arXiv:2602.00930v1 [math.OA] 31 Jan 2026

通过弱粗双模构造的外因子

DAVID GAO、DAVID JEKEL、SRIVATSAV KUNNAWALKAM ELAYAVALLI 和 GREGORY PATCHELL

Abstract. 我们能够显式计算 *handle constructions*中的冯·诺依曼代数包含的双模结构；这些包含由与$L(\mathbb{F}_2)$非初等等价的迭代合并自由积的归纳极限产生。我们的计算通过识别以迭代方式构造的合并自由积中的精细正规形分解来实现。利用这些技术，我们能够证明，把手构造始终是满的，无需诉诸性质 (T) 现象，而这在此前的所有工作中都是必不可少的。此外，我们的双模工具适用于配备忠实正规态的任意冯·诺依曼代数，从而通过把手构造给出满的 III_1 因子实例。

1. Introduction

对冯·诺伊曼代数超幂的研究可以追溯到该领域发展初期，并且是许多里程碑式结果中的关键组成部分 [DL69、ZM69、McD69、McD70、Con76]。这自然引出了如下问题：何时两个冯·诺伊曼代数具有同构的超幂；这也被称为初等等价（见 [FHS14]）。虽然判定两个冯·诺伊曼代数是否同构本身就是一个公认的困难问题，但用于评估更粗的初等等价关系的工具往往并不相同。要根据初等等价区分冯·诺伊曼代数，需要新的、更稳健的不变量；其中有若干涉及中心序列代数的不变量已在 [BCI17、GH17、GJKEP25]中得到研究。对于满的 II_1 因子、非 *Gamma*因子，或不具有非平凡中心序列的因子，关于初等等价的已知结果则少得多。首个被证明为非初等等价的满 II_1 因子构造见于 [CIKE23]。此处用于区分的不变量是序贯交换直径；序贯交换的框架由 [KEP25]发展而来（另见 [GKEPT25a]）。

固定一个 II_1 因子 M，并令 $M^{\mathcal{U}}$ 为其超幂。考虑这样一个图：顶点是 $M^{\mathcal{U}}$ 中的 Haar 酉元（即谱分布在圆周上均匀分布的酉元）；若 $uv = vu$，则 u和 v 相邻。这个图的连通分支是序贯交换轨道，而顶点 u 与 v 之间距离的上确界称为序贯交换直径（按照约定，若图不连通，则该值也为 $+\infty$）。例如，当且仅当 M 具有 Gamma 性质时，序贯交换直径为 2（参见[SS19，推论 4.11]以及 [KEP25，定理 4.2]）。与之完全相反的例子是自由群冯·诺伊曼代数 $L(\mathbb{F}_n)$：其交换图不连通，因为 $\mathbb{F}_n$ 的 n 个不同生成元分别属于不同的序贯交换轨道 [Hay18,JKE26]（另见 [HI24]，其中证明了生成元之间不存在长度为 3 的交换路径）。

[CIKE23]的策略是构造一个交换直径恰为 3 的 II_1 因子；等价地，任意两个酉元都能在交换图中由长度为 3 的路径连接，且 M 是满的。可以通过归纳构造安排交换直径的上界：在初始代数 M中枚举一组稠密的酉元对 $(u_n,\ v_n)$ 后，可对 $\mathrm{W}^*(u_n,\ v_n)$ 作与另一个代数的 amalgamated free product；该代数包含一条由序列交换的 Haar 酉元构成的路径，可连接 u_n 与 v_n。此外，还要通过对角化论证，对较大代数中的酉元稠密族进行迭代，从而使归纳极限具有所需的交换直径上界。

这项构造最具挑战性的方面，或许是如何确保归纳极限是满的，或者确保我们没有加入“过多”的交换酉元。 [CIKE23] 中的第一种方法非常技术性，只对满足以下条件的酉元对进行迭代：它们生成的代数彼此正交。这需要针对这类酉元的提升定理，还需要借助 [IPP08]进行复杂的变形—刚性处理。随后， [HI24] 通过更精细的提升定理，去除了对独立酉元对的条件。 [GKEP25] 中的第二种方法，则在归纳的每个阶段加入一条长度为四、而非长度为三的序贯交换路径。这种“3-手柄构造”使得证明满性容易得多，只要求初始输入代数具有性质 (T)，并直接应用 [IPP08], ，无需使用技术性的提升定理， `也不必像 [CIKE23, HI24]那样处理。

尽管第二种方法的证明要短得多，但对基代数具有性质 (T) 的要求，仍然限制了能够构造出何种满 II_1 因子。这也使我们无法将该构造推广到 III型情形，因为在朴素意义下，性质 (T) 在那里不可能成立。然而，性质 (T) 会在论证过程中自然出现。事实上，根据 [Tan23]„ 具有性质 (T) 的 II_1 因子 M 等价于每个不可约嵌入 $M \subseteq N$都具有弱谱隙（即， $M' \cap N = \mathbb{C}$蕴含 $M' \cap N^{\mathcal{U}} = \mathbb{C}$）。在 [CIKE23]和 [GKEP25], 中，正是这一点保证了通过归纳构造得到的较大代数仍然是满的。因此，如果没有性质 (T)，我们就无法在不利用嵌入的更多特殊性质的情况下，将满性传递给较大的代数。鉴于这一点，以及Peterson猜想 [Pet、问题 U5]„ 从概念上来说，性质 (T) 是否在获得非初等等价的满 II_1 因子这一过程中发挥作用，基本上仍不清楚。

本文将给出一种证明满性的新论证，完全避开性质 (T)。相反，我们利用一个众所周知的事实：若 $M \subseteq N$ 是因子的一个包含，且$L^2(N) \ominus L^2(M)$ 是 M上的弱粗双模，那么 M的满性蕴含 N 的满性（例如参见 [IT24]）。由此我们得到以下主要结果。

定理 A. </style}设 是任意一个 II_1 因子。设 $\Theta(M)$ </style}由 经过 GKEP 的迭代 3- 柄构造得到（见下文 *§4* ）。那么 $\Theta(M)$ 是一个满 II_1 因子。

除了为初等等价结果开辟新的可能性之外，上述结果还带来以下一个直接推论，它展示了能够任意选择输入因子的灵活性。

推论 B. $\Theta(L(\mathbb{F}_2))$ 是一个满II_1 因子，它与$L(\mathbb{F}_2)$不初等等价，并且不含任何弥散性质（*T*）子代数。

我们的方法基于对 3-柄构造中出现的迭代合并自由积的双模结构进行一项新的显式计算。 [GKEP25] 的 3-柄构造中的一个步骤如下进行。我们以一个 II_1 因子 N_0 以及两个酉元 $u_1, u_2 \in \mathcal{U}(N_0)$ 为输入。然后令

$$N_1 = N_0 *_{\{u_1\}''} (\{u_1\}'' \mathbin{\overline{\otimes}} L(\mathbb{Z}))$$
$$N_2 = N_1 *_{\{u_2\}''} (\{u_2\}'' \mathbin{\overline{\otimes}} L(\mathbb{Z}))$$
$$N = N_2 *_{\{v_1, v_2\}''} (\{v_1, v_2\}'' \mathbin{\overline{\otimes}} L(\mathbb{Z})),$$

其中 v_1、 v_2 是 N_2 中两个 $L(\mathbb{Z})$ 副本的生成元。我们能够证明 $N_0 \subset N$ 是弱粗的；也就是说，双模 ${}_{N_0}[L^2(N) \ominus L^2(N_0)]_{N_0}$ 弱包含 于粗 N_0-双模，即 ${}_{N_0}[L^2(N_0) \otimes L^2(N_0)^{\mathrm{op}}]_{N_0}$。论证中的新颖之处在于 N_2 在 N 中的粗性，这需要运用精巧的词分解论证。由此我们得出， N_0 的满性蕴含 N 的满性；对于归纳极限，结论也同样成立，因为弱粗性会传递到归纳极限，从而证明定理 A。

为了由此证明推论 B，我们以 $L(\mathbb{F}_2)$ 开始把手构造，运用变形刚性与扰动中的标准技巧，精确定位 (T) 子代数，并利用 $L(\mathbb{F}_2)$ 和 [CJ85] 的 Haagerup 性质得出结论。

