arXiv:2602.00955v1 [math-ph] 1 Feb 2026

# Bures-Hall系综的谱矩及其在纠缠熵中的应用

**Linfeng Wei**[1], **Youyi Huang**[2], **和 Lu Wei**[1]1德克萨斯理工大学计算机科学系，德克萨斯州 79409，美国2中密苏里大学，沃伦斯堡，密苏里州 64093，美国

电子邮箱：[1]{linwei,luwei}@ttu.edu；[2]yhuang@ucmo.edu

2026年1月

**摘要**。我们研究 Bures-Hall 随机矩阵系综的谱矩。主要结果为实数 $k$ 建立了 $k$ 阶谱矩的递推关系，这与现有文献中针对其他系综、假设 $k$ 为整数的研究结果形成对比。建立该递推关系的关键在于推导出该系综关联核的 Christoffel-Darboux公式，从而避免繁琐的求和。作为谱矩结果的一项应用，我们重新推导了 Ayana Sarkar 和 Santosh Kumar 猜想的 Bures-Hall 系综平均冯·诺依曼熵和量子纯度公式。谨以此文缅怀 Santosh Kumar。

关键词：Bures-Hall系综、量子纠缠、量子纯度、随机矩阵理论、谱矩、冯·诺依曼熵

## 1. 引言

对于一个维度为 $m$的随机矩阵系综 $X$ ，第 $k$阶谱矩定义为

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}\left(X^k\right)\right], \tag{1}$$

该问题已在多种经典系综中得到充分研究，包括高斯、拉盖尔和雅可比酉系综 [1–9], ，以及非厄米系综 [10–14]。特别是，高斯正交系综、高斯酉系综和拉盖尔酉系综的谱矩精确递推关系已在 [1–4, 9] 中得到研究并推导。值得一提的是，除 [6, 9], 外，现有大多数研究都聚焦于整数阶谱矩 $k$。本文研究下文所述的 Bures-Hall 系综 (5) 的谱矩，并推导出关于实数阶 $k$ 的谱矩三项递推关系 (89)。

人们已对多种系综中的纠缠统计及相关课题进行了研究，其中包括 Santosh Kumar 的多项重要贡献 [15–28]。特别是，Sarkar 和 Kumar 猜想了 Bures-Hall 系综中冯·诺依曼熵均值和量子纯度的精确公式 [20, 29], ，该公式随后通过 [30] 中的求和方法得到了证明。借助 [31–33] 中的求和方法，人们还得到了 Bures-Hall 系综中冯·诺依曼熵的方差和偏度，以及纯度矩的进一步结果。类似地，希尔伯特–施密特系综和费米子高斯系综中的纠缠统计矩／累积量也得到了研究；这两种系综分别对应拉盖尔酉系综和雅可比酉系综，相关研究见 [9, 34–43] 和 [44–49], 。现有研究及方法针对这些系综中的线性统计量，分别逐阶计算其累积量。此外，利用现有求和方法 [31, 33, 39–41, 47–49], 计算上述三种系综中的冯·诺依曼熵高阶累积量时，化简嵌套求和已日益成为一项繁琐且需要逐案处理的工作。然而， [9], 提出了一种自然且系统的方法，可通过低阶累积量计算纠缠熵的高阶累积量。对于拉盖尔酉系综，他们的方法关键在于谱矩关于 $k \in \mathbb{R}$ 的递推关系，然后对 $k$ 求导，以应用于纠缠熵。本文将这一方法用于 Bures-Hall 系综。

计算Bures-Hall系综上线性统计量的矩/累积量，策略是利用无约束 Bures-Hall 系综 (7) 的关联核；这些关联核与柯西–拉盖尔双正交系综的关联核 [50, 51] 自然相关。计算谱矩的关键，尤其是关于实数阶 $k$ 的递推关系，在于关联核的克里斯托费尔–达布公式 [9], ，它使关联核能够以无求和形式表示，并进而实现无求和计算。我们将推导柯西–拉盖尔双正交系综关联核的克里斯托费尔–达布公式，并利用这些结果推导无约束

Bures-Hall 系综 (7) 上谱矩的递推关系。作为应用，我们通过递推关系重现了纠缠熵和量子纯度 [20, 29, 30] 均值的结果。预计还可以通过谱矩的高阶关联函数 [5, 7, 8], 获得 Bures-Hall 系综纠缠熵的高阶累积量，这或许可以在未来的工作中探讨。

Bures-Hall系综的双体系统 [20, 30–33,50–58] 定义如下。对于两个希尔伯特空间 $\mathcal{H}_A$ ，其维数为 $m$ ，以及 $\mathcal{H}_B$ ，其维数为 $n$，复合系统 $\mathcal{H}_{A+B}$ 由子系统 $\mathcal{H}_{A+B}$ =$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$的张量积构成。复合系统 $\mathcal{H}_{A+B}$ 的随机纯态定义为完备基 $\{\left|i^A\right\rangle\}$ 和 $\{\left|j^B\right\rangle\}$ 的线性组合，其中 $\mathcal{H}_A$ 和 $\mathcal{H}_B$ 具有随机系数 $z_{i,\ j}$,

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_{i,j}\left|i^A\right\rangle \otimes \left|j^B\right\rangle, \tag{2}$$

其中，每个 $z_{i,\ j}$ 均服从均值为零、方差为一的标准复高斯分布，并满足概率约束 $\sum_{i,\ j}|z_{i,\ j}|^2 = 1$。与 [20], 一样，我们考虑上述状态的如下叠加:

$$|\varphi\rangle = |\psi\rangle + (\mathbf{U}\otimes \mathbf{I}_n)|\psi\rangle, \tag{3}$$

其中 $\mathbf{U}$ 是一个 $m \times m$ 酉随机矩阵，其测度正比于 $\det^{2\alpha+1}(\mathbf{I}_m + \mathbf{U})$，其中参数 $\alpha$ 取半整数值，如下所示:

$$\alpha = n - m - \frac{1}{2}. \tag{4}$$

纯态 (3) 所对应的密度矩阵为 $\rho = |\varphi\rangle\langle\varphi|$，其满足自然概率约束 $\mathrm{tr}(\rho) = 1$。不失一般性地，我们假设$m \le n$，即子系统 $A$ 的维数不大于子系统$B$的维数。子系统 $A$ 的约化密度矩阵 $\rho_A$ 通过对完整密度矩阵在另一子系统 $B$ 上进行偏迹得到，即 $\rho_A = \mathrm{tr}_B(\rho)$。所得的 $\rho_A$、 $\lambda_i \in [0,1]$、 $i = 1$、.....、 $m$ 的特征值密度为 Bures-Hall测度 [20, 52–54]

$$f(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{C}\,\delta\left(1 - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\right)\prod_{1\le i<j\le m}\frac{(\lambda_i-\lambda_j)^2}{\lambda_i+\lambda_j}\prod_{i=1}^{m}\lambda_i^{\alpha}, \tag{5}$$

其中常数 $C$ 为

$$C = \frac{2^{-m(2\alpha+m)}\pi^{m/2}}{\Gamma\left(m(2\alpha+m+1)/2\right)}\prod_{i=1}^{m}\frac{\Gamma(i+1)\Gamma(2\alpha+i+1)}{\Gamma(\alpha+i+1/2)} \tag{6}$$

其中 $\delta(x)$ 表示狄拉克δ函数，而 $\Gamma(x)$ 为伽马函数。

为了计算 Bures-Hall系综 (5) 上线性统计量的矩/累积量，一种标准方法是在无约束的 Bures-Hall系综 [20, 30–33, 56], 上进行计算，其密度函数为

$$h(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{C'}\prod_{1\le i<j\le m}\frac{(x_i-x_j)^2}{x_i+x_j}\prod_{i=1}^{m}x_i^{\alpha}\mathrm{e}^{-x_i}, \tag{7}$$

其中 $x_i \in [0,\infty)$、 $i=1$，……， $m$，常数 $C'$ 为

$$C' = C\,\Gamma\left(d\right) \tag{8}$$

with

$$d = \frac{1}{2}m\left(2\alpha + m + 1\right). \tag{9}$$

这种无约束系综通过因式分解 [30–33] 与原始的 Bures-Hall 系综 (5) 相关联

$$h(\boldsymbol{x})\prod_{i=1}^{m}\mathrm{d}x_i = f(\boldsymbol{\lambda})g(\theta)\,\mathrm{d}\theta\prod_{i=1}^{m}\mathrm{d}\lambda_i, \tag{10}$$

其中

$$g(\theta) = \frac{1}{\Gamma\left(d\right)}\mathrm{e}^{-\theta}\theta^{d-1} \tag{11}$$

是无约束系综的迹的密度

$$\theta = \sum_{i=1}^{m} x_i \quad \theta \in [0,\infty). \tag{12}$$

上述因式分解实现了无约束 Bures-Hall 系综 (7) 上线性统计量的矩与 Bures-Hall 系综 (5) 上线性统计量的矩之间的矩转换 [30–33], ，它们随不同的线性统计量而变化。特别地，我们考虑无约束 Bures-Hall 系综 (7) 上的一族线性统计量,

$$R_k = \sum_{i=1}^{m} x_i^k \tag{13}$$

对于 $k \in \mathbb{R}$。显然，线性统计量 $R_k$ 的第一累积量是无约束 Bures-Hall 系综 (7) 上的第 $k$ 个谱矩,

$$\kappa(R_k) = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{m} x_i^k\right]. \tag{14}$$

此外，我们还定义了无约束 Bures-Hall 系综 (7) 上的一族线性统计量,

$$T_k = \sum_{i=1}^{m} x_i^k \ln x_i \tag{15}$$

其中 $k \in \mathbb{R}$，这将有助于将其应用于纠缠熵。

本文其余部分安排如下。第 2 节推导关于 Cauchy-Laguerre 双正交核的相关技术结果，并得出其 Christoffel-Darboux公式。随后，我们推导出谱矩的递推关系，并在定理 1 中加以总结；这是本文的主要结果。第 3 节探讨其在冯·诺依曼熵和量子纯度方面的应用。各个所得公式的系数列于附录 A。

## 2. Cauchy-Laguerre双正交核及谱矩的递推关系

### *2.1. Cauchy-Laguerre*双正交核的*Christoffel-Darboux*公式

无约束 Bures-Hall 系综的 $k$ 点（$k \leq m$）关联函数 $\rho_k(x_1, \ldots\ldots, x_k)$ 已知服从由 $2k \times 2k$ 反对称矩阵 $[50]$, 描述的 Pfaffian点过程，其中相应的关联核与 Cauchy-Laguerre双正交核 [51]有关。本节将推导 Cauchy-Laguerre 双正交核及其多项式的一些技术结果。我们首先在引理 1 和引理2 中分别陈述关于 Cauchy-Laguerre 双正交多项式的结构关系和四项表达式的已知结果，这些结果将用于推导并简化 Cauchy-Laguerre 双正交核的导数。随后，我们在命题 1 中推导 Cauchy-Laguerre双正交核的关键 Christoffel-Darboux公式。在命题 2 中，我们采用 Christoffel-Darboux 公式推导单点关联核的导数，并得到简洁的表示。单点关联核导数的无求和表示使我们能够通过分部积分推导谱矩 (25) 的递推关系 (89)，该结果列于定理 1 中。

