q_{23})(q_{21}q_{22}q_{31}q_{32})\\&=(q_{22})^2(q_{12}q_{21})(q_{13}q_{31})(q_{23}q_{32})\\&=(-1)^2abc=1\end{aligned}$$



请注意，条件 $abc=1$ 正是在这里起到了关键作用。因此，新的 *Cartan* 矩阵为

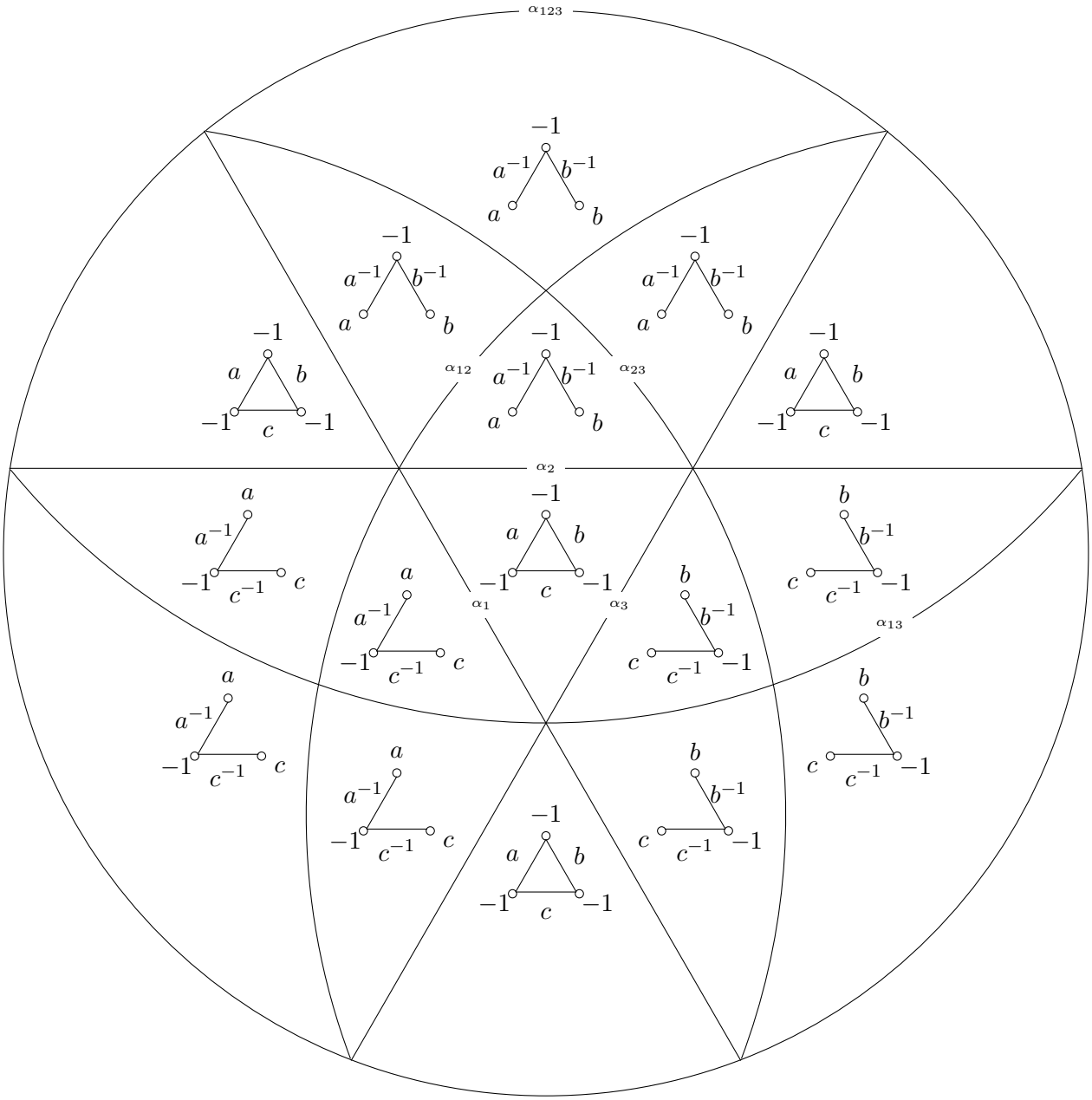
$$\left(\mathsf{c}_{ij}^{\mathrm{II}}\right)=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}.$$

尽管这个特定的 *Cartan* 矩阵属于 A_3 型，但根系似乎有所不同：对于第一个 q-图，次数 $\alpha_1+\alpha_3$ 中显然有一个非平凡元素 x_{13} （一个明确的编织交换子）。换句话说，有一个根 $\alpha_1+\alpha_3$ ，其原像为 $s_1^{-1}(\alpha_3)=s_3^{-2}(\alpha_1)$。对 α_2 进行反射后，它在新基中为

$$\alpha_1'+2\alpha_2'+\alpha_3'=(\alpha_1+\alpha_2)+2(-\alpha_2)+(\alpha_2+\alpha_3)=\alpha_1+\alpha_3$$

而这显然不是通常 A_2 根系中的根。直观地说（我们将在下文精确说明），这意味着对于第二个 q-图，我们预期会有一个非零的迭代交换子$[x_1',[x_3'[x_1',x_2']]]$。

现在，我们计算所有反射，并将它们排列在下图中，以供后续使用。每条线表示关于一个超平面 $\alpha^\perp$的反射，如前面的秩 2 示例所示。请注意，直线相交处显示的是由三个反射中的两个生成的内容，这只取决于该单根子集对应的 q 子图，尤其取决于它们之间的2×2 *Cartan* 矩阵。在本例中，出现过的秩 2 子图只有前面出现过的那些，它们的 *Cartan* 矩阵以及相应的根系类型为 $A_1\times A_1$ 或 A_2。



请注意，最外圆上的反射映射到图中的对径侧。因此，整个根系共有七个正根。如果 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 是第一个 q 图中的单根，那么以这组基表示的正根为

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{13}, \alpha_{123}\}$$

对 α_2 进行反射后，这些根映射为

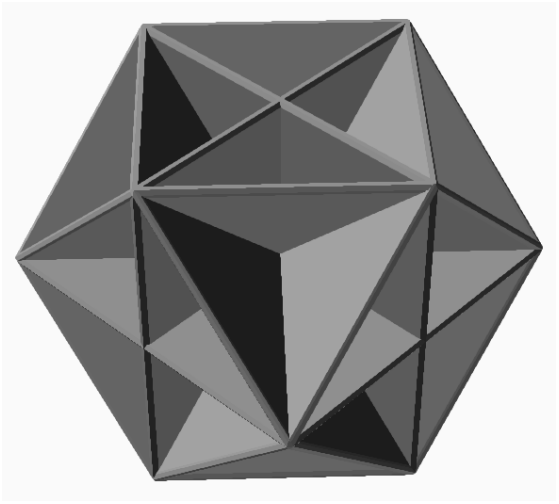
$$\{\alpha_{12}, -\alpha_2, \alpha_{23}, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_{123}, \alpha_{13}\}$$

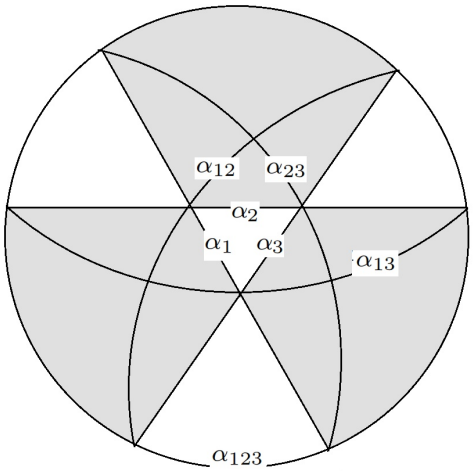
在新基中，这是

$$\{\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \alpha_{12}', \alpha_{23}', \alpha_{123}', \alpha_{1223}'\}$$

因此，尽管它们在“整体上”是相同的超平面，但在不同的基下，它们对应的是不同的一组七个坐标元组。

从几何上看，这是与立方八面体（一种柏拉图立体）相关的超平面排列。我们将其画成仿射图或射影图，也就是我们上面已经画过的那幅图：





有 7 个通过原点的超平面（或射影直线）与 7个根正交。根据自编织（因而实际上根据它们所导向的 *Rosso* 引理情形），根有两种类型：

$$\chi(\alpha_1,\alpha_1)=\chi(\alpha_2,\alpha_2)=\chi(\alpha_3,\alpha_3)=\chi(\alpha_{123},\alpha_{123})=-1$$

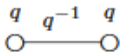
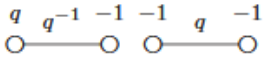
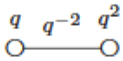
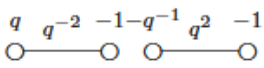
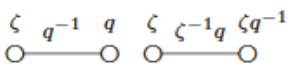
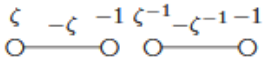
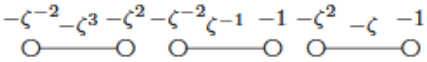
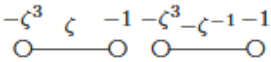
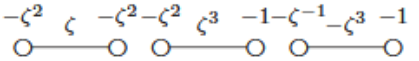
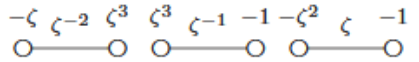
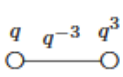
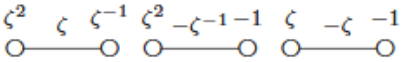
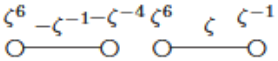
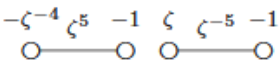
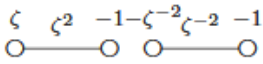
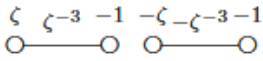
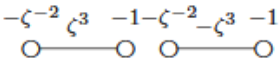
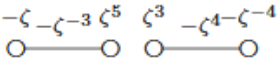
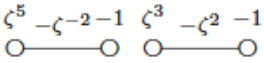
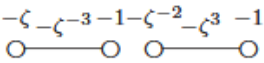
$$\chi(\alpha_{12},\alpha_{12})=a,\ \chi(\alpha_{23},\alpha_{23})=b,\ \chi(\alpha_{13},\alpha_{13})=c$$

有16 个三角形，对应于 *Weyl* 室，这些 *Weyl* 室对应于由三个相邻超平面（带定向符号）给出的16组简单根基。三角形有两种类型：等边三角形（白色）对应于 *Cartan* 矩阵 *I*，直角三角形（灰色）对应于 *Cartan* 矩阵 *II*。

习题 3.1.10. 在上面的例子中，试着通过施加反射，用不同的 q-图重现该图，并在某些情形下像秩 2 的例子那样，在图下方写出简单根基。给出一条使根 α_{123} 可见的反射链。

习题 3.1.11. 为 $\mathfrak{sl}_3$ 画出根系 A_3 的同一幅图（超平面排列的图示请参见预备知识）。

Heckenberger 已在 [Hec09] 中对特征零域上的所有对角型编织向量空间进行了分类，这些空间所关联的根系均为有限根系。在此过程中，他定义了反射、算术根系等；正如我们稍后将看到的，这也是 Nichols 代数为有限维的必要条件。它们是所有有限根系分类的一个子集，我们稍后会讨论这一分类。我们给出他对秩 2 的列表，参见 [HS20]，修订后的证明见第 15.2 节。

1		$q, r \in k^*$	T1
2		$q \in k^* \setminus \{1\}$	T2
3		$q \in k^* \setminus \{-1, 1\}$	T2 T2
4		$q \in k^* \setminus \{-1, 1\}$	T3
5		$q \in k^* \setminus \{-1, 1\}$, $q \notin R_4$	T3 T3
6		$\zeta \in R_3$, $q \in k^* \setminus \{1, \zeta, \zeta^2\}$	T3 T3
7		$\zeta \in R_3$	T3 T3
8		$\zeta \in R_{12}$	T4 T5 T5
			T7 T7
9		$\zeta \in R_{12}$	T4 T5 T7
10		$\zeta \in R_9$	T6 T9 T14
11		$q \in k^* \setminus \{-1, 1\}$, $q \notin R_3$	T8
12		$\zeta \in R_8$	T8 T8 T8
13		$\zeta \in R_{24}$	T10 T13
			T17 T21
14		$\zeta \in R_5$	T11 T16
15		$\zeta \in R_{20}$	T11 T11
			T16 T16
16		$\zeta \in R_{15}$	T12 T15
			T18 T20
17		$\zeta \in R_7$	T19 T22

第 1、2、4、12 行对应李代数 $A_1 \times A_1$，A_2，B_2，G_2；第 3、5 行对应李超代数 $A(1, 0)$ $B(1, 1)$。最后一列表示二叉树，用于描述第 3.3 节中的不同外尔房。

有限特征域上的有限维 Nichols 代数已在 [WH15、Wan17、LYQW24] 中得到分类。其过程颇具启发性：第一篇论文采用新方法，手工计算了所有秩 2 Nichols 代数；第二篇论文则利用对可能出现的 Weyl 群胚的先验知识，计算了秩 3 Nichols 代数；随后再处理更高秩的情形。

3.2 广义根系的公理化

在给出 Weyl 群胚和根系的定义之前， [HS20] 我们先给出相应的几何定义，该定义在事后得到发展： [Cun11], :

3.2.1 超平面排列

如预备知识中所述，通常意义下的根系是某个欧几里得向量空间 $\mathbb{R}^r$ 中的超平面排列，以及对这些超平面所选取的一组法向量（称为根）；该根系在这些超平面上的反射作用下保持不变，并满足整性条件。所有超平面补集的连通分支称为 Weyl 室，而任意固定 Weyl 室各个壁的法向量构成向量空间的一组基，即一组单根。反射在 Weyl 室上具有传递作用，并且相对于每一组固定的单根，每个根都具有整数系数。

在一种称为晶体学排列的广义情形中，我们舍弃环境向量空间的欧几里得内积（因此根是线性函数的选取），但仍要求每个根相对于每组单根都具有整数系数。

定义 3.2.1 (晶体学超平面排列， [Cun11] 定义 2.3)。 设$V = \mathbb{R}^n$ 并取一个子集 $\Phi \subset V^*$ 称为根集。与之对应的超平面为$H_\alpha = \ker(\alpha)$ 对任意 $\pm\alpha \in V^*$ 满足 α 的元素，选取一个法向量。假设

- 单纯性： $V \setminus \bigcup_{\pm\alpha\in R} H_\alpha$ 是单纯锥的并，即由这些超平面的 n 所界定。我们称这些单形为 a （*Weyl*）室，全体室的集合记为A[1]。对于每个室，我们将其 n 相邻超平面的法向量记为α_1^a，…， α_n^a。这些向量构成 V的一组基。

- 约化性：对于任意根 α ，其在 R 中的倍数只有 $\pm\alpha$。这只是为了简化表述。
- 晶体学性：对于任意 $a \in A$， $\Phi \subset \alpha_1^a\mathbb{Z} \oplus \cdots \alpha_n^a\mathbb{Z}$ 。

对于一个晶体学排列，我们可以附加以下内容

- 我们为每个室 $a \in A$定义一个 Cartan 矩阵 c_{ij}^a

$$\mathsf{c}_{ii} = 2, \qquad \mathsf{c}_{ij} = -\max_m\{m\alpha_i + \alpha_j \in \Phi\}\ i \neq j$$

- 我们为每个 $a \in A$ 和 $i = 1, \ldots, n$定义反射

$$s_i : \alpha_i^a \mapsto \begin{cases} \alpha_j^a - \mathsf{c}_{ij}\alpha_i^a, & \text{for } i = j \\ -\alpha_i^a, & \text{for } i = j \end{cases}$$

这些是 V的线性对合。此外，它们保持超平面集合不变，并将 Φ映射到其自身。

- 特别地，这会产生一个双射 $\rho_i : A \to A$。

[1]在引用的文献中，室记作 $K \in \mathcal{K}$。

3.2.2 嘉当图与 Weyl 群胚

与通常的根系不同，用不同的简单根基表示的所有根所构成的集合，未必总是给出相同的坐标元组集合。因此，这些反射生成一个 Weyl 群胚，其对象是不同类型的 Weyl 室，每个对象都附有自己的 Cartan 矩阵 c_{ij}^{a}，并由一个 Dynkin 图表示。

这类数据已被公理化并分类，称为嘉当图 [AHS10、Hec06、HY08], ，我们将在下文讨论。事实上，这种现象对于李超代数而言早已为人熟知：不同的单根集具有不同的奇偶性；在极端情况下，例如 $D(2,\ 1;\ \alpha)$，甚至会出现不同的 Dynkin 图，参见例3.1.9。

以下论述遵循 [HS20]第 9、10 和 15 章，更多细节可参见其中内容：

定义 3.2.2(广义嘉当矩阵)。令 $I:=\{1,\ldots,r\}$，其中 r 称为秩，$\{\alpha_i \,|\, i\in I\}$ 是 $\mathbb{Z}^I$的标准基。广义嘉当矩阵$\mathsf{C}=(\mathsf{c}^{ij})_{i,\ j\in I}$ 是 $\mathbb{Z}^{I\times I}$ 中的一个矩阵，满足

（*M1*）$\mathsf{c}_{ii}=2$ 且$\mathsf{c}_{jk}\leq 0$ 对所有 i、j、$k\in I$ 满足 $j\neq k$；（*M2*）若 i、$j\in I$ 且$\mathsf{c}_{ij}=0$，则$\mathsf{c}_{ji}=0$。

我们也可以用Dynkin 图来等价地编码这些数据，其中每条边都标记为 $(c_{ij},\ c_{ji})$ 。

在下述定义中，我们将 A 视为一个外尔室集合。

定义 3.2.3 （嘉当图）。设 A 为非空集合，$\rho_i\colon\ A\to A$ 是对所有 $i\in I$定义的映射，并且对所有 $a\in A$，$\mathsf{C}^a=(\mathsf{c}^a_{jk})_{j,\ k\in I}$ 是 $\mathbb{Z}^{I\times I}$ 中的一个广义嘉当矩阵。四元组

$$\mathcal{C}=\mathcal{C}\big(I,A,(\rho_i)_{i\in I},(\mathsf{C}^a)_{a\in A}\big)$$

称为嘉当图，如果

（*C1*）对所有 $i\in I$，$\rho_i^2=$恒等；（*C2*）对所有 $a\in A$ 以及 i、$j\in I$，$\mathsf{c}^a_{ij}=\mathsf{c}^{\rho_i\,(a)\ ij}$。

定义 3.2.4 （Weyl 群胚）。设 $\mathcal{C}=\mathcal{C}\big(I,A,(\rho_i)_{i\in I},(\mathsf{C}^a)_{a\in A}\big)$ 为一个嘉当图。对所有的 $i\in I$ 和 $a\in A$，定义 $s_i^a\in\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^I)$ 为

$$s_i^a(\alpha_j)=\alpha_j-\mathsf{c}^a_{ij}\alpha_i\qquad for\ all\ j\in I.$$

$\mathcal{C}$ 的 *Weyl* 群胚是范畴 $\mathcal{W}(\mathcal{C})$，满足 $\mathrm{Ob}(\mathcal{W}(\mathcal{C}))=A$，其态射为映射 s_i^a（其中 $i\in I$ 和 $a\in A$）的复合，这里 s_i^a 被视为 $\mathrm{Hom}(a,\rho_i(a))$ 中的一个元素。I 的基数称为 $\mathcal{W}(\mathcal{C})$ 的秩。

嘉当图公理化地描述了一组 Cartan 矩阵，每个外尔房（或每种外尔房类型）$a\in A$各对应一个，以及作用于外尔房 a内单根 α_i 的反射 s_i^a；这些反射是空间 $\mathbb{Z}^I$ 之间的线性映射，而该空间分别与 a 及外尔房

反射后的室 $\rho_i(a)$。在此背景下存在一个抽象的考克斯特群胚概念，参见 [HS20]第 9.4 章。

设 $\mathcal{C}$ 为一个嘉当图。对所有 $a \in A$，将 a 处的实根集合定义为

$$(R^{\mathrm{re}})^a = \left\{ s_{i_1} \cdots s_{i_k}(\alpha_j) \,|\, k \in \mathbb{N}_0,\, i_1, \ldots, i_k, j \in I \right\} \subseteq \mathbb{Z}^I.$$

若 $\alpha \in \mathbb{N}_0^I$，则称实根 $\alpha \in (R^{\mathrm{re}})^a$ 为正。

定义3.2.5（根系）。设 $\mathcal{C} = \mathcal{C}\big(I、A、(\rho_i)_{i\in I}、(\mathsf{C}^a)_{a\in A}\big)$ 为一个嘉当图。对所有 $a \in A$，令 $R^a \subseteq \mathbb{Z}^I$，并对所有 $i、j \in I$和 $a \in A$定义$m_{i,j}^a = |R^a \cap (\mathbb{N}_0\alpha_i + \mathbb{N}_0\alpha_j)|$。我们称

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{C}, (R^a)_{a\in A})$$

是类型为 $\mathcal{C}$的根系，如果它满足以下公理。

(R1) $R^a = R_+^a \cup -R_+^a$，其中 $R_+^a = R^a \cap \mathbb{N}_0^I$，对所有 $a \in A$成立。***(R2)*** 对所有 $i \in I、a \in A$，$R^a \cap \mathbb{Z}\alpha_i = \{\alpha_i, -\alpha_i\}$。***(R3)*** 对所有 $i \in I、a \in A$，$s_i^a(R^a) = R^{\rho_i(a)}$。***(R4)*** 若 $i、j \in I$和 $a \in A$使得 $i \neq j$且$m_{i,j}^a$有限，则 $(\rho_i\rho_j)^{m_{i,j}^a}(a) = a$。

注意，(R3) 表示本质上只有一个 根集 Φ，只是在 $\mathbb{Z}^I$ 中用不同的元组表示。注意，(R4) 推广了反射群的几何命题。

引理 3.2.6. 设 $\mathcal{C}$ 是一个嘉当图，$\mathcal{R}$ 是类型为 $\mathcal{C}$ 的根系。设 $a \in A$。则

$$\mathsf{c}_{ij}^a = -\max\left\{ m \in \mathbb{N}_0 \,|\, \alpha_j + m\alpha_i \in R_+^a \right\}.$$

对于根 α，$\beta \in R^a$，我们可以定义一个与 a 无关的嘉当矩阵条目

$$-\mathsf{c}_{\alpha,\beta} = \max\{ m \in \mathbb{N}_0 \,|\, \alpha + m\beta \in R^+ \}.$$

根系 $\mathcal{R}$ 称为 有限的 当且仅当对所有 $a \in A$ 集合 R^a 都是有限的。根据 [CH15]，若 $\mathcal{R}$是类型为 $\mathcal{C}$ 的有限根系，则 $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\mathrm{re}}$，因此 $\mathcal{R}^{\mathrm{re}}$ 在此情况下是类型为 $\mathcal{C}$ 的根系。

例 3.2.7 (嘉当型)。设 $\mathfrak{g}$ 是一个半单有限维复李代数。众所周知，它由其根系（即某个有限 *Weyl* 群 W 的根系）唯一确定（在同构意义下）。对应的嘉当图恰有一个对象 a，而 C^a 是 W 的 *Cartan* 矩阵。集合 R^a 是 W 的根系。或者，我们可以考虑一个嘉当图，其中每个外尔房对应一个对象 a，且所有对象附带的 *Cartan* 矩阵都相同。

问题 5。对于无限根系，类似于仿射李代数，其中存在虚根，而我们对这些虚根知之甚少。参见 [HS20]。

证明见 [Cun11] 定理 1.1：本节引言中提到的晶体学排列与实根集有限的连通单连通 Cartan 图之间存在双射。

定理3.2.8 （[Cun11]定理5.4）。 有限根系与晶体学排列之间存在等价关系。

有限 Weyl 群胚和根系在 [CH15]中得到分类。

定理3.2.9。以下是所有不可约晶体学排列：

a）秩二情形由凸 n边形的非相交对角线三角剖分来参数化。*b*）对于每个秩 $r > 2$，类型为 A_r、 B_r、 C_r 和 D_r的排列，以及另一系列$r-1$ 排列（李超代数中熟知且包含例*3.1.9*）。*c*）另有74 种“偶然”排列，秩为 r、 $3 \leq r \leq 8$。

