奇幻小雕像翻转 Free Flood-It——无 co-gem 图上的多项式时间 Miniature Painting

Christian Rosenke
罗斯托克大学
德国
christian.rosenke@uni-rostock.de

Mark Scheibner
独立研究者
德国
mail@mark-scheibner.de

arXiv:2602.00690v1 [cs.DS] 31 Jan 2026

摘要

受同名业余爱好的启发，我们将 Miniature Painting 引入为一个计算问题：按照给定模板 t: $V \to C$ 为给定图 $G = (V, E)$ 着色，该模板将颜色 C 分配给 G 的顶点。在此设定下，目标是用尽可能短的笔触序列实现该模板，其中每一笔画用 C 中的一种颜色覆盖一个连通顶点子集。

我们证明，该问题等价于广为研究的 Free Flood-It 游戏的逆过程：在该游戏中，着色图需用尽可能少的操作去色为单一颜色。这一等价性使得 Free Flood-It 的已知复杂度结果可直接迁移到 Miniature Painting，包括在严格结构限制下的 NP困难性，例如当 G 为网格、树或分裂图时。

我们的主要贡献是针对不含诱导余宝石的图上的 Miniature Painting 的多项式时间算法，这一图类严格推广了余图。作为直接推论，Free Flood-It 在无余宝石图上也可在多项式时间内求解，且独立于初始着色。

1 引言

Miniature Painting 是一种颇受欢迎的业余爱好，人们会为小型金属或塑料模型人偶着色，以呈现各种各样的英雄和怪物。这些人偶是复杂程度各异的三维物体，其外表面由许多小型二维区域组成。每个人偶都对应一份精心制定的着色方案，并以极高的精度执行。在数学中，人们通常会把美妙的事物置于形式化框架之中，从而剥去其中所有令人愉悦的部分。现在，我们也照此办理。

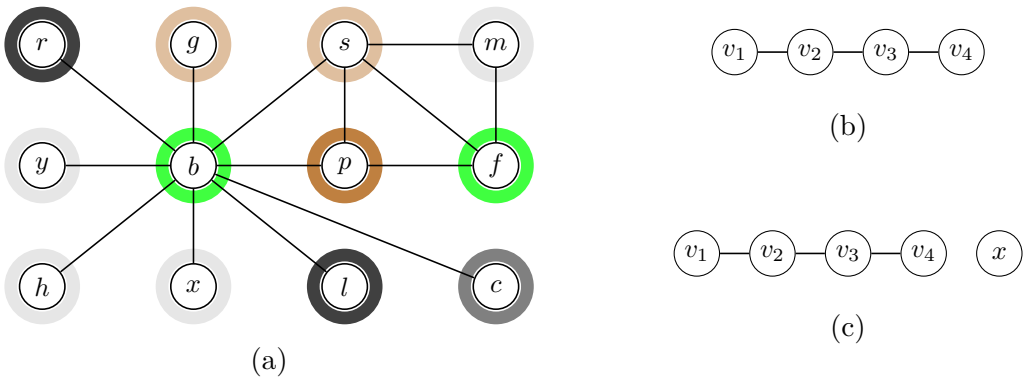

图 1：(a) 带有模板的图模型，(b) 具有四个顶点的路径 P_4，(c) co-gem

稍微枯燥地说，任何小雕像都可以表示为一个图 $G = (V, E)$，其顶点集V 对应所有表面区域，边 $vw \in E$ 表示区域 v 与 w之间的邻接关系。随后，可以用一个模板函数 $t\colon V \to C$来描述预期的着色方案，该函数为每个顶点 $v \in V$ 指定业余爱好者为相应区域选定的颜色 $t(v) \in C$ 。此处， C 表示所有可用颜色的集合。图 1 (a)展示了一个示例图，以及使用颜色集 $C = \{B, G, K, L, M, W\}$ 表示六种颜色的着色图案：B棕色、 G绿色、黑色K、 L浅棕色、 M金属色和 W白色。

微缩模型涂装师或许能从着色过程中获得满足感，而理论计算机科学家则从算法优化中获得满足感。尽管上述设定有许多实用的优化目标，本文关注的是一个不太寻常的目标：尽可能减少画笔笔触的数量。这样做是为了避免绘画者不必要地频繁将画笔从小雕像上抬起。假设画笔能够蘸取足够多的颜料，一次笔触定义为：将画笔放到小雕像上，然后在不抬起笔尖的情况下，逐步移过相邻的区域，从而用当前蘸取的颜色填满所有经过的区域。

因此，在图的设定中，画笔笔触 建模为选取 $A \subseteq V$的一个连通顶点集 G ，并将一种颜色 $c \in C$ 赋予绘画区域 A中的所有顶点。问题于是变为计算一个最优着色方案，即由若干笔画组成的最短序列（A_1, c_1）.....，（A_s, c_s），使其从初始未着色的图 G出发，生成目标模板 t 。图 1 (a) 中的示例图 G 可以使用给定的模板着色，例如采用以下由六次笔触组成的方案：

$$(V(G), W), (\{b, f, g, l, p, r, s\}, K), (\{b, f, g, p, s\}, L), (\{b, f, p\}, G), (p, B), (c, M).$$

显然，该方案是最优的，因为每种使用到的颜色至少需要一笔，而这里恰好达到了这一笔数下界。

上述抽象问题很可能有多种有意义的实际应用。举一个颇为异想天开的例子：可以设想一台自动涂装设备在按数字填色 的场景中工作；如果每次抬笔都需要对其运动系统进行代价高昂且容易出错的重新校准，那么它便能从最优绘画方案中获益。然而，事实上，我们的研究动机仅仅源于这一基础形式化问题本身的内在吸引力。

据我们所知，此前尚未有人以本文所考虑的形式研究过这一具体问题。因此，其计算复杂性似乎仍未得到解决，尤其是在输入可能受到的诸多自然限制下。不过，令人有些意外的是，这个问题的大部分内容其实已经被隐含地解决了。事实上，本文研究的微型着色问题原来等价于 Free Flood-It；后者已在文献中得到广泛研究，并且已有数篇优秀的综述论文对其进行了总结 [5, 6]。这种等价关系出人意料，因为我们的目标是尽可能少用笔画为图着色 ，而 Free Flood-It 则是一种游戏，玩家的目标是尽可能少用操作使图褪色 。尽管这种对应关系看起来不合直觉，但这两个问题的等价性将在第 3 节中得到证明。更具体地说，我们将证明：图 G 能够按照模板 t 用 s 笔画完成着色，当且仅当玩家能够在 $s - 1$ 次操作内将图 G 填充为单色，且 G 初始时按照 t着色。例如，图 1 (a) 中示例的绘画方案可以反转 为以下五步 Free Flood-It 过程，其中 G 初始时按照给定模板着色：

$$(c, W), (p, G), (p, L), (p, K), (p, W).$$

这一等价关系的直接推论是，所有已知的 Free Flood-It 复杂度结果也立即适用于 Miniature Painting。特别是，即使对输入作出非常强的限制，该问题仍然具有计算难度，例如将输入图 G 限制为余可比、AT-*free*或分裂图 [7]。即便 G 是树 [4]

或是一个网格 [2]，且模板只使用三种颜色，除非 P =NP，否则不存在高效算法。事实上，已知 Free Flood-It（因而也包括 Miniature Painting）可处理的非平凡图类寥寥无几。基本上，这仅包括非常受限的网格 [8] 以及路径和环 [9]。此外，众所周知，该问题在余图上可处理；余图可通过禁止诱导 P_4而得到，其中该图是图 1（b）所示的四顶点路径。然而，据我们所知，这一点从未得到过明确证明。

作为可处理性与假定计算困难性之边界上为数不多的已知前哨之一，余图为将高效算法扩展到 Miniature Painting 提供了自然的起点。因此，我们的目标是将诱导 P_4 重新引入输入图，并探究这一扩展在不跨入 NP 困难领域的情况下能够推进多远。相应地，本文的主要贡献是一个针对不含诱导余宝石的图的 Miniature Painting 多项式时间算法；余宝石是用一个独立顶点扩展P_4 所得的图，如图 1 (c) 所示。该结果在第 5 节中给出，构成了一项实质性推广。无余宝石图这一图类严格包含所有余图，并且还涵盖了大量允许诱导 P_4的图。事实上，一个简单却关键的观察是：该图类允许诱导 P_4 ，当且仅当每一个这样的P_4 都构成一个支配集，即一个顶点子集，其顶点共同与 $V(G)$ 中的所有其他顶点相邻。我们的多项式时间方法从根本上建立在利用这一结构性质之上。图 1 (a) 中的示例图包含诱导 P_4，例如 r，b，s，m，因此它不是余图，但请注意其中并不存在诱导 co-gem。

上述建立的等价关系将这一进展直接应用于 Free Flood-It：对于不含诱导余宝石的图，无论初始着色的复杂程度如何，都可以高效地计算出最优泛洪策略。这自然引出了一个问题：既然可以直接研究 Free Flood-It，为什么还要引入微型着色问题？我们的回答是，这种新表述为这款游戏提供了互补的视角。在微型着色问题中，绘画者 ——或者说，玩家 ——在选择笔画或操作时拥有更大的自由。这对推导本文的研究结果非常有帮助。

本文结构如下。下一节介绍基本概念。第 3 节确立微型着色问题与 Free Flood-It 之间的等价关系，并推导由此得出的复杂性结论。在第 4 节中，我们推导无 co-gem 图的结构性见解，并将在第 5 节中利用这些见解开发一个多项式时间算法。第 6 节总结全文。为使本文易于理解，所有证明均推迟至第 7 节。

2 预备知识

在介绍我们的结果之前，我们先确定本文中使用的记号。我们主要采用标准的数学和图论记号。对于自然数 a，b其中 $a \le b$集合 $\{a,\ a+1,\ \ldots,\ b\}$记作 $[a,b]$。对于集合 A和 B，我们分别用 $A+B$、$A-B$和 $A \cap B$表示并集、差集和交集 。单元素集合$\{x\}$ 可视为其中唯一包含的元素x，前提是上下文足以明确这一点。