我们的双模计算同样不依赖于该态是迹态，因此我们能够证明，在带有忠实正规态的冯·诺伊曼代数上，这类构造所得对象具有满性。特别地，我们证明了通过迭代 3-柄构造得到的 III型$_1$ 因子具有满性，尽管在 III型情形中并不存在令人满意的性质 (T) 类比。然而，在 III型情形中还存在一个额外的微妙之处：我们必须将范围限制在满足下述条件的酉元对 (u_1, u_2) 上：$\{u_j\}'' \subseteq M$ 具有保态条件期望（或者至少 u_j 包含于某个带有保态条件期望的可 amenable 子代数中）。对酉元的这一限制使我们无法立即对 III型情形中的初等等价得出结论，尽管合理的猜想是，由迭代 3-柄构造产生的代数将与自由 Araki–Woods 因子非初等等价（使用 [HJKEN24]）。

致谢。本文始于2023年，地点为加州大学圣地亚哥分校。第一、第三和第四作者感谢托里松林滑翔机场，几次会议曾在那里举行。该项目是在第二作者访问马里兰大学期间完成的，此次访问得到布林数学研究中心的支持。我们非常感谢 Adrian Ioana 和 Jesse Peterson 始终给予的鼓励和富有见地的建议。我们也感谢 Soham Chakraborty 、 Amine Marrakchi 和 Brent Nelson 提供的一些有益对应。我们再次感谢 Jesse Peterson 指出早期稿件中的一处错误。

资助。 第二作者获地平线欧洲玛丽·斯克-沃多夫斯卡-居里行动计划 FREEINFOGEOM 项目（项目编号：101209517）资助。[1] 第三作者获美国国家科学基金会 DMS 2350049 资助。第四作者获工程与物理科学研究委员会（英国）EP/X026647/1 项目资助。

[1]所表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或研究执行机构的立场。欧盟和拨款机构均不对这些观点和意见负责。

开放获取与数据声明。 为实现开放获取，作者已对因本次投稿产生的任何作者接受稿（AAM）版本采用 CC BY 公共版权许可。由于本文未创建或分析任何新数据，数据共享不适用于本文。

2. Preliminaries

为使本文简洁，我们假设读者熟悉冯·诺伊曼代数的标准理论（例如参见 [AP16,BO08]）。

2.1. 一般冯·诺伊曼代数的超幂。

定义 2.1。 设 M 为具有可分预对偶的冯·诺伊曼代数，并具有正规忠实态 φ，且设 $\mathcal{U}$ 为 $\mathbb{N}$上的自由超滤子。我们按照 [AH14] 第 2 节和第 3 节中的方式作出以下定义（另见 [Ocn85，第 5]节）：

- $\ell^\infty(\mathbb{N}, M) := \{(x_n)_n \in \prod_{n\in\mathbb{N}} M : \text{上确界 } \|x_n\| < \infty\}$;
- $\|x\|_\varphi^\sharp := \varphi(xx^* + x^*x)^{1/2}$;
- $\mathcal{I}_\mathcal{U} := \{(x_n)_n \in \ell^\infty(\mathbb{N}, M) : \text{极限}_{n\in\mathcal{U}} \|x_n\|_\varphi^\sharp = 0\}$;
- $\mathcal{M}^\mathcal{U} := \{(x_n)_n \in \ell^\infty(\mathbb{N}, M) : (x_n)_n\mathcal{I}_\mathcal{U} \subset \mathcal{I}_\mathcal{U} \text{且 } \mathcal{I}_\mathcal{U}(x_n)_n \subset \mathcal{I}_\mathcal{U}\}$;
- $M^\mathcal{U} := \mathcal{M}^\mathcal{U}/\mathcal{I}_\mathcal{U}$;
- $\mathcal{M}_\mathcal{U} := \{(x_n)_n \in \ell^\infty(\mathbb{N}, M) : \|x_n\psi - \psi x_n\| \to 0 \text{ 对所有 } \psi \in M_*\}$;
- $M_\mathcal{U} := \mathcal{M}_\mathcal{U}/\mathcal{I}_\mathcal{U}$。

理想 $\mathcal{I}_\mathcal{U}$ 实际上不依赖于对 φ 的选择，因此我们使用记号 $M^\mathcal{U}$和 $M_\mathcal{U}$是合理的。一般而言，我们有包含关系 $M_\mathcal{U} \subset M' \cap M^\mathcal{U}$。在 $M_\mathcal{U} = \mathbb{C}$ 的情形下，根据 AH14 定理 5.2]，我们还有 $M' \cap M^\mathcal{U} = \mathbb{C}$。该定理为下面关于满性的定义提供了依据。

定义 2.2。 若冯·诺伊曼代数 M满足 $M' \cap M^\mathcal{U} = \mathbb{C}1$，则称其为满的。

2.2. 一般冯·诺伊曼代数上的双模。 我们默认本文中的所有冯·诺伊曼代数都赋有一个忠实正规态。若存在一个正规保态条件期望 $E : M \to N$，则称冯·诺伊曼子代数 $N \subset M$ 是带期望的。注意，若该态是忠实的，则保态期望必定是忠实的。

我们回顾冯·诺伊曼代数上的双模的以下定义和事实（见 [BO08,AppendixF], [OOT17], [BMO20]）：

- 对于冯·诺伊曼代数 M和 N，一个 M-N-双模 是一个希尔伯特空间H，配备了 M 的正规左作用和 N的右作用。
- 对于一个带有忠实正规态 φ的冯·诺伊曼代数 M，平凡双模 $L^2(M, \varphi)$（通常简记为 $L^2(M)$）是配备了左右作用 $x \cdot \xi \cdot y = xJyJ\xi$ 的 GNS 空间，其中 J 是模共轭算子。
- 粗双模 M-N 双模 为双模 $L^2(M) \otimes_\mathbb{C} L^2(N)$。更一般地，若 M-N-双模 H 可嵌入 $L^2(M) \otimes_\mathbb{C} L^2(N)$的多个副本的直和中，则称其为粗的 。
- 如果一个 M-N 双模 $\mathcal{H}$ 在 Fell 拓扑中位于另一个 M-N 双模 $\mathcal{K}$ 的 $\mathcal{K}^{\oplus\infty}$ 的闭包内（见 [AP16，第 13.3 节 2]），则称其 弱包含 于后者。特别地，如果一个 M-N 双模弱包含于粗双模，则称其为 弱粗 双模。

- 给定双模 ${}_{M_1}H_{M_2}$ 和 ${}_{M_2}K_{M_3}$，可以构造一个 相对张量积 或 *Connes* 融合 ${}_{M_1}H \otimes_{M_2} K_{M_3}$；见 [OOT17]。在特殊情形下， $M_2 \subseteq M_1$ 带有期望 E_{M_2}，且 $H = {}_{M_1}L^2(M_1)_{M_2}$，双模 ${}_{M_1}L^2(M_1) \otimes_{M_2} K_{M_3}$ 可描述为赋予 $M_1 \otimes_{\text{alg}} K$ 以下内积后取完备化所得的空间：

$$\langle x \otimes \xi, y \otimes \eta \rangle = \langle \xi, E_{M_2}[x^* y]\eta \rangle_K.$$

以下两个事实对专家而言众所周知，但为了方便读者，我们仍给出证明。

命题 2.3. 设 N 是一个满因子， $N \subset M$ 是一个带期望的冯·诺伊曼子代数，并且 ${}_N[L^2(M) \ominus L^2(N)]_N$弱包含于粗双模中。那么 M 是一个满因子。

证明。 设 $(x_n)_n \in M' \cap M^{\mathcal{U}}$。令 $E\colon M \to N$为条件期望。设$y_n = x_n - E(x_n)$。显然， $y_n \in L^2(M) \ominus L^2(N)$。此外，容易验证，由于 $(x_n)_n$ 渐近地为 M （因而 N）中心的，所以 $(y_n)_n$ 也渐近地为 N中心。然而， ${}_N[L^2(M) \ominus L^2(N)]_N$的弱粗性意味着它不包含任何渐近 N中心的向量。因此$y_n \to 0$ 在 2-范数下。于是 $x_n \to E(x_n)$ 在 2-范数下。但 $E(x_n) \in N$ 渐近地为N中心，因此由 $N, E(x_n)_n$ （从而 $(x_n)_n$）的满性，它们渐近平凡。也就是说， M 也是满的。□

命题 2.4. 设 $N_i \subset N_{i+1}$ 是冯·诺伊曼代数的包含链，其中 $i \in \mathbb{N}$，并且进一步有 ${}_{N_i}[L^2(N_{i+1}) \ominus L^2(N_i)]_{N_i}$ 是弱粗的。那么 $N_0 \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_i^{SOT}$ 是弱粗的。