备注3.2.10。如果根系不是有限的，那么几何形态可能会有所不同。一个值得注意的类别是仿射根系，在这种情况下，增加外尔室并不会形成球面图形，而是形成整个空间的镶嵌。研究这类 [CMW19]*Nichols*代数将会非常有趣。

3.3 秩 2 的分类

我们将更详细地描述秩 2 的连通根系，它们是更高秩情形的构建基石；原始资料见 [CH11] 和 [HS20] 第 9.1 和 9.2 节。请注意，上表中只有有限多个此类根系会作为秩 2 对角编织向量空间的根系出现：

根据公理 (C_2)，具有有限多个对象的任一嘉当图必定具有以下形式

$$\cdots a_{2n} \overset{\rho_2}{\longleftrightarrow} a_1 \overset{\rho_1}{\longleftrightarrow} a_2 \overset{\rho_2}{\longleftrightarrow} a_3 \overset{\rho_1}{\longleftrightarrow} \cdots$$

$$\mathsf{c}^{a_1} = \begin{pmatrix} 2 & -c_1 \\ -c_n & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathsf{c}^{a_2} = \begin{pmatrix} 2 & -c_1 \\ -c_2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathsf{c}^{a_3} = \begin{pmatrix} 2 & -c_3 \\ -c_2 & 2 \end{pmatrix}$$

这里，$(c_1, \dots, c_n)$ 是某个整数序列，嘉当矩阵以室 $A = \{a_1, \dots, a_{2n}\}$ 和 $a_{2n+1} = a_1$ 为索引（以避免奇偶性问题）。

现在我们讨论序列 $(c_1, \dots, c_n)$ 为定义嘉当图必须满足的技术性质：定义 $\eta(x) = \left(\begin{smallmatrix} x & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$，记 $\mathcal{A}$为满足 $\eta(c_1) \cdots \eta(c_n) = -\mathrm{id}$ 的整数序列 $(c_1, \dots, c_n)$ 的集合，并考虑 $\mathcal{A}^+$，即满足 $c_i \geq 1$ 且 $\eta(c_1) \cdots \eta(c_i)$ 第一列中的元素为正的那些序列所组成的子集。

通过平移和反射可以定义一个等价关系。 [CH09] 定理 5.5 证明了，中的所有序列都 $\mathcal{A}^+$ 由 (1 、 1 、 1) 出发，通过以下操作逐步将长度增加 1 得到：

$$I : (\dots, c_i, c_{i+1}, \dots) \longmapsto (\dots, c_i + 1, 1, c_{i+1} + 1, \dots)$$

此外，定理 3.4 证明了，这些序列与一个具有 n 条边、在顶点 i 处附加了 c_i 个三角形的多边形的三角剖分构成双射，因此 (1、1、1) 对应于三角形本身，而迭代则对应于在边 (i、$i+1$) 上附加一个三角形。

作为另一种刻画，这些三角剖分对应于二叉树：取 n边形的一条边（相应地，取一个室）以及与之相邻的第一个三角形，在这条边上放置一个节点，并向另外两条边上的节点引出两条分支。接着沿相邻三角形迭代进行，构造出一棵二叉树。我们指出，这些树是 Nichols 代数根系最早出现的形式，在时间上最为古老，并且最贴近实际的交换子结构；该结构可追溯至 Kharchenko，见 [Hec07]第 5 节。图（A1）展示了编号为 T1-T22 的树，它们对应的 Nichols 代数见图 A1。

已在 [CH09] 定理 5.5 中证明，对于 $\mathcal{A}^+$ 中的每个序列，都存在唯一的根系，主要结果为

定理 3.3.1。 每个不可约有限根系均具有上述形式，且对应于一个唯一的序列$(c_1, \dots, c_n)$ $\in \mathcal{A}^+$ （在等价意义下），其中 n 是正根的数量。

所有实根的集合按如下方式得到，称为一个 $\mathcal{F}$-序列：

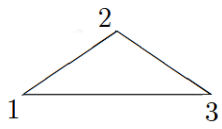
$$\Phi^+(1,1,1) = \{(1,0),(1,1),(0,1)\}$$

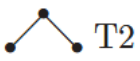
$$\Phi^+(I(v_1,\dots,v_n)) = (v_1,\dots,v_i, v_i+v_{i+1}, v_{i+1},\dots,v_n)$$

（它们按各项之商递增排序。）它们与连分数及簇代数存在关系，此处不予讨论。

例 3.3.2. 对于较小的 n，存在唯一序列，因而存在唯一的根系

- $n = 3$ 根：序列 (1，1，1) 对应于 3 边形为单个三角形以及如下最基本的二叉树：

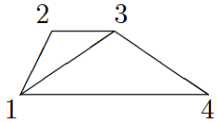


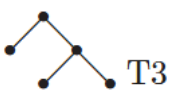


所有 *Cartan* 矩阵均相等，这就是根系 A_2。正根的集合为

$$\{(1,0),(1,1),(0,1)\}$$

- $n = 4$ 根：序列 (1，2，1，2) 或等价地 (2，1，2，1) 对应三角剖分和二叉树

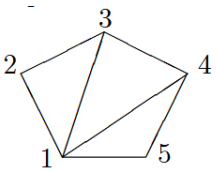




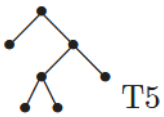
所有 *Cartan* 矩阵都相等。这是根系 $B_2 = C_2$。正根集合为

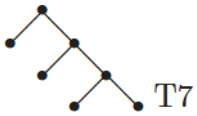
$$\{(0,1),(1,2),(1,1),(1,0)\}$$

- $n = 5$ 根：序列 (3、1、2、2、1) 对应于三角剖分和二叉树









取决于起始边。不同基底中的正根集合为

$$\{(0,1),(1,3),(1,2),(1,1),(1,0)\}$$

$$\{(0,1),(1,1),(2,1),(3,1),(1,0)\}$$

$$\{(0,1),(1,2),(2,3),(1,1),(1,0)\}$$

$$\{(0,1),(1,2),(1,1),(2,1),(1,0)\}$$

$$\{(0,1),(1,1),(3,2),(2,1),(1,0)\}$$

在具有 $c_{ij} = -3$ 的室中，这看起来像 G_2 根系，但缺少不明显的根 $3\alpha_1 + 2\alpha_2$，而在其他基底中，图示也相应地有所不同。

- $n = 6$ 根：共有 3 种不同的三角剖分，其中一种对应于 G_2，一种对应于第 *10* 行的对角 *Nichols* 代数（其树为 *T6*、*T9*、*T14*），还有一种不对应于对角 *Nichols* 代数。

我们更详细地考察根系 $n = 5$：首先从初始根集出发，读出 *Cartan* 矩阵，并验证它就是由序列 (3,1, 2,2, 1) 得到的矩阵。然后，我们选取给定的根作为新的单根 (1, 0),(0, 1)，在下一行进行反射，并将其余根写成这些根的线性组合，以此计算它们的像（注意，在一般的向量空间中，对坐标元组的作用与对元素的作用互为伴随），再按商递增顺序排序：

$$
\begin{array}{lll}
\{(0,1),(1,3),(1,2),(1,1),(1,0)\} & \mathsf{c}=\left(\begin{smallmatrix}2&-1\\-3&2\end{smallmatrix}\right) & \rho_2:(1,3),-(0,1)\mapsto(1,0),(0,1)\\
\updownarrow\rho_2 & & \\
\{(0,1),(1,3),(1,2),(1,1),(1,0)\} & \mathsf{c}=\left(\begin{smallmatrix}2&-1\\-3&2\end{smallmatrix}\right) & \rho_1:-(1,0),(1,1)\mapsto(1,0),(0,1)\\
\updownarrow\rho_1 & & \\
\{(0,1),(1,2),(2,3),(1,1),(1,0)\} & \mathsf{c}=\left(\begin{smallmatrix}2&-1\\-2&2\end{smallmatrix}\right) & \rho_2:(1,2),-(0,1)\mapsto(1,0),(0,1)\\
\updownarrow\rho_2 & & \\
\{(0,1),(1,2),(1,1),(2,1),(1,0)\} & \mathsf{c}=\left(\begin{smallmatrix}2&-2\\-2&2\end{smallmatrix}\right) & \rho_1:-(1,0),(2,1)\mapsto(1,0),(0,1)\\
\updownarrow\rho_1 & & \\
\{(0,1),(1,1),(3,2),(2,1),(1,0)\} & \mathsf{c}=\left(\begin{smallmatrix}2&-2\\-1&2\end{smallmatrix}\right) & \rho_2:(1,1),-(0,1)\mapsto(1,0),(0,1)\\
\updownarrow\rho_2 & & \\
\{(0,1),(1,1),(2,1),(3,1),(1,0)\} & \mathsf{c}=\left(\begin{smallmatrix}2&-3\\-1&2\end{smallmatrix}\right) & \rho_1:-(1,0),(3,1)\mapsto(1,0),(0,1)\\
\updownarrow\rho_1 & & \\
\cdots & &
\end{array}
$$

最后一行是将第一行中的 1,2 互换而得，因此该模式再次重复，总共有 $5+5$ 行。

练习 3.3.3. 明确验证 q-图（*Heckenberger* 的列表第 *8* 行，图 *3.1*）具有上述含 5 个根的根系：计算 *Rossos* 引理为这些 q-图关联的 *Cartan* 矩阵。然后对部分或全部反射进行验证，q-图的变化是否与上述 *Cartan* 矩阵的变化相对应。

3.4 反射函子与 PBW 基

到目前为止，反射是一种定义新编织对象 $R_i(X)$ 的过程，而根系则是附加在 X 及其所有反射上的组合数据。显然，要使这有所用途，我们需要建立 Nichols 代数 $\mathfrak{B}(X)$ 与 $\mathfrak{B}(R_i(X))$ 之间的关系，并从根系中获取有关 Nichols 代数的信息。

现在我们概述这方面的两个主要结果。我们要到第 5.2 节才会讨论证明。

引理 3.4.1 ([HS20] 第 13.5 节)。*Nichols* 代数 $\mathfrak{B}(X)$ 和 $\mathfrak{B}(R_i(X))$ 通过一种我们称为 部分对偶化 的范畴运算相关联。具体而言：

- 如果它们是有限维的，那么它们的维数相同。（但一般而言，它们并不同构，且分次维数也不相同）。
- 它们的表示范畴通过一个可逆双模范畴相关联。
- 它们的 *Drinfeld* 双同构，其 *Drinfeld* 中心等价。

因此，可以将 Weyl 群胚中的最长元素写成约化表达式来证明：

定理 3.4.2 ([AHS10], [HS20]第 14.2 节)。 在本书的设定中（假设*1*），设 $X = \bigoplus_{i\in I} X_i$ 是一个半单对象，且 X_i 是简单对象。假设 *Nichols* 代数$\mathfrak{B}(X)$ 存在所有反射（即对于任意 i，它都是有限的，且反射后仍然如此），并且根集 Φ^+ 是有限的。

于是存在一个对象（而非代数）的同构

$$\mathfrak{N}(X) \cong \bigotimes_{\alpha\in\Phi^+} \mathfrak{N}(X_\alpha)$$

其中， $X_{\alpha_i} = X_i$ 以及一般情况下的 X_α 称为根空间。

如果 $X_\alpha = x_\alpha\mathbb{C}$ 是一维的，那么这就是 x_α中有序单项式构成的 Poincaré-Birkhoff-Witt 型基，它们是由 Lusztig 定义的根向量。不过请注意，根向量 x_α 一般并非简单地根据 α的加性分解定义为迭代换位子，而是取决于最长元的一个约化表达式，见 [Lus10、Jan96]。

例 3.4.3 ($\mathfrak{sl}(2|1)$)。 考虑编织矩阵$(q_{ij}) = \begin{pmatrix} q^2 & q^{-1}q^{-1} \\ & -1 \end{pmatrix}$，其中 q 是一个原始的 ℓ 次单位根。于是我们有

$$x_1, x_2, x_{12} \quad with\ self\ braidings \quad q_{11} = q^2, q_{22} = -1, q_{11}q_{12}q_{21}q_{22} = -1$$

Nichols 代数由 x_1、x_2 生成，满足关系 $(x_1)^\ell = 0$、$(x_2)^2 = 0$，可将其理解为 *Nichols*子代数 $\mathfrak{B}(x_1\mathbb{C})$ $\mathfrak{B}(x_2\mathbb{C})$。这些生成元的 q-交换子为 x_{12}（它不是本原元），并满足关系 $(x_{12})^2 = 0$。我们有一个 *PBW* 型基 $x_1^a x_2^b x_{12}^c$，其中包含 $a < \ell$、$b < 2$、$c < 2$，它可以写成同构 $\Leftrightarrow \mathfrak{B}(X) \cong \mathbb{C}[x_1]/((x_1)^\ell) \otimes \mathbb{C}[x_2]/((x_2)^2) \otimes \mathbb{C}[x_{12}]/((x_{12})^2)$。这是与最长元 $s_1s_2s_1$ 的约化表达式相对应的 *PBW* 基。若我们改为选择 $s_2s_1s_2$，那么 *PBW* 基将包含非成比例元素 $x_{21} = x_2x_1 - q_{21}x_2x_1$。经过反射 R_2

我们有自编织为 -1 的生成元 x_{21}、x_2^*，以及一个自编织为 q的交换子$\Leftrightarrow \mathfrak{B}(R_2(X))$ $\cong \mathbb{C}[x_{21}]/((x_{21})^2) \otimes \mathbb{C}[x_2^*]/((x_2^*)^2) \otimes \mathbb{C}[x_1]/((x_1)^\ell)$

第4章

表示范畴

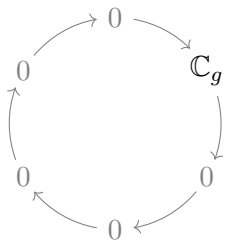
4.1 Nichols代数的表示

回想一下，任意 Hopf 代数 K 在任意编织张量范畴中的表示构成一个幺半范畴。

例4.1.1. 设 $X = \mathbb{C}_g$ 位于 $\mathcal{C} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}_n}^{\sigma}$ 1，其中 $\mathbb{Z}_n = \langle g \rangle$，编织为 $\sigma(g, g) = q$一个本原 n 次单位根。考虑 *Nichols* 代数 $K = \mathfrak{B}(X) = \mathbb{C}[x]/x^n$。$\mathrm{Vect}^{\mathbb{Z}_m}$ 中 K-模的范畴由 $\mathbb{Z}_n$-分次向量空间 $V = \bigoplus_{g^k \in \mathbb{Z}_n} V_{g^k}$构成，我们将其置于一个圆周上，另有一个自同态 x ，将次数平移 g 与 $x^n = 0$。

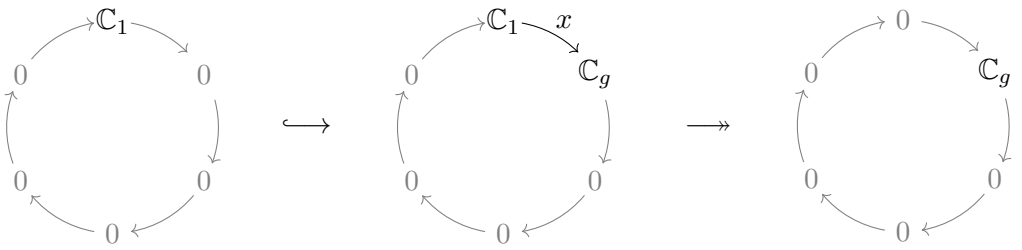


用 x 作用会产生一个子模，因为 $x^n = 0$，因此任何简单对象的作用必须为零，并且具有形式 $\mathbb{C}_{g^i}$，例如



还有不可分解扩张：注意， K-模 $\mathbb{C}_{g^i}$ 可以在某个 K-模态射下映射到其他某个 V_{g^i} 中的任意元素，只要该元素也属于

x 的核。因此，我们得到以下关于 K-模的态射的正合序列，且这些序列不分裂：



鉴于 $x^n = 0$，投射模是最大长度为 n的不可分解对象 .

将此与 $\mathbb{C}[x]$ 在向量空间范畴中的模相比较，见习题1.2.6。

练习4.1.2. 设$\mathbb{C}_{g^k,\ l}$ 为$\mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}_m}$ 中的不可分解 K-模，它作为分次向量空间为 $\mathbb{C}_{g^k} \oplus \mathbb{C}_{g^{k+1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}_{g^{k+l-1}}$。计算$\mathbb{C}_{g^k,\ l}$ 与$\mathbb{C}_{g^{k'},\ l'}$ 之间的同态空间的维数（答案：若 $k \in [k', k'+l']$ 且$k+l > k'+l'$ 则为*1*，否则为*0*）。

Nichols代数在下述意义下是幂零的，这仅由分次得出

引理4.1.3. 任意 $\mathfrak{B}(X)$ 的单表示都是基范畴中具有平凡作用的简单对象。

4.2 Drinfeld中心

定义4.2.1。 对于 $\mathcal{D}$ 给定的幺半范畴，可以构造一个泛编织幺半范畴 $\mathcal{Z}(\mathcal{D})$ 称为 Drinfeld 中心，它由对象对 $(X, c_{X,-})$ 组成$X \in \mathcal{C}$，并配有半编织 $c_{X,Y}$：$X \otimes Y \to Y \otimes X$ 对任意 $Y \in \mathcal{D}$。作为相容条件，我们要求第二个变量满足六边形恒等式（见定义 *1.2.1*）。

例4.2.2。 考虑 $\mathcal{C} = \mathrm{Vect}_G$，其结合子平凡，并假设 G 阿贝尔，因此张量积先验上是可交换的。令 $V \in \mathrm{Vect}_G$ 为一个对象，我们关心可能的半编织 $c_{V,-}$。显然，只需在简单对象上定义它们，也就是说，对于任意 $h \in G$ 一个态射

$$V \otimes \mathbb{C}_h \xrightarrow{\rho(h)} \mathbb{C}_h \otimes V$$

其中两边都可以视为 v 向量空间。右侧变量中的六边形恒等式意味着 $\rho(h')\rho(h'') = \rho(h'h'')$，而单位性意味着 $\rho(e) = \mathrm{id}$，因此$\rho = c_{V,\mathbb{C}_{(-)}}$定义了 G 在 V上的一个表示。由于 ρ 应当是范畴中的态射，因此它必须保持分次。

引理4.2.3. Vect_G 的*Drinfeld*中心由对象 V 以及尊重 G-分次的 G的表示组成。

特别地，每一个这样的对象都是固定齐次次数 g中的对象 $V = V_g$ 的直和，于是我们将其记为 $\mathcal{O}_g^V$。中心中的张量积与编织为

$$\mathcal{O}_g^V \otimes \mathcal{O}_h^W = \mathcal{O}_{gh}^{VW}$$

$$\mathcal{O}_g^V \otimes \mathcal{O}_h^W \to \mathcal{O}_h^W \otimes \mathcal{O}_g^V$$

$$v \otimes w \mapsto g.w \otimes w$$

注意，对象 $\mathcal{O}_g^V$是简单对象、不可分解对象或投射对象，当且仅当 V也具有相应性质；具体取决于基域。特别地，对于 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$，中心仍然是半单的，简单对象是 *1* 维的 $\mathcal{O}_g^\rho$，其中 ρ: $G \to \mathbb{C}^\times$。

对于非阿贝尔群 G，并非每个对象都属于中心，只有共轭类上的直和才属于中心；我们将在第 *5.1* 节讨论。

例4.2.4。 考虑 $\mathcal{C}$ =Rep(G)，其结合子平凡。每个对象都属于中心，但确定可能的半编织颇为棘手。由一般原理定理 *4.2.8* 可知，我们得到相同的中心中心

$$\mathcal{Z}(\mathrm{Rep}(G)) \cong \mathcal{Z}(\mathrm{Vect}_G)$$

对于 G 阿贝尔群及基域 $\mathbb{C}$，这个等价非常直观，因为 $\mathrm{Rep}(G) = \mathrm{Vect}^{\hat{G}}$ ^^
^ 对于 G : Hom(G, $\mathbb{C}^\times$) 是由 1 维特征标构成的群，而 $G = G$ 则通过在给定群元素处取特征标的值来定义。因此，对象的形式为 $\mathbb{C}_\chi^g$，大致可以与 $\mathbb{C}_g^\chi$对应。但请注意定理 *4.2.8*中的非平凡张量结构。

注意，对于向量空间中的 Hopf 代数 H，存在一个拟三角Hopf代数$D(H)$，称为 Drinfeld 双，使得 Rep($D(H)$) = $\mathcal{Z}$(Rep(H))；这一概念早于 Drinfeld中心。这一构造出现在量子群最早的构造中。在较早的文献中，还经常出现“Cartan 部分的识别”，从范畴论角度看即为:

定义 4.2.5。 对于 $\mathcal{D}$ 一个带有中心子范畴 $\mathcal{D} \hookleftarrow \mathcal{C}$的给定幺半范畴（也就是说，$\mathcal{C}$ 是编织的，该嵌入可提升为到 $\mathcal{D}$ 的中心的编织幺半函子；换言之，其中的对象都带有与所有 $\mathcal{D}$ 的特定半编织）。于是可以在 $\mathcal{Z}_\mathcal{C}(\mathcal{D})$ 内部 $\mathcal{Z}(\mathcal{D})$ 构造一个称为相对Drinfeld中心的泛编织幺半范畴，由对象对$(X, c_{X,\,-})$ 组成，其中对象 $X \in \mathcal{C}$ 连同半编织$c_{X,\,Y}$: $X \otimes Y \to Y \otimes X$，且该半编织与中心嵌入所给定的半编织一致。

现在我们讨论一个特殊情形。它早于范畴定义出现，并广泛用于 [HS20]: 令 $\mathcal{D}$ = Rep(H) 表示某个环境编织幺半范畴中的 Hopf 代数的表示范畴 $\mathcal{C}$ （经典情况下即为向量空间范畴）。

于是，半编织 $c_{X,\,-}$可以描述为一个附加的余作用 δ_X: $X \to H \otimes X$，采用 Sweedler记号 $\delta(x) = x^{(0)} \otimes x^{(1)}$。 [1] 明确地说

$$c_{X,Y} : X \otimes Y \longrightarrow Y \otimes X$$

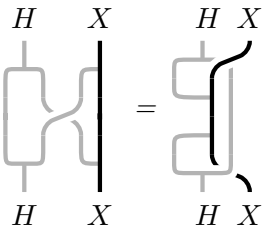
[1]注意，对于 Rep(H)，恒等函子的自然变换集合可以与 H 中的元素相对应；按照定义，这些元素以一种同时作用的方式与所有态射交换。

$$x \otimes y \mapsto x^{(0)}.y \otimes x$$

并默认使用底层范畴的编织 $\mathcal{C}$。作用与余作用之间必需满足的相容性引出了以下定义

它们已被推广到 [Bes95] 中的 Hopf 代数 $\mathfrak{N}$，且该代数位于编织张量范畴 $\mathcal{C}$中，另见 [BLS15]第 2 节和第 3 节:

定义 4.2.6。设 H 是编织范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个 *Hopf* 代数。 H-H-Yetter-Drinfeld 模 X 是 $\mathcal{C}$ 中的一个对象 X，它在 $\mathcal{C}$ 中具有 H-模结构和 H-余模结构，并满足以下相容条件



范畴 ${}^H_H\mathcal{YD}(\mathcal{C})$由 Yetter-Drinfeld 模以及 H-线性且 H-余线性的态射构成。借助 H-模和 H-余模的通常张量积，它成为一个张量范畴 $X \otimes Y$ (见第4.1节)。

Le理 4.2.7 ([Lau20] 命题 3.36)。 设 $\mathcal{B} = \mathrm{Rep}(H)(\mathcal{C})$，则相对中心 *is*

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = {}^H_H\mathcal{YD}(\mathcal{C})$$

定理 4.2.8 ([BLS15], [HS20] 定理 12.3.2)。 对于 H 中的一个 *Hopf* 代数 $\mathcal{C}$，若它具有对偶对象 H^* *(*此时它自动成为 *Hopf* 代数*)*，则存在编织范畴等价

$$\Omega : {}^H_H\mathcal{YD}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} {}^{H^*}_{H^*}\mathcal{YD}(\mathcal{C})$$

请注意，第二个来源中使用有理 Yetter-Drinfeld 模给出了无限情形下更一般的陈述。这里还有一种更范畴化的图景，其中 $\mathcal{B}$，$\mathcal{B}^*$在一个模范畴 $\mathcal{C}$上互为对偶。