图论记号

所有讨论的图都是有限的、无向的，且没有重边或自环。对于每个顶点 $x \in V(G)$，我们定义其开邻域 $N(x) = \{y \mid xy \in E(G)\}$，而 $N[x] = N(x) + x$表示其闭邻域。如果 $y \in N(x)$，我们称 x 与 相邻。图 G 的支配集 D 是 $V(G)$ 的一个子集，且该子集与所有顶点相邻；也就是说，$\bigcup_{x \in D} N[x] = V(G)$。

一个有 P_k 个顶点的路径 k 是一个图，其顶点为 v_1、.....、v_k，并且恰好包含边 $v_i v_{i+1}$ 对所有 $i \in [1, k-1]$均成立。顶点 v_1 和 v_k 是该路径的端点 。如果额外存在边 $v_k v_1$，那么我们就得到一个具有 k 个顶点的圈 C_k 。

如果 G 是一个图，那么 G 的每个子图 $H=(V,E)$ 都由一个顶点子集 $V\subseteq V(G)$ 和一个边子集 $E\subseteq E(G)$ 定义，后者仅由两个端点都在 V 中的边组成。如果 E 恰好包含 $E(G)$ 的所有边 vw，且 $v,w\in V$，则子图 H 是诱导子图。对于任意顶点子集 $V\subseteq V(G)$，我们用 $G[V]$ 表示 G 的诱导子图 $H=(V,E)$。我们用 $G-V$ 作为 $G[V(G)-S]$ 的简写。如果存在一个双射 $\sigma\colon V(G)\to V(H)$，使得 $xy\in E(G)$ 当且仅当 $\sigma(x)\sigma(y)\in E(H)$，则图 G 和 H 同构。如果 G 没有诱导子图与图 H 同构，那么 G 是 H-free。G 的子图 H，无论是否为诱导子图，若 $V(H)$ 是 G 的支配集，则称其为支配 G。

照例，G 中的一条 x,y-路径 是 G 的一个子图，它与一条以 x 和 y 为端点的路径同构。图 G 是连通的，如果对所有互异顶点 $x,y\in V(G)$，G 中都存在一条 x,y-路径。否则，G 称为不连通，并由连通分量构成，即非空且连通的极大诱导子图。顶点子集 $V\subseteq V(G)$ 是（不）连通的，如果由 V 诱导的子图 $G[V]$ 是（不）连通的。连通图 G 的顶点集 $S\subseteq V(G)$ 称为分隔集，如果 $G-S$ 是不连通的。

尽管并非本文的核心，为完整起见，我们简要提及一些图类。连通无环图即树。一个图是 AT-*free* 的，如果它不含星三元组，即三个顶点，使得对每一对 x,y，都存在一条避开第三个顶点的邻域 $N[z]$ 的 x,y-路径。余可比图 是其补图允许传递定向的图，即对边的一种定向，使得只要 $u\to v$ 且 $v\to w$，就有 $u\to w$。分裂图 是具有顶点集 $C\subseteq V(G)$ 的图 G，使得 $G[C]$ 是一个团且 $G-C$ 是独立的。最后，网格图 是其顶点可放置在二维整数格上的图，边恰好连接水平或垂直相邻的顶点。

如上所述，余图和无余宝石图是这里最重要的图类。这两类图中的图具有以下结构性质，这些性质已得到充分理解，通常被视为显然的观察。不过，我们在第 4 节和第 5 节中明确运用了这些性质，因此为使论述自成一体，特在此列出。

观察 1. 如果 G 是一个带有分隔集 S 的连通余图，那么 $G-S$ 中不同连通分支里的任意一对顶点在 S 中都有一个公共邻点。

观察2. 连通余图 G 的每个分隔集都是 G 的支配集。

观察 3. 如果 G 是一个具有互不相交分隔集 S 和 T 的连通余图，那么 $S+T=V(G)$。

观察 4. 无 *co-gem* 图中的每个诱导 P_4 都是一个支配集。

图着色

显而易见，我们将任何取值于适当颜色集 C 的（部分）函数 $p\colon V\to C$ 称为图 $G=(V,E)$ 的着色，而不采用更常见的名称着色。简而言之，要指称图 G 的特定着色 p，我们通常直接说 G 用 p 着色。请注意，着色可能不为 G 的某些顶点指定颜色。因此，若函数 p 是全定义的（也就是说，为 G 的每个顶点都指定了颜色），则称着色 p 为全定义。对于每种颜色 $c\in C$，我们用 $p^{-1}(c)=\{v\in V(G)\mid p(v)=c\}$ 表示 G 中所有以 c 着色的顶点。请注意，集合 $p^{-1}(c)$ 通常并不连通。

对于 p of G 的着色，若对于所有 $v,w\in A$，$A\subseteq V$ 中的每个元素都满足 $p(v)=p(w)$，则称子集 $A\subseteq V$ 是单色的。需要指出的是，这一概念也包括未定义的顶点：如果对于所有 $v\in A$，A 中的 $p(v)$ 均未定义，也称 A 为单色。在着色 p 中，若单色集 A 在 G 中连通，且 A 的任何超集都不是单色且连通的，则称 A 为 G 的颜色分量。

问题陈述

在介绍我们的贡献之前，我们先正式陈述引言中提出的微型着色问题。设 G 是给定的图，且 t: $V(G) \to C$ 是 G 的模板，即 G 的全定义着色。一个画笔笔触（简称笔画）是一个二元组 (A, c)，由一个绘画区域（顶点集 $A \subseteq V(G)$，在 G 中连通）和一种颜色 $c \in C$ 组成。若 p: $V(G) \to C$ 是 G 的着色，那么应用笔触 (A, c) 后得到新的着色 p'：对于所有位于该笔触绘画区域内的顶点 $v \in A$，将其新颜色定义为 $p'(v) = c$；对于所有未受影响的顶点 $v \in V(G) - A$，则保持其颜色 $p'(v) = p(v)$ 不变。

根据此定义，在 s 笔画内将 t 绘制到 G 上的绘画方案 P，是一个非空的笔画序列 $P = (A_1, c_1)$……，(A_s, c_s)，它逐步生成一系列着色结果p_0，p_1，……，p_s，使得：(i) p_0是对所有顶点均未定义的函数；(ii) 对所有 $i \in [1, s]$，p_i是将笔画 (A_i, c_i) 应用于着色结果 p_{i-1} 后得到的结果；(iii) 着色结果 p_s 恰好是模板 t。

如果某个图 G 的绘画方案最优，即使用的笔画数 s最少，我们就称该方案最优。若 G 可以用 t 在 s 笔画内完成着色，表示针对 G 的最优绘画方案包含 s 笔画。最小微型绘画问题是一项计算任务，要求为给定的图 G 和模板 t 找到最优绘画方案。它的判定版本为 k-Miniature Painting：给定 (G, t)，仅需判断 G 能否在 k 笔画或更少的笔画内用 t 完成着色。在本文余下部分，何时讨论该问题的优化版本或判定版本，始终可由上下文明确看出。因此，无论在何种情况下，我们都只使用 Miniature Painting 这一名称。

为了更好地组织后续关于涂色方案 $P = (A_1, c_1) \ldots, (A_s, c_s)$ 的工作，我们还引入以下概念。对于所有 $v \in V(G)$，我们用 最终化索引 $f_P(v) = i$ 表示覆盖绘制 v 的笔画的最大索引 i，也就是说，对于所有 $j > i$，都有 $v \in A_i$ 和 $v \notin A_j$。显然，这意味着 $t(v) = c_i$。此外，我们用 $F_P(i)$ 表示由笔画 i 最终化的顶点集合，即 $F_P(i) = \{v \in V(G) \mid f_P(v) = i\}$。

3 等等，这怎么会是 Free Flood-It 游戏?

乍看之下，Clifford 等人最初介绍的 Free Flood-It [1, 2], 似乎与 Miniature Painting 几乎毫无共同之处。归根结底，这种单人游戏的规则与我们的设定基本相反：给定一个已经通过 p_0: $V \to C$ 着色的图 $G = (V, E)$，玩家必须定义一个（可能为空的）洪水填色序列 $(v_1, c_1) \ldots, (v_s, c_s)$，由一系列操作 (v_i, c_i) 组成，每个操作指定一个枢轴顶点 $v_i \in V$ 和一种洪水填色颜色 c_i。一次淹染步 (v_i, c_i) 的结果是对 G 的一次新着色 p_i: $V \to C$，它会改变 p_{i-1}，使其

$$p_i(v) = \begin{cases} c_i, & \text{当 } v_i \text{ 和 } v \text{ 相对于 } p_{i-1}, \ p_{i-1} \ v, \\ & \text{()处于同一颜色连通分支时；否则。} \end{cases}$$

游戏的目标是使 p_s 成为单色，即成为一个常数函数，同时尽量缩短序列长度 s。

目标恰恰相反——为给定的图着色与为其去色——构成了这两个优化问题的共同点。本节将说明，对于给定的图 G，若它已用 p_0 着色，那么反转任意洪水填色序列，也能为 G 提供合适的着色策略，其中 p_0 作为模板给定。每当一步操作（v_i，c_i）通过对较小的、颜色为 c的绘画区域 B 进行 c_i洪水填色，在 G 中用颜色 c_i 生成更大的绘画区域 A，且该较小区域包含 v_i 时，对于 Miniature Painting，我们就可以用绘画笔触（B，c）反向执行这一步。反方向也有类似的对应关系，但情况稍微复杂一些。这里，我们需要回答：如果一次笔触覆盖了多个颜色不同的顶点，如何将其反向转换为单次洪水填色操作？为了解决这个问题，下文首先对着色策略进行规范化，以避免陷入上述困境。