对（无约束）Bures-Hall系综上线性统计量的矩/累积量进行计算，可以借助 Cauchy-Laguerre系综的核来完成。该系综的四个关联核 $[32, 50]$ 分别为 $K_{00}(x,\ y)$、$K_{01}(x,\ y)$、$K_{10}(x,\ y)$和 $K_{11}(x,\ y)$，它们具有如下有限求和表示 $[50, 51]$。

$$K_{00}(x,y) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{h_k} p_k(x) q_k(y) \tag{16a}$$

$$K_{01}(x,y) = -x^{\alpha} e^{-x} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{h_k} p_k(y) Q_k(-x) \tag{16b}$$

$$K_{10}(x,y) = -y^{\alpha+1} e^{-y} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{h_k} P_k(-y) q_k(x) \tag{16c}$$

$$K_{11}(x,y) = x^{\alpha} y^{\alpha+1} e^{-x-y} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{h_k} P_k(-y) Q_k(-x) - W(x,y). \tag{16d}$$

这里，$p_k(x)$和 $q_k(y)$是Cauchy-Laguerre 双正交多项式,

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} p_k(x) q_l(y) W(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = h_k \delta_{k,l} \tag{17}$$

其中归一化常数为 $h_k$，权函数为

$$W(x,y) = \frac{x^{\alpha} y^{\alpha+1} e^{-x-y}}{x+y}. \tag{18}$$

此外，$p_k(x)$ 和 $q_k(y)$ 的 Cauchy变换分别为

$$P_k(x) = \int_0^{\infty} \frac{v^{\alpha} \mathrm{e}^{-v}}{x-v} p_k(v)\, \mathrm{d}v \tag{19a}$$

$$Q_k(y) = \int_0^\infty \frac{w^{\alpha+1}\mathrm{e}^{-w}}{y-w} q_k(w)\,\mathrm{d}w. \tag{19b}$$

它们通过 Meijer G 函数表示的形式也已为人所知 [51, 59, 60]

$$p_k(x) = \sqrt{2}(-1)^k G_{2,3}^{1,1}\left(\begin{matrix} -2\alpha-1-k; k+1 \\ 0; -\alpha, -2\alpha-1 \end{matrix}\middle| x\right) \tag{20a}$$

$$q_k(x) = \sqrt{2}(-1)^k(\alpha+k+1) G_{2,3}^{1,1}\left(\begin{matrix} -2\alpha-1-k; k+1 \\ 0; -\alpha-1, -2\alpha-1 \end{matrix}\middle| x\right) \tag{20b}$$

$$P_k(x) = \sqrt{2}(-1)^{k+1}\mathrm{e}^{-x} G_{2,3}^{2,1}\left(\begin{matrix} -\alpha-k-1; \alpha+k+1 \\ 0, \alpha; -\alpha-1 \end{matrix}\middle| -x\right) \tag{20c}$$

$$Q_k(x) = \sqrt{2}(-1)^{k+1}(\alpha+k+1)\mathrm{e}^{-x} G_{2,3}^{2,1}\left(\begin{matrix} -\alpha-k; \alpha+k+2 \\ 0, \alpha+1; -\alpha \end{matrix}\middle| -x\right). \tag{20d}$$

此外，根据 Meijer G 函数的定义，可以得到 Cauchy-Laguerre 双正交多项式的显式表示 [61],

$$p_m(x) = \sqrt{2}(-1)^m \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j \Gamma(2\alpha+j+m+2) x^j}{j!\Gamma(\alpha+j+1)\Gamma(2\alpha+j+2)\Gamma(-j+m+1)} \tag{21a}$$

$$q_m(x) = \sqrt{2}(-1)^m(\alpha+m+1) \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j \Gamma(2\alpha+j+m+2) x^j}{j!\Gamma(\alpha+j+2)\Gamma(2\alpha+j+2)\Gamma(-j+m+1)}. \tag{21b}$$

下文关于 Cauchy-Laguerre双正交核的结果中，另一个重要要素是双正交多项式的最高阶系数；该系数对于 $p_m(x)$ 和 $q_m(x)$ 相同，记作 $S_m$，即：

$$p_m(x) = S_m x^m + \text{lower-order terms} \tag{22}$$

$$q_m(x) = S_m x^m + \text{lower-order terms}, \tag{23}$$

其中

$$S_m = \frac{2\sqrt{2}(2\alpha+2m+1)\Gamma(2\alpha+2m)}{m(2\alpha+m)(2\alpha+m+1)\Gamma(m)\Gamma(\alpha+m)\Gamma(2\alpha+m)}. \tag{24}$$

无约束 Bures-Hall 系综的谱矩可通过单点密度计算如下：

$$\kappa(R_k) = m\int_0^\infty x^k\ h_1(x)\,\mathrm{d}x, \tag{25}$$

其中，密度函数 $h_1(x)$ 为 [32, 50]

$$h_1(x) = \frac{1}{2m}\left(K_{01}(x,x) + K_{10}(x,x)\right). \tag{26}$$

我们首先陈述一些来自 [62] 的已知结果。

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x^\alpha y^{\alpha+1} e^{-x-y}}{(x+y)^2} x p_m(x) q_n(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \begin{cases} -\frac{S_m}{S_{m+1}}, & n = m+1 \\ -\frac{S_{m-1}}{S_m} + \frac{S_m}{S_{m+1}}, & n = m \\ \frac{S_{m-1}}{S_m}, & n = m-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned} \tag{27a}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x^\alpha y^{\alpha+1} e^{-x-y}}{(x+y)^2} p_m(x) y q_n(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \begin{cases} \frac{S_m}{S_{m+1}}, & n = m+1 \\ \frac{S_{m-1}}{S_m} - \frac{S_m}{S_{m+1}} + 1, & n = m \\ -\frac{S_{m-1}}{S_m}, & n = m-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned} \tag{27b}$$

上述结果可通过分部积分推导得出:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x^\alpha y^{\alpha+1} e^{-x-y}}{(x+y)^2} x p_m(x) q_n(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty x \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p_m(x)\right) q_n(y) \frac{x^\alpha y^{\alpha+1} e^{-x-y}}{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + (\alpha+1)\delta_{m,n} \\
&\quad - \int_0^\infty \int_0^\infty x p_m(x) q_n(y) \frac{x^\alpha y^{\alpha+1} e^{-x-y}}{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,
\end{aligned} \tag{28}$$

and

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x^\alpha y^{\alpha+1} e^{-x-y}}{(x+y)^2} x p_m(x) y q_n(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty p_m(x) y \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} q_n(y)\right) \frac{x^\alpha y^{\alpha+1} e^{-x-y}}{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + (\alpha+2)\delta_{m,n} \\
&\quad - \int_0^\infty \int_0^\infty p_m(x) y q_n(y) \frac{x^\alpha y^{\alpha+1} e^{-x-y}}{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.
\end{aligned} \tag{29}$$

还得到了 $p_m(x)$、 $q_m(x)$、 $P_m(x)$、 $Q_m(x)$ 的结构关系，如 [62] 所示。

**引理 1**

$$\begin{aligned}
x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p_m(x) &= \frac{S_{m-1}}{S_m} p_{m-1}(x) - \left(\alpha + 1 - \frac{S_m}{S_{m+1}} + \frac{S_{m-1}}{S_m}\right) p_m(x) \\
&\quad + x p_m(x) - \frac{S_m}{S_{m+1}} p_{m+1}(x)
\end{aligned} \tag{30a}$$

$$\begin{aligned}
x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} q_m(x) &= \frac{S_{m-1}}{S_m} q_{m-1}(x) - \left(\alpha + 1 + \frac{S_m}{S_{m+1}} - \frac{S_{m-1}}{S_m}\right) q_m(x) \\
&\quad + x q_m(x) - \frac{S_m}{S_{m+1}} q_{m+1}(x)
\end{aligned} \tag{30b}$$

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P_m(x) = \frac{S_{m-1}}{S_m} P_{m-1}(x) - \left(1 - \frac{S_m}{S_{m+1}} + \frac{S_{m-1}}{S_m}\right) P_m(x) - \frac{S_m}{S_{m+1}} P_{m+1}(x) \tag{30c}$$

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Q_m(x) = \frac{S_{m-1}}{S_m} Q_{m-1}(x) - \left(\frac{S_m}{S_{m+1}} - \frac{S_{m-1}}{S_m}\right) Q_m(x) - \frac{S_m}{S_{m+1}} Q_{m+1}(x). \tag{30d}$$

**证明**。 设 $a_{m,j}$, $b_{m,j}$ 是两组数，使得

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p_m(x) = \sum_{j=0}^{m} a_{m,j} p_j(x) \tag{31a}$$

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}q_m(x)=\sum_{j=0}^{m}b_{m,j}q_j(x). \tag{31b}$$

与下文引理 *3* 的证明类似，我们有

$$a_{m,j}=\int_0^\infty\int_0^\infty x\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p_m(x)\right)q_j(y)\frac{x^\alpha y^{\alpha+1}e^{-x-y}}{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{32a}$$

$$b_{m,j}=\int_0^\infty\int_0^\infty y\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}q_m(y)\right)p_j(x)\frac{x^\alpha y^{\alpha+1}e^{-x-y}}{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{32b}$$

另一方面，进行分部积分可得

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_0^\infty x\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p_m(x)\right)q_j(y)\frac{x^\alpha y^{\alpha+1}e^{-x-y}}{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=-\int_0^\infty\int_0^\infty p_m(x)q_j(y)\left(\frac{x^\alpha y^{\alpha+2}e^{-x-y}}{(x+y)^2}+\frac{x}{x+y}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^\alpha y^{\alpha+1}e^{-x-y})\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{33}$$

因此我们有

$$a_{m,j}=-\int_0^\infty\int_0^\infty p_m(x)q_j(y)x^\alpha y^{\alpha+1}e^{-x-y}\left(\frac{y}{(x+y)^2}+\frac{\alpha-x}{x+y}\right), \tag{34}$$

类似地

$$b_{m,j}=-\int_0^\infty\int_0^\infty p_j(x)q_n(y)x^\alpha y^{\alpha+1}e^{-x-y}\left(\frac{x}{(x+y)^2}+\frac{\alpha+1-y}{x+y}\right). \tag{35}$$

将结果 *(27)* 代入 $\frac{1}{(x+y)^2}$，并利用 *(54)*、*(55)* 下方含最高阶系数的 $\frac{1}{x+y}$ 项进行计算，即可完成 *(30a)*、*(30b)* 的证明。

将 *(30a)* 和 *(30b)* 两边乘以 后，对 $x\in[0,\infty)$ 积分

$$\frac{1}{z-x}x^\alpha e^{-x} \tag{36}$$

*and*

$$\frac{1}{z-x}x^{\alpha+1}e^{-x}, \tag{37}$$

分别，并进行分部积分，使用

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{z-x}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{z-x} \tag{38}$$

对于左端，我们相应地得到结果 *(30c)* 和 *(30d)*。 □我们还需要以下递推关系，这些关系由 [62].