证明。 我们首先通过归纳法证明，对于所有$k.$， $L^2(N_k) \ominus L^2(N_0)$都是弱粗的。基例 $k = 1$ 由假设可知。否则，假设 $L^2(N_k) \ominus L^2(N_0)$是弱粗的。注意

$$L^2(N_{k+1}) \ominus L^2(N_0) = (L^2(N_{k+1}) \ominus L^2(N_k)) \oplus (L^2(N_k) \ominus L^2(N_0)).$$

因此，只需证明 $L^2(N_{k+1}) \ominus L^2(N_k)$作为一个 N_0-N_0-双模是弱粗的。根据假设，它作为一个 N_k-N_k-双模是弱粗的，因此只需证明 $L^2(N_k) \otimes L^2(N_k)$作为一个 N_0-N_0-双模是（弱）粗的。但这显然成立，因为作为左（及右） N_0-模， $L^2(N_k)$是$L^2(N_0)$的多个副本的直和。

现在将 N记为归纳极限 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_i^{SOT}$。注意， $L^2(N) \ominus L^2(N_0)$ 是 $L^2(N_k) \ominus L^2(N_0)$ 的闭张成，其中 k 遍历 $\mathbb{N}.$。由于弱包含只需针对有限多个向量并在任意 ε 误差容限下检验，因此显然 $L^2(N) \ominus L^2(N_0)$ 也是弱粗的。□

2.3. **合并自由积**。设 $B \subset M_1, M_2$ 是带期望的子代数。于是我们可以构造合并自由积 $M_1 *_B M_2$。我们遵循 [Pop93] 的第3节（另见 [GKEPT25b，第 2]节）。冯·诺依曼代数 $M_1 *_B M_2$ 由形如 $x = b \in B$ 和$x = x_{1,i_1} \cdots x_{k,i_k}$的元素在强算子拓扑下稠密张成，其中 $x_{j,i_j} \in M_{i_j}$, $E_{i_j}(x_{j,i_j}) = 0$（换言之，$x_{j,i_j} \in M_i \ominus B$），且 $i_1 \neq \ldots \neq i_k$。我们称这类元素为约化字。注意，对于满足 $i_1 \neq \ldots \neq i_k$ 的不同元组 $(i_1, \ldots, i_k)$，子空间B和 $(M_{i_1} \ominus B) \cdots (M_{i_k} \ominus B)$ 均彼此正交。约化字上的乘法通过串接定义，而约化字的线性张成通过简化运算对乘法封闭，即

$(x, y) \in M_i^2 \mapsto E_B(xy)+(xy-E_B(xy))$。合并自由积 $M_1 *_B M_2$ 通常表示在以下希尔伯特空间上，也常将其视为一个 B-B-双模。

$$L^2(M_1 *_B M_2) = L^2(B) \oplus \bigoplus_{n\geq 1} \bigoplus_{i_1 \neq \ldots \neq i_n} (L^2(M_{i_1}) \ominus L^2(B)) \otimes_B \cdots \otimes_B (L^2(M_{i_n}) \ominus L^2(B)).$$

以下结论可由直接计算得出。

引理 2.5。作为一个 M_1-M_1-双模，我们有

$$L^2(M_1 *_B M_2) = L^2(M_1) \oplus \bigoplus_{n\geq 0} L^2(M_1) \otimes_B (L^2(M_2) \ominus L^2(B)) \otimes_B ((L^2(M_1) \ominus L^2(B)) \otimes_B (L^2(M_2) \ominus L^2(B)))^{\otimes_B n} \otimes_B L^2(M_1).$$

由此可得关于可 amenable 子代数上的合并自由积的以下著名粗性结果。

命题 2.6。设 N_1、N_2 为冯·诺伊曼代数，A 是同时包含于 N_1和 N_2 中的可和子代数，且带有期望。令 $M = N_1 *_A N_2$。则 $N_1 \subset M$ 是弱粗的。

证明。由于 A 是可和的，我们有 $L^2(A) \prec L^2(A) \otimes L^2(A)$。因此，对任意 N_1-N_1-双模 $\mathcal{H}, \mathcal{K}$，我们有

$$\mathcal{H} \otimes_A \mathcal{K} = \mathcal{H} \otimes_A L^2(A) \otimes_A \mathcal{K} \prec \mathcal{H} \otimes_A L^2(A) \otimes L^2(A) \otimes_A \mathcal{K} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}.$$

设 $\mathcal{H}_1 = L^2(N_1) \ominus L^2(A)$，且 $\mathcal{H}_2 = L^2(N_2) \ominus L^2(A)$。现在，由引理 2.5，我们有

$$\begin{aligned} L^2(M) \ominus L^2(N_1) &\cong \bigoplus_{k\geq 0} L^2(N) \otimes_A \mathcal{H}_2 \otimes_A (\mathcal{H}_1 \otimes_A \mathcal{H}_2)^{\otimes_A k} \otimes_A L^2(N) \\ &\prec \bigoplus_{k\geq 0} L^2(N) \otimes \mathcal{H}_2 \otimes (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)^{\otimes k} \otimes L^2(N) \\ &\prec L^2(N) \otimes L^2(N). \end{aligned}$$

□

3. Bimodule computations

我们考虑如下设定，它推广了引言中 $N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2$ 的构造。这对应于下文记号 3.1 中 $n = 2$ 与 $B_j = \{u_j\}''$ 以及 $C_j = \{v_j\}''$的情形。为3-柄构造添加与诸 v_j交换的最后一个酉元，将在定理 3.10 的最后一步处理。

记号 3.1。令 $n \geq 1$。对于 $j = 1, \ldots, n$，设 (A, φ) 是带有忠实正规态的冯·诺伊曼代数，且 $B_j \subset B$ 是其冯·诺伊曼子代数，并配有保态条件期望 E_{B_j}；令 $\varphi_j = \varphi|_{B_j}$。设 (C_j, ψ_j) 是另一个带有忠实正规态的冯·诺伊曼代数。递归地定义带有态 ω_j 的冯·诺伊曼代数$M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n$：

$$\begin{aligned} (M_0, \omega_0) &= (A, \varphi) \\ (M_{j+1}, \omega_{j+1}) &= (M_j, \omega_j) *_{(B_j, \varphi_j)} [(B_j, \varphi_j) \mathbin{\overline{\otimes}} (C_j, \psi_j)], \end{aligned}$$

其中，$(B_j,\varphi_j)\subset(A,\varphi)=(M_0,\omega_0)$ 按自然方式视为 (M_j,ω_j) 的子代数；我们还将 (B_j,φ_j) 自然地包含于 $(B_j,\varphi_j)\otimes(C_j,\psi_j)$，其中条件期望由 $\mathrm{id}\otimes\psi_j$ 给出。我们也按自然方式将 (A,φ)、(B_j,φ_j) 和 (C_j,ψ_j) 视为 (M_n,ω_n) 的子代数。

定理 3.2。考虑记号 *3.1* 中的设定。那么，C_1、……、C_n 在(M_n,ω_n)中自由独立。这会诱导出$(C,\psi)=(C_1,\psi_1)*\cdots*(C_n,\psi_n)$ 到(M_n,ω_n)的一个嵌入，且该嵌入保持期望。此外，存在一个 C-A-双模同构

$$ {}_CL^2(M_n,\omega_n)_A\to {}_CL^2(C,\psi)\otimes_{\mathbb{C}}H_A$$

对某个右 A-模 H成立。

注 3.3。在特殊情形下，本定理与 [CdH$^+$25，§5] 中关于图积的双模计算有所重合。具体而言，若 A 是代数 B_j 在某个顶点集为 $[n]$ 的图上的图积，那么 (M_n,ω_n) 将是 B_j 与 C_j 关于一个顶点集为 $[2n]$ 的图的图积；该图由对每个 $j\in[n]$ 添加一个与 j 相邻的额外顶点 $n+j$ 得到。于是，A 和 C 是由互不相交的子图诱导出的子代数，因此粗性可由 [CdH$^+$25，定理 5.4] 得出。这里的计算因而受到图积情形的启发，但一般性显著更强，因为在当前设定下，M_n 中元素的词分解并非规范且唯一。

引理 3.4。考虑记号 *3.1* 中的设置。对于字母表 $\{0,\dots,n\}$ 上的每个交错字 $w=j_1\dots j_\ell$，令 K_w 为形如 $x_1\dots x_\ell$ 的乘积所张成的空间，其中