更具体地说，我们引入 Miniature Painting 的以下规范化版本：在图 G的着色 p 中，笔触 $\sigma =$ （A， c）称为递归笔触，当且仅当满足以下条件：(i) 笔触 σ 在 p中为单色绘画区域 A 着色，也就是说，对于所有 v、$w \in A$，均有 p（v） $= p$（w）；(ii) 在通过应用笔触 σ从 p 得到的着色 p' 中，绘画区域 A 是G的一个颜色分量。对于图 G，若着色方案（A_1， c_1）.....（A_s， c_s）逐步生成着色p_0、p_1、.....、p_s，则称该方案为递归方案，若其满足以下两项性质：首先，所有笔触（A_i， c_i） $i \in [1, s]$ 都必须是递归的，也就是说，绘画区域 A_i 在 p_{i-1} 中是单色的，并且是用 p_i着色后的图 G 的一个颜色分量。其次，第一个笔触必须覆盖整个图，也就是说， $A_1 = V$（G）。请注意，引言中图 1 (a) 所示示例的着色方案就是递归方案。

引理 5。 模板 t 可以在图 G 上用 s 笔画着色，当且仅当 G 有一个针对 t的递归s笔画绘画方案。

有了上述规范化工具，我们现在可以给出 Miniature Painting 与 Free Flood-It 的准等价关系。

定理 6。 设 $G = (V, E)$ 是一个图， t: $V \to C$ 是 G的一个模板。当且仅当存在一个由 $s - 1$ 次操作组成的洪水填色序列，使得初始着色为 t时，存在一个将 t 着色到 G 上的s绘画方案。

阅读第 7 节可知，引言中用于填满图 1 (a) 所示示例的序列，实际上是将定理 6 证明中的逆转 方法应用于此前给出的绘画方案得到的。正如引言所述，前述结果确实将 Miniature Painting 和 Free Flood-It 紧密联系在一起。事实上，它使我们能够将后一问题中的许多已知结果转移到前一问题中。Free Flood-It 的困难性可直接转化为 Miniature Painting 的困难性，因此我们可以正式得出以下（部分）结论：

推论 7 （见 [2, 4, 7]）。 *Miniature Painting </style}*即使将输入图限制为以下类型，仍然是 *NP* 完全问题：

- 网格图，即使模板仅包含三种颜色，
- 树，即使模板仅包含三种颜色，
- *AT*-自由图，
- 余可比图，以及
- 分裂图。

如引言所述，可处理情形的列表要短得多，我们将在下一节讨论。

4 无余宝石图允许规范的颜料方案

据我们所知，Free Flood-It 已知可在余图上用多项式时间求解，但文献中似乎缺少明确的证明。这可能是因为，利用余图的余树进行动态规划的方法很容易构想。不过，还有一种更简单的策略，我们稍后会将其推广到无 co-gem 图。因此，详细介绍这种方法是值得的。

首个关键观察是，不连通余图 G 可以通过依次处理其连通分支 G_1，.....， G_k 来进行淹没。这些连通分支本身也是余图，而且是连通的。对于连通余图，另一个关键见解也发挥了作用：它们含有许多支配边，也就是满足 $V(G) = N[v] + N[w]$ 的边 vw。随后，可以穷举考虑这类支配边 vw，从而得到最优淹没序列

并选择其中一条，使其在单色淹没 vw 后，能为其邻域生成尽可能短的淹没序列——在本例中，该邻域与整个图重合。

我们将这一基本思路正式表述出来，不过针对的是 Miniature Painting 在余图上的镜像问题。

定理 8. 存在一种多项式时间算法，可用于余图上的 Miniature Painting 。

比结果本身更重要的是，余图所具有的结构性质使这种高效方法成为可能。无余宝石图不再必然具有支配边——路径 P_5 有力地说明了这一点——而观察 4 提供了恰当的结构性替代方案。我们不再依赖支配边，而是利用可作为支配集的诱导 P_4 。

在深入介绍我们方法的细节之前，我们先简要说明如何利用支配 P_4为包含它的图 G 着色。事实上，任何既是支配集又连通的小顶点集 $D \subseteq V(G)$，都可用于一种颇具潜力的两阶段绘画方案：第一阶段中，将集合 D 用作枢纽，对每种颜色 $c \in C$，为绘画区域 $A_c = t^{-1}(c) + D$ 着色；也就是说，该区域是 D 与模板 t 为其指定颜色 c 的所有顶点的并集。由于 D 是支配集，因此有 $A_c \subseteq \bigcup_{v \in D} N[v]$；而 D 的连通性确保 A_c 确实是一个绘画区域。第一阶段结束后，除 D 外，所有 G 都已完成着色。随后，第二阶段完成对 D 本身的着色，最多只需再用 $|D|$ 笔画。

这一策略的一个优点是，在第一阶段中，各种颜色的使用顺序基本可以任意安排。因此，主要的优化任务就简化为确定一种高效的方式来为 D的顶点着色。另一个优点是，整个方案所需的笔画不超过 $|C| + |D|$，这为寻找更优策略提供了一个有用的上界。

这一思路对无余宝石图尤其有吸引力，因为这类图往往具有许多较小的连通支配集。假设 G 是连通的，那么它要么是余图（此时它含有支配边），要么含有诱导的 P_4，而这些边全都是支配边。因此， G 的任一最优绘画策略至多使用 $|C| + 4$ 笔画。事实上，我们认为，每个连通的无余宝石图都存在一种最优绘画策略，严格遵循上述两阶段方案：先执行 $|C|$ ，再使用少于五笔。不过，本文仅以稍弱的形式证明了这一结论。

我们首先将广义的两阶段概念形式化。设 G 是一个图，具有连通支配集 $D \subseteq V(G)$，设 k 是一个非负整数，并设 $\prec$ 是颜色集 C的任意全序。若一个 s笔画着色方案 $P = (A_1, c_1) \ldots \ldots, (A_s, c_s)$ 满足以下条件，则称其为 $(D, k, \prec)$ 规范的：

(i) 对每个 $i \in [1, s-k]$，笔画 (A_i, c_i) 都为绘画区域 $A_i = t^{-1}(c_i) + D$着色，

(ii) 对所有满足 $i < j$的 $i, j \in [1, s-k]$，都有 $c_i \prec c_j$。

因此，一个 $(D, k, \prec)$ 规范方案由两个阶段组成：第一阶段包含 $s-k$ 个笔画，明确利用枢纽 D，按照规定的颜色顺序完成 $V(G) - D$ 中的所有顶点；随后第二阶段通过 k 个笔画完成对 G 的着色，不再将 D 用作枢纽。

我们强调，加入排序 $\prec$ 并非方法论上的限制。相反，它将在后文提供算法自由度，使我们能够预先固定任意的颜色顺序。另请注意，并不要求 $k = |D|$。$(D, k, \prec)$-规范方案 P的前 $s-k$ 笔画称为 P的头部 ，其余 k 笔画则构成其尾部。

下面的引理揭示了无余宝石图与规范染色方案之间的关系。

引理 9。 对于每个包含一个诱导 P_4 的无 *co-gem* 图 G、每个模板 t： $V(G) \to C$，以及 C 上的每个全序 $\prec$，都存在一个最优绘画方案，该方案对于某个支配集 D 是$(D, k, \prec)$-规范的；该支配集在 G 中诱导一个 P_4，且满足某个 $k \leq 12$。

本节余下部分将为引理 9 的证明做准备。概括而言，证明分两步进行。首先，我们考虑 G 的所有最优绘画方案构成的集合，并在其上施加一个经过谨慎选择的排序。其次，我们证明，关于此排序的一个极大元素经过少量调整后是规范的。

为说明这种排序，注意到引理中的一个 $(D,\ k,\ \prec)$-规范方案会使用一个诱导的 P_4，即 D，作为枢纽，在第一阶段完成所有其他顶点。因此， D 的所有顶点都在第二个、包含 k 笔画的阶段完成。由此可见，在这样的方案中，存在一个诱导的 P_4 ，其顶点很晚才被着色。这种排序背后的思路是，尽可能优先选择那些尽可能推迟完成诱导 P_4 的方案。

我们通过为每个最优绘画方案 P 指定一个数值指标，将这一想法形式化。令 s 为每个最优方案中的笔画数，同样， P中也如此。对于 G的每个诱导 P_4 π，我们按如下方式定义一个相应的指标。令 a、b、c、d 表示 π的顶点，并按其最终化索引排序，即 $f_P(a) \le f_P(b) \le f_P(c) \le f_P(d)$。接着，我们将 π 在 P 中的完成指标 定义为

$$f_P(\pi) = s^3 \cdot f_P(a) + s^2 \cdot f_P(b) + s \cdot f_P(c) + f_P(d).$$

该值主要由 a的最终完成情况决定，其次由 b的完成情况决定，接着是 c，最后是 d。方案 P 的 完成指标 定义为 G 中所有诱导 P_4 的完成指标的最大值，即

$$f_P = \max\{f_P(\pi) \mid \pi \text{ is an induced } P_4 \text{ in } G\}.$$

在引理 9 的证明中，该指标用于对最优涂色方案进行排序。我们关注一个使 f_P 最大化的方案，直观地说，就是尽可能延迟某些诱导 P_4 的完成。核心论证表明，对于具有最大完成指标 $f_P(D) = f_P$ 的任意诱导 P_4 D，这样的方案都可以转化为一个（$D,\ k,\ \prec$）-规范计划。经过细微调整后，该方法证明：在 D中顶点的连续完成笔画之间，至多可以有两笔不完成 D中的任何顶点。等价地，完成 D 的笔画之后至多还可以跟随两笔额外笔画。这就确定了：完成 D 中某个顶点的第一笔画与方案的最后一笔画之间的最大距离为十二。任何违反这些限制的情况都将意味着存在另一个完成指标低于 f_P 的最优方案，从而导致矛盾。