例 4.2.9. 对于 $H = \mathbb{C}[G]$ 和 $\mathcal{C} = \mathrm{Vect}$，*Yetter-Drinfeld* 模是带有 G分次的 G-模，并且对于非阿贝尔群还满足一个非平凡的相容条件，我们将在后文研究这一点。对于 G 阿贝尔群，我们得到前面讨论过的中心。与对偶图景（即 Vect_G 的中心）的等价，也如前所述，而且已经略显非平凡。

练习 4.2.10. 利用编织图验证，两个 *Yetter-Drinfeld* 模的张量积仍满足 *Yetter-Drinfeld* 模的相容条件。你也可以选择验证编织的六边形恒等式。

练习 4.2.11。 写出群上 *Yetter-Drinfeld* 模的相容条件。

4.3 Radford 双积

假设 K 是范畴的 Drinfeld 中心 $\mathcal{Z}$(Rep(L)) 中的一个双代数，其中该范畴由 Hopf 代数 L 的表示构成。通常， L 是向量空间范畴中的 Hopf 代数，但它也可以属于任意非平凡的编织幺半范畴 $\mathcal{C}$。具体来说，这意味着以下数据和相容性条件：

- K 带有 L的作用。
- 代数和余代数结构与这一作用相容，其意义是在张量范畴 Rep(L) 中满足如下（余）乘积规则：

$$h.(b_1b_2) = \mu_K(\Delta_L(h)(b_1 \otimes b_2)) = (h^{(1).b_1})(h^{(2).b_2})$$
$$\Delta_K(h.b) = \Delta_L(h).\Delta_K(b) = h^{(1).b^{(1)}} \otimes h^{(2)}.b^{(2)}$$

- K 配备了半编织 $c_{K,\ X}$ 对任意 L-模 X而言；或者等价地，它是一个L-L-Yetter–Drinfeld 模，参见第4.2节。
- 代数和余代数结构同样与半编织相容。
- 双代数公理相对于半编织 $c_{K,\ K}$ 成立。

定理 4.3.1 （Radford 双积，范畴版本 [Bes95], 载于著作 [HS20] 第 3.8 节）。 *Hopf* 代数/双代数 K 在 Rep(L)内部、而该范畴又在 $\mathcal{C}$ 中的表示幺半范畴，等价于一个 *Hopf* 代数/双代数$K\#L$ 的表示幺半范畴，或者按我喜欢的写法 $K \rtimes L$ 在 $\mathcal{C}$中。

$$\mathrm{Rep}(K \rtimes L)(\mathcal{C}) \cong \mathrm{Rep}(K)\mathrm{Rep}(L)(\mathcal{C})$$

更精确地说，作为向量空间，我们取 $K \otimes H$，并修改 K 的乘法，使之借助 H 的作用（从而新的伴随作用就是给定的作用），以及修改 K 的余乘法，使之借助 H 的余作用。

这推广了群或李代数的半直积概念，其中余作用是平凡的。对于量子群，我们有 $u_q(\mathfrak{g})^{\geq 0} = u_q(\mathfrak{g})^+ \rtimes u_q(\mathfrak{g})^0$，且第一个因子不是通常的 Hopf 代数，而是第二个因子上的 Nichols 代数。

4.4 Radford投影定理

此外，还有一个反向的分解定理，类似于群的分裂正合列：

定理4.4.1 (Radford 投射定理 [Rad85],范畴版本 [Bes95，AAFV00]见书中 [HS20] 第3.9节)。设 $\pi : H \twoheadrightarrow L$ 是编织幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中的 *Hopf* 代数满射，并存在 *Hopf* 代数截面 ι: $H \hookleftarrow L$。考虑余不变量空间

$$H^{\mathrm{coin}(\pi)} := \{h \in H \mid (\mathrm{id} \otimes \pi)\Delta(h) = h \otimes 1_L\}$$

当然，在一般范畴中，它被定义为等化子。接着， $H^{\mathrm{coin}(\pi)}$ 带有L 的伴随作用、通过 ($\pi \otimes \mathrm{id})\Delta$定义的余作用，以及修正余乘法

$$\Delta_K(k) = (\mu_J \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \pi \circ S_H \otimes \mathrm{id})(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta_H(k)$$

其值仍在 $K \otimes K$ 中，并将 K 变成$\mathrm{Rep}(L)$ 的 ***Drinfeld***中心中的 ***Hopf*** 代数，或者等价地说，变成 ***L-L-Yetter-Drinfeld*** 模范畴中的对象。此外

$$\mathrm{Rep}(H)(\mathcal{C}) \cong \mathrm{Rep}(H^{\mathrm{coin}(\pi)})\mathrm{Rep}(L)(\mathcal{C})$$

例 4.4.2。 任取一个群同态 $f : G \to Q$ ，并将其延拓为群环的同态 $f' : \mathbb{K}[G] \to \mathbb{K}[Q]$。余不变量 $\mathbb{K}[G]^{\mathrm{coin}(\pi)}$ 恰好是 f 的核的张成空间（注意， f' 的字面意义上的核有所不同，且大得多）。

现在假设 f 通过某个 s分裂。那么群论中的一个标准结果表明，它可分解为半直积 $\ker(f) \rtimes Q$。作用是 Q 在核上的伴随作用，余作用是平凡的，因此编织也是平凡的。这就是为什么在这种情况下，核仍是一个普通的群，但带有额外的作用数据。李代数的情况也类似，这两种情况都与余交换性有关。对于一般的 ***Hopf*** 代数，情况则并非如此，通常核属于 ***Yetter-Drinfeld*** 范畴。

例 4.4.3. 该Taft 代数 T 是向量空间范畴中的一个 ***Hopf*** 代数，定义如下：它具有生成元 g、x ，并带有代数关系

$$g^n = 1, \quad x^n = 0, \quad gx = qxg$$

其中 q 为本原 n 次单位根。它具有余乘法

$$\Delta(g) = g \otimes g, \qquad \Delta(x) = g \otimes x + x \otimes 1$$

以及反粒子 $S(g) = g^{-1}$ 和 $S(x) = -g^{-1}x$。也就是说， g 是生成群 $\mathbb{Z}_n$ 的群元素，而 x 是斜原始元。

于是存在霍普夫代数投影 π 到群环 $\mathbb{C}[\mathbb{Z}_n]$ ，通过令 $\pi(x) = 0$。我们计算余不变量空间

$$K = T^{\mathrm{coin}(\pi)} = \mathbb{C}[x]/x^n$$

伴随作用为 $g.x = qx$ ，余伴随作用为 $x \mapsto g \otimes x$。这定义了一个 ***Yetter-Drinfeld*** 模，从而通过 $x \otimes v \mapsto g.v \otimes x$ 与任意 $\mathbb{C}[\mathbb{Z}_n]$-模 V 给出编织。特别地，$x\mathbb{C}$ 的自编织为 $x \otimes x \mapsto q(x \otimes x)$。 K 的修正余乘法为$\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$。因此 $T^{\mathrm{coin}(\pi)}$ 就是我们上面遇到的 ***Nichols*** 代数，而对角编织向量空间实现为 $\mathbb{Z}_n$-模。

反过来，***Taft*** 代数可以构造为这个 ***Nichols*** 代数与群环 $\mathbb{C}[\mathbb{Z}_n]$的 ***Radford*** 双积。

为了与第 $\mathfrak{B}(X)$节中关于Vect_Γ 中*4.1*的表示的研究建立联系，我们可以像例 $\mathbb{Z}_n$ 那样，将1维特征标ˆ中的向量空间 $\mathbb{Z}_n$ 按其分次来识别*4.2.4*中的表示。于是， x 是次数为 χ的元素，其中 $\chi(g) = q$ ，半编织由 g给出。

习题 4.4.4。*(a)* 验证 *Taft* 代数满足 *Hopf* 代数公理。提示：先验证生成元上的余结合性。然后将 Δ 定义为生成元自由代数上的代数态射，其取值由生成元上的 Δ 给出。接下来只需验证 Δ 可通过这些代数关系因子化，因此实际上需要计算 Δ这些代数关系的取值。最难的是 x^n，这里会遇到与例*2.2.4*中相同的计算。

（*b*）验证 π 定义了 *Hopf* 代数之间的同态。

（*c*）明确验证 *Radford*投影定理的表述，即 *Taft* 代数上的一个模恰好定义了群环 $\mathbb{C}[\mathbb{Z}_m]$ 上的 *Nichols* 代数上的一个模。

（*d*）考虑 *Taft* 代数的一个版本，其中 $x^m = 0$ 、 $g^m = 1$ 和 $\Delta(x) = g^k \otimes x + x \otimes 1$。要使其定义一个 *Hopf* 代数， n、 m、 k 与 q 的阶之间需要满足哪些精确条件？

（*e*）定义 *Taft* 代数的一个更一般版本，其群环为 $\mathbb{C}[G]$ ，以及$\Delta(x) = g^k \otimes x + x \otimes 1$ ，其中 $g \in G$ 为某个固定值。

Radford投影定理具有一个范畴版本 [LM25]:

定理 4.4.5。设 $\mathcal{B}$ 是一个有限刚性幺半范畴， $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ 是一个中心辫幺半范畴。假设这一包含通过一个正合忠实张量函子F分裂

$$\mathcal{C} \underset{F}{\overset{\longleftarrow}{\hookrightarrow}} \mathcal{B}$$

那么存在一个 *Hopf* 代数 $\mathfrak{N} \in \mathcal{C}$ ，使得

$$\mathcal{B} \cong \mathrm{CoRep}(\mathfrak{N})$$

在此对应关系中，函子 F 是遗忘 $\mathfrak{N}$-作用的函子，而 $\mathcal{C}$ 的包含由平凡的 $\mathfrak{N}$-作用给出。

4.5 量子群

设 $\mathcal{C}$ 是一个编织幺半范畴， K 是 $\mathcal{C}$ 中的一个编织 Hopf 代数，通常为$K = \mathfrak{B}(X)$一个 Nichols 代数。

定义 4.5.1。我们将以下编织幺半范畴视为广义量子群

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Rep}(K))$$

它具有一个精确且忠实的函子，通过遗忘半编织映射到 $\mathrm{Rep}(K)$，我们将其视为广义*Borel*部分，并称 $\mathcal{C}$ 为广义*Cartan*部分。

这种将量子群构造为 Drinfeld 双的方式，自一开始便或多或少存在，而描述它的语言历经多年发展，才达到目前的形式 [Dri89，Maj95，AG03，AS10，Lau20]。

例 4.5.2。 设 $\mathfrak{g}$ 为一个半单复有限维李代数。令 $\mathcal{C}=\mathrm{Vect}_{\Gamma}^{\sigma\,1}$，使得 $\mathcal{C}=\mathrm{Rep}(u_q(\mathfrak{g})^0)$ 为 *Cartan* 部分。取对象

$$X=\mathbb{C}_{\alpha_1}\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}_{\alpha_n}$$

并假设 $\sigma(\alpha_i,\alpha_j)=q^{(\alpha_i,\alpha_j)}$。那么我们已经提到， $\mathfrak{B}(X)$ 同构于 $u_q(\mathfrak{g})^+$。此外， *Radford* 双积为 $u_q(\mathfrak{g})^{\geq 0}$。最后，相对 *Drinfeld* 中心等价于全量子群 $u_q(\mathfrak{g})$ 的表示。

我们注意到，在这种方法中，通过改变 *Borel* 子代数，我们已经可以看到许多对此类量子群的可能修改。它们在文献中以不同名称出现：

- 采用具有相同 q-图的不同编织矩阵，就得到多参数量子群。
- 取 $\mathrm{Vect}_{\mathfrak{h}}$ 或 $\mathrm{Rep}(\mathfrak{h})$ ，就得到展开量子群。
- 取 $\mathrm{Vect}_{\Gamma}^{\sigma\,\omega}$,，对于非平凡结合子，就得到拟量子群。特别地，如果我们希望在偶数阶单位根处具有非退化编织，这是必要的。

注 4.5.3。 对于任意相对*Drinfeld*中心 $\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$，都有一个遗忘半编织的正合忠实幺半函子 $\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})\to\mathcal{B}$，并且在适当条件下存在一个右伴随（松幺半）函子 $\mathrm{forget}^{\mathrm{ra}}:\ \mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})\leftarrow\mathcal{B}$。特别地，在我们的情形中，$\mathcal{B}$ 是某个*Hopf* 代数的表示范畴，因此存在一个显式的右伴随

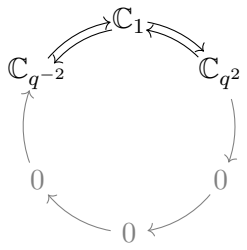
$$V\mapsto\mathfrak{N}\otimes_{\mathcal{C}}V$$

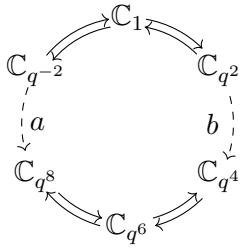
其在第一因子上带有正则余作用，并且在张量积上带有一个涉及双重编织的、较为复杂的显式作用，从而将结果变成一个*Yetter-Drinfeld* 模，参见 [LW21] 定理 *3.13* 及其后续内容。特别地，取 $\mathcal{C}$中带有平凡作用的一个对象所得的像，与量子群中的一个余 *Verma* 模相当。单位对象的像是 K 带有余正则余作用和伴随作用的对象，并且它是 $\mathcal{U}^K$中的一个交换代数

从这一构造理解该范畴的结构并不容易；除了中心中的所有对象特别都是Cartan 部分（权空间）和Nichols 代数（幂零部分）的表示之外，还需要明确写出量子群中的关系，分别即作用与余作用之间的关系。在超出 $\mathfrak{sl}_2$ 的情形中，还必须使用根系理论和反射函子，我们将在第 3.4 节中介绍这些内容。我们首先给出 $\mathfrak{sl}_2$的结果：

例 4.5.4. 例 $\mathfrak{B}(X)=\mathbb{C}[x]/x^n$ 中的 $\mathrm{Rep}(\mathbb{Z}_n)$ 表示范畴已在例 *4.4.3*中讨论。它等价于 *Radford* 双积的表示，而该双积就是例 *4.4.3*中的 *Taft* 代数。相对*Drinfeld*中心，或等价地说，*Yetter-Drinfeld* 模的范畴，对例 *1.3* $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ 中的小量子群 给出的表示编织幺半范畴提供了系统的描述。

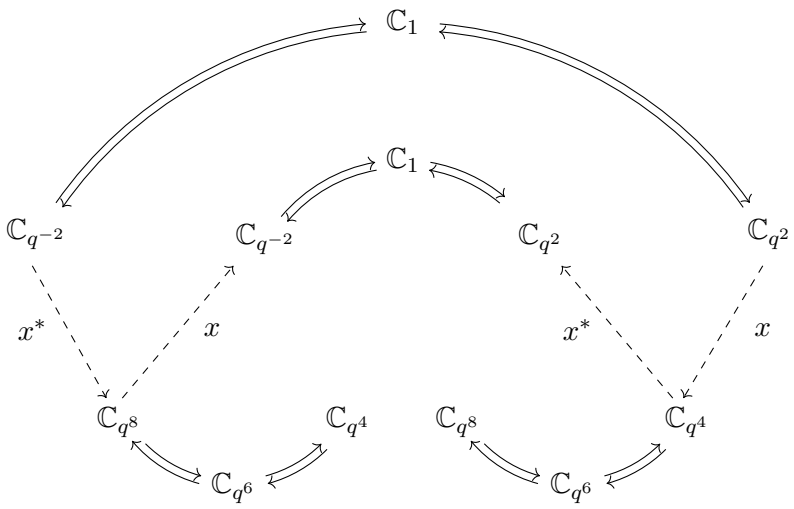
这个范畴最终呈现出如下形式：简单对象是 $\mathfrak{B}$（X）- 具有对称性 $q\leftrightarrow q^{-1}$ （魏尔反射）的不可分解对象。长度为2 的不可分解扩张是带参数 （a： b）的 q^{λ}、$q^{-\lambda-2}$ 的扩张





情形 (1: 0) 和 (0 : 1) 对应于 *Verma* 模。

投射覆盖包含不可分解对象（1：0）和（0：1），各两个。



4.6 附录：生成元与关系

为方便读者，我们给出一个显式实现的 Hopf 代数，其中包含上述若干情形（但结合律平凡），适用于任意对角型 Nichols 代数。计算取自 [CLR23]第6.2节：

假设编织张量范畴 $\mathcal{C}$ 实现为交换余交换 Hopf 代数 C 的有限维半单模范畴 Rep^{wt}(C)，因此 $\mathcal{C}$ =Vect$_\Gamma$ 对应于一个可能无限的阿贝尔群 Γ =Spec(C)，其编织为 σ。

设 $\mathfrak{N} = \mathfrak{B}(X)$ 是对象 $X = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathbb{C}_{\gamma_k}$ in$\mathcal{C}$ 的一个有限维 Nichols 代数，由次数为 $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ 的 $x_1, \dots, x_n$ 张成，因此对所有 $g \in C$， $g.x_i = \gamma_i(g)x_i$。假设存在相应的类群元 $g_i \in C$，满足 $\sigma(\gamma_i, \gamma) = \gamma(g_i)$，以及 $\bar{g}_i \in C$，满足 $\sigma(\gamma, \gamma_i) = \gamma(\bar{g}_i)$。

我们定义一个 Hopf 代数 $B = \mathfrak{B}(X) \otimes C$，由 C 和 $\mathfrak{B}(X)$ 生成，并且

具有交换关系、修正余乘法和反粒子

$$gx_i = \gamma_i(g^{(1)}) \cdot x_i g^{(2)}$$
$$\Delta(x_i) = g_i \otimes x_i + x_i \otimes 1$$
$$S(x_i) = -g^{-1}x_i$$

这里通过余乘法定义 $g^{(1)}$ 和 $g^{(2)}$，即用 Sweedler记号表示为 $\Delta(g) = g^{(1)} \otimes g^{(2)}$。我们还定义 Hopf 代数 $B^* = \mathfrak{B}(X^*) \otimes C$，其中 $X^* = X$，其生成元x_i^* 的次数为 $\gamma_i(S(-))$，并配备修正余乘法和反粒子

$$gx_i^* = \gamma_i(S(g^{(1)})) \cdot x_i^* g^{(2)}$$
$$\Delta(x_i^*) = \bar{g}_i \otimes x_i^* + x_i^* \otimes 1$$
$$S(x_i^*) = -\bar{g}^{-1}x_i^*$$

最后，我们定义 Hopf 代数 $U = \mathfrak{B}(X) \otimes \mathfrak{B}(X^*) \otimes C$，它具有之前的所有关系以及连接关系

$$x_j^* x_i - \gamma_j(g_i)x_i x_j^* = \delta_{ij}\big(1 - \bar{g}_i g_i\big)$$

引理4.6.1。上述关系定义了一个 *Hopf* 代数，并且我们得到具有非退化编织的编织张量范畴之间的等价

$$\mathrm{Rep}^{wt}(U) \cong {}^{\mathfrak{N}}_{\mathfrak{N}}\mathcal{YD}(\mathcal{C})$$

证明。我们首先验证 B，B^* 和 U 是 Hopf 代数：对于 B，我们必须验证生成元 x_i 上的余结合性和对极条件，这显然成立；还要验证Δ 与交换关系相容，即 Δ，根据应用于该关系两边的双代数公理进行延拓后，在该关系意义下相等（此处使用了交换性和余交换性）

$$\Delta(gx_i) = g^{(1)}g_i \otimes g^{(2)}x_i + g^{(1)}x_i \otimes g^{(2)}$$
$$\Delta(\gamma_i(g^{(1)})x_i g^{(2)}) = \gamma_i(g^{(1)})g_i g^{(2)} \otimes x_i g^{(3)} + \gamma_i(g^{(1)})x_i g^{(2)} \otimes g^{(3)}$$

由于次数为 μ 的一维C-模上乘积的交换关系和余乘法关系为，ν 可写为

$$g.(x_i.m_\mu) = (g^{(1)}.x_i)(g^{(2)}.m_\mu) \qquad \Delta(x_i)(m_\mu \otimes n_\nu) = (x_i.m_\mu) \otimes n_\nu + \sigma(\gamma_i, \mu)m_\mu \otimes (x_i.n_\nu)$$

因此，我们几乎可以根据定义得到张量范畴的一个等价 es

$$\mathrm{Rep}(B) \cong \mathrm{Rep}(\mathfrak{N})(\mathcal{C})$$

B^* 的计算完全类似。

对于 U，我们必须检查 Δ 是否与连接关系相容，因为依据双代数公理，将 Δ 延拓到连接关系左侧后，所得结果与右侧的一般余乘法相符（这是 $g = \bar{g}_j g_i$ 的一种所谓平凡斜原始元）：

$$\begin{aligned}\Delta(x_j^* x_i - \gamma_j(g_i)x_i x_j^*) &= (\bar{g}_j \otimes x_j^* + x_j^* \otimes 1)(g_i \otimes x_i + x_i \otimes 1)\\ &\quad - \gamma_j(g_i)(g_i \otimes x_i + x_i \otimes 1)(\bar{g}_j \otimes x_j^* + x_j^* \otimes 1)\\ &= \bar{g}_j g_i \otimes (x_j^* x_i - \gamma_j(g_i)x_i x_j^*) + (x_j^* x_i - \gamma_j(g_i)x_i x_j^*) \otimes 1\\ &\quad + (\bar{g}_j x_i - \gamma_j(g_i)x_i \bar{g}_j) \otimes x_j^* + (x_j^* g_i - \gamma_j(g_i)g_i x_j^*) \otimes x_i\\ \Delta(1-g) &= g \otimes (1-g) + (1-g) \otimes 1\end{aligned}$$

现在我们来证明所断言的范畴等价：定义函子 ${}^{\mathfrak{N}}_{\mathfrak{N}}\mathcal{YD}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Rep}(U)$，将 $M \in \mathrm{Rep}(\mathfrak{N})(\mathcal{C})$ 视为 B-模，并利用非退化的 Hopf配对 $\langle -,- \rangle$，把 $\mathfrak{N}$-余作用 $m \mapsto m^{(-1)} \otimes m^{(0)}$ 转化为 M 上的 $\mathfrak{B}(X^*)$-作用：$\mathfrak{B}(X^*) \otimes \mathfrak{B}(X) \to \mathbb{C}$ 由 $\langle x_j^*, x_i \rangle = \delta_{i,j}$ 唯一确定；其存在性是 Nichols 代数 [Lus10][HS20] 的等价刻画之一。因此，特别是在生成元上

$$x_j^*.m = \langle x_j^*, m^{(0)} \rangle m^{(1)}$$

余作用位于范畴 $\mathcal{C}$ 即 $g.m \mapsto g^{(1)}m^{(-1)} \otimes g^{(2)}m^{(0)}$ 中，等价于 g, x_j^* 之间的关系，因为

$$\begin{aligned} x_j^*.g.m &= \langle x_j^*, g^{(1)}.m^{(-1)} \rangle g^{(2)} m^{(0)} \\ &= \langle S(g^{(1)}) x_j^*, m^{(-1)} \rangle g^{(2)}.m^{(0)} \\ &= \langle \gamma_i(g^{(1)}) x_j^*, m^{(-1)} \rangle g^{(2)}.m^{(0)} \\ &= \gamma_j(g^{(1)}) g^{(2)}.x_j^*.m \end{aligned}$$

定义 4.2.6中的编织 Yetter-Drinfeld 条件等价于 x_i, y_j 之间的连接关系，因为将 Yetter–Drinfeld 条件的两边作用于 $x_i \otimes m$（其元素 m 的次数为 λ，且生成元 x_i 的余乘法为$\Delta_{\mathfrak{B}}(x_i) = 1 \otimes x_i + x_i \otimes 1$），再与另一个生成元 x_j^*配对后，方程两边关于 $i = j$ 都只有两项贡献

$$\langle x_j^*, x_i \rangle m + \sigma(\gamma_i, \gamma_j) \langle x_j^*, m^{(-1)} \rangle x_i.m^{(0)} = \langle x_j^*, x_i \rangle \sigma(\lambda, \gamma_i) \sigma(\gamma_i, \lambda) m + \langle x_j^*, (x_i.m)^{(-1)} \rangle (x_i.m)^{(0} \quad)$$

对于次数为 m 的情形，编织因子为 $\sigma(\gamma_i, \gamma_j) = \gamma_j(g_i)$ 和 $\sigma(\gamma_i, \lambda) = \lambda(g_i)$，分别为 $\sigma(\lambda, \gamma_i) = \lambda(\bar{g}_i)$。将其改写为 x_j^* 的作用后，得到

$$\delta_{ij} m + \gamma_j(g_i) x_i.x_j^*.m = \delta_{ij} \lambda(\bar{g}_i) \lambda(g_i) m + x_j^*.x_i.m$$