(a) 若 $j_i>0$，则 $x_i\in C_{j_i}$，其中 $\psi_{j_i}(x_i)=0$；
(b) 若 $j_i=0$，则 $x_i\in A$；*(c)* 若 $j_i=0$ 且 $i<\ell$，则 $E_{B_{j_{i+1}}}[x_i]=0$。
则这些 K_w 张成了 M_n 的一个弱稠密子集。

证明。通过归纳法易知，M_j 由 A 和 $B_{j'}\otimes C_{j'}$（$j'\le j$）生成。由于 $B_j\subset A$，M_n 显然也由 A、C_1、……、C_n 生成。因此，M_n 的一个弱稠密子集由乘积 $x_1\dots x_\ell$ 张成，其中 x_i 要么属于 A，要么属于某个 C_j。

我们断言，由 A 和 $C_1,\dots,C_n$ 中元素的长度为 $\le\ell$ 的乘积张成的空间，等于由 K_w's 张成的空间，其中 w 是 $\{0,\dots,n\}$ 上长度为 $\le\ell$ 的交错字。我们对 ℓ 进行归纳。基例 $\ell=1$ 显然成立，因为 A 中的元素已经是 A 中的元素，而 $x\in C_j$ 中的元素可以表示为 $(x-\psi_j(x))+\psi_j(x)1$，其中 $x-\psi_j(x)$ 属于 $\ker(\psi_j)$，且 $\psi_j(x)1\in A$。

对于归纳步骤，考虑由 A 和 $C_1,\dots,C_n$ 中元素构成的乘积 $x_1\dots x_\ell$，其中 $\ell\ge2$。根据归纳假设，$x_1\dots x_{\ell-1}$ 属于由交错字 w 对应的 K_w's 张成的空间，且这些交错字的长度为 $\le\ell-1$。对于每个长度为 $\le\ell-2$ 的项，将其右乘 x_ℓ，得到一个长度为 $\le\ell-1$ 的乘积，这已由归纳假设处理。因此，不失一般性，我们可以假设 $x_1\dots x_{\ell-1}$ 满足 K_w 的定义条件，其中某个 w 的长度为 $\ell-1$。

如果 x_ℓ 和 $x_{\ell-1}$ 来自同一个代数（即 A 或 $C_1,\dots,C_n$），那么我们可以将 $x_{\ell-1}x_\ell$ 视为乘积中的一个单独元素，因此 $x_1\dots x_\ell$ 是一个长度为 $\le\ell-1$ 的字，这种情况已由归纳假设处理。因此，假设

x_ℓ 和 $x_{\ell-1}$ 来自不同的代数。因此，存在一个交错字 $w = j_1 \dots j_\ell$，满足当 $j_i > 0$ 时 $x_i \in C_{j_i}$，且当 $i = 0$ 时 $x_i \in A$。

情形 1： 设 $j_\ell = 0$，使得 $x_\ell \in A$。如果 $x_1 \dots x_{\ell-1}$ 对于单词 $j_1 \dots j_{\ell-1}$ 满足条件 (a)-(c)，那么 $x_1 \dots x_\ell$ 对于 $j_1 \dots j_\ell$ 也满足条件 (a)-(c)。事实上，条件 (a) 无需再作检查，因为 $j_\ell = 0$。条件 (b) 无需再作检查，因为 $j_\ell = 0$ 且 $x_\ell \in A$。条件 (c) 中关于 $x_{\ell-1}$ 的部分无需再作检查，因为 $i_{\ell-1} \neq 0$。因此，$x_1 \dots x_\ell \in K_w$。

情形 2： 接下来，设 $j_\ell > 0$，因而 $x_\ell \in C_{j_\ell}$。我们可以写成 $x_\ell = \mathring{x_\ell} + \psi_{j_\ell}(x_\ell)1$，其中 $\mathring{x_\ell} \in \ker(\psi_{j_\ell})$。那么 $x_1 \dots x_{\ell-1}\psi_{j_\ell}(x_\ell)$ 是一个长度为 $\ell - 1$ 的乘积，因此归纳假设已经处理了这种情形。因此，不失一般性，假设 $x_\ell = \mathring{x_\ell} \in \ker(\psi_{j_\ell})$。这意味着 $x_1 \dots x_\ell$ 已经满足条件 (a) 和 (b)。

情形 2a： 假设 $i_{\ell-1} > 0$。那么对于条件 (c)，无需再作任何检验，因此 $x_1 \dots x_\ell \in K_w$，正如所要求的。

情形 2b： 假设 $i_{\ell-1} = 0$。那么写作 $x_{\ell-1} = \mathring{x_{\ell-1}} + E_{B_{j_\ell}}[x_{\ell-1}]$，其中 $E_{B_{j_\ell}}[\mathring{x_{\ell-1}}] = 0$。于是 $x_1 \dots x_{\ell-2}\mathring{x_{\ell-1}}x_\ell$ 满足条件 (c)，因此属于 K_w。剩下要证明的是，$x_1 \dots x_{\ell-2}E_{B_{j_\ell}}[x_{\ell-1}]x_\ell$ 属于这些 K_w 的张成。注意到，由于 B_{j_ℓ} 和 C_{j_ℓ} 处于张量位置，$E_{B_{j_\ell}}[x_{\ell-1}]$ 与 $x_\ell \in C_{j_\ell}$ 可交换。因此，

$$x_1 \dots x_{\ell-2}E_{B_{j_\ell}}[x_{\ell-1}]x_\ell = x_1 \dots x_{\ell-2}x_\ell E_{B_{j_\ell}}[x_{\ell-1}].$$

如果 $\ell \geq 3$ 且 $j_{\ell-2} = j_\ell$，那么 $x_1 \dots x_{\ell-3}(x_{\ell-2}x_\ell)E_{B_{j_\ell}}[x_{\ell-1}]$ 可视为一个长度为 $\ell - 1$ 的乘积；将 $x_{\ell-2}x_\ell$ 看作单个元素后，归纳假设适用。否则，$x_1 \dots x_{\ell-2}x_\ell$ 满足条件 (a)-(c)，因此根据情形 1，$x_1 \dots x_{\ell-2}x_\ell E_{B_{j_\ell}}[x_{\ell-1}]$ 也满足这些条件。□

以下是众所周知的结果：

引理 3.5. 设 $(B, \psi) \subset (A, \varphi)$ 和 $(B, \psi) \subset (C, \rho)$ 是带有期望的保态包含。设

$$(M, \omega) = (A, \varphi) *_{(B,\psi)} (C, \rho).$$

考虑乘积 $a_0c_1 \dots a_{\ell-1}c_\ell a_\ell$，其中
(a) $\ell \geq 1$ *(b)* $a_j \in A$。*(c)* 对于 $0 < j < \ell$，
$E_B[a_j] = 0$。*(d)* 对于 $j = 1, \quad c_j \in C$，
其中 $E_B[c_j] = 0$，依次为 ℓ。则
$E_A[a_0c_1a_1 \dots c_\ell a_\ell] = 0$。

设 $a'_0c'_1 \dots a'_{m-1}c'_m a'_m$ 是另一个满足相应条件的乘积。
(1) 如果 $m = \ell$，那么

$$\begin{aligned} &E_A[a^*_\ell c^*_{\ell-1}a^*_{\ell-1} \dots c^*_1 a^*_0 a'_0 c'_1 \dots a'_{\ell-1}c'_{\ell-1}a'_\ell] \\ =&a^*_\ell E_B[c^*_{\ell-1}E_B[a^*_{\ell-1} \dots E_B[c^*_1 E_B[a^*_0 a'_0]c'_1] \dots a'_{\ell-1}]c'_{\ell-1}]a'_\ell. \end{aligned}$$

(2) 如果 $m \neq \ell$，那么

$$E_A[a^*_\ell c^*_{\ell-1}a^*_{\ell-1} \dots c^*_1 a^*_0 a'_0 c'_1 \dots a'_{m-1}c'_{m-1}a'_m] = 0.$$

引理 3.6. 考虑记号 *3.1* 中的设置，并令 K_w 如引理 *3.4* 所述。假设 $w = j_1 \dots j_\ell$ 是一个关于 $\{0, \dots, n\}$ 的交错字。考虑满足以下条件的乘积 $x_1 \dots x_\ell$

(a) 若 $j_i > 0$，则 $x_i \in C_{j_i}$，其中 $\psi_{j_i}(x_i) = 0$;