证明在很大程度上依赖涂色方案的灵活性，而这种灵活性在 Free Flood-It 游戏的逆向策略中并不存在。事实上，一种常用操作是在某些笔画中灵活调整绘画区域，以使方案满足所需性质。相比之下，洪泛操作只允许进行枢轴选择，这会严格固定被洪泛的区域。因此，尽管 Free Flood-It 必定存在类似的规范序列，但使用这些序列会复杂得多。

下一节将运用 $(D, k, \prec)$-规范染色方案，开发一种利用其简单结构的多项式时间算法。

5 Br基于强制法的规范绘画方案可在多项式时间内完成 e

正如本节标题所示，这里介绍的算法不依赖任何复杂过程来构造最优绘画方案。相反，它会生成多项式数量的结构化候选方案，并对它们进行穷尽验证。更确切地说，对于所有合适的 D、k 和 $\prec$ 取值，我们枚举所有 $(D,12, \prec)$-规范染色方案。事实上，根据引理 9，我们可以假设 $|D| = 4$ 和 $k \le 12$。因此，我们将注意力限制在满足 $|D| = 4$ 和 $k = 12$ 的 $(D, k, \prec)$-规范染色方案上。下文中，我们将这些方案简称为 $(12, \prec)$-规范染色方案。

为了生成此类方案，我们首先构造一个多项式规模的可能头部集合，以及一个多项式规模的可能尾部集合。将每个头部与每个尾部组合，便得到一组

候选着色方案。如果任何一个候选方案通过验证步骤，就能得到一个最优解。

头部。 我们首先构造可能的头部。固定颜色的一个（任意）全序 $\prec$，即可排除许多本质上等价的策略。事实上，给定一个 $(12, \prec)$- 典范涂色方案 P，其头部 H 由其支配集 D 以及其中使用的颜色集合 $F \subseteq C$ 唯一确定。固定 D 和 F 后，按照相对于 $\prec$ 的递增顺序枚举颜色 $c \in F$，并应用笔画 $(t^{-1}(c) + D, c)$，即可重建头部。

由于任意图 G 至多包含 $\binom{|V(G)|}{4} \in O(|V(G)|^4)$ 个诱导的 P_4，我们只需枚举所有四顶点子集，并检验它们是否诱导出一个 P_4。类似地，如果一个 $(D,12, \prec)$- 典范涂色方案的长度为 s，那么其头部恰好使用 $s-12$ 种颜色。由于 $s \leq |C|+4$，我们只需考虑 $\binom{|C|}{|C|+4-12} \in O(|C|^8)$ 种 F 选择。

这些观察得出了以下结果。

引理 10. 设 G 是一个带有模板 t的图，且 $\prec$ 是 t中所用颜色的任意排序。集合

$$H_s := \{\mathrm{head}(P) \mid P \textit{ is a } (12, \prec)\textit{-canonical painting plan of length } s\}$$

可以在多项式时间内生成。

尾部。 现在我们转向可能尾部的构造。与头部不同，$(12, \prec)$-规范的绘画方案的尾部在结构上并不固定。因此，简单地枚举所有可能性会导致难以承受的规模膨胀。

为控制这一点，我们增加一个极大性条件。设 $P = (A_1, c_1) \ldots, (A_s, c_s)$ 是一个 $(D, k, \prec)$-规范的绘画方案。如果不存在索引 $i \in [1, s]$ 和顶点$v \in V(G)$，使得 $A_i \subset A_i + v$，且将 A_i替换为 $A_i + v$后得到另一个有效的 $(D, k, \prec)$-规范的绘画方案，我们就称 P极大 。直观而言，在极大方案中，每一笔都会吸收所有可以加入且不违反规范性的顶点。

至关重要的是，这一极大性概念只影响尾部。扩展头部中的任何笔画都会与典范涂色方案的定义相矛盾。因此，即使我们将注意力限制在极大方案上，引理 10 仍然成立。

观察11。 对于每个长度为 s 的$(D, k, \prec)$-规范的涂色方案，都存在一个长度相同的极大$(D, k, \prec)$-规范的涂色方案。

因此，我们将注意力限制在极大的 $(12, \prec)$-规范涂色方案上。由于尾部恰好由十二个笔画组成，我们可以暴力枚举这些笔画合适的“种子”顶点和颜色，然后将每个区域极大地扩展。这样便得到所有可能尾部的一个多项式规模的超集。

引理 12。 设 G 是一个具有模板 t 的图，并设 $\prec$ 是 t 中所使用颜色的任意排序。集合

$$T_s \supseteq \{\mathrm{tail}(P) \mid P \textit{ is a maximal } (12, \prec)\textit{-canonical painting plan of length } s\}$$

可以在多项式时间内生成。

请注意， T_s 可能包含不属于任何典范涂色方案的尾部。但这并无妨碍：这些候选将无法与任何头部组合。最重要的是， T_s只包含多项式数量的元素，且每个元素的大小都是常数。

结合头部和尾部可得如下结果。

引理 13。 设 G 是一个具有模板 t 的图，并设 $\prec$ 是 t 中所使用颜色的任意排序。集合

$$P_s := \{P \mid P \textit{ is a maximal } (12, \prec)\textit{-canonical painting plan of length } s\}$$

可以在多项式时间内生成。

现在我们可以介绍无余宝石图上 Miniature Painting 的多项式时间算法了。

算法1 在无 co-gem 图上进行 Miniature Painting 的多项式时间算法

过程 求解（G， t）
  如果 G 是余图**则**
    返回 求解_余图(G， t)
  结束如果
  对于 $i = c$ 至 $c+3$ **执行**
    $S \leftarrow$ 生成_$P_s(G, t, i)$
    如果 $S \neq \emptyset$ **则**
      返回 S 的任意元素
    结束 if
  结束 for
结束过程

我们以本文的主要结果作为本节的结尾。

定理 14。 设 G 是一个无 *co-gem* 图， t 是一个颜色模板。可以在多项式时间内找到一个最优着色方案。

6 结论

我们引入了微型着色问题，作为分析并求解结构化图类上 Free Flood-It 实例的工具。通过形式化规范染色方案，并利用小型连通支配集的结构，我们为无 co-gem 图开发了一种多项式时间算法。此外，我们还由此得到了一个针对余图的简单多项式时间解法。

展望未来，我们的结果指明了若干值得进一步研究的方向。其一是降低当前多项式时间算法的指数。其二是探索连通支配集和规范染色方案的概念能否推广到其他图类，从而有望发现 Free Flood-It 的新易解情形。

7 技术证明

本节汇集正文中所有定理、引理和观察的证明，并按它们出现的相同顺序呈现。每个结果在其证明之前都会为清晰起见重新陈述。

观察 1. 若 G 是具有分隔集 S 的连通余图，则 $G - S$ 的不同连通分量中的每一对顶点在 S中都有一个公共邻点。

证明。 设 v 与 w 位于 $G - S$ 的不同连通分量中，并考虑 G 中顶点数最少的任意 v, w-路径P 。由于 P 必须至少包含 S 的一个顶点，且 G 是无 P_4的，读者容易验证 P 是由顶点 v、 w 以及来自 S的另一个顶点导出的 P_3 。 □

观察2. 连通余图 G 的每个分隔集都是 G的支配集。

证明。 对于 $G - S$的不同连通分量中的任意一对顶点 v与 w，观察 1表明 v 与 w 在 S中有一个公共邻点。因此， S 特别地支配 v 与 w ，并且由于选择的任意性， S 一般而言是 G的支配集。 □

观察　　论 3. 若 G 是一个连通余图，且有不相交的分隔集 S 和 T，则 $S+T = V(G$　　$)$.

证明。若存在 $x \in V$（G）$-$（$S+T$），那么我们可以在图 $G-S$ 中选取一个顶点 v，使其与 x 不属于同一个连通分支；类似地，从 $G-T$ 的另一个连通分支中选取顶点 z。根据观察 1，存在顶点 $w \in S$ 和 $y \in T$，使得 v、w、x 和 x、y、z 是 G 中的诱导 P_3。根据前提条件、选择过程，以及 $v=z$ 蕴含一条不经过 T 的 x、z-路径 x、w、$v=z$，顶点 v、w、x、y、z 两两不同。若边 wz 或 vz 存在，则会有不经过 T 的 x、z-路径 x、w、z 或 x、w、v、z；而边 vy 则会推出一条不经过 S 的 v、x-路径 v、y、x。现在，无论 $wy \in E$（G）如何， G 中都存在一个诱导 P_4，即 v、w、y、z 或 v、w、x、y。这与假设 x 存在相矛盾。 □

观察 4。 无 *co-gem* 图中的每个诱导 P_4 都是一个支配集。

证明。 假设无 co-gem 图 G中存在一个非支配的 P_4，其顶点为 a，b，c，d。那么就会存在一个顶点 x，它与 a，b，c，d 中的任何一个都不相邻，因此，$\{a$，b，c，d，$x\}$会诱导出一个 co-gem，这就产生了矛盾。 □

引理 5。 当且仅当 G 有一个针对 t的递归s-笔画绘画方案时，模板 t 才能在图 G 上用 s 笔画着色。

证明。 我们只需证明，一个针对 t 的 s-笔画绘画方案意味着存在一个递归方案，该方案包含相同数量的操作，并且仍能将颜料 t 涂到 G上。首先，我们论证存在一个仅由递归笔画组成的方案。因此，设 $P=(A_1,\ c_1)\ldots,(A_s,\ c_s)$ 是针对 t 的任意一个 s-笔画绘画方案，并且 j 最小； j 是非递归笔画的最后一个（也就是说，最大的）序号。如果 P 中没有非递归笔画，我们就直接令 $j=0$。