由此得到 U中的连接关系。我们还验证了这个函子可扩展为张量函子：对于 $\mathrm{Rep}(\mathfrak{N})(\mathcal{C}) \to \mathrm{Rep}(B)$，我们已经验证了这一点。$\mathfrak{N}$-余模的张量积是利用 $\mathfrak{N}$中的代数结构定义的

$$(m_\mu \otimes n_\nu)^{(-1)} \otimes (m_\mu \otimes n_\nu)^{(0)} = m_{\mu'}^{(-1)} n_{\nu'}^{(-1)} \sigma(\mu'', \nu') \otimes (m_{\mu''}^{(0)} \otimes n_{\nu''}^{(0)})$$

因此，在与具有本原余乘法 $\Delta_{\mathfrak{B}}(x_j^*) = 1 \otimes x_j^* + x_j^* \otimes 1$的生成元进行 Hopf配对后

$$\begin{aligned} x_j^*(m \otimes n) &= \langle x_j^*, m_{\mu'}^{(-1)} n_{\nu'}^{(-1)} \sigma(\mu'', \nu') \rangle \ (m_{\mu''}^{(0)} \otimes n_{\nu''}^{(0)}) \\ &= \left(\langle 1, m_{\mu'}^{(-1)} \rangle \langle x_j^*, n_{\nu'}^{(-1)} \rangle \sigma(\mu'', \nu') + \langle x_j^*, m_{\mu'}^{(-1)} \rangle \langle 1, n_{\nu'}^{(-1)} \rangle \sigma(\mu'', \nu') \right) (m_{\mu''}^{(0)} \otimes n_{\nu''}^{(0)}) \\ &= \sigma(\mu, \gamma_j) \ (m_\mu \otimes x_j^*.n_\nu) + \sigma(\mu - \gamma_j, 0) \ (x_j^*.m_\mu \otimes n_\nu) \\ &= (\bar{g}_j \otimes x_j^* + x_j^* \otimes 1).(m \otimes n) \end{aligned}$$

同样的推理给出逆函子 $\mathrm{Rep}(U) \to {}^{\mathfrak{N}}_{\mathfrak{N}}\mathcal{YD}(\mathcal{C})$，因为当 $\mathfrak{N}$ 为有限维时，配对$\langle -, - \rangle$是可逆的，而 x_i^*，g与 x_i，x_j^*之间的关系恰好表明，在生成元上，余作用属于该范畴，并满足 Yetter–Drinfeld 条件。由此我们最终得出结论：这两个张量范畴等价。

使其成为编织张量范畴的某个 U 闭包中的一个具体 R-矩阵，可以很容易地从 ${}^{\mathfrak{N}}_{\mathfrak{N}}\mathcal{YD}$ 中的编织读出。 □

习题 4.6.2. 将上述计算应用于 *Nichols* 代数 $\mathbb{C}[x]/x^n$，它是在权格 $C=\mathfrak{h}$ 上以编织 $q^{(\lambda,\mu)}$ 实现的。这构造了展开量子群 $u_q(\mathfrak{sl}_2)$，其中尤其包含通常的小量子群。

第5章

超越对角情形的Nichols代数

5.1 关于非阿贝尔群

现在我们讨论非阿贝尔群 G的Vect$_G$ （等价地，Rep(G)）的中心，然后简要总结关于这一范畴中的Nichols代数的已知结果。

取任意一个 G-分次向量空间 V，那么 V 的半编织是一族态射

$$c_{V,-}: V \otimes \mathbb{K}_g \to \mathbb{K}_g \otimes V$$

我们可以将其识别为一个线性映射 $\rho(g): V \to V$，但为了使该态射保持 G-分次，它必须将次数为 h 的元素映射到次数为ghg^{-1}的元素。六边形恒等式意味着 ρ是 G的一个表示。注意，这组数据与关于 G的群代数的Yetter-Drinfeld 模的描述一致。

定义 5.1.1 （群上的Yetter-Drinfeld模）。 对于 G 任意群与 $\mathbb{K}$ 任意基域，我们有一个编织张量范畴

$$ {}^G_G\mathcal{YD} = \mathcal{Z}(\mathrm{Vect}_G) = \mathcal{Z}(\mathrm{Rep}(G)) $$

由 G-分次向量空间$V = \bigoplus_h V_h$ 连同一个 G-作用构成，使得

$$g.(V_h) = V_{ghg^{-1}}$$

编织 $V \otimes W \to W \otimes V$如下，若 $v_g \in V_g$ 与 $w_h \in W_h$:

$$v_g \otimes w_h \mapsto g.w_h \otimes v_g$$

这样的对象具体是什么样的? 显然，如果它包含某个 $v_h \in V_h$，那么对于共轭类 $[h]$ 中的所有 h' ，它也包含元素 $v_{h'} \in V_{h'}$ 。另一方面，对于某个固定的 h ，由与h 交换的元素构成的子群 Cent(h) $= \{g \in G | ghg^{-1} = h\}$ 分别作用于 V_h 。事实证明，这两项要素足以描述这种情形。

引理5.1.2。 ${}^{G}_{G}\mathcal{YD}$ 中的任意对象都是形如 $\mathcal{O}^{V}_{[h]}$ 的对象的直和，这些对象由共轭类 $[h]$ 和中心化子子群 $\mathrm{Cent}(h)$的表示 V 参数化。作为 G-分次向量空间，它是 $\bigoplus_{h'\in[h]} V_{h'}$，其中所有 $V_{h'} = V$都是向量空间。

注5.1.3. 这些对象是单对象、不可分解或投射的，当且仅当相应的中心化子表示 V 是单对象、不可分解或投射的。特别地，若$\mathrm{Rep}(G)$ 在基域 $\mathbb{K}$上是半单的，则${}^{G}_{G}\mathcal{YD}$ 是半单的。

引理的证明 *5.1.2*。 假设我们有一个固定的共轭类 $[h]$ 以及一个固定的代表元 h和固定的 V_h，带有 Cent(h) 的作用。

我们回顾群的置换理论中的一个工具：设 G 传递地作用在集合 X 上（也就是说， X 是单一轨道，即对每个 x， $y \in X$ 都存在 $g \in G$使得 $g.x = y$）。固定某个 $x \in X$，并考虑由固定 x的元素构成的子群 U。于是存在一组元素 t_1，.....， t_n，称为陪集代表元，与 $X = \{x = x_1, \dots, x_n\}$成双射，使得任意 $g \in G$ 都可以对某个i 和 $u \in U$唯一地写成 $g = t_i u$。具体而言，我们选取分别将 $x = x_1$ 送到 x_i 的元素 t_i，然后对任意给定的元素 g，考察它将 x映射到哪一个 x_i，从而它在 x 上与我们的代表元 t_i具有相同的效果。因此 $t_i^{-1} g.x = x$，故 $u{:}= t_i^{-1} g$ 属于稳定子 U，并且 $g = t_i u$符合预期。因此，存在将 G 分解为 U 个陪集的分解

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} t_i U$$

更一般地，若有 $g.x_i = x_j$，则根据构造， $t_j^{-1} g t_i$ 属于 $x = x_1$的稳定子群 U。

例5.1.4. 下面是一个说明性的标准例子（共轭类见下文）：旋转群 $SO(3)$ 作用于球面上的点。球面上固定点 x 的点的稳定子群，是绕着经过 x的相应轴旋转所构成的子群。我们可以（非典范地）为每个点 x_i 选取一个旋转$t_i.x = x_i$，于是每个旋转 g 都可以写成乘积 $g = t_i u$，其中某个旋转 u绕着 x。

现在我们将其应用于 G 在共轭类 $X = [h] = \{h_1, \dots, h_n\}$上的作用，其中共轭类代表元为 $h = h_1$。我们选取陪集代表元 t_i，满足 $t_i h t_i^{-1} = h_i$。现在，对于给定的 Yetter-Drinfeld 模 $V = \bigoplus_{h_i \in [h]} V_{h_i}$，我们利用 t_i 的作用将 $V := V_{h_1}$ 与 V_{h_i}等同，也就是说，将所有满足 $t_i.v_h = v_{h_i}$的 $V_{h_i} = V$等同。现在，对于任意固定的 g、 h_i 和 $g h_i g^{-1} = h_j$，元素 $u := t_j^{-1} g t_i$ 属于 $h = h_1$ 的中心化子，我们根据选定的中心化子在 $V = V_{h_1}$上的作用来定义作用：

$$g.v_{h_i} = (u.v)_{h_j}$$ □

例 5.1.5. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 上的对称群 $\mathbb{S}_3$ 有维数为1、1、2、3、3、2、2、2的简单*Yetter-Drinfeld*模。

$$\mathcal{O}^{1}_{e},\ \mathcal{O}^{\mathtt{sgn}}_{e},\ \mathcal{O}^{\mathtt{std}}_{e},\ \mathcal{O}^{\pm 1}_{[(12)]},\ \mathcal{O}^{q_3^k}_{[(123)]}$$

我们来仔细研究一下 $\mathcal{O}^{\pm}{}_{(12)}$：它由三个基元素张成

$$x_{(12)},\quad x_{(23)},\quad x_{(13)}$$

(12) 的中心化子子群是 $\{e,(12)\}$，因此这些元素将 $x_{(12)}$ 映射到自身，但会相差一个因子

$$(12).x_{(12)} = \pm x_{(12)}$$

这个因子 $\pm$ 是记号中所指出的所选中心化子表示 $\mathcal{O}^{\pm}{}_{(12)}$。另一方面，元素子集 $\{(13)、(123)\}$ 与 $\{(23)、(321)\}$ 分别将 (12) 共轭到(23) 或 (13) 。[1] 让我们选取陪集代表元

$$t_1 = e, \quad t_2 = (12), \quad t_3 = (23)$$

于是我们有（更好的说法是：我们以如下方式定义我们的基，使得）

$$(13).x_{(12)} =: x_{(23)}, \quad (23).x_{(12)} =: x_{(13)}$$

陪集中的其他元素可以用这些代表元写出（这是随之而来的，但请显式验证）$(123) = (13)(12)$ 以及 $(321) = (23)(12)$，因此我们有

$$(321).x_{(12)} = \pm x_{(23)}, \quad (123).x_{(12)} = \pm x_{(13)}$$

通过计算 $t_j g t_i^{-1}$（习题），可以算出 g 在任意基元素上的作用。

练习 5.1.6. 考虑域 $\mathbb{C}$ 上的 $G = \mathbb{S}_3$。

- 明确计算(12) 在 $\mathcal{O}^{\pm 1}_{[\ 12()]}$ 上的作用，其基为 x_{12}, x_{23}, x_{13}。在一组基下明确计算两个此类模之间的编织。
- 计算张量积的分解

$$\mathcal{O}^{\pm 1}_{[(12)]} \otimes \mathcal{O}^{\pm 1}_{[(12)]}$$

- 作为自然变换，编织在张量积的每个直和项上都按一个标量作用：计算前一个张量积中的这些标量。
- 如果你对非半单表示论感兴趣，那么请确定特征2 和3下， $\mathbb{S}_3$ 上的不可约、不可分解及投射 *Yetter-Drinfeld* 模。

- 请自行验证，对于一般的 G ， $\mathcal{O}^V_{[g]}$的维数平方和为 $|G|^2$。检查特征2、3 下的 $\mathbb{S}_3$ ，验证投射模的维数与单对象的维数之积之和仍为 $|G|^2$ 。

即使是非阿贝尔群上的简单 Yetter-Drinfeld 模，计算其 Nichols 代数也很困难。首个例子见 [MS00]:

例 5.1.7。 我们考虑对称群 $\mathbb{S}_n$ 上的 *Yetter-Drinfeld* 模$\mathcal{O}^{\rho}_{[\ (12)]}$ ，其中 ρ 是中心化子子群的一个1维特征标。它有一个由对换索引的基 $x_{(ij)}$。固定对换 (12) 的中心化子是 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_{n-2}$，其中

[1]请记住，一个共轭对另一个共轭 σ 的共轭 π ，只需将π 作用于 σ 在循环表示法中的各项即可得到。否则，请在这些例子中通过置换相乘来明确验证这一点。

$\mathbb{S}_{n-2} \subset \mathbb{S}_n$ 表示 1、2的稳定子。因此，我们有四个1维特征标(ϵ、平凡) 和(ϵ、符号)，其中 $\rho((12)) = \epsilon = \pm 1$。

我们显式计算一个 $g \in G$ 的作用，方法如同引理 *5.1.2* 的证明。我们显然有

$$g.x_{(ij)} = \chi(g,(ij))\, x_{(g(i)g(j))}$$

为计算因子 $\chi(g,(ij))$ 我们选取元素 $(1i)(2j)$ 作为将 (12) 共轭到 (ij) 的陪集代表元，针对 $i<j$。于是该因子取决于 $g(i)<g(j)$ 还是$g(i)>g(j)$，并相应地

$$\chi(g,(ij)) = \rho\big(((1g(i))(1g(j)))^{-1} g((1i)(1j))\big)$$
$$\chi(g,(ij)) = \rho\big(((1g(j))(1g(i)))^{-1} g((1i)(1j))\big)$$

对于特征标 $(1,\mathtt{triv})$ 该因子是平凡的。对于特征标 $(-1,\mathtt{triv})$ 结果仅取决于 ρ 的自变量对 1,2 的作用，因此它是 ± 1，视上述情形而定。对于特征标 $(-1,\mathtt{sgn})$，它是 $\mathbb{S}_n$ 上符号特征的限制，我们有 $\chi(g,(ij)) = \mathtt{sgn}(g)$。对于特征标 $(1,\mathtt{sgn})$ 它是这两者的乘积。接下来中间两种情形对我们最为重要，因此我们总结

$$\mathcal{O}^{(-1,\mathtt{triv})}_{(12)}: \qquad \chi(g,(ij)) = \begin{cases} +1, g(i)>g(j) \\ -1, g(i)<g(j) \end{cases}$$
$$\mathcal{O}^{(-1,\mathtt{sgn})}_{(12)}: \qquad \chi(g,(ij)) = \mathtt{sgn}(g)$$

我们明确计算这个向量空间上的非对角编织，其中 i、j、k、l 两两不同

$$x_{(ij)} \otimes x_{(ij)} \mapsto (ij).x_{(ij)} \otimes x_{(ij)} = -x_{(ij)} \otimes x_{(ij)}$$
$$x_{(ij)} \otimes x_{(kl)} \mapsto (ij).x_{(kl)} \otimes x_{(ij)} = \pm x_{(kl)} \otimes x_{(ij)}$$
$$x_{(ij)} \otimes x_{(jk)} \mapsto (ij).x_{(jk)} \otimes x_{(ij)} = \pm x_{(ik)} \otimes x_{(ij)}$$

这里，第一个符号在 $\mathcal{O}^{(-1,\mathtt{triv})}(12)$ 时为 $+1$，在 $\mathcal{O}^{(-1,\mathtt{sgn})}(12)$ 时为 -1。根据上面的公式，当 $j<k$ 且 $i<k$ 时，$+1$ 对应的第二个符号为$\mathcal{O}^{(-1,\mathtt{triv})}(12)$；当 $j<k$ 且 $i>k$时，第二个符号对应 -1；而对于 $\mathcal{O}^{(-1,\mathtt{sgn})}(12)$，第二个符号始终为 -1。

经过这番准备，我们可以较容易地证明，以下关系对 *Nichols* 代数 $\mathfrak{B}(\mathcal{O}^{(-1,\mathtt{triv})}(12))$（上号）和 $\mathfrak{B}(\mathcal{O}^{(-1,\mathtt{sgn})}(12))$（下号）成立，作为接下来的习题:

$$\begin{aligned} x_{(ij)}^2 &= 0 \\ x_{(ij)}x_{(kl)} \mp x_{(kl)}x_{(ij)} &= 0, && i,j,k,l \text{ distinct} \\ x_{(ij)}x_{(jk)} \mp x_{(jk)}x_{(ik)} \mp x_{(ik)}x_{(ij)} &= 0, && i<j<k \\ x_{(jk)}x_{(ij)} \mp x_{(ik)}x_{(jk)} \mp x_{(ij)}x_{(ik)} &= 0, && i<j<k \end{aligned}$$

请注意，目前尚不清楚这是否为定义关系集（如今已知 $n = 3$、4、5的情况是如此）。仅由二次关系定义的代数是Fomin-Kirillov 代数[FK99]，，它有许多应用。据猜测，对于 $n > 6$ 而言，它是无限维的，并且据称与其他若干现象有关，例如预射影代数、*Lusztig* 正典基等，参见 [Ven12]。

对于 $G = \mathbb{S}_3$，可以直接验证，满足这些关系的代数具有分次维数 $1 + 3 + 4 + 3 + 1$ 以及一个显式的基

$$1, \quad x_{(12)}, x_{(13)}, x_{(23)}, \quad x_{(12)}x_{(23)}, x_{(13)}x_{(12)}, x_{(23)}x_{(12)}, x_{(13)}x_{(23)}, \quad \cdots, \quad x_{(12)}x_{(23)}x_{(12)}x_{(13)}$$

而且它确实是 *Nichols* 代数。每个次数中的子空间当然仍然带有G-分次以及 G-作用，因此将它们写成 *G-Yetter-Drinfeld* 模的直和是有意义的

$$1 \oplus \mathcal{O}^{-1}_{[(12)]} \oplus 2\mathcal{O}^{-1}_{[(123)]} \oplus \mathcal{O}^{-1}_{[(12)]} \oplus 1$$

注意这种称为 Poincare对偶 的对称性，它对任意 *Hopf* 代数都成立。对于所有已知的定义在非阿贝尔群上的 *Nichols* 代数，希尔伯特级数似乎都可以奇特地分解为 q-多项式的乘积，例如在本例中

$$1 + 3t + 4t^2 + 3t^3 + t^4 = (1 + t)(1 + t)(1 + t + t^2)$$

习题 5.1.8。 利用量子对称化算子、斜导子以及计算余乘法，证明上述二次关系。

该论文对任意 Coxeter 群给出了类似的结果，下面我们将讨论二面体群 $\mathbb{D}_4$ 的情形，它是 B_2 型的 Coxeter 群，并且已知其可以具有有限维 Nichols 代数。

问题 6. 这或许是该领域最难的问题，*25* 年来人们尝试解决并取得进展，却始终未能攻克：判断$\mathcal{O}^{-1}_{[\ 12\,()]}$ 在 $\mathbb{S}_6$ 上的 *Nichols* 代数是否为无限维。

一般而言，非阿贝尔群上不可约 Yetter-Drinfeld 模（秩 1）的有限维 Nichols 代数分类是出了名的难题。已知只有少数共轭类对应有限维 Nichols 代数；过去 ~ 20 年来，人们发展出了强有力的方法，能够排除简单群中大多数共轭类对应的这种可能性。一项主要技术是识别共轭元素构成的子集，这些子集会导出对角型 Nichols 子代数，而这类子代数可借助 Heckenberger 列表加以判定。此处不讨论这项重要工作，详见[ACG15]及其中的参考文献。近年来，另一项截然不同的发展则是通过将 Nichols 代数模 p[HMV24]约化，来判定那些上述方法难以处理的情形。

现在给出一个秩 2 的例子：这基本上源自 [MS00]，但我们以一般形式呈现它，这也是 [HS10] 第 4 节分类结果中出现的形式；在该处，这类群称为 G_2；而在 [HV17]，的分类中，这类群称为 $Z^2_{,2\ 2}$。

例5.1.9。考虑由 g、h、ε 生成的群 G，其中 ε 是阶为2 的中心元，并且$gh = \varepsilon hg$。那么其共轭类为

$$[g] = \{g, \varepsilon g\}, \qquad [h] = \{h, \varepsilon h\}, \qquad [gh] = \{gh, \varepsilon gh\}$$

设 ρ 是 g 的中心化子子群的一个特征标，该子群由 ε、g、h^2 生成；设 σ 是 h 的中心化子子群的一个特征标，该子群由 ε、h、g^2 生成。

我们要计算 *Nichols* 代数

$$\mathfrak{B}(\mathcal{O}^{\rho}_{[g]} \oplus \mathcal{O}^{\sigma}_{[h]})$$

练习5.1.10. 计算 $\mathcal{O}^{\rho}_{[g]}$ 上关于基 x_g 和 $x_{\varepsilon g} := h.x_g$ 的编织是对角的，其编织矩阵如下

$$\begin{pmatrix} \rho(g) & \rho(\varepsilon)\rho(g) \\ \rho(\varepsilon)\rho(g) & \rho(g) \end{pmatrix}$$

特别地，若 $\rho(g) = \sigma(h) = -1$，则 $\mathfrak{B}(\mathcal{O}^{\rho}_{[g]})$ 是 4 维的。$\mathfrak{B}(\mathcal{O}^{\sigma}_{[h]})$ 同理。检查 $\mathfrak{B}(\mathcal{O}^{\rho}_{[g]})$ 和 $\mathfrak{B}(\mathcal{O}^{\sigma}_{[h]})$ 之间是否存在二次关系；此时它们不是对角的。

Th定理 5.1.11. 若 $\rho(g) = \sigma(h) = -1$ 且 $\rho(\varepsilon h^2)\sigma(\varepsilon g^2) = 1$，则 *Nichols* 代数

$$\mathfrak{B}(\mathcal{O}^{\rho}_{[g]} \oplus \mathcal{O}^{\sigma}_{[h]})$$

具有有限维数 $64 = 1 + 4 + 7 + 8 + 8 + 8 + 7 + 4 + 1$。

上面的习题中给出了 *Nichols*代数 $\mathfrak{B}(\mathcal{O}^{\rho}_{[g]})$ 和 $\mathfrak{B}(\mathcal{O}^{\sigma}_{[h]})$ 。编织交换子空间 $[\mathcal{O}^{\rho}_{[g]}, \mathcal{O}^{\sigma}_{[h]}]$ 是简单*Yetter-Drinfeld*模 $\mathcal{O}^{\psi}_{[gh]}$，其

$$\psi(\varepsilon) = \rho(\varepsilon)\sigma(\varepsilon), \qquad \psi(gh) = -1, \qquad \psi((gh)^2) = \rho(\varepsilon h^2)\sigma(\varepsilon g^2)$$

根系的类型为 A_2，根 α_1、α_2、α_{12} 分别对应于三个 *Yetter-Drinfeld* 模 $\mathcal{O}^{\rho}_{[g]}$、$\mathfrak{B}(\mathcal{O}^{\sigma}_{[h]})$ $\mathcal{O}^{\psi}_{[gh]}$。这些生成元构成一个 *PBW*基。这可以

用更范畴化的方式表述如下：作为 $\mathbb{N}$-分次 *Yetter-Drinfeld* 模，我们有一个同构

$$\mathfrak{B}(\mathcal{O}^{\rho}_{[g]} \oplus \mathcal{O}^{\sigma}_{[h]}) \cong \mathfrak{B}(\mathcal{O}^{\rho}_{[g]}) \otimes \mathfrak{B}(\mathcal{O}^{\sigma}_{[h]}) \otimes \mathfrak{B}(\mathcal{O}^{\psi}_{[gh]})$$

练习5.1.12。

- 根据给定的数据，计算 G 的作用，以及 $\mathcal{O}^{\rho}_{[g]}$ 和 $\mathcal{O}^{\sigma}_{[h]}$上的对角编织

- 根据给定的数据计算 $\mathcal{O}^{\rho}_{[g]}$ 和$\mathcal{O}^{\sigma}_{[g]}$ 的张量积，并将其分解。

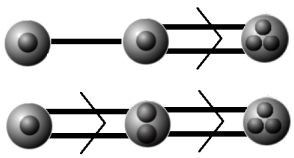
- 计算 $[\mathcal{O}^{\rho}_{g}, \mathcal{O}^{\sigma}_{h}]$ 中的四个编织交换子，并尝试确定哪些在 *Nichols* 代数中为零。

- 此外假设 G 的阶为8，因此 g^2、 h^2、$(gh)^2$ 要么为1 ，要么为 ε。指出哪些选择导致二面体群，哪些导致四元数群，并给出特征标的所有可能选择。