(b) if $j_i = 0$, *then* $x_i \in A$;
(c') if $1 < i < \ell$ *with* $j_i = 0$ *and* $j_{i+1} = j_{i-1}$, *then* $E_{B_{j_{i-1}}}[x_i] = 0$.
Then
(1) 若单词 w 至少包含一次字母 n，则 $E_{M_{n-1}}[x_1 \dots x_\ell] = 0$。*(2)* 此外，若单词 w 包含任何非零字母，则 $E_A[x_1 \dots x_\ell] = 0$。

证明。(1) 我们对 n 作归纳。基例 $n = 1$ 的证明和归纳步骤的证明将同时进行。

令 $n \geq 1$，并考虑上述的 $x_1 \dots x_\ell$。令 $i(1) < \cdots < i(k)$ 为字母 n 在 w 中出现的位置。根据假设，对于 $t = 1, \dots, k$，有 $E_{B_n}[x_{i(t)}] = \psi_n(x_{i(t)}) = 0$。

我们还声称，对于 $t = 1, \dots, k-1$，有 $E_{B_n}[x_{i(t)+1} \dots x_{i(t+1)-1}] = 0$。令$m(t)$ =为出现在子词 $j_{i(t)+1} \dots j_{i(t+1)-1}$ 中的最大指标，即 $\max(j_{i(t)+1}, \dots, j_{i(t+1)-1})$。注意 $m(t) < n$。若 $m(t) > 0$，则由归纳假设，$E_{M_{m(t)-1}}[x_{i(t)+1} \dots x_{i(t+1)-1}] = 0$，因此 $E_{B_n}[x_{i(t)+1} \dots x_{i(t+1)-1}] = 0$，因为$B_n \subset A \subset M_{m(t)-1}$。另一方面，假设 $m(t) = 0$。那么该子词只能有一个字母 0，因此 $i(t+1) = i(t) + 2$。所以，我们的目标是证明 $E_{B_n}[x_{i(t)+1}] = 0$。由于 $j_{i(t)+1} = 0$ 且 $j_{i(t)} = j_{i(t)+2} = n$，条件 (c') 蕴含 $E_{B_n}[x_{i(t)+1}] = 0$，正如所要证明的。

对于 $t = 1, \dots, k$，设 $c_t = x_{i(t)}$ in $C_n \subset \overline{B_n} \otimes C_n$。令 $a_t \in M_{n-1}$ 为

$$a_t = \begin{cases} x_1 \dots x_{i(1)-1}, & t = 0 \\ x_{i(t)+1} \dots x_{i(t+1)-1}, & 0 < t < k \\ x_{i(k)+1} \dots x_\ell, & t = k; \end{cases}$$

对于 $t = 0$，若 $i(1) = 1$，则 $x_1 \cdots x_{i(1)-1}$ 是一个空乘积，约定其值为 1（对称地，$t = k$也成立）。接着应用引理 3.5 可得

$$E_{M_{n-1}}[x_1 \dots x_\ell] = E_{M_{n-1}}[a_0 c_1 a_1 \dots c_k a_k] = 0.$$

(2) 若 m 是词 w中出现的最大字母，则由 (1) 得 $E_{M_{m-1}}[x_1 \dots x_\ell] = 0$，且由于 $A \subset M_{m-1}$ 具有期望，这意味着 $E_A[x_1 \dots x_\ell] =$0。□

注记 3.7。注意，引理 3.4 中的条件 (c) 分别蕴含引理 3.6 中的条件 (c')。因此，结合这两个引理，便可确定 A 和 C_1、……、C_n 中任意元素乘积的 $\omega_n(x_1 \dots x_\ell)$。此外，尽管我们在记号 3.1 中通过迭代合并自由积构造了 M_n，若重新标记指标 1，……，n，以不同顺序进行合并自由积，也会得到相同结果；也就是说，对于 A 和 C_1、……、C_n 中元素的乘积，两种构造所得到的状态相同。这是因为引理 3.4 中的条件 (a)–(c) 在重新标记指标 1，……，n 后保持不变。

引理 3.8。C_1、……、C_n 在（M_n, ω_n）中自由独立。这诱导了（C, ψ）=（C_1, ψ_1）$* \cdots *$（C_n, ψ_n）到（M_n, ω_n）的一个带期望的嵌入。

证明。若 $w = j_1 \dots j_\ell$ 是 $\{1, \dots, n\}$ 上的交错字，且若 $x_i \in C_{j_i}$ 与 $\psi_{j_i}(x_i) = 0$，则 $x_1 \dots x_\ell$ 满足引理 3.6 的假设；事实上，条件 (b) 和 (c) 无需检查，因为字母 0 并未出现。

因此， $\omega_n(x_1 \dots x_\ell) = 0$。标准结果表明，存在一个保态正规嵌入 $\iota : (C, \psi) = (C_1, \psi_1) * \cdots * (C_n, \psi_n) \to (M_n, \omega_n)$。

为证明该嵌入带有期望，只需证明它与模群的作用交换，即 $\sigma_t^{\omega_n} \circ \iota = \iota \circ \sigma_t^{\psi}$。为此，注意 (C_j, ψ_j) 到 $(B_j, \varphi_j) \otimes (\underline{C_j}, \psi_j)$ 的嵌入与模群的作用交换。然后，由于与合并自由积相关联的嵌入也与模群相容，可见 (C_j, ψ_j) 到 (M_j, ω_j) 的嵌入，从而到 (M_n, ω_n) 的嵌入，与模群相容。同时，(C_j, ψ_j) 到自由积 (C, ψ) 的嵌入也与模群相容。由于 (C, ψ) 由诸 C_j 生成，因此 (C, ψ) 到 (M_n, ω_n) 的嵌入与模群相容。□

引理 3.9。将 C 视为 (M_n, ω_n) 的冯·诺伊曼子代数。令 H_0 为由 K_w 张成的空间，其中 w 是 $\{0, \dots, n\}$ 上的交错字，且以字母0开头。那么，对于 $\xi, \eta \in H_0$ 和 $x, y \in C$，有

$$\omega_n((x\xi)^*(y\eta)) = \psi(x^*y)\omega_n(\xi^*\eta). \tag{3.1}$$

证明。由线性性，只需考虑以下情形：设 $w_0 = j_1 \dots j_\ell$ 和 $w_0' = j_1' \dots j_{\ell'}'$ 是 $\{0, \dots, n\}$ 中以零开头的字，并假设 $\xi = \xi_1 \dots \xi_\ell$ 和 $\eta = \eta_1 \dots \eta_{\ell'}$ 是乘积，分别满足关于 w_0 和 w_0' 的引理 3.4 的条件 (a)-(c)。设 $w_1 = k_1 \dots k_m$ 和 $w_1' = k_1' \dots k_{m'}'$ 是 $\{1, \dots, n\}$ 上的交错字，并假设 $x = x_1 \dots x_m$ 和 $y = y_1 \dots y_{m'}$ 是由 $\ker(\psi)$ 中的元素与 $x_i \in C_{k_i}$ 和 $y_i \in C_{k_i'}$ 构成的乘积。

注意，乘积 $x_1 \dots x_m$ 和 $y_1 \dots y_{m'}$ 也满足引理 3.4 的条件 (a)-(c)。事实上，乘积 $x_1 \dots x_m \xi_1 \dots \xi_\ell$ 和 $y_1 \dots y_{m'} \eta_1 \dots \eta_{\ell'}$ 也满足条件 (a)-(c)。这是因为，由于 $j_1 = j_1' = 0$，这些词是交错的。此外，由于所有的 0 都出现在词的右侧部分，我们可以看到条件 (b) 和 (c) 得到了满足。

该断言的证明通过对 m 和 m' 作归纳法进行。

情形 1： 假设 m 和 m' 均为零。那么 x 和 y 是空乘积，按约定其值为 1。因此，(3.1) 显然成立。

情形 2： 假设 $m = 0$ 和 $m' > 0$。由于 w_0 和 w_0' 以 0 开头，且 w_1' 不含 0，因此词 $w_0^* w_1' w_0' = j_\ell \dots j_1 k_1' \dots k_{m'}' j_1' \dots j_{\ell'}'$ 是交错的。此外，利用 $\xi_1 \dots \xi_\ell$ 和 $y_1 \dots y_{m'} \eta_1 \dots \eta_{\ell'}$ 满足条件 (a)-(c) 这一事实，乘积 $\xi_\ell^* \dots \xi_1^* y_1 \dots y_{m'} \eta_1 \dots \eta_{\ell'}$ 满足引理 3.6 对该词的条件 (a)、(b)、(c')。因此，由引理 3.6 可得

$$\omega_n(\xi^* y \eta) = \omega_n(\xi_\ell^* \dots \xi_1^* y_1 \dots y_{m'} \eta_1 \dots \eta_{\ell'}) = 0.$$