**引理2**

$$\begin{aligned}&x\left(p_{m+1}(x)-p_m(x)\right)\\&=r_{m,2}p_{m+2}(x)+r_{m,1}p_{m+1}(x)+r_{m,0}p_m(x)+r_{m,-1}p_{m-1}(x)\end{aligned} \tag{39a}$$

$$\begin{aligned}&x\left(\frac{q_{m+1}(x)}{\alpha+m+2}-\frac{q_m(x)}{\alpha+m+1}\right)\\&=s_{m,2}q_{m+2}(x)+s_{m,1}q_{m+1}(x)+s_{m,0}q_m(x)+s_{m,-1}q_{m-1}(x)\end{aligned} \tag{39b}$$

$$\begin{aligned} & x\left(P_{m+1}(x)-P_m(x)\right) \\ &= r_{m,2}P_{m+2}(x)+r_{m,1}P_{m+1}(x)+r_{m,0}P_m(x)+r_{m,-1}P_{m-1}(x) \end{aligned} \tag{39c}$$

$$\begin{aligned} & x\left(\frac{Q_{m+1}(x)}{\alpha+m+2}-\frac{Q_m(x)}{\alpha+m+1}\right) \\ &= s_{m,2}Q_{m+2}(x)+s_{m,1}Q_{m+1}(x)+s_{m,0}Q_m(x)+s_{m,-1}Q_{m-1}(x), \end{aligned} \tag{39d}$$

$$\begin{aligned} r_{m,2} &= \frac{S_{m+1}}{S_{m+2}}=\frac{(m+2)(2\alpha+m+3)}{2(2\alpha+2m+5)} \\ r_{m,1} &= \frac{4\alpha^2+14(\alpha+1)+6\alpha m+m(3m+13)}{2(2\alpha+2m+5)} \\ r_{m,0} &= \frac{4\alpha^2+3m^2+6\alpha(m+1)+5m+2}{2(2\alpha+2m+1)} \\ r_{m,-1} &= \frac{S_{m-1}}{S_m}=\frac{m(2\alpha+m+1)}{2(2\alpha+2m+1)} \\ s_{m,2} &= \frac{S_{m+1}}{S_{m+2}(\alpha+m+2)}=\frac{(m+2)(2\alpha+m+3)}{2(\alpha+m+2)(2\alpha+2m+5)} \\ s_{m,1} &= \frac{4\alpha^3+2\alpha^2(5m+11)+\alpha(m+2)(9m+17)+(m+1)(m+2)(3m+8)}{2(\alpha+m+1)(\alpha+m+2)(2\alpha+2m+5)} \\ s_{m,0} &= \frac{2(\alpha+1)^2(2\alpha+1)+3m^3+(9\alpha+10)m^2+(2\alpha+3)(5\alpha+3)m}{2(\alpha+m+1)(\alpha+m+2)(2\alpha+2m+1)} \\ s_{m,-1} &= \frac{S_{m-1}}{S_m(\alpha+m+1)}=\frac{m(2\alpha+m+1)}{2(\alpha+m+1)(2\alpha+2m+1)}. \end{aligned}$$

**证明**。 结果 ***(39a)***、***(39b)*** 可在 *[62]*中找到，并可由下文 ***(49a)***、***(49b)*** 中关于 $c_{j,k}$, $d_{k,j}$ 的结果得到。下面给出由 ***(39a)*** 推导 ***(39c)*** 的证明；由 ***(39b)*** 推导 ***(39d)*** 的证明类似。由 ***(39a)*** 可得

$$\begin{aligned} & z\left(p_{m+1}(z)-p_m(z)\right) \\ &= r_{m,2}p_{m+2}(z)+r_{m,1}p_{m+1}(z)+r_{m,0}p_m(z)+r_{m,-1}p_{m-1}(z). \end{aligned} \tag{40}$$

因此我们有

$$\begin{aligned} & z\left(p_{m+1}(z)-p_{m+1}(x)+p_{m+1}(x)-\left(p_m(z)-p_m(x)+p_m(x)\right)\right) \\ & \quad -x\left(p_{m+1}(x)-p_m(x)\right) \\ &= r_{m,2}(p_{m+2}(z)-p_{m+2}(x))+r_{m,1}(p_{m+1}(z)-p_{m+1}(x)) \\ & \quad +r_{m,0}(p_m(z)-p_m(x))+r_{m,-1}(p_{m-1}(z)-p_{m-1}(x)). \end{aligned} \tag{41}$$

*Set*

$$\tilde{P}_{k-1}(z)=\int_0^\infty \frac{p_k(z)-p_k(x)}{z-x}x^\alpha e^{-x}\,\mathrm{d}x, \tag{42}$$

*and*

$$f_1(z) = \int_0^\infty \frac{1}{z-x} x^\alpha e^{-x} \,\mathrm{d}x. \tag{43}$$

将两边相乘

$$\frac{1}{z-x} x^\alpha e^{-x} \tag{44}$$

并对 ***(41)*** 两边的 $x \in [0,\infty)$ 进行积分，我们得到

$$\begin{aligned} &z\tilde{P}_m(z) - z\tilde{P}_{m-1}(z) + \int_0^\infty p_{m+1}(x) x^\alpha e^{-x} \,\mathrm{d}x - \int_0^\infty p_m(x) x^\alpha e^{-x} \,\mathrm{d}x \\ &= r_{m,2}\tilde{P}_{m+1}(z) + r_{m,1}\tilde{P}_m(z) + r_{m,0}\tilde{P}_{m-1}(z) + r_{m,-1}\tilde{P}_{m-2}(z), \end{aligned} \tag{45}$$

左边最后两个积分根据下文的 ***(52)*** 相互抵消。

现在我们利用 *[62]* 的结果，即 $P_k(z)$ 可以用 $p_k(z)$、 $f_1(z)$、$\sim P_{k-1}(z)$ 表示为

$$P_k(z) = f_1(z)p_k(z) - \tilde{P}_{k-1}(z). \tag{46}$$

由此可得

$$\begin{aligned} &z\left(f_1(z)p_{m+1}(z) - f_1(z)p_m(z)\right) - z\left(P_{m+1}(z) - P_m(z)\right) \\ &= r_{m,2}\left(\left(f_1(z)p_{m+2}(z) - P_{m+2}(z)\right) + r_{m,1}\left(\left(f_1(z)p_{m+1}(z) - P_{m+1}(z)\right)\right.\right. \\ &\quad \left.\left. + r_{m,0}\left(\left(f_1(z)p_m(z) - P_m(z)\right) + r_{m,-1}\left(\left(f_1(z)p_{m-1}(z) - P_{m-1}(z)\right)\right.\right.\right. \end{aligned} \tag{47}$$

***(47)*** 左边的第一项与右边的 $p_k(z)$ 项和 $f_1(z)$ 项根据 ***(39a)*** 相互抵消，从而完成了 ***(39c)*** 的证明。□

为避免使用核（16b）、（16c）的求和形式，我们将采用 Cauchy-Laguerre 核的 Christoffel-Darboux 形式，该形式最初通过 Hessenberg 矩阵在 [62] 中得到。下文的命题 1 将给出这些结果的一个初等证明，并先陈述一些中间结果。

**引理 3** 设 $c_{j,k}$、 $d_{k,j}$ 是两组数，使得

$$xp_k(x) = \sum_{j=0}^{k+1} c_{j,k} p_j(x) \tag{48a}$$

$$xq_j(x) = \sum_{k=0}^{j+1} d_{k,j} q_k(x), \tag{48b}$$

于是我们有

$$c_{j,k} = \int_0^\infty \int_0^\infty p_k(x) x q_j(y) \frac{x^\alpha y^{\alpha+1} e^{-x-y}}{x+y} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \tag{49a}$$

$$d_{k,j} = \int_0^\infty \int_0^\infty p_k(x) y q_j(y) \frac{x^\alpha y^{\alpha+1} e^{-x-y}}{x+y} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y, \tag{49b}$$

*and*

$$c_{j,k} + d_{k,j} = 2(\alpha + j + 1). \tag{50}$$

**证明**。 将 *(48a)* 代入 *(49a)* 的右侧，并利用双正交性 *(17)* 得到 *(49a)*；对于 *(49b)* 同理。对于 *(50)*，注意到

$$\begin{aligned} c_{j,k} + d_{k,j} &= \int_0^\infty \int_0^\infty p_k(x) q_j(y) x^\alpha y^{\alpha+1} e^{-x-y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \int_0^\infty p_k(x) x^\alpha e^{-x} \, \mathrm{d}x \int_0^\infty q_j(y) y^{\alpha+1} e^{-y} \, \mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{51}$$

其中根据 *(21a)*、*(21b)*

$$\int_0^\infty p_k(x) x^\alpha e^{-x} \, \mathrm{d}x \quad = \sqrt{2} \tag{52}$$

$$\int_0^\infty q_j(y) y^{\alpha+1} e^{-y} \, \mathrm{d}y = \sqrt{2}(\alpha + j + 1). \tag{53}$$

□

特别地,

$$c_{m,m-1} = \int_0^\infty \int_0^\infty p_{m-1}(x) x q_m(y) \frac{x^\alpha y^{\alpha+1} e^{-x-y}}{x+y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{S_{m-1}}{S_m} \tag{54}$$

$$d_{m,m-1} = \int_0^\infty \int_0^\infty p_m(x) y q_{m-1}(y) \frac{x^\alpha y^{\alpha+1} e^{-x-y}}{x+y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{S_{m-1}}{S_m}. \tag{55}$$

此外，我们将 $p_m(x)$ 的 $S_m^{m-1}$ $m-1$ 次项系数记为 $x^m$ ，那么通过比较 (21a) 中的 $x^m$ 项系数可得

$$c_{m,m} = \frac{S_m^{m-1}}{S_m} - \frac{S_{m+1}^m}{S_{m+1}} = \alpha + m + 1 + \frac{S_{m-1}}{S_m} - \frac{S_m}{S_{m+1}}, \tag{56}$$

因此，由 (50) 可得

$$d_{m,m} = \alpha + m + 1 - \frac{S_{m-1}}{S_m} + \frac{S_m}{S_{m+1}}. \tag{57}$$

值得一提的是，尽管下面的 (58) 中的结果是带有单重求和的 Christoffel-Darboux 型公式在 [62], 中的推论，我们仍使用双正交性通过初等方法推导出这些结果，并在推导和解释无需对 Cauchy-Laguerre 双正交核进行求和的 Christoffel-Darboux公式时采用它们。