这类例子有一大族：非阿贝尔群是阿贝尔群的中心扩张，由对角 Nichols 代数与图自同构通过一种称为折叠的过程得到 [Len14]。这一思想可得到根系为 A_n, D_n, E_6, E_7, E_8、维数为 $2^{2|\Phi^+|}$ 的 Nichols 代数，它们来自将两个互不相交、根为 Φ^+ 的对角 Nichols 代数副本折叠，并交换这两个副本的自同构；还可得到根系为 B_n, C_n, F_4, G_2 、维数为 $2^{|'\Phi^+|}$ 的 Nichols 代数，其中 $'\Phi$ 是具有非平凡图自同构的根系 $D_{n+1}, A_{2n-1}, E_6, D_4$。情形 A_2 还原了上文的前一个例子。在第一类情形中，附属于根的所有 Yetter-Drinfeld 模均为 2 维；在第二类情形中，附属于短根的模对应于长度为 2 的轨道，且为 2 维，而附属于长根的模为 1 维。

回到秩 2 的例子，从分类的角度来看，在非阿贝尔情形下，根系有限（更准确地说，仅反射不可约这一事实）就有极强的限制性，因此 [HS10] 中秩 ≥ 2 的有限维 Nichols 代数得以完整分类；这一系列后续论文最终 culminated in [HV17]。除了中心扩张之外，分类过程中还发现了其他一些例外情形。

例 5.1.13。 在秩 *3* 的情形下，除了 A_3， C_3之外，在非阿贝尔群上只有一个有限维例外 *Nichols* 代数（定义于含有三次单位根的任意域，或特征为 3 的任意域上）。它 并非李型，其根系为秩 *3* 第 *9* 号，含有 *13* 个根，根空间维数为（在第一个对象 a具有 B_3 *Cartan* 矩阵的情形下，见 [HV17] 引理 *8.8*：



$\alpha \in R_+^a$	维数(M_α)
$1, 2, 12, 12^2 3^4, 12^3 3^4, 1^2 2^3 3^4$	*1*
$23^2, 123^2, 12^2 3^2$	*2*
$3, 23, 123, 12^2 3^3$	*3*

由 α_2、 α_3 生成的秩 *2* 抛物子群是定义在非阿贝尔群上的例外尼古拉斯代数，其标准根系类型为 B_2。三维秩 *1* 抛物子群是定义在非阿贝尔群 $\mathbb{S}_3$ 上的维数为 12 的 *Nichols* 代数。

5.2 其他 Nichols 代数上的 Nichols 代数

回顾一下，我们在第 3 章引入了 Nichols 代数的反射，并附带构造了一个根系。但我们尚未解释相应的 Nichols 代数是否以及如何彼此关联，也尚未证明 PBW 定理。现在我们至少会概述这一证明，参见 [HS20] 第 12-14 章。

在我看来，这一主要思想在许多超出这一特定证明的情形中都很有趣：我们可以将抛物情形中的 Nichols 代数视为建立在其他 Nichols 代数之上的 Nichols 代数。特别是，这需要用到上一章中的 Hopf 代数定义，而且看起来与上一节中建立在非阿贝尔群之上的 Nichols 代数颇为相似。[2]

考虑某个编织幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象 $V = U \oplus W$。用π_U，π_W表示到 U，W的投射，用 ι_U，ι_W表示 U，W的嵌入。于是存在一个 Hopf 代数的分次投射

$$\mathfrak{B}(U \oplus W) \overset{\pi_U}{\leftrightarrows} \mathfrak{B}(U)$$

由泛性质可得。我们考虑余不变量

$$K = \mathfrak{R}(U \oplus W)^{\mathrm{coin}(\pi_U)} = \{x \in \mathfrak{R}(U \oplus W) \mid (\mathrm{id} \otimes \pi_U)\Delta(x) = x \otimes 1\}$$

根据 Radford投影定理[3] 4.4.1，我们有

$$\mathfrak{B}(U \oplus W) = K \rtimes \mathfrak{B}(U)$$

且 K 承载伴随作用和一个余作用，并通过修正余乘法成为 Yetter-Drinfeld 模范畴中的 Hopf 代数 ${}^{\mathfrak{R}(U)}_{\mathfrak{R}(U)}\mathcal{YD}(\mathcal{C})$。现在有一个漂亮的结果

定理 5.2.1 ([HS20] 定理 13.2.8)。 在本书的设置中（假设 *1)*

$$K \cong \mathfrak{B}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{B}(U)}(W))$$

是由生成模 $\mathrm{ad}^{\mathfrak{B}(U)}(W)$ 在伴随作用下生成的模 ${}^{\mathfrak{R}(U)}_{\mathfrak{R}(U)}\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ 的 *Nichols* 代数。

注 5.2.2。 看来这个证明在任意编织张量范畴中也同样成立。

我们稍作改写以突出抛物情形：设 $X = \bigoplus_{i \in I} X_i$ withX_i 为单对象。设 $J \subset \{1, \dots, n\}$ 是单根的一个子集，并采用前面的记号取 $U = X_J = \bigoplus_{j \in J} X_j$ 和 $W = \bigoplus_{i \notin J}$。那么我们之前的断言表明

$$\mathfrak{B}(X) \cong \mathfrak{B}(X_J) \rtimes \mathfrak{B}(X_{I \setminus J}), \qquad X_{I \setminus J} := \bigoplus_{i \notin J} X_{i+J}, \qquad X_{i+J} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{B}(X_J)}(X_i)$$

[2]这可能不仅仅是一种并行性.....[3]我们在 $\mathcal{C}$ 中调用它，而在 [HS20] 中，则是在取 smashproduct 之后调用它

例 5.2.3 (A_2关于 A_1)。 考虑对角 *Nichols* 代数 $\mathfrak{B}(x_1\mathbb{C}\oplus x_2\mathbb{C})$，其编织矩阵如下，我们认出它是 $u_q^+(\mathfrak{sl}_3)$:

$$(q_{ij})_{ij}=\begin{pmatrix} q^2 & q^{-1} \\ q^{-1} & q^2 \end{pmatrix}$$

正如我们在 *Rosso* 引理中看到的 *2.1.15*，这个 *Nichols* 代数满足量子 *Serre* 关系

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}_{x_1})^2(x_2)&=0\\(\mathrm{ad}_{x_2})^2(x_1)&=0\end{aligned}$$

令 $\pi_1=\pi_U$ 为将 x_2 置零的投射，其核是由x_2生成的理想。余不变量 K 除了包含通过伴随作用得到的 x_2 之外，还包含元素

$$x_{12}:=\mathrm{ad}_{x_1}(x_2)=x_1x_2-q_{12}x_2x_1$$

这一事实也可以直接验证:

$$\begin{aligned}\Delta(x_1x_2-q_{12}x_2x_1)&=x_1x_2\otimes 1+x_1\otimes x_2+q_{12}x_2\otimes x_1+1\otimes x_1x_2\\&\quad-q_{12}\big(x_2x_1\otimes 1+x_2\otimes x_1+q_{21}x_1\otimes x_2+1\otimes x_2x_1\big)\\&=\mathrm{ad}_{x_1}(x_2)\otimes 1+(1-q_{12}q_{21})(x_1\otimes x_2)+1\otimes\mathrm{ad}_{x_1}(x_2)\end{aligned}$$

因为对第二个张量因子应用 π_1 时，中间项（当然还有最后一项）会消失。*Radford*投影定理中 x_{12} 的余作用，是通过对第一个因子应用π 给出的，因此

$$\delta(x_{12})=(1-q_{12}q_{21})(x_1\otimes x_2)+1\otimes\mathrm{ad}_{x_1}(x_2)$$

现在我们根据作用和余作用，计算这个2维对象上的非对角型编织矩阵：$\mathfrak{n}(U)$ $\mathfrak{n}(U)$ $\mathcal{YD}(\mathcal{C})$

$$\begin{pmatrix} x_2\otimes x_2 & x_2\otimes x_{12} \\ x_{12}\otimes x_2 & x_{12}\otimes x_{12}\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix} q_{22}(x_2\otimes x_2) & q_{21}q_{22}(x_{12}\otimes x_2) \\ q_{12}q_{22}(x_2\otimes x_{12}) & q_{11}q_{12}q_{21}q_{22}(x_{12}\otimes x_{12}) \\ +q_{22}(1-q_{12}q_{21})(\mathrm{ad}_{x_1}(x_2)\otimes x_2) & +q_{21}q_{22}(\cancel{\mathrm{ad}_{x_1}(x_{12})}x_{12}\otimes x_2)\end{pmatrix}$$

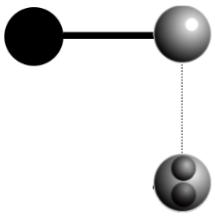
对上述断言的一个非平凡检验是，这个 *Nichols* 代数再现了第二个量子 *Serre* 关系（注意它包含 q-交换子 $x_{21}=[x_2,x_1]_q$，而该交换子并不与 x_{12} 成比例）。我们可以通过匹配系数来验证，它可以用生成元 x_2、x_{12} 借助 $q_{12}q_{21}q_{22}=1$ 改写如下

$$\begin{aligned}[x_2,[x_2,x_1]_q]_q&=x_2(x_2x_1-q_{21}x_1x_2)-q_{22}q_{21}(x_2x_1-q_{21}x_1x_2)x_2\\&=-q_{12}^{-1}x_2(x_1x_2-q_{12}x_2x_1)+q_{22}q_{21}^2(x_1x_2-q_{12}x_2x_1)x_2\\&=-q_{22}q_{21}\big(x_2x_{12}-q_{21}x_{12}x_2\big)\end{aligned}$$

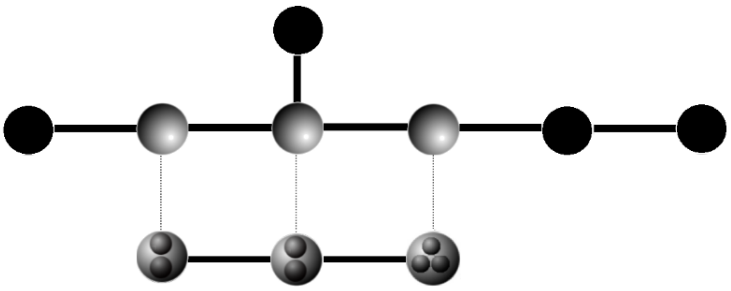
注记 5.2.4。 我们可以询问 $\mathfrak{B}(X_{I\setminus J})$ 的根系是什么。在 [CL17] 中，我们已经证明，这可以用超平面排列的限制来描述。

从组合角度看，描述很直观：取所有根的集合 Φ^+ *for* X，删去仅含单根 $\alpha_j, j \in J$ 的所有根，并在其余根上考虑如下等价关系：从线性组合中删去单根 $\alpha_j, j \in J$。等价类的大小 $\alpha + J$就是 *PBW*分解中相应根空间 $(X_{I\setminus J})_{\alpha+J}$的维数。有时所得根系不是约化的，也就是说，$2(\alpha + J)$也可能是一个根。

在我们的初始例子中，类型为 A_2 的根系限制为类型为 A_1 的根系，其根空间为2维



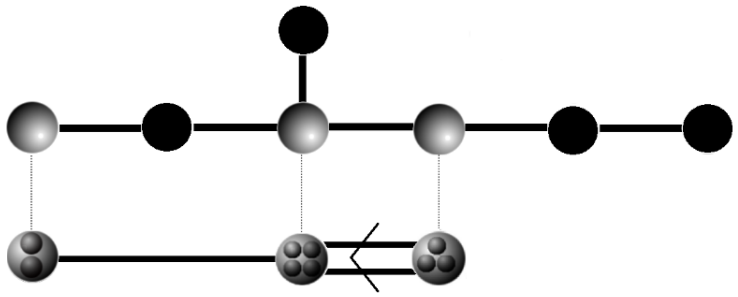
一般而言，所得的根系可以是广义根系，即使初始根系来自李代数，参见 [DF24] 例如，在 [CL17] 例 *4.19* 中，我们计算了 E_7 关于抛物子代数 $A_1 \times A_1 \times A_2$的限制：



总之，具有63 个根的 *Weyl*群构形 E_7 的限制具有散在型7 的 *Weyl* 群胚，且有 13 个根（其中一个是非约化的）。具体而言，取 E_7 的根并且只考虑条目 α_3、α_4、α_5，除(0、0、0)之外

$\Phi^+ + J$	(1,0,0)	(0,1,0)	(0,0,1)	(1,1,0)	(0,1,1)	(1,1,1)	+2(1,1,1)
重数	2	2	3	4	6	12	*+3*
$\Phi^+ + J$	(1,2,1)	(2, 2, 1)	(1, 2, 2)	(2, 3, 2)	(2,3,3)	(2,4,3)	(3, 4, 3)
重数	6	3	6	6	2	1	2

我们可以清楚地发现，这个基下的 *Dynkin* 图属于 A_3 型。经过反射 $s_1 s_2$ 后，*Dynkin* 图发生了变化，因为底层抛物子群已经改变。



我们在本文中已经验证，事实上，所有秩为 ≥ 3 的广义根系都以这种方式出现。

习题 5.2.5。考虑根系 B_2、G_2 和 $J = \{\alpha_1\}$ 或 $J = \{\alpha_2\}$。计算限制根系。

考虑根系 A_{n+1+m} 和 $J = \{n+1\}$。计算限制根系。

我们最后讨论这一构造对于根系一般理论和 [HS13] 中 PBW基的意义。

- 考虑上述关于 $J = \{j\}$ 的抛物情形，即

$$\mathfrak{B}(X) \cong \mathfrak{B}(X_{I\setminus J}) \rtimes \mathfrak{B}(X_j), \qquad X_{I\setminus J} := \bigoplus_{i\neq j} X_{i+J} \in {}^{\mathfrak{B}(X_j)}_{\mathfrak{B}(X_j)}\mathcal{YD}(\mathcal{C})$$

- 回顾一个等价定义，$\mathfrak{B}(X_j)$ 与 $\mathfrak{R}(X_j^*)$ 之间存在非退化的 Hopf配对。利用定理 4.2.8 中针对 Yetter-Drinfeld 模的对偶化函子 Ω，我们可以将每个直和项 X_{i+J} 以及整个 $X_{I\setminus J}$映射为 Yetter-Drinfeld 模 $\Omega(X_{i+J})$、$\Omega(X_{I\setminus J})$，它们位于 $\mathfrak{R}(X_j^*)$ 上。由于这是范畴的辫化等价，它将秩 1 Nichols 代数 $\mathfrak{B}(X_{i+J}$ 以及秩 $n-1$ Nichols 代数 $\mathfrak{B}(X_{I\setminus J})$ 映射为相应的 Nichols代数。

  将各部分重新粘合起来，我们定义反射*Nichols*代数

$$R_j(\mathfrak{B}(X)) = \Omega(\mathfrak{B}(X_{I\setminus J})) \rtimes \mathfrak{B}(X_j^*).$$

  由于对偶化函子会互换作用与余作用，因此也会互换最高权向量与最低权向量。因此，这确实是先前定义的反射Yetter-Drinfeld模的Nichols 代数

$$R_j(X) := \mathrm{ad}^{-\mathsf{c}_{i1}}(X_j)(X_1) \oplus \cdots \oplus X_j^* \oplus \mathrm{ad}^{-\mathsf{c}_{in}}(X_j)(X_n)$$

- 现在我们得到这两个Nichols代数之间一个已证明的关系。例如，如果它们的维数有限，则二者维数相同。此外，根据构造以及范畴论视角，它们的Drinfeld 中心等价，

$${}^{\mathfrak{R}(X)}_{\mathfrak{R}(X)}\mathcal{YD} \cong {}^{\mathfrak{B}(X_{I\setminus J})\rtimes\mathfrak{B}(X_j)}_{\mathfrak{B}(X_{I\setminus J})\rtimes\mathfrak{B}(X_j)}\mathcal{YD} \cong {}^{\mathfrak{B}(X_{I\setminus J})}_{\mathfrak{B}(X_{I\setminus J})}\mathcal{YD}^{\mathfrak{B}(X_j)}_{\mathfrak{B}(X_j)}\mathcal{YD} \cong {}^{\Omega(\mathfrak{B}(X_{I\setminus J}))}_{\Omega(\mathfrak{B}(X_{I\setminus J}))}\mathcal{YD}^{\mathfrak{B}(X_j^*)}_{\mathfrak{B}(X_j^*)}\mathcal{YD} \cong {}^{\mathfrak{R}(R_j(X))}_{\mathfrak{R}(R_j(X))}\mathcal{YD}$$

  注：这是 Morita 等价的一个 2-范畴版本，因此存在一个可逆双模范畴，以及表示范畴上的模范畴之间的等价。

一个主要的技术断言是，对于有限$^{-c_{i1}}(X_j)(X_1$，它仍然是不可约的。再次强调，这在任意范畴中都应成立，而c_{i1}中的改进论证可参见 [Wol23]。

最后，可以迭代这一分解，从而得到$\mathfrak{B}(X)$中的余理想子代数旗，并证明3.4.2中的 PBW 定理。通过这种方式， [HS13] 还证明了一个重要猜想。该猜想早已在量子群的情形下得到证明：齐次余理想子代数的集合与 Weyl 群的元素之间存在双射。

5.3 迈向新的例子

现在我们列出两个超出 [HS20] 范围的情形，我们认为它们值得在未来研究。我们试图提供自然的背景以及具体可计算的例子。从共形场论的角度看，这两类情形都非常有趣：

以下结构称为 G-分次扩张 $\mathcal{C}$：设 $\mathcal{C}$ 是一个带有群 G作用的编织张量范畴，那么根据 [ENO10] ，存在一个（除去某个障碍以及某种上同调选择之外的） G-分次张量范畴 $\mathcal{C}=\bigoplus_{g\in G}\mathcal{C}_g$ ，它带有 $\mathcal{C}_e=\mathcal{C}$ 的G-作用，使得 $g.\mathcal{C}_g=\mathcal{C}_{hgh^{-1}}$ （这是一个 2-范畴意义下的 Yetter–Drinfeld 条件），并具有交叉辫结构；其 G-等变对象构成一个编织张量范畴。

例 5.3.1 (例如参见 [GLM24] 第 3 节)。 设 Γ 是一个奇数阶有限阿贝尔群，且 $G=\mathbb{Z}_2$ 通过 -1作用。那么 $\mathcal{C}_e=\mathrm{Vect}_\Gamma^Q$ 的扩张具有 $\mathcal{C}_g=\mathrm{Vect}$ ，其中有唯一的简单对象 X 满足 $\mathbb{C}_a\otimes X=X$ 对于任意 $a\in\Gamma$ 和 $X\otimes X=\bigoplus_{g\in G}\mathbb{C}_g$。其中存在非平凡结合子。

如果我们计算 $\mathcal{C}_e$中已有对象的 Nichols 代数，那么作为代数的 Nichols 代数并不会改变；它只是在等变化中提升为 Hopf 代数，于是我们基本上得到了第 5.1 节简要提及的折叠构造。

问题 7。 计算 $\mathcal{C}_g$ 中对象的 *Nichols* 代数。例如，计算 X 的 *Nichols* 代数；更一般地，计算 $\mathcal{C}\boxtimes\mathrm{Vect}_{\Gamma'}$ 中任意 $X\boxtimes\mathbb{C}_x$ 的 *Nichols* 代数，其中 $\mathcal{C}\boxtimes\mathrm{Vect}_{\Gamma'}$ 基于某个其他有限群（以便在编织的选择上更加灵活）。一般而言：对 G 分次扩张的扭曲扇区中的 *Nichols* 代数进行分类

另一类非常重要的、不带任何遗忘函子的半单有限辫幺半范畴来源，是正整数层上仿射李代数$\hat{}\mathfrak{g}_\kappa$ 的表示。从代数角度看，这些范畴可由Rep($u_q(\mathfrak{g})$)经称为半单化的过程得到。

$\hat{}$**例5.3.2** ($(\mathfrak{sl}_2)_\kappa$). 编织融合范畴 $\mathcal{C}$ 被称为 $A(\ell)$ 型，如果它有ℓ 个互不等价的简单对象 $X_0=1$ 和 X_1，……， $X_{\ell-1}$，且

$$X_1\otimes X_i\cong X_{i-1}\oplus X_{i+1}\qquad for\qquad 1\le i\le \ell-2$$

$$X_1\otimes X_{\ell-1}\cong X_{\ell-2}$$

请注意，这些是 $\mathfrak{sl}_2$ 截断于 n的融合规则。结合子和编织已在 [FK93,CM17]中得到明确分类。

问题 8。 计算此类范畴中对象上的 *Nichols* 代数。一个显而易见的例子来源是取第 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}'$ *3.4*节中的抛物情形，那么$(u_q(\mathfrak{g}')^+)^{\mathrm{coin}(\pi)}$ 是 $u_q(\mathfrak{g})$上的 *Nichols* 代数。对 $u_q(\mathfrak{g})$ 应用半单化后，这便得到 $\mathcal{C}$中的一个编织*Hopf* 代数，通常就是相应的 *Nichols* 代数（请给出更好的判据，以确定何时如此）。问题在于， $\mathcal{C}$中是否还有更多有限*Nichols*代数。

例如，将此方法应用于 $\mathfrak{sl}_3$ 或 $\mathfrak{sl}(2|1)$ （其中带有 q 一个 ℓ 次单位根以及抛物子$\mathfrak{sl}_2$），可得到类型为 $A(\ell)$的范畴中标准表示 X_1 的像所对应的 *Nichols*代数。

第6章

重构结果

此时我还想讨论由 Nichols 代数得到的 Hopf 代数和张量范畴的分类与重构结果。这不是本课程的主要主题，但我至少想对其作一总结，读者可参阅综述 [AGI19]。我在定理 6.1.6 中加入了这些结果的范畴版本。在对范畴中的交换代数作了一些偏离主题的讨论之后，我还将给出一些关于具编织结构的张量范畴的重构结果，这些结果是用 Nichols 代数的 Drinfeld 中心来表述的。

6.1 Andruskiewitsch-Schneider 纲领

Nichols 代数的一项重大成就，也是直到今天使用 Nichols 代数的主要原因，便是 Andruskiewitsch-Schneider 纲领：在 [AS10]中，对阿贝尔群上的有限维尖点 Hopf 代数进行分类（在向量空间范畴中）。

其思想如下：

- 每个 Hopf 代数 H 都关联着一个余根基滤过，它与代数的雅各布森根基滤过互为对偶。

$$H_0 \subset H_1 \subset \cdots$$

这里， H_0 是所有单对象子余代数的直和，递归定义如下：

$$H_i = \Delta^{-1}(H_1 \otimes H_{i-1} + H_{i-1} \otimes H_1)$$

- 尖点的 表示 H_0 是一个群环 $\mathbb{K}[\Gamma]$，即所有简单子余代数都是一维的$g\mathbb{K}$。于是， H_1 就是斜本原元构成的空间。在这种情况下，余根基滤过是一个 Hopf代数滤过。

- 我们考虑关于该滤过的分次*Hopf*代数gr(H)，即从乘法 $H_i \cdot H_j$ 中去掉所有次数较低的项 $< i + j$。
- 由 H_0 和 H_1 在 gr(H) 中生成的 Hopf 子代数，按构造即为 $\mathbb{K}[G]$ 与 H_1/H_0 的 Nichols 代数的 Radford 双积（作为显式代表，可取所有斜本原元 $\Delta(x) = g \otimes x+$）。

因此，分类问题转化为三个独立的问题：

- 关于 G，有哪些有限维 Nichols 代数?
- 我们能否排除存在除 H_0, H_1之外的其他生成元的可能性?
- 可能的变形或提升有哪些？也就是说，对于如上所述、作为 Nichols 代数与 $\mathbb{K}[G]$的 Radford 双积给出的 gr(H)，可能的 H 有哪些？这里有两个不同的问题：Nichols 代数本身作为编织张量范畴中的 Hopf 代数，是否存在变形？Radford 双积是否存在变形?