另一方面，由于 C_j' 的自由独立性， $\psi(y) = 0$。因此，(3.1) 两边均为零。

情形 3： 假设 $m > 0$ 和 $m' = 0$。论证与情形 2 对称。

情形 4： 假设 $m > 0$ 和 $m' > 0$ 并且 $k_1 \neq k_1'$。那么字 $w_0^* w_1^* w_1' w_0'$ 是交错的，且乘积 $\xi_\ell^* \dots \xi_1 x_m^* \dots x_1^* y_1 \dots y_{m'} \eta_1 \dots \eta_{\ell'}$ 满足引理 3.6 的条件 (a)、(b)、(c')。因此， $\omega_n(\xi^* x^* y \eta) = 0$。另一方面，由于 $w_1^* w_1'$ 是 $\{1, \dots, n\}$ 上的交错字，利用 C_1、. . .、 C_n 的自由独立性，我们有 $\psi(x^* y) = 0$。因此，(3.1) 两边均为零。

情形 5： 假设 $m > 0$ 且 $m' > 0$ 且 $k_1 = k_1'$。则该词

$$j_\ell \dots j_1 k_m \dots k_1 k_2' \dots k_{m'}' j_1' \dots j_{\ell'}'$$

是交错的，且乘积

$$\xi_\ell^* \dots \xi_1^* x_m^* \dots x_2^* (x_1^* y_1 - \psi(x_1^* y_1)) y_2 \dots y_{m'} \eta_1 \dots \eta_{\ell'}$$

满足引理 3.6 的条件 (a)、(b)、(c')。因此，

$$\omega_n(\xi^* x_m^* \dots x_2^* (x_1^* y_1 - \psi(x_1^* y_1)) y_1 \dots y_{m'} \eta) = 0,$$

or

$$\omega_n(\xi^* x^* y \eta) = \psi(x_1^* y_1) \omega_n(\xi^* x_m^* \dots x_2^* y_2 \dots y_{m'} \eta).$$

利用归纳假设，

$$\omega_n(\xi^* x^* y \eta) = \psi(x_1^* y_1) \psi(x_m^* \dots x_2^* y_2 \dots y_{m'}) \omega_n(\xi^* \eta).$$

在 $\xi = \eta = 1$ 的情形下应用同一等式（或利用自由独立性），

$$\psi(x^* y) = \psi(x_1^* y_1) \psi(x_m^* \dots x_2^* y_2 \dots y_{m'}),$$

因此，我们得到了所需的 (3.1)。 □

*定理 3.2 的证明。*在引理 3.8 中，我们证明了 $C_1, \dots, C_n$ 的自由性，以及带期望的嵌入 (C, ψ) 到 (M_n, ω_n)。

设 H_0 如引理 3.9 所述，并令 H 为 H_0 在 $L^2(M_n, \omega_n)$ 中的闭包。我们断言存在一个等距同构

$$\Phi : L^2(C, \psi) \otimes_{\mathbb{C}} H \to L^2(M_n, \omega_n) \tag{3.2}$$

由 $x \otimes \xi \mapsto x\xi$ 对应 $x \in C$ 和 $\xi \in H$ 给出。引理 3.9 表明

$$\langle x \otimes \xi, y \otimes \eta \rangle_{L^2(C,\psi) \otimes_{\mathbb{C}} H} = \langle x\xi, y\eta \rangle_{L^2(M_n, \omega_n)}$$

当 ξ、$\eta \in H_0$ 和 $x, y \in C$ 时。随后我们利用连续性将此等距映射扩张到整个 $L^2(C, \psi) \otimes_{\mathbb{C}} H$。由引理 3.4 可知该映射是满射。事实上，任取一个由 $\{0, \dots, n\}$ 中的元素构成的交错字 $w = j_1 \dots j_\ell$ 和乘积 $x_1 \dots x_\ell$，它们相对于 w 满足引理 3.4 的条件 (a)-(c)。如果字母 0 出现在 w 中，令 j_i 为它首次出现的位置。于是 $x_1 \dots x_{i-1} \in C$ 和 $x_i \dots x_\ell \in H_0$，因此 $x_1 \dots x_\ell$ 属于上述映射的值域。如果字母 0 未出现在 w 中，那么 $x_1 \dots x_\ell \in C$、$1 \in H_0$，且 $x_1 \dots x_\ell = (x_1 \dots x_\ell) \cdot 1$ 也属于值域。

接下来，我们断言，H 是 $L^2(M_n, \omega_n)$ 的右 A-子模。首先注意到，将 A 包含到 M_n 中的映射具有保态条件期望，因为 (M_n, ω_n) 是由 (A, φ) 取合并自由积得到的。等价地说，包含映射 $A \to M_n$ 保持模群不变。我们断言，如果 $\xi \in H$且 $a \in A$，那么 $Ja^*J\xi \in H$。只需在 $\xi \in H_0$ 时证明该断言。此外，根据模理论，模群的解析元在 A中稠密，因此只需证明 a 为解析元时的情形。这意味着 Ja^*J 可表示为某个 $\tilde{a} \in A$ 的右乘，从而 $Ja^*J\xi = \xi\tilde{a}$。由线性性，不妨设 ξ 是与满足引理 3.4 中关于 $j_1 = 0$ 的条件的单词 $w = j_1 \dots j_\ell$ 相关联的乘积 $\xi_1 \dots \xi_\ell$。如果 $j_\ell = 0$ 同样成立，则 $\xi_1 \dots \xi_{\ell-1}(\xi_\ell a)$ 也属于 K_w。如果 $j_\ell \neq 0$，则 $\xi_1 \dots \xi_\ell a$ 属于 K_{w0}（并且 $w0$ 也以 0 开头）。因此得到所需的 $\xi\tilde{a} \in H_0$。

接下来，我们证明 Φ 是一个 C-A-双模映射。给定 $\zeta \in L^2(C, \psi) \otimes_{\mathbb{C}} H$ 和$c \in C$ 以及 $a \in A$，我们断言 $\Phi((c \otimes Ja^*J)\zeta) = cJa^*J\Phi(\zeta)$。由线性性和稠密性，只需考虑 $\zeta = x \otimes \xi$ 且 $x \in C$ 和 $\xi \in H_0$ 的情形。我们

也可以假设 a 关于模群是解析的，因此 Ja^*J 由某个 $\tilde{a} \in A$ 的右乘实现。于是

$$\begin{aligned}\Phi((c \otimes Ja^*J)(x \otimes \xi)) &= \Phi(cx \otimes \xi\tilde{a}) \\ &= cx\xi\tilde{a} \\ &= c\Phi(x \otimes \xi)\tilde{a} \\ &= cJa^*J\Phi(x \otimes \xi).\end{aligned}$$

这就完成了双模同构的证明。 □

定理 3.10。 考虑记号 *3.1* 中的设定。固定另一个冯·诺伊曼代数 (D, ρ) 并令

$$(M, \omega) = (M_n, \omega_n) *_{(C,\psi)} [(C, \psi) \overline{\otimes} (D, \rho)].$$

那么 $L^2(M, \omega) \ominus L^2(M_n, \omega_n)$ 是 A 上的粗双模。

证明。 利用合并自由积的双模分解（引理 2.5），

$$L^2(M, \omega) \ominus L^2(M_n, \omega_n) \cong \bigoplus_{k \geq 0} L^2(M_n, \omega_n) \otimes_C \mathcal{H}_1 \otimes_C (\mathcal{H}_2 \otimes_C \mathcal{H}_1)^{\otimes_C k} \otimes_C L^2(M_n, \omega_n)$$

作为 M_n 上的双模，其中

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1 &= L^2[(C, \psi) \overline{\otimes} (D, \rho)] \ominus L^2(C, \psi) \\ \mathcal{H}_2 &= L^2(M_n, \omega_n) \ominus L^2(C, \psi).\end{aligned}$$

因此，这同样作为 A 上的双模成立。由于根据定理 3.2， $L^2(M_n, \omega_n)$ 是一个粗 C-A-双模，并且这个 C-A-双模出现在右端，我们得到 $L^2(M, \omega) \ominus L^2(M_n, \omega_n)$ 是 A 上的粗双模，正如所要求的那样。□