**引理4**

$$\begin{aligned} 2\sum_{j=0}^{m-1} (\alpha + j + 1) p_j(x) &= \frac{S_{m-1}}{S_m} p_{m-1}(x) - \frac{S_m}{S_{m+1}} p_{m+1}(x) + x p_m(x) \\ &\quad - \left( \alpha + m + 1 - \frac{S_m}{S_{m+1}} + \frac{S_{m-1}}{S_m} \right) p_m(x) \end{aligned} \tag{58a}$$

$$\begin{aligned} 2(\alpha + m + 1) \sum_{k=0}^{m-1} q_k(y) &= \frac{S_{m-1}}{S_m} q_{m-1}(y) - \frac{S_m}{S_{m+1}} q_{m+1}(y) + y q_m(y) \\ &\quad - \left( \alpha + m + 1 + \frac{S_m}{S_{m+1}} - \frac{S_{m-1}}{S_m} \right) q_m(y) \end{aligned} \tag{58b}$$

$$2\sum_{j=0}^{m-1}(\alpha+j+1)P_j(x)+\sqrt{2}=\frac{S_{m-1}}{S_m}P_{m-1}(x)-\frac{S_m}{S_{m+1}}P_{m+1}(x)+xP_m(x)$$
$$-\left(\alpha+m+1-\frac{S_m}{S_{m+1}}+\frac{S_{m-1}}{S_m}\right)P_m(x) \tag{58c}$$

$$2(\alpha+m+1)\left(\sum_{k=0}^{m-1}Q_k(y)+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{S_{m-1}}{S_m}Q_{m-1}(y)-\frac{S_m}{S_{m+1}}Q_{m+1}(y)+yQ_m(y)$$
$$-\left(\alpha+m+1+\frac{S_m}{S_{m+1}}-\frac{S_{m-1}}{S_m}\right)Q_m(y). \tag{58d}$$

**证明**。 我们首先证明 *(58a)*，*(58b)* 的证明类似。由 *(48a)* 可得

$$xp_m(x)=\sum_{j=0}^{m+1}c_{j,m}p_j(x). \tag{59}$$

由（*50*）式可知

$$c_{j,m}=2(\alpha+j+1)-d_{m,j}. \tag{60}$$

但是$d_{m,\ j}$仅当 $j\geq m-1$ 时才具有非零值，即

$$d_{m,j}=0\ for\ j\leq m-2. \tag{61}$$

因此我们有

$$c_{j,m}=2(\alpha+j+1)\ for\ j\leq m-2. \tag{62}$$

也就是说

$$xp_m(x)=\sum_{j=0}^{m-2}2(\alpha+j+1)p_j(x)$$
$$+c_{m-1,m}p_{m-1}(x)+c_{m,m}p_m(x)+c_{m+1,m}p_{m+1}(x). \tag{63}$$

*Also*

$$c_{m-1,m}=2(\alpha+m)-d_{m,m-1}$$
$$=2(\alpha+m)-\frac{S_{m-1}}{S_m}\qquad by\ (55) \tag{64}$$

$$c_{m+1,m}=\int_0^\infty\int_0^\infty p_m(x)xq_{m+1}(y)\frac{x^\alpha y^{\alpha+1}e^{-x-y}}{x+y}dxdy=\frac{S_m}{S_{m+1}}. \tag{65}$$

因此我们有

$$xp_m(x)=\sum_{j=0}^{m-1}2(\alpha+j+1)p_j(x)$$
$$-\frac{S_{m-1}}{S_m}p_{m-1}(x)+c_{m,m}p_m(x)+\frac{S_m}{S_{m+1}}p_{m+1}(x). \tag{66}$$

将（*56*）代入（*66*），即可得到（*58a*）。类似地，可以得到（*58b*）。

随后，我们分别由（*58a*）和（*58b*）推导出（*58c*）和（*58d*）。下面展示从（*58b*）到（*58d*）的推导过程，而从（*58a*）到（*58c*）的过程类似。令

$$\tilde{Q}_{k-1}(z) = \int_0^\infty \frac{q_k(z) - q_k(y)}{z-y} y^{\alpha+1} e^{-y}\,\mathrm{d}y \tag{67}$$

*and*

$$f_2(z) = \int_0^\infty \frac{1}{z-y} y^{\alpha+1} e^{-y}\,\mathrm{d}y. \tag{68}$$

类似于（*46*），我们有

$$Q_k(z) = f_2(z) q_k(z) - \tilde{Q}_{k-1}(z). \tag{69}$$

将

$$\frac{1}{z-y} y^{\alpha+1} e^{-y} \tag{70}$$

对（*58b*）中 $z$份与 $y$份之差乘以 $y \in [0,\infty)$ 并积分，其中项˜改写为 $Q_{k-1}(z)$ 和 $f_2(z)$，可得（*58d*）；其中积分项使用了（*53*）

$$\int_0^\infty q_m(y) y^{\alpha+1} e^{-y}\,\mathrm{d}y, \tag{71}$$

以及恒等式（*69*）。类似地，利用（*42*）和（*46*），可由（*58a*）得到（*58c*）。*(43)* 证明完毕。 □

作为上述结果的推论，我们现在根据双正交性推导 Cauchy-Laguerre 核的 Christoffel-Darboux公式。

**命题 1**

$$\begin{aligned}
&(x+y)\sum_{k=0}^{m-1} p_k(x) q_k(y) \\
&= \frac{1}{2(\alpha+m+1)} \left( \frac{S_{m-1}}{S_m} p_{m-1}(x) - \frac{S_m}{S_{m+1}} p_{m+1}(x) + x p_m(x) \right. \\
&\quad - \left( \alpha + m + 1 - \frac{S_m}{S_{m+1}} + \frac{S_{m-1}}{S_m} \right) p_m(x) \Bigg) \left( \frac{S_{m-1}}{S_m} q_{m-1}(y) \right. \\
&\quad - \frac{S_m}{S_{m+1}} q_{m+1}(y) + y q_m(y) - \left( \alpha + m + 1 + \frac{S_m}{S_{m+1}} - \frac{S_{m-1}}{S_m} \right) q_m(y) \Bigg) \\
&\quad + \frac{S_{m-1}}{S_m} \left( p_m(x) q_{m-1}(y) + p_{m-1}(x) q_m(y) \right)
\end{aligned} \tag{72a}$$

$$\begin{aligned}
&(x+y)\sum_{k=0}^{m-1} P_k(x) q_k(y) \\
&= \frac{1}{2(\alpha+m+1)} \left( \frac{S_{m-1}}{S_m} P_{m-1}(x) - \frac{S_m}{S_{m+1}} P_{m+1}(x) + x P_m(x) \right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\left(\alpha+m+1-\frac{S_m}{S_{m+1}}+\frac{S_{m-1}}{S_m}\right)P_m(x)\Bigg)\left(\frac{S_{m-1}}{S_m}q_{m-1}(y)\right.\\
&-\frac{S_m}{S_{m+1}}q_{m+1}(y)+yq_m(y)-\left(\alpha+m+1+\frac{S_m}{S_{m+1}}-\frac{S_{m-1}}{S_m}\right)q_m(y)\Bigg)\\
&+\frac{S_{m-1}}{S_m}\left(P_m(x)q_{m-1}(y)+P_{m-1}(x)q_m(y)\right) \qquad (72b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(x+y)\sum_{k=0}^{m-1}p_k(x)Q_k(y)\\
=&\frac{1}{2(\alpha+m+1)}\left(\frac{S_{m-1}}{S_m}p_{m-1}(x)-\frac{S_m}{S_{m+1}}p_{m+1}(x)+xp_m(x)\right.\\
&-\left(\alpha+m+1-\frac{S_m}{S_{m+1}}+\frac{S_{m-1}}{S_m}\right)p_m(x)\Bigg)\left(\frac{S_{m-1}}{S_m}Q_{m-1}(y)\right.\\
&-\frac{S_m}{S_{m+1}}Q_{m+1}(y)+yQ_m(y)-\left(\alpha+m+1+\frac{S_m}{S_{m+1}}-\frac{S_{m-1}}{S_m}\right)Q_m(y)\Bigg)\\
&+\frac{S_{m-1}}{S_m}\left(p_m(x)Q_{m-1}(y)+p_{m-1}(x)Q_m(y)\right) \qquad (72c)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(x+y)\sum_{k=0}^{m-1}P_k(x)Q_k(y)\\
=&-1+\frac{1}{2(\alpha+m+1)}\left(\frac{S_{m-1}}{S_m}P_{m-1}(x)-\frac{S_m}{S_{m+1}}P_{m+1}(x)+xP_m(x)\right.\\
&-\left(\alpha+m+1-\frac{S_m}{S_{m+1}}+\frac{S_{m-1}}{S_m}\right)P_m(x)\Bigg)\left(\frac{S_{m-1}}{S_m}Q_{m-1}(y)\right.\\
&-\frac{S_m}{S_{m+1}}Q_{m+1}(y)+yQ_m(y)-\left(\alpha+m+1+\frac{S_m}{S_{m+1}}-\frac{S_{m-1}}{S_m}\right)Q_m(y)\Bigg)\\
&+\frac{S_{m-1}}{S_m}\left(P_m(x)Q_{m-1}(y)+P_{m-1}(x)Q_m(y)\right). \qquad (72d)
\end{aligned}
$$

**证明。** 我们首先证明 *(72a)*。有

$$
\begin{aligned}
&(x+y)\sum_{k=0}^{m-1}p_k(x)q_k(y)\\
=&\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{k+1}c_{j,k}p_j(x)q_k(y)+\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{j+1}d_{j,k}p_j(x)q_k(y)\\
=&\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1}(c_{j,k}+d_{k,j})p_j(x)q_k(y)\\
&+c_{m,m-1}p_m(x)q_{m-1}(y)+d_{m,m-1}p_{m-1}(x)q_m(y)\\
=&2\sum_{k=0}^{m-1}q_k(y)\sum_{j=0}^{m-1}(\alpha+j+1)p_j(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{S_{m-1}}{S_m}\left(p_m(x)q_{m-1}(y)+p_{m-1}(x)q_m(y)\right)\\
&=\frac{1}{2(\alpha+m+1)}\left(\frac{S_{m-1}}{S_m}p_{m-1}(x)-\frac{S_m}{S_{m+1}}p_{m+1}(x)+xp_m(x)\right.\\
&\left.-\left(\alpha+m+1-\frac{S_m}{S_{m+1}}+\frac{S_{m-1}}{S_m}\right)p_m(x)\right)\left(\frac{S_{m-1}}{S_m}q_{m-1}(y)\right.\\
&\left.-\frac{S_m}{S_{m+1}}q_{m+1}(y)+yq_m(y)-\left(\alpha+m+1+\frac{S_m}{S_{m+1}}-\frac{S_{m-1}}{S_m}\right)q_m(y)\right)\\
&+\frac{S_{m-1}}{S_m}\left(p_m(x)q_{m-1}(y)+p_{m-1}(x)q_m(y)\right), \qquad (73)
\end{aligned}
$$

其中，第一个等式来自（*49a*）和（*49b*），第二个等式来自（*61*），第三个等式来自（*50*）、（*54*）和（*55*），最后一个等式来自（*58a*）和（*58b*）。

随后，我们可以由（*72a*）推导出（*72c*）、（*72b*）和（*72d*）。我们给出（*72b*）的证明，其余情形类似。将（*58b*）左端乘以

$$
\frac{1}{2(\alpha+m+1)}xp_m(x) \qquad (74)
$$

从（*72a*）的左端减去所得结果，可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m-1}xp_k(x)q_k(y)-xp_m(x)\sum_{k=0}^{m-1}q_k(y)\\
&=\frac{1}{2(\alpha+m+1)}\left(\frac{S_{m-1}}{S_m}p_{m-1}(x)-\frac{S_m}{S_{m+1}}p_{m+1}(x)\right.\\
&\left.-\left(\alpha+m+1-\frac{S_m}{S_{m+1}}+\frac{S_{m-1}}{S_m}\right)p_m(x)\right)\left(\frac{S_{m-1}}{S_m}q_{m-1}(y)\right.\\
&\left.-\frac{S_m}{S_{m+1}}q_{m+1}(y)+yq_m(y)-\left(\alpha+m+1+\frac{S_m}{S_{m+1}}-\frac{S_{m-1}}{S_m}\right)q_m(y)\right)\\
&+\frac{S_{m-1}}{S_m}\left(p_m(x)q_{m-1}(y)+p_{m-1}(x)q_m(y)\right)-y\sum_{k=0}^{m-1}p_k(x)q_k(y). \qquad (75)
\end{aligned}
$$