例 6.1.1。 小量子群 $H = u_q(\mathfrak{g})$ 的生成元为 E_i, F_i, K_i，参见第 *1.3* 节。余根基 H_0 由群元素 K_i生成，第一度分量 H_1 由 E_i, F_i生成。非分次的关系为 $[E, F] =(K - K^{-1})/(q - q^{-1})$。因此，该分次代数是 H_0 与两个交换的 *Nichols* 代数 u_q^+和 u_q^-的 *Radford* 双积。

例 6.1.2。 还存在涉及多个 *Borel* 部分的更为奇特的联结。

请注意，根据 Drinfeld 双／中心的构造，包含两个 Borel 子代数副本及一个非分次关系的特定形式的量子群，其表示范畴带有一种编织结构。我们目前讨论的分类忽略了这一额外要求。我们将在第 6.3 节讨论涉及该编织结构的重构结果。

问题 9。 *Andruskiewitsch-Schneider* 纲领所产生的点状 *Hopf* 代数中，哪些具有非退化编织？（人们或许会预期：本质上只有 *Drinfeld* 双。）

对于 G 不涉及小素数 2、3、5、7 的阿贝尔情形，该纲领已在 [AS10] 中完成。事后看来，之所以限制素数，是因为在这些情形下，唯一的 Nichols 代数就是量子群中已熟知的那些。

为处理小素数，Heckenberger 开始了对任意对角 Nichols 代数的分类 [Hec09]。Angiono 计算了关系，结果发现小素数会带来例外，即使对于通常的量子群也是如此，参见 [Ang13]。另请参阅全面的综述 [AA17]。

Angiono 在 [AKM15] 中给出了一个有用的判据，用于判断 Nichols 代数和 Radford 双积是否可变形：若存在一个斜原始元 R，且它作为对象同构（即具有相同的 x - 分次和 G- 作用），则关系 G 可以变形。本文通过检查所有 Nichols 代数的所有关系，证明 Nichols 代数本身不存在变形。有趣的是，是否存在更高次数的额外生成元这一问题几乎与之等价，见 [AGI11]。

例 6.1.3。 取由生成元 x 生成的 $X = \mathbb{C}_g^\chi$，它定义在由生成元 g生成的群 $G = \mathbb{Z}_n$ 上。设 $q = \chi(g)$ 是一个本原 n 次单位根，则 *Nichols* 代数为 $\mathbb{C}[x]/x^n$。更准确地说，关系 x^n 是次数为 $\mathbb{C}_{g^n}^{\chi^n}$ 的原始元，这意味着在张量代数与群代数的 *Radford* 双积中，一个关系

$$\Delta(x^n) = g^n \otimes x^n + x^n \otimes 1$$

这意味着，作为变形关系，我们可以将此元素等同于 $g^n - 1$ 的一个倍数；当且仅当 $\chi^n = 1$ 时，它们的余乘法相同。

例 6.1.4. 对于无限维 *Hopf* 代数，存在 *Nichols* 代数自身发生变形的 *Hopf* 代数实例，也存在生成元次数较高的实例：我们再来考虑最小的情形 $\mathcal{C} = \mathrm{Vect}_\Gamma^Q$ 和 $X = x\mathbb{C}_a$，其自编织为 $x \otimes x \to -(x \otimes x)$，因此 *Nichols* 代数为 $\mathbb{C}[x]/x^2$。

- $H = \mathbb{C}[x]$ 也是一个 *Hopf* 代数，但它并非 *Nichols* 代数，因为它还含有额外的原始元 $y = x^2$。现在我们将 *Andruskiewitsch-Schneider* 纲领应用于这个 *Hopf* 代数：在余根基滤过中， x、 y 的次数都是1。因此，分次代数为

  $$\mathrm{gr}(H) = \mathbb{C}[x, y]/x^2$$

  这是 x、 y 的 *Nichols* 代数，其编织矩阵为 $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$。变形将关系式改为 $x^2 = y$。

- 我们通过添加一个生成元 z （其余乘法为

  $$\Delta(z) = z \otimes 1 + x \otimes x + 1 \otimes z$$

  这个生成元在余根基滤过中的次数为2，但它不是 x 的平方 .

这两种构造都可以推广到更一般的 *Nichols* 代数，也适用于任意量子群 $u_q(\mathfrak{g})$，在这种情况下，它们分别称为具有大中心的量子群（或非限制特化，或 *Kac-DeConcini-Procesi* 量子群），以及除幂量子群（或限制特化，或 *Lusztig* 量子群）。在第一种情况下，幂 $E_i^n, F_i^n, K_i^n - 1$ （或视具体情况而定的类似幂）是非零的新生成元，它们生成一个大中心子代数，该子代数可以视为泊松对偶李群的函数环。因此，这可以理解为纤维化在这个李群之上，而零纤维就是小量子群。在第二种情况下，我们保留截断的 $E_i^n, F_i^n, K_i^n - 1 = 0$，但添加额外的“重整化”除幂 $E_i^{(n)} = E^n/[n]_q$[1]。在上面的例子中， $z = E^{(2)}$ 而当我们计算 z的余乘法时，分母中的 $[2]_q$ 恰好抵消了混合项中趋于零的系数

$$\Delta(E^2) = E^2 \otimes 1 + [2]_q(E \otimes E) + 1 \otimes E^2$$

在提升纲领中，参见综述 [AGI19], ，所有对角 Nichols 代数的所有可能提升均已计算出来。根据 Nichols 代数中的例外定义关系，存在相当例外的情形

例 6.1.5。 在 $u_q(A_3)^+$ 处 $q^2 = -1$ ，量子 *Serre* 关系是被蕴含的，但存在一个新的关系

$$[x_2, [x_1, [x_3, x_2]_q]_q]_q = 0$$

相应地，该关系存在一种非平凡变形，参见 [AAGI17] 命题 *4.8*。

[1]从数学上说，我们在具有一般 q 的量子群中进行计算，其中此类表达式是严格的，然后证明除幂构成一个子代数，其结构系数仅为 q 中的多项式，从而是一个整形式，因此 q 可以特殊化。

问题 10。奇异李超代数和围李超代数似乎并不对应 *Nichols* 代数。然而，文献中明确对应的量子超群的具体表示必须纳入分类计划。我预计它们对应于单个 *Borel*部分和一个奇异提升。例如，类型为$A(n|n)$ 的 *Borel*部分，其连接关系 $[x_i, x_{\sigma(i)}]$ 分别依据图对称性；在第二种情况下，则是对关系 $[x_2, [x_1, [x_3, x_2]]]$进行非平凡提升

非阿贝尔群的情形将在第 5.1 节讨论

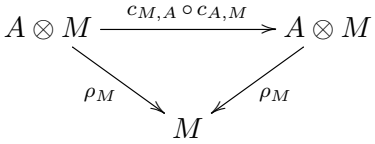
鉴于 Radford投影定理的范畴版本 4.4.5，我还要提及一个范畴版本，它恰好使用 Andruskiewisch- Schneider 的输出结果来确定表示 Hopf代数：

定理6.1.6 ([Len25])。 设 $\mathcal{B}$ 是一个有限刚性幺半范畴，且 $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ 是一个中心辫幺半范畴，并且等价于 Vect_Γ^Q ，使得 $\mathcal{B}$中的每个简单对象都在 $\mathcal{C}$中。则 $\mathcal{B} \cong \mathrm{CoRep}(\mathfrak{N})$ 与 $\mathfrak{N}$ 以下 $\mathcal{C}$-对象的 *Nichols* 代数

$$\bigoplus_{a\in\Gamma} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}}(\mathbb{C}_a, 1)\mathbb{C}_a$$

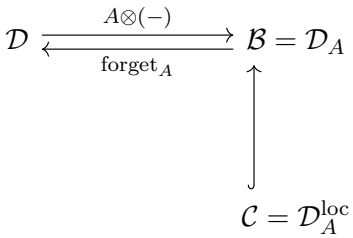
6.2 范畴交换代数

设 A 是张量范畴 $\mathcal{D}$中的代数，则有一个关于 A-模的范畴的直接定义，我们称之为 $\mathcal{D}_A$，以及一个关于 A-A-双模的张量范畴 ${}_A\mathcal{D}_A$，其张量积为 $\otimes_A$。如果 A 是编织张量范畴$\mathcal{D}$中的交换代数，那么如同经典代数中一样，每个 A-模都可以转化为一个 A-A-双模，并且 $\mathcal{D}_A$ 成为一个带有 $\otimes_A$的张量范畴。然而，在编织情形下，这种识别有两种不等价的选择，即使用上辫化或下辫化。反过来，张量范畴 $\mathcal{D}_A$ 本身不是编织的，但存在一个由局部 A-模 M组成的编织张量子范畴，这些模满足以下图表交换：

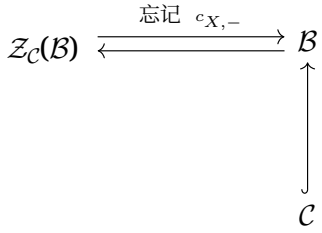


这在 [Par95、KO02], 中较早出现；另见 [FFRS06、SY24] ，了解这些范畴的关键性质。

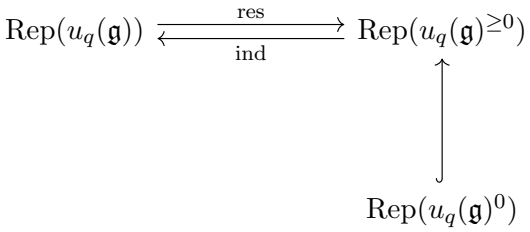
我们有一对伴随函子：左伴随是右正合的归纳函子$A \otimes (-) : \mathcal{D} \to \mathcal{D}_A$，它是一个幺半函子；右伴随是左正合的遗忘函子，它遗忘了 A-作用 $\mathrm{forget}_A : \mathcal{D}_A \to \mathcal{D}$，它是一个松幺半函子。我们在下图中总结所有结构：



例 6.2.1. 任意 $\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ 中都存在一个交换代数 A (它是张量单位在 $\mathcal{B}$ 经第 1.3节中的归纳函子作用下的像 A-模的范畴是 $\mathcal{B}$，而局部 A-模的范畴是 $\mathcal{C}$。



对于小量子群，我们有如下图景。注意，与交换代数相比，归纳法和限制的方向相反；而将$\mathrm{Rep}(A)\otimes_A$ 与 *Hopf* 子代数 $u_q(\mathfrak{g})$ 上的表示对应起来并非显而易见，但这在一般的 *Hopf* 代数框架下成立 [Tak79,Skr07]



6.3 Schauenburg函子

作为这一构造的逆向过程，我们通过进一步发展 [CLR23] 第 3 节中 P. Schauenburg 提出的函子，重构任意交换代数对应的水平箭头 [Sch01]。

考虑归纳函子

$$\mathcal{D} \xrightarrow{A\otimes(-)} \mathcal{D}_A$$

一个重要的观察是，像实际上带有半编织，这主要是因为

$$X\otimes_A (A\otimes V)\cong X\otimes V \qquad (A\otimes V)\otimes_A X\cong V\otimes X$$

与 A 分别仅作用于第一因子和第二因子，参见 [CLR23]。因此，该函子可以提升为一个取值于中心的函子，实际上还可以提升为一个取值于相对中心的函子

$$\mathcal{D} \xrightarrow{A\otimes(-)} \mathcal{Z}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_A)$$

相当令人惊讶的是，这通常可以用 $\mathcal{D}_A$ 来重构 $\mathcal{D}$：

定理 6.3.1. 设 $\mathcal{D}$ 是有限刚性编织张量范畴，且 A 是单态交换代数。那么，升级后的归纳函子是编织幺半范畴之间的等价

$$\mathcal{D}\cong \mathcal{Z}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_A)$$

由此结论以及定理 4.4.5中的相对 Tannaka-Krein 重构可知，小量子群表示的表示范畴可由以下性质唯一刻画：其中包含一个交换代数 A （零权的对偶 Verma 模），且该范畴的 A-模中只有局部 A-模作为简单对象。这里，局部 A-模的范畴充当 Cartan 部分 $\mathcal{C}$ ，而 $\mathrm{Ext}(1, X)$ 则确定生成 Nichols 代数的编织对象。

第7章

在分析与共形场论中的应用

我现在想就量子群在分析与共形场论方面的出现作一个非常简要的概述。

为使这一点更易于理解，我首先讨论Nichols代数在复分析与偏微分方程中的出现。其主要的一般思想是：偏微分方程的解在奇点附近通常是多值的，而解析延拓会产生另一个解，因此辫群在该偏微分方程的解空间上有一个作用。我重点讨论一个特定的偏微分方程，即给定李代数 $\mathfrak{g}$的Knizhnik-Zamolochikov方程，其中辫群的作用通过著名的Drinfeld-Kohno定理与量子群 $U_q(\mathfrak{g})$的编织相关联。我还讨论阿贝尔李代数 $\mathfrak{h}$这一玩具情形，其中一切都非常显式，且编织是对角的。

其次，我们讨论Nichols代数如何在这一背景下出现。我们的主要观点是，它们可用于从阿贝尔情形 $\mathfrak{h}$ 过渡到具有Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$的半单 $\mathfrak{g}$ 。这一点通过Varchenko的工作变得清晰，我也会提及自己在这一问题上的工作。具体而言，存在某些积分，其关系与Nichols 代数关系相符。

第三，我会简要介绍共形场论和顶点代数：简而言之，量子场论会为适当的流形指定一个态空间，通常是某个微分方程的解空间。此外，还有一种相关结构，称为顶点代数；从某种意义上说，它是在解析框架中的交换环，并具有一个表示的编织张量范畴。还有一种拓扑场论图景，使这一切更加完整。

第四，我想提出两个关于 Nichols 代数出现情形的猜想。它们如今已成为定理。我们的动机范例是对数型 Kazhdan-Lusztig猜想，其目标是构造与小量子群的非半单表示范畴等价的顶点代数。但 Nichols 代数为我们指明了一片全新的例子天地。

- 顶点代数上的筛选算子恰好生成

相应表示范畴中的 Nichols 代数。

- 筛选算子的核给出一个新的顶点代数，其表示范畴应当是广义量子群 $\mathfrak{W}\mathcal{YD}(\mathrm{Rep}(\mathcal{V}))$。

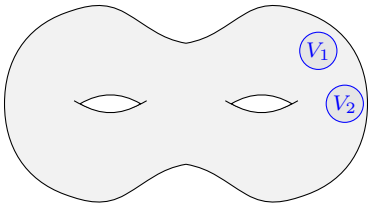
我不认为读者能一下子掌握本章涉及的所有不同理论及其相互联系（我想其中有些联系确实还不清楚）。更重要的是，读者应对这些理论中的主要对象有所了解，并通过反复出现的例子看到，每次出现的都是相同的特殊函数、相同的编织、相同的范畴，等等。

7.1 KnizhnikZamolodchikov 方程与量子群

我想向读者推荐 Varchenko 撰写的优秀麻省理工学院讲义作为主要参考资料[Var03], 部分内容在 [Kas98]中有更详细的讨论。

设 $V_1, \dots, V_n$ 是 $\mathfrak{g}$的不可约表示。设 Σ 是复曲线或黎曼曲面，具有互不相同的 puncture $z_1, \dots, z_n$。

注 7.1.1。 作为一个提示，读者可以设想一种特定的共形场论（*Wess-Zumino-Witten*模型），它基于规范群 G *on* Σ，并且在每个穿孔点z_i 处都有一个来自多重态 V_i的粒子。



现在我们考虑定义在此类 Σ的模空间上的函数 Ψ，其取值于 $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$。例如，在亏格 0 的情形下，我们可以直接令 $\Psi(z_1, \dots, z_n)$ 为一个以 n个复变量为自变量、取值于 $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ 的函数，并允许其在 $z_i = z_j$处有奇点。在亏格 1 的情形下，函数 Ψ 还取决于环面 $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ 上的复结构，因此是一个向量值模形式或 Jacobi 形式。

对于任意选择 $\kappa \in \mathbb{R}$，称为 平移层级，我们考虑 *Knishnik-Zomolochikov* 方程：

$$\left(\kappa \frac{\partial}{\partial z_i} - \sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i - z_j} \Omega_{ij}\right) \Psi(z_1, \dots, z_n) = 0, \tag{7.1}$$

其中Ω_{ij} 是 $\mathfrak{g}$ 的Casimir元，作用于张量因子 V_i 和 V_j。在例子 $\mathfrak{sl}_2$ 中，它是 $\frac{1}{2}H \otimes H + E \otimes F + F \otimes E$。

因此，这个微分方程的解空间在奇点 $z_i = z_j$ 周围具有非平凡的单值化，可将其转化为非平凡的 编织态射

$$V_i \otimes V_j \longrightarrow V_j \otimes V_i,$$

定理 7.1.2 (Drinfeld-Kohno 1987, [Koh88, Dri89])。 对于一般的 κ，*KZ* 微分方程在奇点 $z_i = z_j$ 周围的单值化与量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 在 $q = e^{\frac{\pi \mathrm{i}}{\kappa}}$ 处的编织相同。

（请注意，对于一般的 κ， $U_q(\mathfrak{g})$的表示与 $\mathfrak{g}$ 的表示作为阿贝尔范畴是相同的。）实际上，Drinfeld 发明量子群正是为了这个目的。

例 7.1.3 （阿贝尔 Knizhnik-Zamolodchikov 方程）。 设 $\mathfrak{h} = \mathbb{C}^n$ 具有平凡李括号和一个固定的内积。不可约表示 V_i 是一维的，由权 λ_i： $\mathfrak{h} \to \mathbb{C}$给出。函数 Ψ 的取值也属于一维向量空间，因此它是一个标量函数。在亏格0 的情形下，*KZ*方程为：

$$\left(\kappa \frac{\partial}{\partial z_i} - \sum_{j \neq i} \frac{(\lambda_i, \lambda_j)}{z_i - z_j}\right) \Psi(z_1, \ldots, z_n) = 0, \tag{7.2}$$

解空间是一维的，显然由下式张成：

$$\Psi(z_1, \ldots, z_n) = \prod_{i<j} (z_i - z_j)^{(\lambda_i, \lambda_j)/\kappa}$$

然而，由于这个函数通常是多值的，这个一维空间带有一个辫群表示，它显然由对角编织给出

$$V_i \otimes V_j \xrightarrow{q_{ij}} V_j \otimes V_i, \qquad q = e^{\pi \mathrm{i}(\lambda_i, \lambda_j)}$$

再来谈谈亏格1 的情形，这应当与模形式有关：事实上，*KZ*方程的解在这里由平移后的 *Dedekind* η 函数的倒数给出；从某种意义上说，它们可以拼接成一个包含连续多个分量的向量值模形式。稍微改变一下设定（所谓的格紧化），解空间便由与格陪集相关的 *Jacobi* θ 函数张成；这些函数可以拼接成一个关于模群的 *Weil* 表示的向量值模形式。加入 *puncture* 后，我们得到经典的 *Jacobi* 形式，其格取决于 z_1，…， z_n。

7.2 Nichols 代数与Varchenko-Selberg积分

我们能否利用 Cartan 子代数情形下 KZ方程的显式解，求解有限维半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 KZ方程?

这在 [Var03] 第 1 节开头已有说明。我们首先注意到，一般而言，作用 $x \in \mathfrak{g}$ 于一个解会产生一个新的解，因为 $[\Omega, (x \otimes 1 + 1 \otimes x)] = 0$。

我们希望求解 $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ 分解为不可约模时最高权向量上的 KZ方程。当然，这些向量并不在 Ω_{ij} 的作用下保持不变，但可以通过归纳法进行：

首先考虑“最高”的最高权向量 $v_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes v_{\lambda_n}$。此时 Ω^{ij} 的作用确实只是乘以标量 $\lambda_i/2$，因此存在一个解

$$\Psi(z_1,\dots,z_n)=(v_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes v_{\lambda_n})\prod_{i<j}(z_i-z_j)^{(\lambda_i,\lambda_j)/2\kappa}$$

现在，$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ “下一个”最高权向量具有如下形式

$$\sum_k c_k(v_1\otimes\cdots\otimes F.v_k\otimes\cdots\otimes v_n)$$

其中 $\sum_k c_k\lambda_k=0$（习题）。对其作用 $\Omega_{ij}=\frac{1}{2}H\otimes H+E\otimes F+F\otimes E$ 会产生一些包含前一个最高权向量的项。如 [Var03] 第2节所述，这会导出¯KZ方程的解：

$$\Phi(z_1,\dots,z_n)=\sum_k c_k(v_1\otimes\cdots\otimes F.v_k\otimes\cdots\otimes v_n)\int_\gamma\frac{\mathrm{d}t}{t-z_k}\prod_{i<j}(z_i-z_j)^{(\lambda_i,\lambda_j)/2\kappa}\prod_i(t-z_i)^{-\lambda_i}$$

同样，我们可以利用 $\mathfrak{g}$的作用来获得更多解。最后，还有第三种情况，此处不作讨论；它会展示更多超平面排列。

现在，我想补充一条以下形式的正式陈述，出自我直接研究 Nichols 代数的工作，其中也包括 κ 并非一般情形的情况。它显然与上述观察密切相关，因为出现了相同的积分，但具体联系及其推论尚未得到阐明。我将在下一节使用这条陈述。

问题11. 将下述结果应用于具有任意秩且参数 q 取一般值的量子群情形，从而构造 *Nichols* 代数在解空间上的作用。若能进一步利用这一结果简化 *Drinfeld-Kohno*定理的证明，那将十分理想。

给定一组复参数 $m_i,m_{ij}\in\mathbb{C}$，用于 $1\le i<j\le n$ 和。考虑如下 n 重围道积分，其被积函数为多值解析函数

$$\mathrm{Fp}((m_{ij}),(m_i)):=\int\cdots\int_{[e^0,e^{2\pi\mathrm{i}}]^n}\prod_i t_i^{m_i}\prod_{i<j}(t_i-t_j)^{m_{ij}}\,\mathrm{d}t_1\dots\mathrm{d}t_n$$

数据 (m_{ij}) 的收敛性为次极性的：对于所有满足 $|J|\ge 2$ 的 $J\subseteq\{1,\dots,n\}$

$$\sum_{1\le i<j\le n}\mathfrak{Re}(m_{ij})>-|J|+1$$

定理7.2.1 (L. 2017)。在$\mathrm{Fp}(m_{ij},m_i)$ 中的线性组合为零，当且仅当相应的 *Nichols* 代数 $\mathbb{B}(V)$ 中的元素为零，其中 $V=\langle x_1、\dots\dots、x_n\rangle$ 和 $q_{ij}=e^{\pi\mathrm{i}\,m_{ij}}$。

其思路是将 $[0,2\pi\mathrm{i}]^n$ 分解为 $n!$ 个具有固定次序 $t_{\sigma(1)}<\cdots<t_{\sigma(n)}$的单形，并利用解析延拓，将每个单形上的积分改写为标准单形 $t_1<\cdots<t_n$上的积分 rFp。解析延拓恰好产生 Matsumoto截面中 q_{ij} 的编织项，因此这个分解给出了 Fp 关于 rFp 的量子对称化公式。请注意，与 Nichols代数的情形一样，关键并不在于 Fp 本身是编织对称的；由于提升积分轮廓时涉及的选择，这并不成立。

例 7.2.2 (二次关系**)**。当次数为 2 时，我们可以利用欧拉贝塔函数 B 显式计算 Fp ：

$$\begin{aligned}\mathrm{Fp}(m_1,m_2,m_{12}) = \frac{e^{2\pi\mathrm{i}m_2}-1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{e^{2\pi\mathrm{i}m_1+2\pi\mathrm{i}m_{12}}-1}{2\pi\mathrm{i}}\ \frac{1}{m_1+m_2+m_{12}+2}\cdot\\ \cdot\left(\mathrm{B}(m_2+1,m_{12}+1)+\frac{\sin\pi m_1}{\sin\pi(m_1+m_{12})}\mathrm{B}(m_1+1,m_{12}+1)\right)\end{aligned}$$

$$\mathrm{Fp}(m_1,m_2,m_{12}) = \mathrm{rFp}(m_1,m_2,m_{12}) + e^{\pi\mathrm{i}m_{12}}\cdot\mathrm{rFp}(m_2,m_1,m_{12})$$

我们可以看到两类 *Nichols*代数二次关系：

- 当 m_{12} 为整数时：$\mathrm{Fp}(m_1,m_2,m_{12}) - (-1)^{m_{12}}\mathrm{Fp}(m_2,m_1,m_{12}) = 0$
- 当 $m_1=m_2$ 且 m_{12} 为奇数时：$\mathrm{Fp}(m_1,m_1,m_{12}) = 0$。

当公式存在极点时，论证不成立：

- $m_{12}\in-\mathbb{N}$，那么 *Nichols* 关系不成立，我们得到一个由李代数扩张而成的结构。
- $m_1+m_2+m_{12}+2=0$，对应于 *Nichols*代数反射。

7.3 共形场论与顶点代数

任何一种量子场论（我不确定是否存在完全令人满意的公理化）都必须为任意合适的流形 Σ 及其可能存在的 puncture，指定某个向量空间 $\mathcal{Z}(\Sigma)$。对于共形二维量子场论，输入是具有共形结构的曲面。正如第一节所讨论的，这意味着 $\mathcal{Z}(\Sigma)$ 中的元素，对于固定亏格 g的 Σ 以及变化的 puncture z_1、.....、z_n，是这些变量的函数。对于固定亏格 1 的 Σ ，情况也类似，它们是 Jacobi 形式。