4. Exotic full II_1 factors with no property (T) phenomena

回顾在 [GKEP25] 中引入的 3-柄构造的定义。对于 II_1 因子 N 和 u，定义 $\Omega_1(N, u) = N *_{W^*(u)} (W^*(u) \otimes L(\mathbb{Z}))$，并将右侧生成 $L(\mathbb{Z})$ 的 Haar 酉元记为 $\omega(u)$。定义 $\Omega_2(N, u, v) = N *_{W^*(u,v)} (W^*(u, v) \otimes L(\mathbb{Z}))$。令 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 为一个双射，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$， $\sigma_1(n) \leq n$。假设对于某个 $n \in \mathbb{N}$， $M_1, \ldots, M_n$ 已经构造出来。令 $\{(u^n_{1,k}, u^n_{2,k})\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{U}(M_n)$ 为一个 $\|\cdot\|_2$-稠密序列。我们定义

$$M_{n+1} := \Omega_2(\Omega_1(\Omega_1(M_n, u_1^{\sigma(n)}), u_2^{\sigma(n)}), \omega(u_1^{\sigma(n)}), \omega(u_2^{\sigma(n)})).$$

将上述构造的 M_i的归纳极限记为 $\Theta(M_1)$。我们的方法使我们无需借助性质（T）相关现象，即可证明这类因子的满性。

定理 4.1。 若 M_1 是任意的II_1 因子，则 $\Theta(M_1)$ 是一个满II_1 因子。

证明。 由于 $W^*(u_i^{\sigma(n)})$ 总是可和的，根据命题 2.6，我们得到，对于所有 n，包含 $M_n \subset \Omega_1(M_n, u_1^{\sigma(n)})$ 和 $\Omega_1(M_n, u_1^{\sigma(n)}) \subset \Omega_1(\Omega_1(M_n, u_1^{\sigma(n)}) u_2^{\sigma(n)})$ 都是弱粗的。根据定理 3.10，对于所有 n（其中 $A = M_n$、 $C = W^*(\omega(u_1^{\sigma(n)}) \omega(u_2^{\sigma(n)}))$，以及 $D \cong L\mathbb{Z}$），$\Omega_1(\Omega_1(M_n, u_1^{\sigma(n)}) u_2^{\sigma(n)}) \subset M_{n+1}$ 都是弱粗的。根据命题 2.4，我们也得到，对于所有 $M_k \subset \Theta(M_1)$ 都是弱粗的

k。现在只需验证 M_2 是满的，即可应用命题 2.3 得出 Θ(M_1) 是满的。注意，若 $u \in M_1$，则根据定理 3.2， E_C(u) $= \tau$(u)，其中 $C = W^*$(ω($u_1^{\sigma(1)}$) ω($u_2^{\sigma(1)}$)) $\cong L\mathbb{F}_2$。在定理 3.10 中取 $D \cong L\mathbb{Z}$，我们可以找到 v， w 中的酉元，使得 E_C (v) $= E_C$(w) $= E_C$(w^*v)。根据 [Ioa15 定理 6.1],，我们推得 $M_2' \cap M_2^{\mathcal{U}} \subset M_2' \cap C^{\mathcal{U}} \subset C' \cap C^{\mathcal{U}} = \mathbb{C}1$ as$L\mathbb{F}_2$ 是满的。□

定理 4.2. 若 M_1 的任何角都不包含弥散性质（*T*）子代数，则Θ(M_1)不包含弥散性质（*T*）子代数。特别地， Θ($L(\mathbb{F}_2)$)不包含任何弥散性质（*T*）子代数。

证明。 反设 $N \subset$ Θ(M_1)具有性质 (T)。由于Θ(M_1)是 M_n的归纳极限，考虑从 Θ(M_1)到 M_n 的期望逐点收敛到恒等映射，且 N 具有 (T)，我们可推得这些期望在 N. 上一致收敛。进而，这意味着对某个 n [，N 的一个角交织到 M_n 的一个角中（Chr79，定理 4.6] ；另见 [Pop86]及 [GKEPT25b，定理 3.26]）。由于 N 的所有角都具有性质 (T)，所有变形都在 N上一致收敛。根据 [PV10，定理 5.4] （参见 [IPP08，定理 1.1]），由于 M_n 是合并自由积， N 的各角必须交织到融合中的两个因子之一。在每一步由 M_{n-1}得到 M_n时，融合积右侧要么是 $L\mathbb{Z} \otimes L\mathbb{Z}$ ，要么是 $L\mathbb{F}_2 \otimes L\mathbb{Z}$；这两者都具有 Haagerup 性质，因此不含弥散性质（T）子代数。因此我们推得 N 的一个角交织到 M_{n-1}中，这意味着 N 的一个角嵌入到 M_{n-1}的一个角中。递归继续，我们推得 N 的一个角嵌入到 M_1的一个角中，矛盾。□

5. 关于构造奇异的完全 III_1 因子的备注

利用我们的工具，我们能够证明以下结果：

命题 5.1。 存在一个满 III_1 因子 M ，满足以下性质：对于任意一对酉元 u、$v \in \mathcal{U}$（M），只要 $\{u\}''$、$\{v\}''$具有保态条件期望，则存在 ***Haar*** 酉元 w_1、w_2、$w_3 \in M^{\mathcal{U}}$，使得 $[u, w_1] = [w_1, w_2] = [w_2, w_3] = [w_3, v] = 0$。

证明。设 M_0 是任意一个满 III_1 因子，且 $M_1 = M_0 * L(\mathbb{Z})$。那么我们有 M_1 是一个满 III_1 因子，它在自由积态的中心化子中包含一个极大阿贝尔子代数 A （即 $L(\mathbb{Z})$ 的自由副本）。现在，我们在 M_n 中枚举有限维酉元对 $\{(u^n{}_1{}^k, u^n{}_2{}^k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{U}$ ({v17) 的可数 $\|.\|_2$-稠密子集，并使其满足期望条件。接着，按照 3-柄构造，沿相应的有限维阿贝尔子代数（在期望下）取融合积，得到 Θ(M_1)。注意，按构造可知， A 也是 Θ(M_1) 中的一个极大阿贝尔子代数。这可由应用 [Ued13，命题 3.3] 得出，并利用以下事实：在每一步的三个阶段中， A 都不能交织进入融合积。事实上，在前两个阶段，融合积都是有限维的（回忆 A 是弥散的）。在第三阶段，根据定理 3.10，L^2 (Ω$_1$(Ω$_1$(M_n, $u_1^{\sigma(n)}$) $u_2^{\sigma(n)}$)) 是 M_n 与 $L(\mathbb{F}_2)$ 上的粗双模，因此， M_n 的弥散子代数不能交织进入 $L(\mathbb{F}_2)$（即第三步的融合积），所以我们可以再次应用 [Ued13，命题 3.3]。现在应用 [AHHM19，命题 2.7],，可知这是一个 III_1 型因子，因为 $M_1 \subset$ Θ(M_1) 带有期望，且另外 A 是一个在期望下的极大阿贝尔子代数

在 M_1 中，并且也是 $\Theta(M_1)$ 中的一个极大阿贝尔子代数。根据定理 3.10 和命题 2.4，该因子还是满的。□

人们可以猜想，利用 [HJKEN24]，的结果（该结果表明不存在序列交换性），上述因子 M 与自由 Araki–Woods 因子并非初等等价。遗憾的是，由于以下微妙原因，无法立即得出这一结论。我们上述的构造并未连接任意一对酉元，而只连接具有保态条件期望的酉元。人们可以尝试仅假设存在某个忠实正规条件期望到由每个酉元生成的代数上来进行构造（若该代数是有限维的，这种期望总是存在）；事实上，第 3 节中的某些计算仍然成立。但问题在于，引理 3.8 的关键之处在于，从 M_n 到各个 C_j 的期望与同一个状态相容；若从 A 到 B_j 的期望并不与同一个状态相容，这一点便不成立。若没有引理 3.8，我们就无法构造到 C 的条件期望，从而完成定理 3.10 中的构造。假如对于任意 $u \in \mathcal{U}(M)$ 和每个 $\epsilon > 0$，都存在一个酉元 $v \in M$，使得 $\|u - v\|_2 < \epsilon$ 和 v 包含在 M 的某个带保态条件期望的可和子代数中，那么我们就可以在第 3 节中将这些可和子代数用作 B_j，从而得出结论。然而，对于满 III_1 因子而言，这种情况一般看来难以实现。