因此，对式 *(75)* 中的 $z$份和 $x$份作差，可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m-1}zp_k(z)q_k(y)-zp_m(z)\sum_{k=0}^{m-1}q_k(y)-\sum_{k=0}^{m-1}xp_k(x)q_k(y)+xp_m(x)\sum_{k=0}^{m-1}q_k(y)\\
&=\frac{1}{2(\alpha+m+1)}\left(\frac{S_{m-1}}{S_m}\left(p_{m-1}(z)-p_{m-1}(x)\right)-\frac{S_m}{S_{m+1}}\left(p_{m+1}(z)-p_{m+1}(x)\right)\right.\\
&\left.-\left(\alpha+m+1-\frac{S_m}{S_{m+1}}+\frac{S_{m-1}}{S_m}\right)\left(p_m(z)-p_m(x)\right)\right)\left(\frac{S_{m-1}}{S_m}q_{m-1}(y)\right.\\
&\left.-\frac{S_m}{S_{m+1}}q_{m+1}(y)+yq_m(y)-\left(\alpha+m+1+\frac{S_m}{S_{m+1}}-\frac{S_{m-1}}{S_m}\right)q_m(y)\right)\\
&+\frac{S_{m-1}}{S_m}\left(\left(p_m(z)-p_m(x)\right)q_{m-1}(y)+\left(p_{m-1}(z)-p_{m-1}(x)\right)q_m(y)\right)\\
&-y\sum_{k=0}^{m-1}(p_k(z)-p_k(x))q_k(y). \qquad (76)
\end{aligned}
$$

式 *(76)* 的左边可改写为

$$\sum_{k=0}^{m-1} z(p_k(z)-p_k(x))q_k(y) - z(p_m(z)-p_m(x))\sum_{k=0}^{m-1} q_k(y)$$
$$+ (z-x)\sum_{k=0}^{m-1} p_k(x)q_k(y) - (z-x)p_m(x)\sum_{k=0}^{m-1} q_k(y).$$

两边相乘

$$\frac{1}{z-x}x^{\alpha}e^{-x} \tag{77}$$

侧　　对（*76*）两边进行积分，积分变量为 $x\in[0,\infty)$，所得左侧为

$$z\sum_{k=0}^{m-1}\tilde{P}_{k-1}(z)q_k(y) - z\tilde{P}_{m-1}(z)\sum_{k=0}^{m-1} q_k(y)$$
$$+\sum_{k=0}^{m-1}\int_0^{\infty} p_k(x)x^{\alpha}e^{-x}\,\mathrm{d}x q_k(y) - \int_0^{\infty} p_m(x)x^{\alpha}e^{-x}\,\mathrm{d}x\sum_{k=0}^{m-1} q_k(y)$$
$$= z\sum_{k=0}^{m-1}\tilde{P}_{k-1}(z)q_k(y) - z\tilde{P}_{m-1}(z)\sum_{k=0}^{m-1} q_k(y), \tag{78}$$

这里我们利用了（*52*）这一事实，因此最后两个积分相互抵消；并回忆由（*42*）可知

$$\tilde{P}_{k-1}(z) = \int_0^{\infty}\frac{p_k(z)-p_k(x)}{z-x}x^{\alpha}e^{-x}\,\mathrm{d}x. \tag{79}$$

所得右侧为

$$\frac{1}{2(\alpha+m+1)}\left(\frac{S_{m-1}}{S_m}\tilde{P}_{m-2}(z) - \frac{S_m}{S_{m+1}}\tilde{P}_m(z)\right.$$
$$-\left(\alpha+m+1-\frac{S_m}{S_{m+1}}+\frac{S_{m-1}}{S_m}\right)\tilde{P}_{m-1}(z)\Big)\left(\frac{S_{m-1}}{S_m}q_{m-1}(y)\right.$$
$$-\frac{S_m}{S_{m+1}}q_{m+1}(y) + yq_m(y) - \left(\alpha+m+1+\frac{S_m}{S_{m+1}}-\frac{S_{m-1}}{S_m}\right)q_m(y)\Big)$$
$$+\frac{S_{m-1}}{S_m}\left(\tilde{P}_{m-1}(z)q_{m-1}(y)+\tilde{P}_{m-2}(z)q_m(y)\right) - y\sum_{k=0}^{m-1}\tilde{P}_{k-1}(z)q_k(y). \tag{80}$$

~将两边所有的 $P_{k-1}(z)$ 项利用 *(46)* 替换为 $f_1(z)p_k(z)-P_k(z)$ 后，显然左边的 $f_1(z)p_k(z)$ 项与 *(72a)* 右边的对应项相等，而两边剩下的项为

$$z\sum_{k=0}^{m-1}P_k(z)q_k(y) - zP_m(z)\sum_{k=0}^{m-1}q_k(y)$$
$$= \frac{1}{2(\alpha+m+1)}\left(\frac{S_{m-1}}{S_m}P_{m-1}(z) - \frac{S_m}{S_{m+1}}P_{m+1}(z)\right.$$
$$-\left(\alpha+m+1-\frac{S_m}{S_{m+1}}+\frac{S_{m-1}}{S_m}\right)P_m(z)\Big)\left(\frac{S_{m-1}}{S_m}q_{m-1}(y)\right.$$

$$-\frac{S_m}{S_{m+1}}q_{m+1}(y)+yq_m(y)-\left(\alpha+m+1+\frac{S_m}{S_{m+1}}-\frac{S_{m-1}}{S_m}\right)q_m(y)\Bigg)$$
$$+\frac{S_{m-1}}{S_m}\left(P_m(z)q_{m-1}(y)+P_{m-1}(z)q_m(y)\right)-y\sum_{k=0}^{m-1}P_k(z)q_k(y). \tag{81}$$

利用 *(58b)* 改写左边的第二项，并重新整理各项，即可完成 *(72b)* 的证明。

由 *(72a)* 推导 *(72c)* 的证明与由 *(72a)* 推导 *(72b)* 的证明类似。使用 *(58a)*，并采用相同的方法，对 $z$ 副本与 $y$ 副本作差，将 *(70)* 相乘，并对 $y\in[0,\infty)$ 积分，其中各项利用 *(67)* 和 *(68)* 改写，即可完成 *(72c)* 的证明。与由 *(72a)* 推导 *(72b)* 类似，从 *(72c)* 推导 *(72d)* 时，可从 *(72c)* 的左端减去 *(58d)* 的左端，并利用 $P_k(z)$ 和 $f_1(z)$ 改写 $z$ 副本与 $x$ 副本之差，同时牢记恒等式 *(46)* 和事实 *(52)*。至此，证明完成。□

上述关于 Cauchy-Laguerre双正交核的 Christoffel-Darboux公式给出了这些核的无求和表示，其形式涉及 $p_k(x)$、 $q_k(x)$、 $P_k(x)$、 $Q_k(x)$ 中的若干项，这些项的性质已在上文研究并列出。在计算谱矩时，我们将采用这种 Cauchy-Laguerre双正交核的无求和形式，而非求和形式 (16b)、(16c)。这些结果使我们能够将 Cauchy-Laguerre双正交核的导数表示为 $p_k(x)$、 $q_k(x)$、 $P_k(x)$、 $Q_k(x)$ 中若干项的导数；通过 (30)，这些导数可进一步转化为某些 $p_k(x)$、 $q_k(x)$、 $P_k(x)$、 $Q_k(x)$，并通过 (39) 化简为少数几项。

### *2.2.* 核的导数与谱矩的递推关系

**命题 2** *Cauchy-Laguerre*双正交核 $K_{01}(x,x)$,$K_{10}(x,x)$ 的导数满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}xK_{01}(x,x)=\frac{S_{m-1}}{S_m}x^\alpha e^{-x}\left(p_m(x)Q_{m-1}(-x)+p_{m-1}(x)Q_m(-x)\right) \tag{82a}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}xK_{10}(x,x)=\frac{S_{m-1}}{S_m}x^{\alpha+1}e^{-x}\left(P_m(-x)q_{m-1}(x)+P_{m-1}(-x)q_m(x)\right). \tag{82b}$$

此外，单点核还可以表示为仅涉及 $q_k(x)$ 和 $Q_k(-x)$，

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\left(K_{01}(x,x)+K_{10}(x,x)\right)\right)\\ =&-x^\alpha e^{-x}\Big(a_1(q_{m-1}(x)Q_{m-2}(-x)-q_{m-2}(x)Q_{m-1}(-x))\\ &+a_2(q_{m-1}(x)Q_m(-x)-q_m(x)Q_{m-1}(-x))\\ &+a_3(q_{m+1}(x)Q_m(-x)-q_m(x)Q_{m+1}(-x))\\ &-x\left(a_4q_{m-1}(x)Q_{m-1}(-x)+a_5q_m(x)Q_m(-x)\right)\Big),\end{aligned} \tag{83}$$

其中

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{(m-1)m(2\alpha+m)(2\alpha+m+1)}{4(\alpha+m)(2\alpha+2m-1)(2\alpha+2m+1)} \\
a_2 &= \frac{m(2\alpha+m+1)\left(4\alpha^2+4\alpha+3m^2+6\alpha m+3m\right)}{4(\alpha+m)(\alpha+m+1)(2\alpha+2m+1)} \\
a_3 &= \frac{m(m+1)(2\alpha+m+1)(2\alpha+m+2)}{4(\alpha+m+1)(2\alpha+2m+1)(2\alpha+2m+3)} \\
a_4 &= \frac{m(2\alpha+m+1)}{(\alpha+m)(2\alpha+2m+1)} \\
a_5 &= \frac{m(2\alpha+m+1)}{(\alpha+m+1)(2\alpha+2m+1)}.
\end{aligned}
$$

**证明**。记

$$
P_k'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P_k(x). \tag{84}
$$

令 $y \to -x$ 属于 *(72b)*,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m-1} P_k(-x) q_k(x) \\
&= \frac{1}{2(\alpha+m)} \Bigg( - \Bigg( \frac{4\alpha^2+2\alpha+3m^2+6\alpha m+m}{4\alpha+4m+2} + \frac{(m-1)(2\alpha+m)}{4\alpha+4m-2} \\
&\quad + x \Bigg) q_{m-1}(x) + \frac{(m-1)(2\alpha+m) q_{m-2}(x)}{-4\alpha-4m+2} + \frac{m(2\alpha+m+1) q_m(x)}{4\alpha+4m+2} \Bigg) \\
&\quad \times \Bigg( \Bigg( x - \Bigg( \alpha+m+\frac{1}{2} - \frac{m^2}{4\alpha+4m+2} + \frac{(m-1)^2}{4\alpha+4m-2} \Bigg) \Bigg) P_{m-1}'(-x) \\
&\quad + \frac{(m-1)(2\alpha+m) P_{m-2}'(-x)}{-4\alpha-4m+2} + \frac{m(2\alpha+m+1) P_m'(-x)}{4\alpha+4m+2} - P_{m-1}(-x) \Bigg) \\
&\quad + \frac{m(2\alpha+m+1)}{4\alpha+4m+2} \left( q_m(x) P_{m-1}'(-x) \; + q_{m-1}(x) P_m'(-x) \right),
\end{aligned} \tag{85}
$$