为导出矛盾，假设 $j>0$，并令 (A_j, c_j) 为 P 中相应的笔画。此外，我们将 A 定义为绘画区域 A_j 的超集，且它是绘画 p_j 中 G 的一个 c_j 色连通分支。我们通过对所有 $i \in [1,s]$ 依次排列笔画 (A'_i, c_i)，从 P 构造新的绘画方案 P'；若 $i \le j$ 且 $A_i \cap A$ 非空，则 $A'_i = A_i + A$，否则 $A'_i = A_i$。显然， $A'_1,\ldots,A'_s$ 是有效的绘画区域，因为 $A_1,\ldots,A_s$ 和 A 都是连通顶点集。事实上，这使得每个 A'_i 都是连通顶点集，尤其是在 $A'_i = A_i + A$ 时，因为此时 $A_i \cap A$ 非空。令 $p'_0, p'_1, \ldots, p'_s$ 为 P' 的着色。

我们由此得出，着色 p_j 和 p'_j 相同，理由如下：显然， $A = A'_j$，因此，对于所有 $v \in A$，根据 A 的定义，有 $p_j(v) = c_j$；而根据 P' 中的笔画 (A'_j, c_j)，有 $p'_j(v) = c_j$。对于每个顶点 $v \in V(G) - A$，考虑 P中的最后一笔 (A_i, c_i)（即 i取最大值的那一笔），其中 $v \in A_i$ 且 $i \le j$。注意， i 不一定是 $f_P(v)$。由于 $A_i - A = A'_i - A$，我们得到 P' 也在第 i笔中为 v 着色。现在考虑 P' 中的最后一笔 $(A'_{i'}, c_{i'})$（即 i'取最大值的那一笔），其中 $v \in A'_{i'}$ 且 $i' \le j$。同样， i' 通常不是 $f_{P'}(v)$。根据前面的同一论证，我们发现 P 也在第 i'笔中为 v 着色。由于 i 和 i'都是 $[1,j]$ 中 v 被着色时的极大指标，因此必有 $i = i'$。由此， $p_j(v) = p'_j(v) = c_i$，并且我们得出 p_j 与 p'_j等价。

根据定义，对于所有 $i \in [j+1, s]$，$(A_i, c_i) = (A'_i, c_i)$，因此， p'_i 与每个 p_i $i \ge j$相同。因此， P' 仍然为模板 $t = p_s = p'_s$ 着色，并且对于所有 $i > j$， 笔画 i 在 $P\prime$中是递归的，就像在 P中一样。

我们通过论证笔画 (A'_j, c_j) 在 P'中是递归的，来导出矛盾。但这相当明显。首先， P' 中的每个先前笔画要么避开 $A'_j = A$，要么将其完全填满。这意味着，相对于 p'_{j-1}，绘画区域 A'_j 是单色的。此外， A 被选为 A_j 的超集； A_j 是相对于着色p_j而言， G 中的一个c_j色连通分支。由于 $p'_j = p_j$，我们可以得出结论： A'_j 也是 p'_j的一个颜色分量。

因此， P' 是适用于 t 的 s笔画着色方案，其中非递归笔画的最大索引低于 j。这与 P 的选取相矛盾，并最终与 $j>0$的假设相矛盾。因此， P 一开始就必定仅由递归笔画构成。

接下来只需将 P 转化为递归绘画方案。为此，我们只需将第一笔（A_1， c_1）替换为（V（G） c_1），读者很容易验证，替换后仍然是递归方案。

这一修改的影响相当广泛，因为它有可能改变所有绘画p_1，……，p_s。但不难看出，其影响也很有限，不会改变语义。事实上，唯一发生变化的情况是：某一笔（A_i，c_i）着色了一个绘画区域，而该区域在修改前的 p_{i-1} 中尚未被全定义。修改后，这一笔仍然只是为同一个绘画区域 A_i 着色，但该区域变成了单色 c_1色。就 A_i 而言，结果并无变化——在 p_i 中，它仍是 G的一个 c_i 色连通分支。由于 t 是全定义函数，这一修改保留了 $t = p_s$。

□

定理 6. 设 $G = (V, E)$ 是一个图，且 t: $V \to C$ 是 G的一个模板。当且仅当在初始以 t着色时，G 存在一个包含 $s-1$ 个操作的洪水填色序列，才存在一个s涂色方案，将 t 绘制到 G 上。

证明。借助引理 5，我们可以在更强的条件下进行论证，甚至可以使用递归绘画方案。我们对 s 使用归纳法。首先，令 $s = 1$。那么，t 存在一个仅包含单个笔画（A_1, c_1）的绘画方案，当且仅当该方案本身就是递归方案；当且仅当 t 是一个常函数，将颜色 $c_1 = t(v)$赋给所有顶点 $v \in V = A_1$；当且仅当在初始着色 t下，G 已经是单色；当且仅当存在一个包含 $s-1=0$ 个操作的洪水填色序列。

对于归纳步骤，设 $s > 1$，并分别假设对于所有 $s'-1$ 次操作的 s' 着色方案和洪水填色序列，定理均成立，其中 $s' < s$。根据引理 5，当且仅当存在一个递归方案 $P = (A_1, c_1) \ldots, (A_s, c_s)$ 将 t 着色为 G 时，存在一个针对 t 的 s 笔画着色方案。根据 Miniature Painting 的定义，后者成立，当且仅当存在绘画 p_0、p_1、……、p_s，其未定义函数为 p_0 和 $p_s = t$，并且对于所有 $i \in [1, s]$，绘画 p_i 是通过如下方式由 p_{i-1} 导出的：对于所有 $v \in V$，若 $v \in A_i$，则令 $p_i(v) = c_i$；否则令 $p_i(v) = p_{i-1}(v)$。显然，这等价于：(i) 存在递归的、$(s-1)$-着色方案 $P' = (A_1, c_1) \ldots, (A_{s-1}, c_{s-1})$，用于将 $t' = p_{s-1}$ 着色为 G（注意，t' 是一个全定义函数，因此是一个有效模板）；以及 (ii) 通过令 $t(v) = c_s$ 对所有 $v \in A_s$ 成立，并令 $t(v) = t'(v)$ 对所有 $v \in V - A_s$ 成立，可由 t' 导出 t。由于 P 是递归的，绘画区域 A_s 在绘画 t' 中是单色的，我们将其颜色记为 $c = t'(A_s)$。还要回顾，A_s 在绘画 t 中成为 G 的一个 c_s 色连通分支。

根据归纳法假设以及 Free Flood-It 的定义，前述命题成立，当且仅当 (i) 对于初始以颜料 t' 着色的 G，存在由 $s-2$ 次操作组成的洪水填色序列 S'，并且 (ii) 在以 t 着色的图 G 上，用 $v \in A_s$ 执行淹染步 (v, c)，会在 G 上产生着色 t'。注意，该命题的第 (ii) 部分成立，因为 A_s 是 G 的一个颜色为 c_s 的连通分支，因此用 c 淹染该区域，即可恢复 t' 的单色区域 A_s。最后，根据洪水填色序列的定义，最后这一断言成立，当且仅当 $S = (v, c) + S'$ 是针对初始以颜料 t 着色的 G 的、由 $(s-1)$ 次操作组成的洪水填色序列。此处，$(v, c) + S'$ 表示将操作 (v, c) 前置到序列 S' 所得到的序列。至此证明完毕。

□

定理 8. 存在一种多项式时间算法，可用于余图上的 Miniature Painting。

证明。设 G 是一个余图，t 是 G的一个模板。我们可以假设 G 是连通的；否则，我们可以分别处理各个连通分量。G 要么是一个单个顶点，这是一个平凡情形；要么包含支配边。这是因为众所周知，连通余图 G 是两个余图 G_1 和 G_2 的完全联接（例如参见 [3]），显然，G_1 与 G_2 之间的每条边都是支配边。

如果存在一条支配边 v_1v_2，使得不失一般性，$t^{-1}(t(v_1))$ 是连通的，那么读者可以轻易验证：按任意顺序对绘画区域 $t^{-1}(c) + \{v_1, v_2\}$ 使用 c（对于所有 $c \in C - t(v_1)$），最后再对绘画区域 $t^{-1}(t(v_1))$使用 $t(v_1)$，即可为 G 构造一个包含 $|C|$ 笔画的绘画方案。由于这是 t的任何绘画方案所能达到的最小长度，因此该方案必然是最优的。反之，如果不存在这样的边，则任取一条

支配边 v_1v_2，并将上述方案的 $|C|-1$ 个初始笔画与笔画 $(t^{-1}(t(v_1)) + v_2, t(v_1))$ 以及 $(\{v_2\}\ t(v_2))$ 拼接起来，即可构造一个包含 $|C|+1$ 笔画的方案。

请注意，第二种情况同样是最优的。为此，我们只需证明不存在使用 $|C|$ 笔画的方案。这样的 $|C|$ 笔画方案对每种所使用的颜色都只有一笔。因此，最后一笔必然需要为某个 $c \in C$ 将绘画区域 $t^{-1}(c)$ 着色，因为此前尚未发生这种情况，而且它不能覆盖其他任何内容。但现在，取任意顶点 $v_1 \in t^{-1}(c)$ 以及余图中任意一个不包含 v_1 的顶点 v_2（来自 G_1 或 G_2），显然可以得到一条上述类型的支配边。这就产生了矛盾。

显然，所有这些都可以在多项式时间内完成，因为我们只需检查 $|E(G)|$ 条边是否满足：(i) 为支配边，以及 (ii) 满足连通性，这对每条 eadfe 都通过线性时间广度优先搜索完成。

□

引理 9。对于每个包含诱导 P_4 的无 *co-gem* 图 G、每个模板 t：$V(G) \to C$，以及 C 的每个全序 $\prec$，存在一个最优着色方案，该方案对于某个支配集 D 是 $(D, k, \prec)$-规范的；该支配集在 G 中诱导出一个 P_4，并且存在某个 $k \leq 12$。

证明。设 $P = (A_1, c_1), (A_2, c_2) \ldots, (A_s, c_s)$ 是 t 在 G 上的一个最优着色方案，其完成指标 f_P 为极大，并设 D 是 G 的一个导出 P_4，其相对于 P 的完成指标为极大。注意，P 与 D 均不必唯一，且 $f_P = f_P(D)$。设 a, b, c, d 为 D 的顶点，按其完成指标排序，并令 $\alpha = f_P(a)$、$\beta = f_P(b)$、$\gamma = f_P(c)$ 与 $\delta = f_P(d)$。因此，$\alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \delta$。