References

[AH14] Hiroshi Ando 和 Uffe Haagerup, *Ultraproducts of von Neumann algebras*, J. Funct. Anal. 266 (2014), 第 12 期，6842–6913。MR 3198856[AHHM19] Hiroshi Ando、Uffe Haagerup、Cyril Houdayer 和Amine Marrakchi, *bicentralizer algebras and inclusions of type factors* **376** 2019 III, Math. Ann. （），第 3–4 期，1145–1194。[AP16] Claire Anantharaman 和 Sorin Popa, *An introduction to* II_1 *factors*，正在编写的书（2016）。[BCI17] R ´ ˛ $_1$ *factors with nonisomorphic ultrapowers* **166** 2017 11, 2023 2051 3694564 emi Boutonnet、Ionut Chifan 和 Adrian Ioana，II，Duke Math. J.（），第 – 期。MR [BMO20] Jon Bannon、Amine Marrakchi 和 Narutaka Ozawa, *Full factors and co-amenable inclusions* **378** 2020 2, 1107 1121 , Comm. Math. Phys.（），第 – 4134943 期。MR [08] BO Nathaniel P. Brown 和 Narutaka Ozawa，C **-algebras and finite-dimensional approximations* 88, , Graduate Studies in Mathematics，第 卷，美国数学会，普罗维登斯，2008。[CdH$^+$25] Ian Charlesworth、Rolando de Santiago、Ben Hayes、David Jekel、Srivatsav Kunnawalkam Elayavalli 和 Brent Nelson, *Structural properties of graph product von Neumann algebras* **61** 2025 4, 713 762 , Publ. Res. Inst. Math. Sci.（），第 – 期。[Chr79] Erik Christensen, *Subalgebras of a finite algebra* **243** 1979 1, , Math. Ann.（），第 – 期。17 29 543091 ˛ $_1$ MR [CIKE23] Ionut *factor without property Gamma* **33** 2023 5, 1243 1265 Chifan、Adrian Ioana 和 Srivatsav Kunnawalkam Elayavalli, *An exotic* II, Geom. Funct. Anal.（），第 – 期。MR 4646408[CJ85] Alain Connes 和 Vaughan Jones, *Property T for von Neumann algebras*, Bull. London Math. Soc. **17** 1985 1, 57 62 766450 （），第 – 期。MR Con A. Connes, , [76] *Classification of injective factors. Cases* II_1 II_∞, III_λ, $\lambda \neq 1$, Ann. of Math.（ 2 **104** 1976 1, 73 115 454659 ）（），第 – 期。MR DL J. Dixmier 和 E. C. Lance, *Deux nouveaux facteurs de type* II_1, Invent. Math. 7（1969），226–234。MR 248535[FHS14] Ilijas Farah、Bradd Hart 和 David Sherman, *Model theory of operator algebras III: elementary equivalence and* $_1$ *factors* **46** 2014 II, Bull. Lond. Math. Soc.（），第 3 期，609 628 3210717 –。MR

[GH17] Isaac Goldbring 和 Bradd Hart, *On the theories of McDuff's* II_1 *factors*, Int. Math. Res. Not. IMRN（2017），第 18 期，5609–5628。MR 3704741[GJKEP25] Isaac Goldbring、David Jekel、Srivatsav Kunnawalkam Elayavalli 和 Jennifer Pi, *Uniformly super McDuff* II_1 *factors*, Math. Ann. 391（2025），第 2 期，2757–2781。MR 4853030[GKEP25] David Gao、Srivatsav Kunnawalkam Elayavalli 和 Gregory Patchell, *construction on* II_1 *factors* 2504 02003 2025 *Syntactic* ，arXiv 预印本 arXiv:。（）。[GKEPT25a] David Gao 、 Srivatsav Kunnawalkam Elayavalli 、 Gregory Patchell 和 Hui Tan, *Internal sequential commutation and single generation*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2025** 2025 8, 103 4895845（），第 rnaf 期。MR GKEPT b, [25] *On conjugacy and perturbation of subalgebras*, J. Noncommut. Geom.（2025），已在线先行发表。[Hay 18] Ben Hayes, *1-bounded entropy and regularity problems in von Neumann algebras*, Int. Math. Res. Not.（2018），第 1 期，57–137。MR 3801429[HI24] Cyril Houdayer 和 Adrian Ioana, *Asymptotic freeness in tracial ultraproducts*, Forum Math. Sigma 12（2024），论文编号 e88。MR 4814543[HJKEN24] Ben Hayes、David Jekel、Srivatsav Kunnawalkam Elayavalli 和 Brent Nelson, *General solidity phenomena and anticoarse spaces for type* III_1 *factors*, arXiv 预印本 arXiv:2409.18106（2024）。[Ioa15] Adrian Ioana, *Cartan subalgebras of amalgamated free product* II_1 *factors*, Ann. Sci. ´Ec. Norm. Sup´er. (4) 48（2015），第 1 期，71–130，附有 Ioana 和 Stefaan Vaes 撰写的附录。MR 3335839[IPP 08] Adrian Ioana、Jesse Peterson 和 Sorin Popa, *Amalgamated free products of weakly rigid factors and calculation of their symmetry groups* **200** 2008 ，Acta Math.（），第 1 期，85–153。MR 2386109[IT24] Adrian Ioana 和 Hui Tan, *Existential closedness and the structure of bimodules of* II_1 *factors* **286** 2024 4, 110264 4673613 ，J. Funct. Anal.（），论文编号 。MR[JKE26] David Jekel 和 Srivatsav Kunnawalkam Elayavalli, *Upgraded free independence phenomena for random unitaries* **13** 2026 1 29 ，Trans. Amer. Math. Soc.（），–。MR 5017335[KEP25] Srivatsav Kunnawalkam Elayavalli 和 Gregory Patchell, *Sequential commutation in tracial von Neumann algebras* **288** 2025 4, ，J. Funct. Anal.（），论文编号 110719，共 28 页。MR 4832103[McD69] Dusa McDuff, *Uncountably many* II_1 *factors*, Ann. of Math. (2) 90（1969），372–377。MR 259625[McD70]， *Central sequences and the hyperfinite factor*, Proc. London Math. Soc. (3) 21（1970），443–461。MR 281018[Ocn85] Adrian Ocneanu, *Actions of discrete amenable groups on von Neumann algebras*, Lecture Notes in Mathematics，第 1138 卷，Springer-Verlag，柏林，1985。MR 807949[OOT17] Rui Okayasu、Narutaka Ozawa 和 Reiji Tomatsu, *Haagerup approximation property via bimodules* **121** 2017 1, 75 91 3708965 ，Math. Scand.（），第 – 期。MR [Pet] Jesse Peterson, *Open problems in operator algebras*，见 https://math.vanderbilt.edu/peters10/problems.html。[Pop86] Sorin Popa, *Correspondences*, INCREST 预印本，未发表。（1986）。[Pop93]， *Markov traces on universal Jones algebras and subfactors of finite index*, Invent. Math. 111（1993），第 2 期，375–405。MR 1198815[PV10] Sorin Popa 和 Stefaan Vaes, *Group measure space decomposition of* $_1$ *factors* II, Invent. Math.（），*and* W^**-superrigidity* **182** 2010 2, 371 417 2729271 第 – 期。MR [19] *Reducible operators in non-*Γ *type* $_1$ *factors* 2019 SS Junhao Shen 和 Rui Shi, II, 。[Tan23] Hui Tan, *Spectral gap characterizations of property (T) for* II_1 *factors*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2023（2023），第 19 期，16994–17020。MR 4651905[Ued13] Yoshimichi Ueda, *Some analysis of amalgamated free products of von Neumann algebras in the non-tracial setting* **88** 2013 1, 25 48 ，J. Lond. Math. Soc.（），第 – 期。[ZM69] G. Zeller-Meier, *Deux autres facteurs de type* II_1, Invent. Math. 7（1969），235–242。MR 248536

Department of Mathematical Sciences, UCSD, 9500 Gilman Dr, La Jolla, CA 92092, USA*Email address*: weg002@ucsd.edu*URL*: https://sites.google.com/ucsd.edu/david-gao

Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen, Universitetsparken5, 2100 Copenhagen Ø, Denmark*Email address*: daj@math.ku.dk*URL*: https://davidjekel.com

Department of Mathematics, UMD, Kirwan Hall, Campus Drive, MD 20770, USA
Email address: sriva@umd.edu
URL: https://sites.google.com/view/srivatsavke/home

Mathematical Institute, University of Oxford, Andrew Wiles Building, Radcliffe Observatory Quarter, Woodstock Road, Oxford, OX2 6GG, UK*Email address*: greg.patchell@maths.ox.ac.uk*URL*: https://sites.google.com/view/gpatchel