并利用 *(30c)*、*(39d)*、*(39b)*，我们推得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m-1} P_k(-x) q_k(x) \\
&= \frac{m(2\alpha+m+1)}{4x} \Bigg( \frac{\left(2\alpha(\alpha+1)+m(2\alpha+m+1)\right) P_{m-1}(-x) q_m(x)}{(\alpha+m)(2\alpha+2m+1)} \\
&\quad - \frac{\left(2\alpha(\alpha+1)+m^2+2\alpha m+m\right) P_m(-x) q_{m-1}(x)}{(\alpha+m+1)(2\alpha+2m+1)} \\
&\quad + \frac{(m-1)(\alpha+m+1)(2\alpha+m) P_{m-1}(-x) q_{m-2}(x)}{(\alpha+m)(2\alpha+2m-1)(2\alpha+2m+1)} \\
&\quad + \frac{(1-m)(2\alpha+m) P_{m-2}(-x) q_{m-1}(x)}{4(\alpha+m)^2-1} \\
&\quad + \frac{2(m-1)(2\alpha+m) P_{m-1}(-x) q_{m-1}(x)}{(\alpha+m)(2\alpha+2m-1)(2\alpha+2m+1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{2(m+1)(2\alpha+m+2)P_m(-x)q_m(x)}{(\alpha+m+1)(2\alpha+2m+1)(2\alpha+2m+3)}\\
&+\frac{(m+1)(2\alpha+m+2)P_{m+1}(-x)q_m(x)}{(2\alpha+2m+1)(2\alpha+2m+3)}\\
&-\frac{(m+1)(\alpha+m)(2\alpha+m+2)P_m(-x)q_{m+1}(x)}{(\alpha+m+1)(2\alpha+2m+1)(2\alpha+2m+3)}\Bigg)\\
&+\frac{m(2\alpha+m+1)P_{m-1}(-x)q_{m-1}(x)}{2(\alpha+m)}+\frac{m(2\alpha+m+1)P_m(-x)q_m(x)}{2(\alpha+m+1)}\\
&-\frac{m(2\alpha+m+1)}{4\alpha+4m+2}\left(P_m(-x)q_{m-1}(x)+P_{m-1}(-x)q_m(x)\right). \qquad (86a)
\end{aligned}
$$

类似地，我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m-1}p_k(x)Q_k(-x)\\
=&-\frac{m(2\alpha+m+1)}{4x}\Bigg(\frac{\left(2\alpha(\alpha+1)+m(2\alpha+m+1)\right)p_{m-1}(x)Q_m(-x)}{(\alpha+m)(2\alpha+2m+1)}\\
&-\frac{\left(2\alpha(\alpha+1)+m^2+2\alpha m+m\right)p_m(x)Q_{m-1}(-x)}{(\alpha+m+1)(2\alpha+2m+1)}\\
&+\frac{(m-1)(\alpha+m+1)(2\alpha+m)p_{m-1}(x)Q_{m-2}(-x)}{(\alpha+m)(2\alpha+2m-1)(2\alpha+2m+1)}\\
&+\frac{(1-m)(2\alpha+m)p_{m-2}(x)Q_{m-1}(-x)}{4(\alpha+m)^2-1}\\
&+\frac{2(m-1)(2\alpha+m)p_{m-1}(x)Q_{m-1}(-x)}{(\alpha+m)(2\alpha+2m-1)(2\alpha+2m+1)}\\
&+\frac{2(m+1)(2\alpha+m+2)p_m(x)Q_m(-x)}{(\alpha+m+1)(2\alpha+2m+1)(2\alpha+2m+3)}\\
&+\frac{(m+1)(2\alpha+m+2)p_{m+1}(x)Q_m(-x)}{(2\alpha+2m+1)(2\alpha+2m+3)}\\
&-\frac{(m+1)(\alpha+m)(2\alpha+m+2)p_m(x)Q_{m+1}(-x)}{(\alpha+m+1)(2\alpha+2m+1)(2\alpha+2m+3)}\Bigg)\\
&+\frac{m(2\alpha+m+1)p_{m-1}(x)Q_{m-1}(-x)}{2(\alpha+m)}+\frac{m(2\alpha+m+1)p_m(x)Q_m(-x)}{2(\alpha+m+1)}\\
&-\frac{m(2\alpha+m+1)}{4\alpha+4m+2}\left(p_m(x)Q_{m-1}(-x)+p_{m-1}(x)Q_m(-x)\right). \qquad (86b)
\end{aligned}
$$

分别对 ***(86b)*** 和 ***(86a)*** 求导，并分别使用 ***(30a)***、***(30d)***、***(39a)*** 以及 ***(30b)***、*(39d)* ***(30c)***、***(39b)***、***(39c)***，即可完成 ***(82a)*** 和 ***(82b)*** 的证明。

为了推导式 ***(83)***，注意到

$$
2\sum_{k=0}^{m-1}q_k(x)=q_{m-1}(x)+p_{m-1}(x), \qquad (87)
$$

并将式 *(58b)* 代入式 *(87)*，我们可以用 $q_k(x)$ 表示 $p_k(x)$，

$$\begin{aligned} p_{m-1}(x) = & \frac{1}{\alpha+m+1} x q_m(x) + \left( \frac{S_{m-1}}{S_m(\alpha+m+1)} - 1 \right) q_{m-1}(x) \\ & + \left( \frac{S_{m-1}}{S_m(\alpha+m+1)} - \frac{S_m}{S_{m+1}(\alpha+m+1)} - 1 \right) q_m(x) \\ & - \frac{S_m}{S_{m+1}(\alpha+m+1)} q_{m+1}(x). \end{aligned} \tag{88a}$$

类似地，$P_k(x)$可以用 $Q_k(x)$表示，

$$\begin{aligned} x P_{m-1}(x) = & \frac{1}{\alpha+m+1} x Q_m(x) + \left( \frac{S_{m-1}}{S_m(\alpha+m+1)} - 1 \right) Q_{m-1}(x) \\ & + \left( \frac{S_{m-1}}{S_m(\alpha+m+1)} - \frac{S_m}{S_{m+1}(\alpha+m+1)} - 1 \right) Q_m(x) \\ & - \frac{S_m}{S_{m+1}(\alpha+m+1)} Q_{m+1}(x). \end{aligned} \tag{88b}$$

将*(88a)*和*(88b)*分别代入*(82a)*和*(82b)*，并利用*(39b)*、*(39d)*，我们完成了*(83)*的证明。□

**定理 1** *Bures-Hall*系综*(7)*的谱矩满足三项递推关系

$$g_1(k)\kappa(R_{k+2}) = g_2(k)\kappa(R_k) + g_3(k)\kappa(R_{k-2}), \tag{89}$$

其中系数 $g_1(k)$、$g_2(k)$、$g_3(k)$ 见附录 *A*。

**证明**。进行分部积分并利用*(83)*，对于 $k \neq 0$，我们有，

$$\begin{aligned} \kappa(R_k) = & \frac{1}{2k} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left( x^k \left( K_{01}(x,x) + K_{10}(x,x) \right) \right) \mathrm{d}x \\ = & \frac{1}{2k} \int_0^\infty x^{k+\alpha} e^{-x} \Big( a_1 (q_{m-1}(x) Q_{m-2}(-x) - q_{m-2}(x) Q_{m-1}(-x)) \\ & + a_2 (q_{m-1}(x) Q_m(-x) - q_m(x) Q_{m-1}(-x)) \\ & + a_3 (q_{m+1}(x) Q_m(-x) - q_m(x) Q_{m+1}(-x)) \\ & - x \left( a_4 q_{m-1}(x) Q_{m-1}(-x) + a_5 q_m(x) Q_m(-x) \right) \Big) \mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{90}$$

其中，$a_1$ 至 $a_5$ 的系数如上式（*84*）所示。另一方面，我们利用上述关于 $q_k$（$x$）和 $Q_k$（$x$）的结果，求出（*90*）中被积函数内某些项的导数。例如，利用（*30b*）、（*30d*）、（*39b*）和（*39d*），可得

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left( x(-x^\alpha e^{-x} q_m(x) Q_m(-x)) \right) \\ = & -x^\alpha e^{-x} \Big( - \frac{2\left(2\alpha^2 + 3\alpha + m^2 + 2(\alpha+1)m + 1\right) q_m(x) Q_m(-x)}{(2\alpha+2m+1)(2\alpha+2m+3)} \\ & + \frac{m(2\alpha+m+1)}{4\alpha+4m+2} (q_m(x) Q_{m-1}(-x) + q_{m-1}(x) Q_m(-x)) \\ & - \frac{(m+1)(2\alpha+m+2)}{4\alpha+4m+6} (q_{m+1}(x) Q_m(-x) + q_m(x) Q_{m+1}(-x)) \Big). \end{aligned} \tag{91}$$

在 $x^{k-1}$ 和 $x$（$-x^{\alpha}e^{-x}q_m$（$x$）$Q_m$（$-x$）之间进行分部积分后，我们可以将该积分表示为

$$\int_0^{\infty} x^k \left(-x^{\alpha}e^{-x}\right) q_m(x)Q_m(-x)\,\mathrm{d}x \tag{92}$$

用 *(91)* 右侧其他被积函数的积分表示。类似地，对 $x^{k-1}$ 与以下 *7* 个表达式分别进行分部积分

- $x(-x^{\alpha}e^{-x}q_{m-1}(x)Q_{m-1}(-x))$
- $x(-x^{\alpha}e^{-x}(q_{m-1}(x)Q_m(-x)-q_m(x)Q_{m-1}(-x)))$
- $x(-x^{\alpha}e^{-x}(q_{m-1}(x)Q_{m-2}(-x)-q_{m-2}(x)Q_{m-1}(-x)))$
- $x(-x^{\alpha}e^{-x}(q_{m+1}(x)Q_m(-x)-q_m(x)Q_{m+1}(-x)))$
- $x(-x^{\alpha}e^{-x}(q_{m-1}(x)Q_m(-x)+q_m(x)Q_{m-1}(-x)))$
- $x(-x^{\alpha}e^{-x}(q_{m-1}(x)Q_{m-2}(-x)+q_{m-2}(x)Q_{m-1}(-x)))$
- $x(-x^{\alpha}e^{-x}(q_{m+1}(x)Q_m(-x)+q_m(x)Q_{m+1}(-x)))$,