我们首先注意到，不失一般性，可以假设对每个笔画指标$i \leq \alpha$都有 $A_i = t^{-1}(c_i) + D$。事实上，假设对某个笔画 (A_i, c_i) 并非如此。将 A_i 替换为 $A'_i = t^{-1}(c_i) + D$ 并不会使 P 不再是 t 的有效绘画方案。为看出这一点，考虑任意顶点 $v \in V(G)$，其在 A_i 与 A'_i 中的隶属关系不同。若 $f_P(v) = i$，则 $v \in A_i$，从而 $t(v) = c_i$，这意味着 $v \in t^{-1}(c_i) \subseteq A'_i$，矛盾。若 $f_P(v) < i$，则在笔画 i 处以颜色 c_i 重新着色 v 是正确的，且后续任何笔画都不会影响 v。最后，若 $f_P(v) > i$——对所有 $v \in \{b, c, d\}$ 均是如此——则在笔画i 处对 v 的颜色所作的任何更改都无关紧要，因为它将被后续笔画覆盖。因此，该修改保持正确性。

根据这一观察，我们还可以进一步假设，同样不失一般性，对于所有 $i,\ j \in [1, s-\alpha-1]$，$i < j$蕴含 $c_i \prec c_j$。如果两个笔画 $(A_i,\ c_i)$ 和 $(A_j,\ c_j)$ 满足 $i < j$，却违反了这一排序，那么交换这两个笔画即可得到一个有效方案。事实上，如果交换改变了前 $\alpha - 1$ 个笔画完成后某个顶点的着色，那么该顶点必然位于 D 中，因为截至索引 α 的所有绘画区域都仅在 D 中相交。然而，笔画 α 会完全重新着色 D 的所有顶点，因为 $A_\alpha = t^{-1}(c_\alpha) + D$，从而恢复正确颜色。

因此，要证明对于某个 $k \leq 12$，P 是 $(D,\ k,\ \prec)$-规范的，只需证明 $s - \alpha \leq 12$。关键思路是证明，在 α、β、γ 和 δ 中任意两个连续值之间，至多存在两个中间笔画。为此，设 p_0，p_1、$\ldots$、p_s 是由 P 创建的绘画，因此 $p_s = t$。

我们先讨论 α 的情况：一方面，它比其他情况稍简单；另一方面，它无法利用 G 的未完成剩余图的一项性质，而该性质在后文至关重要。

命题1。如果 $\alpha < s$，那么 $\alpha + 1 \in \{\beta, \gamma, \delta, s\}$。

为导出矛盾，假设 $\alpha + 1 \notin \{\beta, \gamma, \delta, s\}$。那么，对于每个顶点 $v \in D$，显然有 $f_P(v) = \alpha$或者 $f_P(v) > \alpha + 1$。

现在，我们通过将笔画 α 和 $\alpha + 1$ 替换为笔画 (A'_α, c'_α) 和 $(A'_{\alpha+1}, c'_{\alpha+1})$，从 P 构造出新的着色方案 P'，其定义为 $A'_\alpha = A_{\alpha+1} + D$, $c'_\alpha = c_{\alpha+1}$, $A'_{\alpha+1} = A_\alpha - A_{\alpha+1} + D$ 和 $c'_{\alpha+1} = c_\alpha$。直观地说，这一构造相当于交换这两道笔画，并让它们都经过支配集 D。A'_α 和 $A'_{\alpha+1}$ 都是有效的绘画区域，因为它们通过 D 连通。

我们声称，在笔画 $\alpha+1$ 之后，每个顶点 $v \in V(G) - D$ 在 P' 下的颜色与在 P 下相同。确实，修改后的两道笔画都不会影响 $A_\alpha + A_{\alpha+1} + D$ 之外的任何顶点。此外， $v \in A_\alpha - A_{\alpha+1} - D$ 中的每个顶点都已通过 P' 的笔画 $\alpha+1$ 正确着上颜色 $c_\alpha = p_{\alpha+1}(v)$，因为 $A'_{\alpha+1}$ 包含该集合。类似地，在 P' 下，每个顶点 $v \in A_{\alpha+1} - D$ 都会获得颜色$c_{\alpha+1} = p_{\alpha+1}(v)$，因为 $A'_\alpha \supseteq A_{\alpha+1}$ 和 $A'_{\alpha+1}$ 不会重新着色 $A_{\alpha+1} - D$ 中的顶点。

对于顶点 $v \in D$，其中满足 $f_P(v) = \alpha$ 的顶点，在 P'下仍保持为 $c_\alpha = p_{\alpha+1}(v)$，因为笔画 $\alpha+1$ 将所有 D 重新着色为该颜色。根据假设，其余所有满足 $f_P(v) > \alpha+1$ 的顶点 $v \in D$，因此由 P和 P'以相同方式最终确定。 consequently， P'仍然是针对 t的最优着色方案。然而，对于 P'而言，由 D 给出的诱导 P_4 具有完成指标 $f_{P'}(D) = f_P(D) + 1$，这意味着 $f_{P'} > f_P$。这与 f_P的极大性相矛盾，并完成了命题1的证明。

为了将相同的思路应用于其余指标，我们再次推导出与 f_P的极大性相矛盾的结论。不过这一次，我们不能再使用 D 作为枢纽，这使得论证更加微妙。

命题 2。 对于每个满足 $\sigma+3 \le s$ 的 $\sigma \in \{\beta, \gamma, \delta\}$，笔画 $\sigma+1$、 $\sigma+2$ 或$\sigma+3$ 中至少有一个属于 $\{\gamma, \delta, s\}$。

为简洁起见，令 $x = \sigma+1$、 $y = \sigma+2$ 和 $z = \sigma+3$。下文中，我们假设对于所有$i \in \{\sigma, x, y\}$ 以及所有 $j \in \{i+1, \dots, z\}$，要么 $A_i \supseteq A_j$，要么 $A_i \cap A_j = \emptyset$；我们首先说明这一假设不失一般性。

事实上，如果不满足这一条件，我们可以将笔画 i 中的 A_i 替换为集合 A'_i，该集合定义为包含 A_i 且对每个满足 $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ 的 $j \in \{i+1, \dots, z\}$都包含其整个绘画区域 A_j 的最小超集。显然， A'_i 是一个有效的绘画区域，因为它是 A_σ, A_x, A_y 和 A_z 中至多四个连通集的并集。此外，修改后的方案所产生的着色 p_z与 P 的着色一致。这是因为截至 p_{i-1} 的所有着色均保持不变，而任何在笔画 i 中被提前着色的顶点 $v \in A'_i - A_i$，都会由之后最后一个满足 $v \in A_j$ 和 $j \in \{i+1, \dots, z\}$的笔画 A_j 修正。由于 z 之后的笔画均未改变，所得序列仍是针对 t的有效绘画方案。最后，所有顶点的完成时间均保持不变，因此完成指标也得以保留。由此可见，该假设是合理的。

现在假设 x， y， $z \notin \{\gamma$， δ， $s\}$，以此导出矛盾。我们声称，以下三个序列中至少有一个——每个序列都将笔画 x、 y或 z 之一直接移到 σ 之前——构成有效的绘画方案。由于这会将笔画 σ 恰好推迟一个位置， D 的完成指标将增加，这与 f_P的极大性矛盾。

方案 P_1	方案 P_2	方案 P_3
(A_1, c_1)	(A_1, c_1)	(A_1, c_1)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
(A_x, c_x)	(A_y, c_y)	(A_z, c_z)
$(A_\sigma - F_P(x), c_\sigma)$	$(A_\sigma - F_P(y), c_\sigma)$	$(A_\sigma - F_P(z), c_\sigma)$
(A_y, c_y)	$(A_x - F_P(y), c_x)$	$(A_x - F_P(z), c_x)$
(A_z, c_z)	(A_z, c_z)	$(A_y - F_P(z), c_y)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
(A_s, c_s)	(A_s, c_s)	(A_s, c_s)

表1： P的调整后的序列。

对于每个 $j \in \{1, 2, 3\}$，修订后的序列 P_j 将笔画 $(A_{\sigma+j}, c_{\sigma+j})$ 直接移到 (A_σ, c_σ) 之前，从而将后者延后一位。这需要对 A_σ和后续绘画区域稍作调整。现在我们证明，只要修改后的集合是有效的绘画区域，每个这样的序列都能正确复现 t。

固定 $j \in \{1, 2, 3\}$，并考虑 P_j；根据表1，它被定义为序列 $(A'_1, c'_1) \ldots, (A'_s, c'_s)$，其中

- $(A_i, c_i) = (A_i, c_i)$，对所有 $i \in [1, s] - [\sigma, \sigma + j]$,
- $(A_\sigma, c_\sigma) = (A_{\sigma+j}, c_{\sigma+j})$,
- $(A_{\sigma+1}, c_{\sigma+1}) = (A_\sigma - F_P(\sigma + j)\ c_\sigma)$，且
- $(A_i, c_i) = (A_{i-1} - F_P(\sigma + j)\ c_{i-1})$，对所有 $i \in [\sigma + 2, \sigma + j]$。

假设所有 (A'_i, c'_i) 都是有效的绘画区域，令 $p'_0, \ldots\ldots, p'_s$ 表示由 P_j 诱导的绘画。显然，对所有 $i \leq \sigma - 1$, $p'_i = p_i$。接下来我们证明，在第 $\sigma + j$ 笔画之后，满足 $f_P(v)$ 的每个顶点 v 在 P_j 下都具有正确颜色。

$A_\sigma + \cdots + A_{\sigma+j} + D$ 之外的顶点不受影响。对于这个并集中位于 v 内且满足 $f_P(v) \leq \sigma + j$ 的部分，我们区分两种情况：