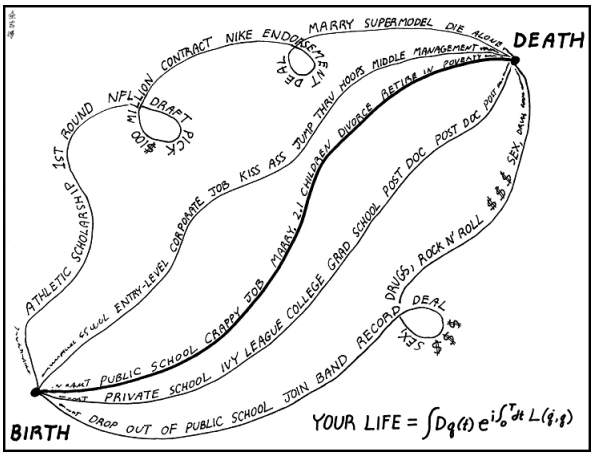
我们在 KZ方程中见过一些 $\mathcal{Z}(\Sigma)$，它们被定义为偏微分方程解空间的显式形式。下面粗略介绍一下这些空间中的元素在物理学中是如何具体产生的。尽管存在严重的数学严谨性问题，我们仍来玩一个叫作路径积分的游戏：

令 φ 是一个从 Σ 到某个 V（可以想象成路径、域或字符串）的随机函数。随机性是相对于概率测度 $P(\phi) = |A(\phi)|^2$ 而言的，通过复振幅来表示

$$A(\phi) = e^{i/\hbar\int_\Sigma \mathcal{L}(\phi(z),\phi_i(z),\ldots)\mathrm{d}z}$$

我们根据某个给定的局部性质 $\mathcal{L}$ 来“评判”函数 ϕ，该性质称为 拉格朗日量，取决于函数值 $\phi(z)$ 及其偏导子 $\phi_i(z) = \frac{\partial}{\partial z_i}\phi$，并对所有点求和——可以把指数中的积分想象成对所有点的连续乘积，从而表示每个点上相互独立的概率。

对于 $\hbar \to 0$ 这个博弈变得极端：只有那些“最佳”的 ϕ，即指数取最小值的 ϕ，才有非零的出现概率。这将 ϕ引向一个变分问题，该问题由欧拉-拉格朗日方程微分方程求解。回顾一下，18世纪人们认识到，经典力学和场论具有变分表述。因此，使用经典拉格朗日量 L，我们可以进行一种博弈；对于 $\hbar$，它归结为经典物理学所规定的 ϕ 的确定性选择。另一方面，对于有限的 $\hbar$，我们设想所有 ϕ 都在同时发生，但它们由 P加权，这意味着它们偏离经典解的程度。在这个概率博弈中，我们可以提出如下问题：对于固定的 z，期望值 $\langle\phi(z)\rangle$是多少？对于固定的 z_1，z_2，相关函数 $\langle\phi(z_1)\phi(z_2)\rangle$ 是多少？



The Path Integral Formulation of Your Life

例7.3.1（自由标量场）。考虑一个标量域 φ： $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，其拉格朗日量称为自由拉格朗日量： $\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi(z)|^2$。相应的欧拉-拉格朗日方程为

$$\Delta\varphi = 0$$

（具体含义取决于上下文：在力学中指自由运动 $x(t)'' = 0$，在静态场论中指势方程 $\Delta\varphi = 0$，在动力场论中指波动方程$\Box\varphi = 0$。接下来我们可以给 $\mathcal{L}$ 添加势能。）在量子场论中，一些 n 点关联函数可以显式地计算出来：

$$\begin{aligned}
\langle\varphi(z)\rangle &= 0\\
\langle\varphi(z_1)\varphi(z_2)\rangle &\sim \begin{cases} |z_1 - z_2|^{2-d}, & d > 2\\ \log|z_1 - z_2|, & d = 2 \end{cases}\\
\langle\varphi(z_1)\cdots\varphi(z_n)\rangle &= \textit{products of 2-point correlators}
\end{aligned}$$

为了后续使用并与前面的公式联系起来，我们也给出 $d = 2$

$$\langle e^{\lambda_1\varphi(z_1)}\cdots e^{\lambda_n\varphi(z_n)}\rangle = \prod_{i<j}|z_i - z_j|^{\lambda_i\lambda_j}$$

[1]

要引出表示论，我们还需要再推导几步：

- 对于二维场论，我们可以将 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ 视为相等，并将所有函数写成全纯函数与反全纯函数乘积之和，例如$|z_i - z_j|^{\lambda_i\lambda_j} = (z_i - z_j)^{\lambda_i\lambda_j}(\bar{z}_i - \bar{z}_j)^{\lambda_i\lambda_j}$。这样，任何二维共形场论都由两个手征（或全纯）共形场论粘合而成。代价是，手征关联函数是多值函数。因此，手征共形场论会将一个复曲线对应到一个由多值函数构成的共形块空间，并赋予其一个映射类群作用；例如，在亏格 0 的情形下，赋予其一个辫群作用。

- 对于二维手征共形场论，我们可以考察赋予穿孔圆盘的向量空间V，以及带有插入点 $0, z, \infty$ 的三穿孔球面（或裤子曲面）上的手征关联函数，它给出一个映射

$$\mathcal{Y}: \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \to \mathcal{V}[[z]]$$

元组（$\mathcal{V}, \mathcal{Y}$）称为顶点代数，事实证明，通过粘合即可恢复任意曲面的手征共形块。我们所假设的额外共形对称性对应于Virasoro李代数在 $\mathcal{V}$上的作用。

作为代数学家，我把 $\mathcal{Y}$ 想象成依赖于 z的乘法。物理局域性意味着该乘法在相差形如形式δ函数的项的意义下是交换的。类似地，可以定义模

$$\mathcal{V} \otimes M \to M[[z]]$$

以及交织算子（代数上：平衡双线性映射）

$$\mathcal{V} \otimes M \to M\{z\}[\log(z)]$$

它们依赖于 z，作为在 $z = 0$处具有正则奇点的多值函数。凭借代数直觉，平衡双线性映射的概念相当有启发性地蕴含了张量积 $M \otimes_{\mathcal{V}} N$的概念。

与代数图景的主要差别来自编织：对于交换环，简单交换即可给出另一个平衡双线性映射；而对于顶点代数，我们必须替换 $z \mapsto -z$ 并得到非平凡编织。由于该函数是多值的，我们必须说明如何进行这一操作（例如逆时针），且编织是非对称的。

总而言之，适当的顶点代数的表示范畴给出了一个编织张量范畴 [MS88、HLZ06]。

注 7.3.2。 拓扑场论（如果我们只考虑2维部分，也称为模函子）与手性共形场论的区别在于，它们仅依赖于 Σ 作为拓扑空间，但保留了关于抽象向量空间和映射类群作用的信息。*Reshetikhin-Turaev*构造

[1]在自由情形下，还有一种严格的数学表述：对 ϕ 作出试探解的傅里叶展开，并将傅里叶模态视为相互独立的随机变量。

从模张量范畴产生一个拓扑场论；更一般地，*Lyubaschenko* 的构造从非半单模张量范畴产生一个模函子。据推测，从共形场论出发并遗忘到拓扑场论（更准确地说是模函子），所得结果与先转到顶点代数，再转到表示范畴，然后从那里经由 *Lyubaschenko* 得到的结果相同。

例 7.3.3 (自由场理论，海森堡顶点代数)。 在上文讨论的自由场理论中，一切都是依赖于随机标量场 ϕ的泛函（或称可观测量）。

- 顶点代数 V 由 $\partial^n\varphi$中的多项式构成，这些多项式彼此之间具有单值的手征关联函数。例如，我们已经看到 $\langle 1(z_1)\partial\varphi(z_2)\partial\varphi(z_3)\rangle =(z_2-z_3)^{-2}$

- 对于任意固定的 $\lambda\in\mathbb{C}^n$，我们都有一个模 $\mathcal{V}_\lambda$，它由 $e^{a\varphi}$ 乘以 $\partial^n\varphi$中的多项式构成；这些多项式与 V仍具有单值的手征关联函数

$$\begin{aligned}\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}_a &\longrightarrow \mathcal{V}_a[[z]]\\ \partial\varphi\otimes e^{\lambda\varphi} &\longmapsto \lambda z^{-1}e^{\lambda\varphi}+\cdots\end{aligned}$$

- 这些元素彼此之间的手征关联函数是多值的，这种情况在上文讨论 $z_1-z_2=z$时已出现过数次

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_\lambda\otimes\mathcal{V}_\mu &\longrightarrow \mathcal{V}_{\lambda+\mu}\{z\}[\log(z)]\\ e^{\lambda\varphi}\otimes e^{\mu\varphi} &\longmapsto z^{\lambda\mu}e^{\lambda+\mu}+\cdots\end{aligned}$$

  这就给出了一个张量积（作为允许此类交织子的普适对象）

$$\mathcal{V}_\lambda\otimes_{\mathcal{V}}\mathcal{V}_\mu=\mathcal{V}_{\lambda+\mu}$$

- 通过将 z 替换为 $-z$，从而产生 $z=0$ 周围的多值性，其对应的编织显然为

$$\mathcal{V}_\lambda\otimes\mathcal{V}_\mu\xrightarrow{e^{\mathrm{i}\pi\lambda\mu}}\mathcal{V}_\mu\otimes\mathcal{V}_\lambda$$

- 与之关联的表示编织张量范畴为 $\mathrm{Vect}^\sigma_{\mathbb{C}^n}$，结合平凡的结合子和 $\sigma(\lambda,\mu)=e^{\pi\mathrm{i}(\lambda,\mu)}$。

例 7.3.4 (Wess-Zumino-Witten 模型，仿射李代数)。 存在一种建立在函数 $\varphi\colon\Sigma\to G$ 上的共形场论，其中 $\Sigma\to G$ 是某个李群，κ是某个层级，并配有特定的拉格朗日量。与之相关联的顶点代数是仿射李代数 $\hat{}g_\kappa$。具体而言，$\mathcal{V}$是零权 *Verma*模，而 $\mathcal{Y}(a_{-1},\ z)=\sum_n a_nz^{-n-1}$，其中 $a\in\mathfrak{g}$，$a_n\in\hat{}g$。从另一种诠释来看，对 z 的依赖与虚根上的函数所构成的底层交换环有关。这个顶点代数的表示范畴本质上就是仿射李代数的表示范畴；根据著名的 *Kazhdan-Lusztig* 对应，后者又是一般 q下 $U_q(\mathfrak{g})$ 的表示范畴。从某种意义上说，这就是 *Drinfeld-Kohno*定理的范畴版本。作为一种拓扑场论，它包含一个三维部分，在物理上就是 *Chern-Simons* 理论。

7.4 Nichols 代数与筛选算子

一个合理的问题是，与 KZ方程中的对应问题相一致：我们能否从与 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$（海森伯顶点代数、自由场理论）相关联的顶点代数，构造出与 $\mathfrak{g}$（仿射李代数、WZW 模型）相关联的顶点代数?

另一个合理的问题是：我们能否构造与小量子群或更一般的 Nichols 代数的 Drinfeld 中心相关联的顶点代数? 由于这些对象的表示范畴是非半单的，相应的关联函数具有对数奇点[2] 这被称为对数型 *Kazhdan–Lusztig* 猜想 [GSTF06]。

在我看来，对于选定的模 $\mathcal{N}$，作用于模 $\mathcal{N}$ 的一个筛选算子 $\mathfrak{Z}_{\mathcal{M}}$ 可表示为左乘：取交织算子。根据张量积的定义，它必然存在

$$\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}\to(\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{V}}\mathcal{N})\{z\}[\log(z)]$$

在下面的例子中，我们固定一个元素 $M\in\mathcal{M}$，即一个最高权向量（否则我们保留对 M 的依赖），于是有

$$\mathcal{N}\to(\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{V}}\mathcal{N})\{z\}[\log(z)]$$

为了消除对 z 的依赖，我们沿着 $z=0$ 周围的圆周积分。

$$\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}\to(\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{V}}\mathcal{N})$$

如果 $\mathcal{M}=\mathcal{V}$ 那么这只是留数，而 $\mathfrak{Z}_{\mathcal{M}}$ 是 $\mathcal{N}$的自同态。顶点代数的标准算符乘积展开演算表明，在某些条件下（M 共形维数为 1 的初级场），$\mathfrak{Z}_{\mathcal{M}}$ 与 Virasoro 代数的作用相容；对于不同的筛选算子 $\mathfrak{Z}_{\mathcal{M}_1}$，$\mathfrak{Z}_{\mathcal{M}_2}$ 交换子满足某种关系，因此我们得到一个李代数作用。我们称之为 局部筛选算子 。自 Dotsenko [DF84]以来，它们大量出现在共形场论文献中。

如果 $\mathcal{M}\neq\mathcal{V}$ 那么我们要沿圆周对一个多值函数积分，这需要先将圆周提升到覆盖空间上，所得结果就复杂得多。特别是，所有非整数z次幂都会产生非零贡献，结果则属于代数闭包。此外，算符乘积展开形式体系也开始失效。我们称这类算子为非局部筛选算子，例如它们会出现在 Felder 复形中。它们生成什么样的代数?

定理 7.4.1 (L.17)。 对于自由场理论，任何一组满足次极性条件（见上文）的筛选算子 $\mathfrak{Z}_{\mathcal{V}_{\alpha_i}}$ 和 $M_i=e^{\alpha_i}$，都会生成编织矩阵为 $q_{ij}=e^{\pi i(\alpha_i,\alpha_j)}$ 的 *Nichols* 代数，该矩阵对应于$\mathcal{V}_{\alpha_i}$的编织。证明本质上归结为关于 *Selberg-Varchenko* 的解析论断

积分见第7.2节。我们猜想，这对于任意顶点代数都成立。一般而言，非局域筛选算子与 *Virasoro* 作用不相容（它们显然甚至不保持分次），但我们猜想，某些恰当的单项式——恰好对应 *Nichols* 代数一侧的反射——实际上与之相容；对于，这正是 *Felder* 复形的内容。如果不满足次极性条件，我们预计 *Nichols* 代数会由一个由极点项构成的李代数扩张。

[2]确切地说，这种对数奇点是由缎带元在射影模上的非对角作用所导致的

（显然它们甚至不保持分次），但我们猜想，某些恰当的单项式——恰好对应 *Nichols* 代数一侧的反射——实际上与之相容；对于 $\mathfrak{sl}_2$，这正是 *Felder* 复形的内容。如果不满足次极性条件，我们预计 *Nichols* 代数会由一个由极点项构成的李代数扩张。

给定一组筛选算子 $\mathfrak{Z}_{\mathcal{M}_1}, \dots, \mathfrak{Z}_{\mathcal{M}_n}$，我们可以考虑筛选算子 $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ 的核。我的对数型 Kazhdan–Lusztig 猜想表述如下

猜想 7.4.2. 在适当的假设下，$\mathcal{W}$ 的表示范畴由广义量子群 $\mathfrak{Y}_{\mathfrak{B}}\mathcal{YD}(\mathrm{Rep}(\mathcal{V}))$ 给出。

例如，若我们选择 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 为一个重标度的根格，那么这预示着一种顶点代数的构造，其表示范畴由一个小量子群给出。在这种情况下，我们可以解决这个猜想。

问题 7.4.3. 将这一做法推广到量子群情形之外的 *Nichols* 代数，并应用于与其他有趣的顶点代数相关联的范畴中的 *Nichols* 代数，例如仿射李代数或轨形模型。

7.5 Kapranov-Schechtmann等价

我想提及另一个非常有趣的关系 [KS20，CERyD25] 即 Nichols 代数与 $\mathbb{S}_n$ 点的构形空间相关量之间的关系，也就是某些 perversesheaf 的上同调。希望今后能对此作进一步介绍。

参考文献

[Gau08] C. F. 高斯， *Summatio quarumdam serierum singularium*，Dieterich，哥廷根，1808（拉丁文）。于 1808 年 8 月 24 日向哥廷根皇家科学学会提交；40 页。 ↑23[Koh88] T. Kohno，
Quantized enveloping algebras and monodromy of braid groups ↑79[Dri89] V. G. Drinfel′d，
Quasi-Hopf algebras，Algebra i Analiz 1 (1989)，第 6 期，114–148（俄文）；英文译本，列宁格勒数学杂志 1 (1990)，第 6 期，1419–1457。MR1047964 ↑13，51，79[Lus84] G. Lusztig，
Characters of reductive groups over a finite field，数学研究年刊，第 107 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1984。MR0742472 ↑[Lus89] G. Lusztig， *Modular representations and quantum groups*，《典型群及相关主题》（北京，1987），Contemp. Math.，第 82 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1989，第 59–77 页，DOI 10.1090/conm/082/982278。MR0982278 ↑[EGNO15] P. Etingof、S. Gelaki、D. Nikshych 和 V. Ostrik， *Tensor categories*，数学调查与专著，第 205 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2015。MR3242743 ↑[Mac52] S. MacLane， *Cohomology theory of Abelian groups*，《国际数学家大会论文集》，马萨诸塞州剑桥，1950 年，第 2 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1952，第 8–14 页。MR0045115 ↑12[JS93] A. Joyal 和 R. Street， *Braided tensor categories*，Adv. Math. 102 (1993)，第 1 期，20–78，DOI 10.1006/aima.1993.1055。MR1250465 ↑12[Maj95] S. Majid，
Foundations of quantum group theory，剑桥大学出版社，剑桥，1995。MR1381692 ↑51[Mon93] S. Montgomery， *Hopf algebras and their actions on rings*，CBMS 数学区域会议丛书，第 82 卷，数学科学会议委员会，华盛顿特区；由美国数学会出版，普罗维登斯，罗得岛州，1993。MR1243637 ↑21[Kas98] Ch. Kassel， *Quantum groups*，《代数与算子理论》（塔什干，1997），Kluwer 学术出版社，多德雷赫特，1998，第 213–236 页（西班牙文，附英文摘要）。MR1643398 ↑13，21，78[Jan96] J. C. Jantzen，
Lectures on quantum groups，数学研究生教材，第 6 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1996。MR1359532 ↑13，43[Sch95] H.-J. Schneider， *Lectures on Hopf algebras, notes by Sonia Natale*，
http://documents famaf.unc.edu.ar/publicaciones/documents/serieb/BMat31.pdf ↑21[Sch92] P. Schauenburg， *Tannaka duality for arbitrary Hopf algebras*，Algebra Berichte [Algebra Reports],第 66 卷，Verlag Reinhard Fischer，慕尼黑，1992。MR1623637 ↑[Rad85] D. E. Radford，
The structure of Hopf algebras with a projection **92** 1985 2, , J. 322 347, 10 1016 0021 8693 85 90124 3 0778452 ↑49
Algebra（），第 – 期，DOI 。/ -（）。MR[LM25] S. Lentner 和 M. Mombelli，
Fiber functors and reconstruction of Hopf algebras，Canad. J. Math. 77 (2025)，第 5 期，1718–1761，DOI 10.4153/S0008414X24000531。MR4948339 ↑51[Lau20] R. Laugwitz，
The relative monoidal center and tensor products of monoidal categories，Com- mun. Contemp. Math. 22 (2020)，第 8 期，1950068，53，DOI 10.1142/S0219199719500688。MR4142329 ↑48，51[LW21] R. Laugwitz 和 C. Walton， *Braided commutative algebras over quantized enveloping algebras*，变换群 26 (2021)，第 3 期，957–993，DOI 10.1007/s00031-020-09599-9。MR4309556↑52

[Len16] S. Lentner, *A Frobenius homomorphism for Lusztig's quantum groups for arbitrary roots of unity* **18** 2016 3, 1550040, 42, , 《当代数学通讯》（），第 期。DOI 10.1142/S0219199715500406。MR3477402 ↑21[Lus10] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*，现代 Birkhäuser 经典丛书，Birkhäuser/Springer，纽约，2010。重印 1994 年版。MR2759715 ↑13，15，24，43，55[AS10] N. Andruskiewitsch 和 H.-J. Schneider, *On the classification of finite-dimensional pointed Hopf algebras* 2 **171** 2010 1, 375 417, 10 4007 , 《数学年刊》（）（），第 期。DOI . /an- nals.2010.171.375。MR2630042 ↑15，51，71，72[AGI19] I. Angiono 和 A. Garcia Iglesias, *Pointed Hopf algebras: a guided tour to the liftings*，Rev. Colombiana Mat. 53（2019），1–44。MR4053365 ↑71，73[AAGI17] N. Andruskiewitsch、I. Angiono 和 A. Garcia Iglesias, *Liftings of Nichols algebras of diagonal type I. Cartan type A* **9** 2017 2793 2884, , 国际数学研究通知（），– DOI 10.1093/imrn/rnw103。MR3658215 ↑73[Ang13] I. Angiono, *On Nichols algebras of diagonal type*，J. Reine Angew. Math. 683（2013），189–251，DOI 10.1515/crelle-2011-0008。MR3181554 ↑72[AKM15] I. Angiono、M. Kochetov 和 M. Mastnak, *On rigidity of Nichols algebras*，J. Pure Appl. Algebra 219（2015），第 12 期，5539–5559，DOI 10.1016/j.jpaa.2015.05.032。MR3390038 ↑72[AGI11] I. Angiono 和 A. Garcia Iglesias, *Pointed Hopf algebras with standard braidings are generated in degree one* 537, , 《群、代数与应用》，当代数学丛书，第 卷，美国数学会，普罗维登斯，RI，2011，第 57–70 页，DOI 10.1090/conm/537/10566。MR2799091 ↑72[Nic78] W. D. Nichols, *Bialgebras of type one*，《交换代数》6（1978），第 15 期，1521–1552，DOI 10.1080/00927877808822306。MR0506406 ↑15[Wor89] S. L. Woronowicz, *Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups)*，数学物理通讯 122（1989），第 1 期，125–170。MR0994499 ↑15[Ros98] M. Rosso, *Quantum groups and quantum shuffles*，Invent. Math. 133（1998），第 2 期，399–416，DOI 10.1007/s002220050249。MR1632802 ↑15，20[Hec09] I. Heckenberger, *Classification of arithmetic root systems* **220** 2009 1, , 《Adv. Math.》（），第 期。DOI . /j.aim. . . . MR , , [AHS10] N. Andruskiewitsch, I. Heckenberger 和 H.-J. Schneider, *Yetter-Drinfeld module* **132** 2010 6, 1493 1547 2766176 ↑37 43 , 《Amer. J. Math.》（），第 期。MR , [Hec06] I. Heckenberger, *The Weyl groupoid of a Nichols algebra of diagonal type*，Invent. Math. 164（2006），第 1 期，175–188，DOI 10.1007/s00222-005-0474-8。MR2207786 ↑37[Hec07] , *Examples of finite-dimensional rank 2 Nichols algebras of diagonal type*，Compos. Math. 143（2007），第 1 期，165–190，DOI 10.1112/S0010437X06002430。MR2295200 ↑40[HY08] I. Heckenberger 和 H. Yamane, *A generalization of Coxeter groups root systems and Matsumoto's theorem* **259** 2008 2, 255 276, 10 1007 00209 007 0223 3 , , , 《数学杂志》（），第 期。DOI . /s - - - 。MR2390080 ↑37[Ser96] V. Serganova, *On generalizations of root systems*，《交换代数》24（1996），第 13 期，4281–4299，DOI 10.1080/00927879608825814。MR1414584 ↑28[Cun11] M. Cuntz, *Crystallographic arrangements: Weyl groupoids and simplicial arrangements*，《数学科学通报》43（2011），第 4 期，734–744，DOI 10.1112/blms/bdr009。MR2820159 ↑36，38，39[CH09] M. Cuntz 和 I. Heckenberger, *Weyl groupoids of rank two and continued fractions*，Algebra Number Theory 3（2009），第 3 期，317–340，DOI 10.2140/ant.2009.3.317。MR2525553 ↑39，40[CH11] M. Cuntz 和 I. Heckenberger, *Reflection groupoids of rank two and cluster algebras of type A* **118** 2011 4, 1350 1363, 10 1016 2010 12 003 , J. Combin. Theory Ser. A（），第 期。DOI . /j.jcta. . . . MR2755086 ↑39[CH15] M. Cuntz 和 I. Heckenberger, *Finite Weyl groupoids*，J. Reine Angew. Math. 702（2015），77–108，DOI 10.1515/crelle-2013-0033。MR3341467 ↑38，39[CMW19] M. Cuntz、B. Mühlherr 和 C. J. Weigel, *On the Tits cone of a Weyl groupoid*，《交换代数》47（2019），第 12 期，5261–5285，DOI 10.1080/00927872.2019.1617873。MR4019339 ↑39