我们分别用各自导数右侧的其余项表示上面列出的每一项的积分，并反复进行这一过程，用右侧剩余的一项表示 *(90)* 右侧出现的每一项的积分，从而推导出：当 $R_k$ 积分存在时，

$$\begin{aligned}&\kappa(R_k)\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^k\left(-x^{\alpha}e^{-x}\right)\left(\frac{b_1(k)}{x}+b_2(k)x\right)\left(q_{m+1}(x)Q_m(-x)+q_m(x)Q_{m+1}(-x)\right)\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{93}$$

其中，系数 $b_1(k)$、$b_2(k)$ 见附录 *A*。此外，我们推导出被积函数$q_{m+1}(x)Q_m(-x)+q_m(x)Q_{m+1}(-x)$ 满足三项积分恒等式

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty} x^k\left(-x^{\alpha}e^{-x}\right)\frac{1}{x}\left(q_{m+1}(x)Q_m(-x)+q_m(x)Q_{m+1}(-x)\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\infty} x^k\left(-x^{\alpha}e^{-x}\right)\left(c_1(k)x+c_2(k)x^3\right)\left(q_{m+1}(x)Q_m(-x)+q_m(x)Q_{m+1}(-x)\right)\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{94}$$

其中，系数 $c_1(k)$、$c_2(k)$见附录 *A*。根据积分恒等式 *(94)*，求解由 $\kappa(R_{k+2})$、$\kappa(R_k)$、$\kappa(R_{k-2})$ 给出的 *(93)* 中系数的方程，得到 *(89)*。□

### 3. 对纠缠熵的应用

实数阶 $k$ 谱矩的递推关系，是递归地求得纠缠熵任意阶累积量的一套系统方法中的关键构件。下面，我们推导线性统计量 $T_k$ 均值的递推关系，如式（15）所示，现重述如下：

$$T_k=\sum_{i=1}^{m} x_i^k \ln x_i \tag{95}$$

利用式（89），针对无约束 Bures-Hall 系综（7）推导该递推关系，并应用这些递推关系，重现 Bures-Hall系综（5） [20,30,32]中冯·诺依曼熵和量子纯度均值的结果。

双体系统的冯·诺依曼熵定义为

$$S = -\operatorname{tr}(\rho_A \ln \rho_A) = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \ln \lambda_i \tag{96}$$

取值范围为 $S \in [0, \ln m]$，当 $S = \ln\ m$ 时达到最大纠缠态

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = \frac{1}{m}, \tag{97}$$

当 $S = 0$ 时退化为可分态

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0. \tag{98}$$

特别地，无约束 Bures-Hall 系综 (7) 上的冯·诺依曼熵是线性统计量

$$T_1 = \sum_{i=1}^{m} x_i \ln x_i \tag{99}$$

在无约束系综上 受约束的Bures-Hall系综 (7)。与 [30,31,33], 中一样，我们有关系式 n

$$\kappa(S) = \psi_0\left(\alpha m + \frac{1}{2}m(m+1) + 1\right) - \frac{2}{m(2\alpha + m + 1)}\kappa(T_1). \tag{100}$$

**命题 3** 我们有关于 $T_k$ 的递推关系：

$$\begin{aligned} &g_1(k)\kappa(T_{k+2}) \\ &= g_2(k)\kappa(T_k) + g_3(k)\kappa(T_{k-2}) - g_1'(k)\kappa(R_{k+2}) + g_2'(k)\kappa(R_k) + g_3'(k)\kappa(R_{k-2}), \end{aligned} \tag{101}$$

其中，系数 $g_1(k)$、 $g_2(k)$、 $g_3(k)$ 如上所述，并见附录 *A*，且

$$g_i'(k) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k} g_i(k) \tag{102}$$

当 $i = 1$、2、3 时。因此，*Bures-Hall*系综 *(5)* 的冯·诺依曼熵均值为

$$\kappa(S) = \psi_0\left(mn - \frac{m^2}{2} + 1\right) - \psi_0\left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{103}$$

**证明**。 对式 *(89)* 关于 $k$ 求导即可得到结果 *(101)*。现在我们来计算初始条件。首先，根据定义有

$$\kappa(R_0) = \kappa\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^0\right) = m. \tag{104}$$

此外，我们还可以 使用 *(82a)*、*(82b)* 计算某些 $\kappa(R_k)$，并将 $k \neq 0$ 作为初始条件 $s$

$$\begin{aligned} \kappa(R_k) = &-\frac{1}{2k}\int_0^\infty \frac{S_{m-1}}{S_m} x^{k+\alpha} e^{-x} (p_m(x)Q_{m-1}(-x) + p_{m-1}(x)Q_m(-x) \\ &+ x\left(P_m(-x)q_{m-1}(x) + P_{m-1}(-x)q_m(x)\right))\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{105}$$

将 *(21)*、*(20)* 代入被积函数中的各项，其中 $P_k(-x)$ 和 $Q_k(-x)$ 中的 ***Meijer-G***函数的积分可利用梅林变换计算，如 *[30, 31, 33],* 所示，我们得到

$$\kappa(R_{-1}) = \frac{m(2\alpha+m+1)}{2\alpha(\alpha+1)} \tag{106a}$$

$$\kappa(R_{-2}) = \frac{m(2\alpha+m+1)\left(4\alpha^2+4\alpha+6\alpha m+3m^2+3m-2\right)}{4(\alpha-1)\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(2\alpha+1)} \tag{106b}$$

$$\kappa(R_{-3}) = \frac{m(\alpha+m-1)(\alpha+m)(\alpha+m+1)(\alpha+m+2)(2\alpha+m+1)}{2(\alpha-2)(\alpha-1)\alpha^2(\alpha+1)^2(\alpha+2)(\alpha+3)}. \tag{106c}$$

现在将 *(89)* 用于 $k=-1$，并代入 ***(106a)***、***(106c)***，得到

$$\kappa(R_1) = \frac{1}{2}m(2\alpha+m+1). \tag{107}$$

初始条件 $\kappa\left(T_0\right)$ 最近已通过受约束的***Bures-Hall***系综以 *[58]* 为参数的形式得到；类似地，对于无约束 ***Bures-Hall*** 系综，我们有

$$\begin{aligned}\kappa(T_0) = & -\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\psi_0(\alpha+1)-(2\alpha+1)\psi_0(2\alpha+1)+\left(\alpha+m+\frac{1}{2}\right)\\ & \times\psi_0(\alpha+m+1)+2(2\alpha+m+1)\psi_0(2\alpha+m+1)\\ & -(2\alpha+2m+1)\psi_0(2\alpha+2m+1)-m.\end{aligned} \tag{108}$$

在计算 $\kappa\left(R_k\right)$ 时，我们可以对 $k$ 求导数，并在某个 $k$ 处求值，由此得到初始条件

$$\begin{aligned}\kappa(T_{-1}) = & \left(1+\frac{3m(2\alpha+m+1)}{2\alpha(\alpha+1)}\right)\psi_0(\alpha+1)-\frac{(\alpha+m)(\alpha+m+1)}{\alpha(\alpha+1)}\\ & \times\psi_0(\alpha+m+1)+\frac{\left(\alpha^2+\alpha-1\right)m(2\alpha+m+1)}{2\alpha^2(\alpha+1)^2}\end{aligned} \tag{109a}$$

$$\begin{aligned}\kappa(T_{-2}) = & \frac{m(2\alpha+m+1)\left(4\alpha(\alpha+1)+3m(2\alpha+m+1)-2\right)}{4(\alpha-1)\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(2\alpha+1)}\\ & \times\left(\psi_0(\alpha+1)+2\psi_0(2\alpha+1)-2\psi_0(2\alpha+m+1)\right)+N_{-2}\end{aligned} \tag{109b}$$

$$\begin{aligned}\kappa(T_{-3}) = & \frac{m(\alpha+m-1)(\alpha+m)(\alpha+m+1)(\alpha+m+2)(2\alpha+m+1)}{2(\alpha-2)(\alpha-1)\alpha^2(\alpha+1)^2(\alpha+2)(\alpha+3)}\\ & \times\left(3\psi_0(\alpha+1)-2\psi_0(\alpha+m+1)\right)+N_{-3},\end{aligned} \tag{109c}$$

其中

$$\begin{aligned}N_{-2} = & -\frac{1}{8(\alpha-1)^2\alpha^2(\alpha+1)^2(\alpha+2)^2(2\alpha+1)^2}\\ & \times\left(18\alpha^5m^4+39\alpha^4m^4+36\alpha^3m^4+33\alpha^2m^4-6\alpha m^4-12m^4\right.\\ & +48\alpha^6m^3+132\alpha^5m^3+222\alpha^4m^3+264\alpha^3m^3+66\alpha^2m^3-60\alpha m^3\\ & -24m^3+32\alpha^7m^2+104\alpha^6m^2+290\alpha^5m^2+501\alpha^4m^2+320\alpha^3m^2\\ & -5\alpha^2m^2-50\alpha m^2-4m^2+88\alpha^6m+264\alpha^5m+238\alpha^4m\\ & \left.+36\alpha^3m-6\alpha^2m+20\alpha m+8m\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
N_{-3} = & -\frac{m(2\alpha+m+1)}{24(\alpha-2)^2(\alpha-1)^2\alpha^3(\alpha+1)^3(\alpha+2)^2(\alpha+3)^2} \\
& \times (88\alpha^8+352\alpha^7+40\alpha^6-1112\alpha^5-608\alpha^4+1048\alpha^3+480\alpha^2 \\
& -288\alpha+5\alpha^6m^4+15\alpha^5m^4+89\alpha^4m^4+153\alpha^3m^4-346\alpha^2m^4 \\
& -420\alpha m^4+216m^4+20\alpha^7m^3+70\alpha^6m^3+386\alpha^5m^3+790\alpha^4m^3 \\
& -1078\alpha^3m^3-2372\alpha^2m^3+24\alpha m^3+432m^3+26\alpha^8m^2+104\alpha^7m^2 \\
& +603\alpha^6m^2+1445\alpha^5m^2-1083\alpha^4m^2-4453\alpha^3m^2-1022\alpha^2m^2 \\
& +1428\alpha m^2-216m^2+12\alpha^9m+54\alpha^8m+388\alpha^7m+1106\alpha^6m \\
& -338\alpha^5m-3484\alpha^4m-1262\alpha^3m+2108\alpha^2m+120\alpha m-432m).
\end{aligned}
$$