- 如果 $v \in A_{\sigma+j}$，那么 $v \in F_P(\sigma + j)$，因此 $p_{\sigma+j}(v) = p_{\sigma+j}(v) = c_{\sigma+j}$，因为 $v \in A_\sigma$，且后续调整后的绘画区域都不会覆盖 P_j 的 $F_P(\sigma + j)$。
- 如果 $v \in A_{\sigma+i} - \hat{} A_i$，其中对某个 $i \in [0, j-1]$ 有 $\hat{} A_i = A_{\sigma+i+1} + \cdots + A_{\sigma+j}$，那么 v 在 $p_{\sigma+j}$ 中被正确着色为 $c_{\sigma+i}$。这是因为调整后的绘画区域 $A_{\sigma+i+1} = A_{\sigma+i} - F_P(\sigma + j) \hat{}$ 是 $A_{\sigma+i} - A_{\sigma+j} \supseteq A_{\sigma+i} - A_i$ 的超集，因此包含 v。与此同时，所有后续调整后的绘画区域

$$
\begin{aligned}
A'_{\sigma+i+2} &= A_{\sigma+i+1} - F_P(\sigma + j) \subseteq A_{\sigma+i+1} \subseteq \hat{A}_i, \\
&\vdots \\
A'_{\sigma+j} &= A_{\sigma+j-1} - F_P(\sigma + j) \subseteq A_{\sigma+j-1} \subseteq \hat{A}_i
\end{aligned}
$$

$\hat{}$ 是 A_i 的子集，因此不能包含或覆盖 v。

因此，所有剩余差异仅涉及满足 $f_P(v) > \sigma + j$ 的顶点 v。由于 P 和 P_j 此后重合，所有此类顶点的最终处理结果都相同，从而得到 $p'_s = p_s = t$。

最后，考虑顶点 $v \in D$。如果 $f_P(v) < \sigma$ 或 $f_P(v) > \sigma + j$，那么 $f_{P_j}(v) = f_P(v)$，因为对于 P 和 P_j，$[1, \sigma - 1]$ 和 $[\sigma + j + 1, s]$ 中的笔画相同。如果 $f_P(v) = \sigma$，那么根据构造，$f_{P_j}(v) > f_P(v)$。根据 $\alpha \leq \beta \leq \sigma$ 以及关于 x、y、z 的假设，排除 $f_P(v) \in \{x, y, z\}$ 的情形。因此，在 P_j 下，D 的完成指标增加，这与 P 的选择矛盾。

仍需证明 P_1, P_2, P_3 中至少有一个是有效的着色方案。也就是说，对于某个 $j \in \{1, 2, 3\}$，调整后的笔画 $\sigma, \ldots, \sigma + j$ 必须作用于有效的绘画区域。笔画 σ 没有问题，因为它与 P 中的 $(A_{\sigma+j}, c_{\sigma+j})$ 相同。

现在我们考察剩余的调整。由于 P 是最优的，集合 $F_P(\sigma)$ $F_P(x)$ $F_P(y)$ 和 $F_P(z)$ 都非空。此外，它们两两不相交，因为每个顶点只能完成一次。由于 A_σ 与 A_i 要么不相交，要么是其超集，因此对于所有 $i \in \{x, y, z\}$，我们也有 $A_\sigma \cap F_P(i) = \emptyset$ 或 $A_\sigma \supseteq F_P(i)$。对于 $i \in \{\sigma, x, y, z\}$ 中的每个图 $G[A_i]$，它都是连通余图，因为在笔画 i 之前，每个诱导的 P_4 中至少有一个顶点已完成。

考虑 P_1。唯一修改的笔画是 $\sigma + 1$，它使用 $A_\sigma - F_P(x)$。这是一个有效的绘画区域，除非 $F_P(x)$ 将 $G[A_\sigma]$ 分隔开。如果没有，P_1 就是一个有效方案，至此完成。

否则，$F_P(x)$ 是 $G[A_\sigma]$ 的分隔集，这意味着 $A_x \cap A_\sigma \neq \emptyset$，因此 $A_x \subseteq A_\sigma$。接下来我们转向 P_2。集合 $A_\sigma - F_P(y)$ 是连通的，否则，$F_P(x)$ 和 $F_P(y)$ 将是 $G[A_\sigma]$ 的不相交分隔集，而观察3将推出 $F_P(x) + F_P(y) = A_\sigma$，从而没有空间容纳非空且不相交的集合 $F_P(\sigma)$。因此，P_2 中的第二次调整是有效的。如果 $F_P(y)$ 不分隔 $G[A_x]$，那么 $A_x - F_P(y)$ 也连通，且 P_2 是一个有效方案。

如果 P_1 和 P_2 都无效，那么 $F_P(x)$ 分隔 $G[A_\sigma]$，而 $F_P(y)$ 分隔 $G[A_x]$。这意味着 $F_P(y)$ 在 A_x 中有顶点，并且与上文一样，这意味着 $A_y \subseteq A_x \subseteq A_\sigma$。在这种情况下，我们考虑 P_3。和之前一样， $A_\sigma - F_P(z)$ 是连通的，因为与 $F_P(y)$ 的情形一样，余图 $G[A_\sigma]$ 无法被 $F_P(z)$ 分隔。类似地， $F_P(z)$ 无法分隔 $G[A_x]$，否则这将意味着 $G[A_x]$ 有两个不相交的分隔集： $F_P(y)$ 和 $F_P(z)$；根据观察 3，这意味着 $F_P(y) + F_P(z) = A_x$。同样，这与非空的 $F_P(x) \subseteq A_x$ 存在相矛盾。因此， $A_x - F_P(z)$ 是连通的。

最后，考虑 $A_y - F_P(z)$。除非 $F_P(z)$ 分隔 $G[A_y]$，否则该集合是一个有效的绘画区域。为得出矛盾，假设情况确实如此，且 $G[A_y] - F_P(z)$ 不连通。那么，作为 $G[A_y]$ 的分隔集， $F_P(z)$ 在 A_y 中有顶点，并且我们再次得到 $A_z \subseteq A_y \subseteq A_x \subseteq A_\sigma$。

为了导出这一矛盾，我们首先选取一个不在 $F_P(x)$ 中的顶点 $u \in F_P(\sigma)$，以及一个位于 $G[A_\sigma] - F_P(x)$ 中与 u 不同连通分支内的顶点 $u' \in A_\sigma$；显然， $uu' \notin E(G)$。根据观察 1，分隔集 $F_P(x)$ 中存在一个顶点 v，它与 u 和 u' 都相邻。

接下来，存在一个顶点 $v' \in F_P(x)$，它位于 $G[A_x] - F_P(y)$ 中与 v 不同的连通分支 C 内。为看出这一点，首先注意到，根据观察2， $F_P(x)$ 支配 A_σ。结合 $C \subseteq A_x \subseteq A_\sigma$，这意味着 $F_P(x)$ 同样支配 C。此外，由于 $F_P(x)$ 与 $F_P(y)$ 不相交，因此可得 $F_P(x) \subseteq A_x - F_P(y)$。于是，作为支配集， $F_P(x)$ 在 C 中必须至少有一个顶点 v'（按构造，它与 v 不在同一连通分支中）。

再次利用观察 1，可知存在一个顶点 $w \in F_P(y)$，与 v 和 v' 相邻。最后，观察 2 表明 $F_P(z)$ 支配 A_y，因此存在一个与 w 相邻的顶点 $m \in F_P(z)$。

注意，由于分隔集的性质以及 $F_P(\sigma)$ $F_P(x)$ $F_P(y)$ 与 $F_P(z)$ 的不相交性， u、 v、 v'、 w、 m 中的所有顶点都互不相同。对于 u'，我们只能确定它与 u 和 v 不同。我们证明，可以合理地假设 u 看不到 w 和 m。事实上，我们证明，如果两条边中至少有一条存在，那么 u' 就不同于 w 和 m，且与它们都不相邻。因此，我们可以放心地用 u' 替换 u。所以，如果 $uw \in E(G)$，那么 $u' \neq w$，因为 $uu' \notin E(G)$。此外， uw 的存在意味着 $u' \neq m$，否则 u、 w、 m 将构成一条路径，在 $G[A_\sigma] - F_P(x)$ 中连接 u 和 u'。显然，如果 u' 能看到 w 或 m，就会得到类似的连接路径： u、 w、 u'，或 u、 w、 m、 u'。同样的论证也适用于 u 能看到 m 的情况，只需在连接路径中交换 w 和 m。

由于 $G[A_\sigma]$ 是 P_4-free的，路径 u、 v、 w、 v' 不可能是诱导路径，并且由于 $uw(G)$ $vv' \notin E$，边 uv' 必定存在。类似地，路径 u、 v、 w、 m 不可能是诱导路径，而缺少uw、 um 意味着 $vm \in E(G)$。但是， $v'm$ 不存在，因为否则路径 v、 m、 v' 会在 $G[A_x] - F_P(y)$中连接 v和 v'。然而，路径 u、 v'、 w、 m 是诱导路径。这一矛盾证明了命题 2。

利用这些命题，我们显然有 $s - \alpha \leq 12$。证明完毕。 □

引理 10. 设 G 是一个具有模板 t的图，并设 $\prec$ 是 t中所使用颜色的任意排序。集合

$$H_s := \{\mathrm{head}(P) \mid P \text{ is a } (12, \prec)\text{-canonical painting plan of length } s\}$$

可以在多项式时间内生成。

证明。我们初始化 $H_s \leftarrow \emptyset$，并枚举所有满足 $|D| = 4$的子集 $D \subseteq V(G)$。对于每个这样的集合，我们丢弃那些不会在 G中诱导出 P_4 的 D。对于 D的每一种剩余选择，我们枚举所有满足 $|F| = s - 12$的子集 $F \subseteq C$。