[HS13] I. Heckenberger 和 H.-J. Schneider, *Right coideal subalgebras of Nichols algebras and the Duflo order on the Weyl groupoid* **197** 2013 1, 139 187, , 《以色列数学杂志》（），第 期。DOI 10.1007/s11856-012-0180-3。MR3096611 ↑67，68[BLS15] A. Barvels、S. Lentner 和 C. Schweigert, *Partially dualized Hopf algebras have equivalent Yetter-Drinfel'd modules* **430** 2015 303 342, ，J. Algebra（），– DOI 10.1016/j.jalgebra.2015.02.010。MR3323984 ↑48[Wol23] K. Wolf, *Nichols systems and their reflections*, 《交换代数》51（2023），第 2 期，822–840，DOI 10.1080/00927872.2022.2115054。MR4532828 ↑68[CL17] M. Cuntz 和 S. Lentner, *A simplicial complex of Nichols algebras*, 《数学杂志》285（2017），第 3-4 期，647–683，DOI 10.1007/s00209-016-1711-0。MR3623727 ↑65，66[DF24] I. Dimitrov 和 R. Fioresi, *Generalized root systems*, 《美国数学会汇刊》B辑 11（2024），1462–1508，DOI 10.1090/btran/214。MR4840297 ↑66[HS20] I. Heckenberger 和 H.-J. Schneider, *Hopf algebras and root systems*, 《数学综述与专著》，第 247 卷，美国数学会，普罗维登斯，RI，2020。MR4164719 ↑3，4，16，17，20，21，23，24，25，27，28，34，36，37，38，39，42，43，47，48，49，55，64，68[AA17] N. Andruskiewitsch 和 I. Angiono, *On finite dimensional Nichols algebras of diagonal type*, 《数学科学通报》7（2017），第 3 期，353–573，DOI 10.1007/s13373-017-0113-x。MR3736568 ↑72[WH15] J. Wang 和 J. Heckenberger, *Rank 2 Nichols algebras of diagonal type over fields of positive characteristic* **11** 2015 , SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.（），论文 24, 10 3842 2015 011 3313687 ↑35 011, DOI . /SIGMA. . . MR[Wan17] J. Wang, *Rank three Nichols algebras of diagonal type over arbitrary fields*, 《以色列数学杂志》218（2017），第 1 期，1–26，DOI 10.1007/s11856-017-1456-4。MR3625122 ↑35[LYQW24] L. Lei、C. Yuan、C. Qian 和 J. Wang, *Higher rank Nichols algebras of diagonal type with finite arithmetic root systems in positive characteristic* 2412 20786 ↑35 , arXiv arXiv: .[MS00] A. Milinski 和 H.-J. Schneider, *Pointed indecomposable Hopf algebras over Coxeter groups*, Hopf代数理论的新趋势（La Falda，1999），当代数学丛书，第 267 卷，美国数学会，普罗维登斯，RI，2000，第 215–236 页。DOI 10.1090/conm/267/04272。MR1800714 ↑59，61[Len14] S. Lentner, *New large rank Nichols algebras over nonabelian groups with commutator subgroup* $\mathbb{Z}_2$ **419** 2014 1 33, 10 1016 2014 07 017 3253277 ↑63 , J. Algebra（），– DOI . /j.jalgebra. . . . MR[FK99] S. Fomin 和 A. N. Kirillov, *Quadratic algebras, Dunkl elements, and Schubert calculus*, 《几何学进展》，数学进展丛书，第 172 卷，Birkhäuser Boston，波士顿，MA，1999，第 147–182 页。MR1667680 ↑61[Ven12] L. Vendramin, *Fomin-Kirillov algebras - an abstract*, arXiv arXiv:1210.5423 ↑61[ACG15] N. Andruskiewitsch、G. Carnovale 和 G. A. Garcia, *Finite-dimensional pointed Hopf algebras over finite simple groups of Lie type I. Non-semisimple classes in* $_n\ q$ PSL（），J. Algebra 442（2015），36–65，DOI 10.1016/j.jalgebra.2014.06.019。MR3395052 ↑61[HS10] I. Heckenberger 和 H.-J. Schneider, *Nichols algebras over groups with finite root system of rank two I* **324** 2010 11, 3090 3114, 10 1016 2010 06 021 , J. Algebra（），第 期。DOI . /j.jalgebra. . . . MR2732989 ↑61，63[HV17] I. Heckenberger 和 L. Vendramin, *A classification of Nichols algebras of semisimple Yetter-Drinfeld modules over non-abelian groups* **19** 2017 , J. Eur. Math. Soc. (JEMS)（），第 2, 299 356, 10 4171 667 3605018 ↑61 63 期– DOI . /J EMS/ 。MR , [HMV24] I. Heckenberger、E. Meir 和 L. Vendramin, *Finite-dimensional Nichols algebras of simple Yetter-Drinfeld modules (over groups) of prime dimension* **444** 2024 , 《Adv. Math.》（），论文编号 109637，30，DOI 10.1016/j.aim.2024.109637。MR4729697 ↑61[Bes95] Yu. N. Bespalov, *Crossed modules, quantum braided groups and ribbon structures*, 《理论数学与物理》103（1995），第 3 期，368–387，DOI 10.1007/BF02065863（英文，附英文和俄文摘要）；英文译本，《理论与数学物理》103（1995），第 3 期，621–637。MR1472306 ↑48，49[AAFV00] J. N. Alonso Alvarez 和 J. M. Fernández Vilaboa, *Cleft extensions in braided categories*, 《交换代数》28（2000），第 7 期，3185–3196，DOI 10.1080/00927870008827018。MR1765310↑49

[BV12] A. Brugui`eres and A. Virelizier, *Quantum double of Hopf monads and categorical centers*, 美国数学会汇刊 **364** (2012), 第 3 期, 1225–1279, DOI 10.1090/S0002-9947-2011-05342- 0。MR 2869176 ↑[LW22] R. Laugwitz 和 C. Walton, *Constructing non-semisimple modular categories with relative monoidal centers* **20** 2022 15826 15868, , 国际

数学研究通知 (), – DOI 10.1093/imrn/rnab097。MR4498166 ↑
[CGPM15] F. Costantino、N. Geer 和 B. Patureau-Mirand, *Some remarks on the unrolled quantum group of sl 2* **219** 2015 8, 3238 3262, (), J. Pure

Appl. Algebra (), 第 – 期, DOI 10.1016/j.jpaa.2014.10.012。MR3320217 ↑[KS11] H. Kondo 和 Y. Saito, *Indecomposable decomposition of tensor products of modules over the restricted quantum universal enveloping algebra associated to $\mathfrak{sl}_2$* **330** 2011 , J. Algebra (),

103–129, DOI 10.1016/j.jalgebra.2011.01.010。MR2774620 ↑[CGR20] T. Creutzig、A. M. Gainutdinov 和 I. Runkel, *vertex operator algebra* **22** 2020 3, 1950024, 71, , 当代

数学通讯 (), 第 期, DOI 10.1142/S021919971950024X。MR4082225 ↑[AG03] S. Arkhipov 和 D. Gaitsgory, *quantum group* **173** 2003 1, 114 143, 10 1016 0001 8708 02 00016 6 , Adv. Math. (),

第 – 期, DOI . /S - ( ) - 。MR1954457 ↑51[Kac97] V. Kac, *Vertex algebras for beginners*, 《大学讲座丛书》第 10 卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 1997 年。MR1417941 ↑[FBZ04] E. Frenkel 和 D. Ben-Zvi, *Vertex algebras and algebraic curves*, 第 2 版, 《数学调查与专著》第 88 卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2004 年。MR2082709 ↑[Sch08] M. Schottenloher, *A mathematical introduction to conformal field theory*, 第 2 版, 《物理学讲义》第 759 卷, 施普林格出版社, 柏林, 2008 年。MR2492295 ↑[MS88] G. Moore 和 N. Seiberg, *Polynomial equations for rational conformal field theories*, Phys. Lett. B 212 (1988), 第 4 期, 451–460, DOI 10.1016/0370-2693(88)91796-0。MR0962600 ↑83[Ver88] E. Verlinde, *Fusion rules and modular transformations in 2D conformal field theory*, Nuclear Phys. B 300 (1988), 第 3 期, 360–376, DOI 10.1016/0550-3213(88)90603-7。MR0954762 ↑[Gab94] M. Gaberdiel, *Fusion in conformal field theory as the tensor product of the symmetry algebra*, Internat. J. Modern Phys. A 9 (1994), 第 26 期, 4619–4636, DOI 10.1142/S0217751X94001849。MR1295760 ↑[KL93] D. Kazhdan 和 G. Lusztig, *Tensor structures arising from affine Lie algebras. I*, *II*, J. Amer. Math. Soc. 6 (1993), 第 4 期, 905–947, 949–1011, DOI 10.2307/2152745, MR1186962 ↑[HL94] Y.-Z. Huang 和 J. Lepowsky, *Tensor products of modules for a vertex operator algebra and vertex tensor categories* 123, ¨ , 《李理论与几

何》, 《数学进展》第 Birkhauser Boston 卷, 波士顿, 马萨诸塞州, 1994 年, 第 349–383 页, DOI 10.1007/978-1-4612-0261-5 13。MR1327541 ↑[HLZ06] Y.-Z. Huang、J. Lepowsky 和 L. Zhang, *A logarithmic generalization of tensor product theory for modules for a vertex operator algebra* **17** 2006 8, 975 1012, , 国际数学杂志

(), 第 – 期, DOI 10.1142/S0129167X06003758。MR2261644 ↑83[FLM88] I. Frenkel、J. Lepowsky 和 A. Meurman, *Vertex operator algebras and the Monster*, 《纯粹与应用数学》第 134 卷, Academic Press, Inc., 波士顿, 马萨诸塞州, 1988 年。MR0996026 ↑[DLM96] C. Dong、H. Li 和 G. Mason, *Simple currents and extensions of vertex operator algebras*, 数学物理通讯 180 (1996), 第 3 期, 671–707。MR1408523 ↑[DF84] Vl. S. Dotsenko 和 V. A. Fateev, *Conformal algebra and multipoint correlation functions in 2D statistical models* **240** 1984 3, 312 348, 10 1016 0550 , Nuclear

Phys. B (), 第 – 期, DOI . / - 3213(84)90269-4。MR0762194 ↑85[Ros97] M. Rosso, *Integrals of vertex operators and quantum shuffles*, 数学物理通讯 41 (1997), 第 2 期, 161–168, DOI 10.1023/A:1007352917712。MR1463867 ↑[Sel44] A. Selberg, *Remarks on a multiple integral*, Norsk Mat. Tidsskr. 26 (1944), 71–78 (挪威语)。MR0018287 ↑[Var03] A. Varchenko, *Special functions, KZ type equations, and representation theory*, 《CBMS 区域会议系列: 数学》第 98 卷, 数学科学会议委员会, 华盛顿特区; 由美国数学会出版, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2003 年。MR2016311 ↑78, 79, 80

[FW08] P. J. Forrester 和 S. O. Warnaar, *The importance of the Selberg integral*, 美国数学会通报（新系列）45 (2008), 第 4 期, 489–534, DOI 10.1090/S0273-0979-08-01221-4。MR2434345 ↑[TV03] V. Tarasov 和 A. Varchenko, *Selberg-type integrals associated with $\mathfrak{sl}_3$*, 数学物理通讯 65 (2003), 第 3 期, 173–185, DOI 10.1023/B:MATH.0000010712.67685.9d。MR2033704 ↑[War09] S. O. Warnaar, *A Selberg integral for the Lie algebra A_n* **203** 2009 2, , 数学学报 269 304, 10 1007 11511 009 0043 2570072 ↑ ( ), 第 – 期, DOI . /s - - -x。MR[Sus24] E. Sussman, *The singularities of Selberg- and Dotsenko-Fateev-like integrals*, Ann. Henri Poincar´e 25 (2024), 第 9 期, 3957–4032, DOI 10.1007/s00023-023-01402-1。MR4789304 ↑[CMY23] T. Creutzig、R. McRae 和 J. Yang, *Ribbon tensor structure on the full representation categories of the singlet vertex algebras* **413** 2023 108828, 79, , Adv. Math. ( ), 论文编号 DOI 10.1016/j.aim.2022.108828。MR4526492 ↑[NORW24] H. Nakano、F. Orosz Hunziker、A. Ros Camacho 和 S. Wood, *Fusion rules and rigidity for weight modules over the simple admissible affine sl 2 and $N = 2$ superconformal vertex operator superalgebras* 2411 11387 ↑ ( ), arXiv .[Ang16] I. Angiono, *Distinguished pre-Nichols algebras*, 变换群 21 (2016), 第 1 期, 1–33, DOI 10.1007/s00031-015-9341-x。MR3459702 ↑[GSTF06] A. M. Ga˘inutdinov、A. M. Semikhatov、I. Yu. Tipunin 和 B. L. Fe˘igin, *The Kazhdan-Lusztig correspondence for the representation category of the triplet W-algebra in logorithmic conformal field theories* **148** 2006 3, 398 427, 10 1007 11232 , 理论数学与物理 ( ), 第 – 期, DOI . /s - 006-0113-6（俄语，附俄语摘要）；英文译本发表于 Theoret. and Math. Phys. 148 (2006), 第 3 期, 1210–1235。MR2283660 ↑85[AM08] D. Adamovi´c 和 A. Milas, *On the triplet vertex algebra $\mathcal{W}$ p* **217** 2008 6, 2664 2699, 10 1016 2007 11 012 2397463 ↑ ( ), Adv. Math. ( ), 第 – 期, DOI . /j.aim. . . MR[TW13] A. Tsuchiya 和 S. Wood, *The tensor structure on the representation category of the $\mathcal{W}_p$ triplet algebra* **46** 2013 44, 445203, 40, 10 1088 1751 , 物理学杂志 A ( ), 第 期, DOI . / - 8113/46/44/445203。MR3120909 ↑[CLR21] T. Creutzig、S. Lentner 和 M. Rupert, *Characterizing braided tensor categories associated to logarithmic vertex operator algebras* 2104 13262 ↑ , arXiv .[GN23] T. Gannon 和 C. Negron, *Quantum* SL(2) *and logarithmic vertex operator algebras at* (*p*, 1)*central charge* 2104 12821 ↑ , arXiv .[CLR23] T. Creutzig、S. Lentner 和 M. Rupert, *An algebraic theory for logarithmic Kazhdan-Lusztig correspondences* 2306 11492 ↑18 53 75 , arXiv . , ,[FT10] B. Feigin 和 I. Tipunin, *Logarithmic CFTs connected with simple Lie algebras*, arXiv 1002.5047 ↑[AM14] D. Adamovi´c 和 A. Milas, *C_2-cofinite $\mathcal{W}$-algebras and their logarithmic representations*, 《共形场论与张量范畴》, 《北京大学数学讲义》, 施普林格, 海德堡, 2014 年, 第 249–270 页。MR 3585369 ↑[ST12] A. M. Semikhatov 和 I. Yu. Tipunin, *The Nichols algebra of screenings*, 当代数学通讯 14 (2012), 第 4 期, 1250029, 66, DOI 10.1142/S0219199712500290。MR2965674 ↑[Len21] S. D. Lentner, *Quantum groups and Nichols algebras acting on conformal field theories*, Adv. Math. 378 (2021), 论文编号 107517, 71, DOI 10.1016/j.aim.2020.107517。MR4184294 ↑[Sug21] S. Sugimoto, *On the Feigin-Tipunin conjecture*, Selecta Math.（新系列）27 (2021), 第 5 期, 论文编号 86, 43, DOI 10.1007/s00029-021-00662-1。MR4305499 ↑[Sug23] , *Simplicity of higher rank triplet W-algebras*, 国际数学研究通知 8 (2023), 7169–7199, DOI 10.1093/imrn/rnac189。MR4574397 ↑[ALM14] D. Adamovi´c、X. Lin 和 A. Milas, *ADE subalgebras of the triplet vertex algebra $\mathcal{W}$ p : D- series* **25** 2014 1, 1450001, 34, 10 1142 0129167 14500013 ( ), 国际数学杂志 ( ), 第 期 DOI . /S X。MR3189758 ↑[Bak16] B. Bakalov, *Twisted logarithmic modules of vertex algebras*, 数学物理通讯 345 (2016), 第 1 期, 355–383, DOI 10.1007/s00220-015-2503-9。MR3509017 ↑[Li97] H. Li, *The physics superselection principle in vertex operator algebra theory*, J. Algebra 196 (1997), 第 2 期, 436–457, DOI 10.1006/jabr.1997.7126。MR1475118 ↑

[FFH+02] J. Fjelstad、J. Fuchs、S. Hwang、A. M. Semikhatov 和 I. Yu. Tipunin, *Logarithmic conformal field theories via logarithmic deformations* **633** 2002 3, 379 413, , 《Nuclear Phys. B》 (), 第 – 期, DOI 10.1016/S0550-3213(02)00220-1。MR1910269 ↑[AM09] D. Adamovi´c 和 A. Milas, *Lattice construction of logarithmic modules for certain vertex algebras* **15** 2009 4, 535 561, 10 1007 00029 009 0009 《Selecta Math.》 (N.S.) (), 第 – 期, DOI . /s - - -z。MR2565050 ↑[Gai21] D. Gaitsgory, *A conjectural extension of the Kazhdan-Lusztig equivalence*, 《Publ. Res. Inst. Math. Sci.》 57 (2021), 第3-4期, 1227–1376, DOI 10.4171/prims/57-3-14。MR4322010 ↑[FL24] B. Feigin 和 S. Lentner, *Twisted vertex algebra modules for irregular connections: A case study* 2411 16272 ↑ , arXiv .[Par95] B. Pareigis, *On braiding and dyslexia*, 《J. Algebra》 171 (1995), 第2期, 413–425, DOI 10.1006/jabr.1995.1019。MR1315904 ↑74[KO02] A. Kirillov Jr. 和 V. Ostrik, *On a q-analogue of the McKay correspondence and the ADE classification of $\mathfrak{sl}_2$ conformal field theories* **171** 2002 2, 183 227, , 《Adv. Math.》 (), 第 – 期, DOI 10.1006/aima.2002.2072。MR1936496 ↑74[FFRS06] J. Fr¨ohlich、J. Fuchs、I. Runkel 和 C. Schweigert, *Correspondences of ribbon categories*, 《Adv. Math.》 199 (2006), 第1期, 192–329, DOI 10.1016/j.aim.2005.04.007。MR2187404 ↑74[SY24] K. Shimizu 和 H. Yadav, *Commutative exact algebras and modular monoidal categories*, arXiv arXiv:2408.06314 ↑74[HKL15] Y.-Z. Huang、A. Kirillov Jr. 和 J. Lepowsky, *Braided tensor categories and extensions of vertex operator algebras* **337** 2015 3, 1143 1159, 10 1007 00220 , 《Comm. Math. Phys.》 (), 第 – 期, DOI . /s - 015-2292-1。MR3339173 ↑[CKM24] T. Creutzig、S. Kanade 和 R. McRae, *Tensor categories for vertex operator superalgebra extensions* **295** 2024 1472, +181 10 1090 1472 , 《Mem. Amer. Math. Soc.》 (), 第 vi 期, DOI . /memo/ 。MR4720880 ↑[BD13] M. Bovarchenko 和 V. Drinfeld, *A duality formalism in the spirit of Grothendieck and Verdier* **4** 2013 4, 447 489, 10 4171 45 3134025 ↑ , 《Quantum Topol.》 (), 第 – 期, DOI . /QT/ 。MR[ENO10] P. Etingof、D. Nikshych 和 V. Ostrik, *Fusion categories and homotopy theory*, 《Quantum Topol.》 1 (2010), 第3期, 209–273, DOI 10.4171/QT/6。附录作者: Ehud Meir。MR2677836 ↑68[DN21] A. Davydov 和 D. Nikshych, *Braided Picard groups and graded extensions of braided tensor categories* **27** 2021 4, 65, 87, 10 1007 00029 021 , 《Selecta Math.》 (N.S.) (), 第 Paper No. 期, DOI . /s - - 00670-1。MR4281262 ↑[Tak79] M. Takeuchi, *Relative Hopf modules—equivalences and freeness criteria*, 《J. Algebra》 60 (1979), 第2期, 452–471, DOI 10.1016/0021-8693(79)90093-0。MR0549940 ↑75[Skr07] S. Skryabin, *Projectivity and freeness over comodule algebras*, 《Trans. Amer. Math. Soc.》 359 (2007), 第6期, 2597–2623, DOI 10.1090/S0002-9947-07-03979-7。MR2286047 ↑75[CMSY24] T. Creutzig、R. McRae、K. Shimizu 和 H. Yadav, *Commutative algebras in Grothendieck-Verdier categories rigidity and vertex operator algebras* 2409 14618 ↑ , , , arXiv .[Sch01] P. Schauenburg, *The monoidal center construction and bimodules*, 《J. Pure Appl. Algebra》 158 (2001), 第2-3期, 325–346, DOI 10.1016/S0022-4049(00)00040-2。MR1822847 ↑75[BM17] K. Bringmann 和 A. Milas, *W-algebras higher rank false theta functions and quantum dimensions* **23** 2017 2, 1249 1278, 10 1007 00029 016 0289 , , , 《Selecta Math.》 (N.S.) (), 第 – 期, DOI . /s - - - z。MR3624911 ↑[Len25] S. Lentner, *A conditional algebraic proof of the logarithmic Kazhdan-Lusztig correspondence*, arXiv 2501.10735 ↑74[ALS23] I. Angiono、S. Lentner 和 G. Sanmarco, *Pointed Hopf algebras over nonabelian groups with nonsimple standard braidings* 3 **127** 2023 4, 1185 1245, , 《Proc. Lond. Math. Soc.》 () (), 第 – 期, DOI 10.1112/plms.12559。MR4655349 ↑[ALSW21] R. Allen、S. D. Lentner、C. Schweigert 和 S. Wood, *Duality structures for module categories of vertex operator algebras and the Feigin Fuchs boson* 2107 05718 ↑ , arXiv .[FL22] I. Flandoli 和 S. D. Lentner, *Algebras of non-local screenings and diagonal Nichols algebras*, 《SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.》 18 (2022), Paper No. 018, 81, DOI 10.3842/SIGMA.2022.018。MR4392114 ↑

[FL24] B. L. Feigin 和 S. D. Lentner, *Vertex algebras with big centre and a Kazhdan-Lusztig correspondence* **457** 2024 ↑ , 《数学进展》（）。[FK93] J. Fr¨ohlich 和 T. Kerler, *Quantum groups, quantum categories and quantum field theory*, 《数学讲义》，第1542卷，施普林格出版社，柏林，1993年。MR1239440 ↑68[CM17] E. Cain 和 S. Morrison, *A field guide to categories with A_n fusion rules*, arXiv arXiv:1710.07362 ↑68[GLM24] C. Galindo、S. Lentner 和 S. M ¨oller, , arXiv arXiv: 。[LP17] S. Lentner 和 J. Priel, *Computing G-Crossed Extensions and Orbifolds of Vertex Operator Algebras* 2409 16357 ↑68 *Three natural subgroups of the Brauer-Picard group of a Hopf algebra with applications* **24** 2017 1, 73 106, , 《比利时数学会 Simon Stevin 通报》（），第 – 期，DOI 10.36045/bbms/1489888815。MR3625786 ↑[LMSS23] S. Lentner、S. N. Mierach、C. Schweigert 和 Y. Sommerh ¨auser, , , , *Hochschild cohomology modular tensor categories and mapping class groups. I* 《数学物理 SpringerBriefs》，第44卷，施普林格，新加坡，2023年。MR4841457 ↑[KS20] M. Kapranov 和 V. Schechtman, *Shuffle algebras and perverse sheaves*, 《纯粹与应用数学季刊》16（2020），第3期，573–657，DOI 10.4310/PAMQ.2020.v16.n3.a9。MR4176533 ↑86[CERyD25] G. Carnovale、F. Esposito 和 L. Rubio y Degrassi, *Truncated factorized perverse sheaves on $Sym(C)$* 2502 21213 ↑86 , arXiv arXiv: 。