对于每一对（D， F），我们构造部分着色方案

$$H_{D,F} = (t^{-1}(c_1) + D, c_1), \ldots, (t^{-1}(c_{s-12}) + D, c_{s-12}),$$

其中 c_1、.....、 c_{s-12}是按照 $\prec$排序的 F 中的元素，并将 $H_{D、F}$添加到 H_s 中。显然， $H_{D、F}$ 是一个仅缺少最后 12 个笔画的 (12， $\prec$)-规范绘画方案。因此，它确实是某个完整 (12， $\prec$)-规范绘画方案的头部。

现在我们证明 H_s 包含所有必需的头部。设 P 是任意一个长度为 s 、支配集为 D的(12，$\prec$)-规范绘画方案，并令 H 表示其头部。由于我们枚举了所有四顶点子集，因此会考虑集合 D 。此外，我们还会准确枚举 H使用的颜色集合 F 。根据规范头部的定义， H 的笔画恰好具有 $(t^{-1}(c) + D,\ c)$ 的形式，其中 $c \in F$。由于这些笔画按照 $\prec$ 排序，按此顺序遍历 F 并重构它们，就会准确地复现 H 。因此， $H \in H_s$。

最后，该构造可在多项式时间内完成。枚举 D 与 F的所有选择仅需多项式时间。检查一个4顶点集是否导出 P_4、对 F排序以及构造相应的笔画，均可高效完成。由于对每一对(D, F)至多添加一个头部，维护集合 H_s 也只需多项式时间。

□

观察11。 对于每一个长度为 s的$(D, k, \prec)$-典范涂色方案，都存在一个长度相同的极大$(D, k, \prec)$-典范涂色方案。

证明。 设 P是一个长度为 s 的、非极大的$(D, k, \prec)$-典范涂色方案。则存在一个下标 $i \in [1, s]$ 和一个顶点 $v \in V$（G），使得将第 i笔笔画的区域 A_i 替换为 $A_i + v$ 后，可得到另一个有效的$(D, k, \prec)$-典范涂色方案。

由于该图只有有限多个顶点和笔画，这一扩充过程只能应用有限次。一旦在不违反规范性的前提下无法再向任何笔画添加顶点，所得绘画方案按定义即为极大的。

□

引理12。 设 G 是一个具有模板 t 的图，并设 $\prec$ 是 t 中所使用颜色的任意排序。一个集合

$$T_s \supseteq \{\mathrm{tail}(P) \mid P \text{ is a maximal } (12, \prec)\text{-canonical painting plan of length } s\}$$

可以在多项式时间内生成。

证明。 我们初始化 $T_s \leftarrow \emptyset$，并枚举所有序列 $F =$（c_1、.....、 c_{12}） $\in C^{12}$。对于每个这样的序列，我们枚举所有顶点序列 $V =$（v_1、.....、 v_{12}） $\in V$（G）^{12}。根据这些顶点，对于 $i \in [1, 12]$ ，我们通过收集图中从 v_i 可达的所有顶点来计算集合 V_i

$$G[t^{-1}(c_i) + \bigcup_{j=i+1}^{12} V_j].$$

直观地说，这包括所有在最终模板中必须获得颜色 c_i 的顶点，或之后将被重新着色的顶点。然后我们将部分着色方案添加到

$$T_{F,V} = (V_1, c_1), \ldots, (V_{12}, c_{12})$$

T_s 中。

为说明 T_s 包含所有所需的尾部，设 P 是一个长度为 s 的极大（12、$\prec$）-规范的着色方案，并设

$$T = (A_1, c_1), \ldots, (A_{12}, c_{12})$$

作为其尾部。极大性意味着，在保持规范性的同时，不能向任何 A_i 添加顶点。最终，暴力枚举产生颜色序列（c_1，.....， c_{12}）。此外，我们枚举一个顶点序列（w_1，.....， w_{12}），且对所有 i有 $w_i \in A_i$。令$T_{F,\ V} =$（A'_1，c_1）.....，（A'_{12}，c_{12}）为由该选择构造的尾部。

由构造，对所有 i均有 $w_i \in A_i \cap A'_i$。反设对某个极大指标 j有 $A_j \neq A'_j$，以导出矛盾。则对所有 $k > j$均有 $A_k = A'_k$。对任意 $v \in A_j$， P的有效性意味着要么t（v）$= c_j$，要么对某个 $k > j$有 $v \in A_k$。由 A'_j的构造，这蕴含 $v \in A'_j$，从而有$A_j \subseteq A'_j$。

反过来，设 $v' \in A'_j$ 使得 $N(v')$ 与 A_j相交。那么，将 v' 添加到 A_j 中会保持规范性：要么 $t(v') = c_j$，要么 v' 之后会被重新着色。这与 P 的极大性矛盾。因此，不存在这样的索引 j，且对于所有 i，都有 $A_i = A'_i$。由此， T 得到了正确的重现。

$C^{12} \times V(G)^{12}$ 的全定义枚举是多项式规模的。每个区域 A'_i 都通过在修改图上执行有限次广度优先搜索来计算，所需时间为多项式时间。由于生成并存储的尾部数量只有多项式级别，因此可以在多项式时间内构造 T_s 。 □

引理 13. 设 G 是一个具有模板 t 的图，且 $\prec$ 是 t 中所用颜色的任意排序。集合

$$P_s := \{P \mid P \text{ is a maximal } (12, \prec)\text{-canonical painting plan of length } s\}$$

可以在多项式时间内生成。

证明。 根据引理 10 和引理 12，集合 H_s 和 T_s 可以在多项式时间内生成，且大小为多项式级。因此，我们枚举所有对 $(h, t) \in H_s \times T_s$。

对于每一对这样的组合，我们在多项式时间内验证将 t 追加到 h 后是否会得到有效的绘画方案。所有有效组合都会被收集到 P_s 中；由于其中仅包含多项式数量的元素，因此可以高效地维护该集合。

还需证明 P_s 中的每个绘画方案都是极大的。设 $P = (A_1, c_1), \ldots, (A_s, c_s) \in P_s$ ，并假设存在矛盾，即 P 不是极大的。那么存在一个顶点 $v \in V(G)$ 和一个下标 $i \in [1, s]$ ，使得将 v 添加到 A_i 后仍保持规范性。

由于无法延伸任何头部笔画，我们必须有 $i > s - 12$。扩展的有效性意味着 $N(v)$ 与 A_i 相交，并且对于某个 $j > i$，要么 $t(v) = c_i$ ，要么 $v \in A_j$ 。因此， v 包含在用于构造 A_i的图中，从而根据构造有 $v \in A_i$ ——矛盾。

因此， P_s 中的所有涂色方案都是长度为 s的极大的 $(12, \prec)$-典范涂色方案。 □

定理 14。 设 G 是一个无 *co-gem* 图， t 是一个颜色模板。可以在多项式时间内找到一个最优着色方案。

证明。 证明源于算法1的正确性和效率。

设 (G, t) 是一个具有长度为 s的最优着色方案的实例，并设 $\prec$ 是所使用颜色的任意排序。如果 G 是一个余图，则正确性由定理 8得出。否则，第 4 节表明 $c \leq s \leq c + 3$。

根据引理 9 和观察11，存在一个长度为 s 的极大（D，12， $\prec$）规范的绘画方案，其对应于某个诱导 P_4 D。因此，引理 13 保证 $P_s \neq \emptyset$。反之，不存在长度为 $s - 1$ 的规范绘画方案，因此 $P_{s-1} = \emptyset$。

因此，循环中遇到非空集合的第一次迭代恰好是满足 $i = s$ 的迭代，并且算法返回一个最优绘画方案。

多项式运行时间显然成立。余图识别是多项式时间的，根据定理 8 求解也是如此。该循环至多进行四次迭代，而引理 13 保证每个 P_s 都能在多项式时间内生成。

□

关于人工智能使用的免责声明

我们注意到，人工智能系统 ChatGPT，尤其是模型*GPT-5 mini*，曾在本项工作中使用，但仅用于改进文本的表达和可读性，因为作者并非英语母语者。本文未以其他方式使用 ChatGPT 或其子程序。特别是，没有任何人工智能框架参与任何创意决策、原创成果的开发或严谨数学证明的构建；所有这些工作均完全由作者完成。

参考文献

[1] D. Arthur、R. Clifford、M. Jalsenius、A. Montanaro 和 B. Sach。洪水填充游戏的复杂性。载于 P. Boldi 和 L. Gargano（编），算法趣谈，第307–318页，柏林、海德堡，2010年。Springer Berlin Heidelberg。

[2] R. Clifford、M. Jalsenius、A. Montanaro 和 B. Sach。洪水填充游戏的复杂性。计算机系统理论，50(1):72–92，2012年1月。[3] D. G. Corneil、Y. Perl 和 L. K. Stewart。余图的线性识别算法。*SIAM*计算杂志，14(4):926–934，1985年。[4] M. R. Fellows、U. dos Santos Souza、F. Protti 和 M. Dantas da Silva。树上的洪水填充游戏的可处理性与困难性。理论计算机科学，576:102–116，2015年。[5] M. R. Fellows、F. A. Rosamond、M. Dantas da Silva 和 U. S. Souza。洪水填充游戏复杂性综述，第357–376页。施普林格国际出版，Cham，2018年。[6] R. Fleischer 和 G. J. Woeginger。蜜蜂游戏的算法分析。载于算法趣谈，第178–189页，柏林、海德堡，2010年。Springer Berlin Heidelberg。[7] H. Fukui、Y. Otachi、R. Uehara、T. Uno 和 Y. Uno。关于具有区间表示的图上的洪水游戏复杂性。载于 J. Akiyama、M. Kano 和 T. Sakai（编），计算几何与图，第73–84页，柏林、海德堡，2013年。Springer Berlin Heidelberg。[8] K. Meeks 和 A. Scott。图上的洪水填充游戏的复杂性。离散应用数学，160(7):959–969，2012年。[9] K. Meeks 和 A. Scott。生成树与洪水填充游戏的复杂性。计算机系统理论，54:731–753，2014年。