令 $k=-1$ ***in (101)***，我们有

$$
\begin{aligned}
g_1(-1)\kappa(T_1) = & \, g_2(-1)\kappa(T_{-1})+g_3(-1)\kappa(T_{-3})-g_1'(-1)\kappa(R_1)+g_2'(-1)\kappa(R_{-1}) \\
& +g_3'(-1)\kappa(R_{-3}), \qquad (110)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
g_1(-1) &= 96(\alpha+m-1)(\alpha+m)(\alpha+m+1)(\alpha+m+2) \\
g_2(-1) &= -144m(\alpha+m-1)(\alpha+m)(\alpha+m+1)(\alpha+m+2)(2\alpha+m+1) \\
g_3(-1) &= 48(\alpha-2)(\alpha-1)\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\left(2\alpha(\alpha+1)+3m(2\alpha+m+1)\right) \\
g_1'(-1) &= 8(2(\alpha(\alpha+1)(5\alpha(\alpha+1)+3)-6)+9m^4+18(2\alpha+1)m^3 \\
&\quad +5(11\alpha(\alpha+1)+3)m^2+(2\alpha+1)(19\alpha(\alpha+1)+6)m) \\
g_2'(-1) &= 4(-8\alpha^2(\alpha+1)^2\left(\alpha^2+\alpha-2\right)+27m^6+81(2\alpha+1)m^5 \\
&\quad +(366\alpha(\alpha+1)-45)m^4+3(2\alpha+1)(64\alpha(\alpha+1)-75)m^3 \\
&\quad +6(\alpha(\alpha+1)(29\alpha(\alpha+1)-94)-15)m^2 \\
&\quad +6(2\alpha+1)\left(\alpha(\alpha+1)\left(\alpha^2+\alpha-17\right)+6\right)m) \\
g_3'(-1) &= 8(2\alpha(\alpha+1)(\alpha(\alpha+1)(\alpha(\alpha+1)(7\alpha(\alpha+1)+1)-156)+108) \\
&\quad +3(\alpha(\alpha+1)(\alpha(\alpha+1)(4\alpha(\alpha+1)+19)-144)+36)m^2 \\
&\quad +3(2\alpha+1)(\alpha(\alpha+1)(\alpha(\alpha+1)(4\alpha(\alpha+1)+19)-144)+36)m).
\end{aligned}
$$

将 ***(109a)***、***(109c)***、***(107)***、***(106a)***、***(106c)*** 代入 ***(110)***，我们推得

$$
\kappa(T_1) = \frac{1}{2}m(2\alpha+m+1)\psi_0(\alpha+m+1). \qquad (111)
$$

按照 *[30, 31, 33]*，执行变换 ***(100)***，我们得到

$$
\kappa(S) = \psi_0\left(\alpha m+\frac{1}{2}m(m+1)+1\right)-\psi_0(\alpha+m+1). \qquad (112)
$$

按 ***(4)*** 计算 ***(112)*** 中的 $\alpha$，即得 ***(103)***。 □

这重现了 [20] 中关于冯·诺依曼熵均值的猜想结果，该结果最早通过 [30] 中的求和方法得到证明。

谱矩递推关系的另一项应用是量子纯度，该结果此前已在 [20,30,32] 中得到。量子纯度定义为

$$\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2, \tag{113}$$

其支撑于 $\mathrm{P} \in [1/m, 1]$，并且当 $\mathrm{P} = 1/m$ 和 $\mathrm{P} = 1$时，分别达到最大纠缠态和可分态。特别地，纯度是如下线性统计量

$$R_2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2, \tag{114}$$

在无约束 Bures-Hall 系综 (7) 上。与 [30,32], 中一样，我们有如下关系

$$\kappa(\mathrm{P}) = \frac{\Gamma(d)}{\Gamma(d+2)} \kappa(R_2), \tag{115}$$

其中 $d$ 在 (9) 中。

**命题 4** 我们有

$$g_1(0)\kappa(R_2) = g_2(0)\kappa(R_0) + g_3(0)\kappa(R_{-2}), \tag{116}$$

其中

$$g_1(0) = 6(2\alpha + 2m + 1)^2 \left(4\alpha(\alpha+1) + 3m(2\alpha + m + 1) - 2\right)$$

$$g_2(0) = 3m(2\alpha + m + 1)\left(4\alpha(\alpha+1) + 5m(2\alpha + m + 1) + 2\right) \times \left(4\alpha(\alpha+1) + 3m(2\alpha + m + 1) - 2\right)$$

$$g_3(0) = 6(\alpha - 1)\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(2\alpha+1)^2\left(4\alpha(\alpha+1) + 5m(2\alpha + m + 1) + 2\right).$$

*As* 因此，*Bures-Hall*系综 *(5)* 的量子纯度均值为 $i$ $s$

$$\kappa(\mathrm{P}) = \frac{m^2 - 2mn - 4n^2 - 1}{2n\left(m^2 - 2mn - 2\right)}. \tag{117}$$

**证明**。令 $k = 0$ 属于 *(89)*，我们有 *(116)*。将 *(104)*、*(106b)* 代入 *(116)*，可得

$$\kappa(R_2) = \frac{m(2\alpha + m + 1)\left(4\alpha^2 + 4\alpha + 10\alpha m + 5m^2 + 5m + 2\right)}{4(2\alpha + 2m + 1)}. \tag{118}$$

按照 *[30, 32],* 进行转换 *(115)*，我们得到

$$\kappa(\mathrm{P}) = \frac{4\alpha^2 + 4\alpha + 10\alpha m + 5m^2 + 5m + 2}{(2\alpha + 2m + 1)\left(m^2 + 2\alpha m + m + 2\right)}. \tag{119}$$

将 *(119)* 中的 $\alpha$ 按照 *(4)* 计算，我们得到 *(117)*。 □

这复现了 Bures-Hall系综的量子纯度均值公式 [20, 30, 32] 。

**致谢**

Lu Wei 的工作得到了美国国家科学基金会（2306968）和美国能源部（DE-SC0024631）的支持。

## 附录 A. 某些表达式的系数

$$
\begin{aligned}
&g_1(k)\\
&= (k+2)(k+3)(-2\alpha+k-2m-1)(2\alpha+k+2m+1)\\
&\quad\times(-2k^3+10k^2+k(8\alpha^2+8\alpha+9m^2+18\alpha m+9m-10)\\
&\quad-4\alpha^2-4\alpha-3m^2-6\alpha m-3m+2)
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

$$
\begin{aligned}
&g_2(k)= -4k^9+4k^8+2k^7(14\alpha^2+14\alpha+9m^2+18\alpha m+9m+18)+2k^6(\\
&22\alpha^2+22\alpha+39m^2+78\alpha m+39m+6)+2k^5(\\
&-16\alpha^4-32\alpha^3-60\alpha^2-44\alpha+27m^4+108\alpha m^3\\
&+54m^3+117\alpha^2m^2+117\alpha m^2+21m^2+18\alpha^3m+27\alpha^2m-3\alpha m-6m-30)-2k^4(\\
&108\alpha^4+216\alpha^3+176\alpha^2+68\alpha+135m^4+540\alpha m^3+270m^3+789\alpha^2m^2\\
&+789\alpha m^2+249m^2+498\alpha^3m+747\alpha^2m+477\alpha m+114m+18)-k^3(\\
&64\alpha^6+192\alpha^5+408\alpha^4+496\alpha^3+172\alpha^2-44\alpha+243m^6+1458\alpha m^5+729m^5\\
&+3456\alpha^2m^4+3456\alpha m^4+1275m^4+4104\alpha^3m^3+6156\alpha^2m^3+4722\alpha m^3+1335m^3\\
&+2520\alpha^4m^2+5040\alpha^3m^2+6006\alpha^2m^2+3486\alpha m^2+564m^2+720\alpha^5m+1800\alpha^4m\\
&+2964\alpha^3m+2646\alpha^2m+798\alpha m+18m-28)-k^2(96\alpha^6+288\alpha^5+264\alpha^4+48\alpha^3\\
&-116\alpha^2-92\alpha+405m^6+2430\alpha m^5+1215m^5+5724\alpha^2m^4+5724\alpha m^4+1077m^4\\
&+6696\alpha^3m^3+10044\alpha^2m^3+3606\alpha m^3+129m^3+4008\alpha^4m^2+8016\alpha^3m^2\\
&+4158\alpha^2m^2+150\alpha m^2-300m^2+1104\alpha^5m+2760\alpha^4m+1884\alpha^3m+66\alpha^2m\\
&-486\alpha m-162m-20)+k(-32\alpha^6-96\alpha^5-40\alpha^4+80\alpha^3+72\alpha^2+16\alpha+27m^6\\
&+162\alpha m^5+81m^5+384\alpha^2m^4+384\alpha m^4+141m^4+456\alpha^3m^3+684\alpha^2m^3+522\alpha m^3\\
&+147m^3+240\alpha^4m^2+480\alpha^3m^2+660\alpha^2m^2+420\alpha m^2+72m^2+240\alpha^3m+360\alpha^2m\\
&+144\alpha m+12m)+3m(32\alpha^5+80\alpha^4+64\alpha^3+16\alpha^2-8\alpha+15m^5+90\alpha m^4+45m^4\\
&+212\alpha^2m^3+212\alpha m^3+41m^3+248\alpha^3m^2+372\alpha^2m^2+138\alpha m^2+7m^2+144\alpha^4m\\
&+288\alpha^3m+160\alpha^2m+16\alpha m-8m-4)
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

$$
\begin{aligned}
&g_3(k)\\
&= (k-2)(k-1)(-2\alpha+k-1)(-\alpha+k-2)(-\alpha+k-1)(\alpha+k-1)(\alpha+k)\\
&\quad\times(2\alpha+k+1)(2k^3+2k^2-k(8\alpha^2+8\alpha+9m^2+18\alpha m+9m+6)\\
&\quad-3(4\alpha^2+4\alpha+5m^2+10\alpha m+5m+2))
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&b_1(k)\\
&= -\frac{1}{D_{b_1(k)}}(k-1)(-2\alpha+k-1)(-\alpha+k-1)(\alpha+k)(2\alpha+k+1)\\
&\quad\times(2k^3\left(2\alpha^2+5\alpha+2m^2+4\alpha m+5m+3\right)\\
&\quad+k^2\left(4\alpha^3+22\alpha^2+38\alpha+4m^3+12\alpha m^2+23m^2+12\alpha^2m+46\alpha m+39m+20\right)
\end{aligned}
$$

$$+k(8\alpha^3+30\alpha^2+40\alpha+2m^4+8\alpha m^3+14m^3+10\alpha^2m^2+40\alpha m^2+37m^2+4\alpha^3m$$
$$+34\alpha^2m+70\alpha m+43m+18)+(m+1)^2(2\alpha+m+2)^2), \tag{A.4}$$

其中

$$D_{b_1(k)}=2(\alpha+m+1)(\alpha+m+2)(2k^5(2\alpha+2m+3)^2+4k^4(m+1)$$
$$(2\alpha+m+2)-k^3($$
$$32\alpha^4+200\alpha^3+472\alpha^2+478\alpha+36m^4+144\alpha m^3+216m^3+212\alpha^2m^2$$
$$+644\alpha m^2+483m^2+136\alpha^3m+628\alpha^2m+954\alpha m+477m+178)-k^2(m+1)$$
$$(32\alpha^3+136\alpha^2+186\alpha+18m^3+72\alpha m^2+90m^2+88\alpha^2m+232\alpha m+149m+82)$$
$$+k(32\alpha^4+128\alpha^3+192\alpha^2+126\alpha+4m^4+16\alpha m^3+24m^3+48\alpha^2m^2$$
$$+96\alpha m^2+59m^2+64\alpha^3m+192\alpha^2m+190\alpha m+69m+32)+(m+1)\times($$
$$8\alpha^3+24\alpha^2+26\alpha+2m^3+8\alpha m^2+10m^2+12\alpha^2m+28\alpha m+17m+10)$$

$$b_2(k)$$
$$=-\frac{1}{D_{b_2(k)}}(k+2)(2\alpha+k+2m+3)(2k^4(2\alpha^2+5\alpha+2m^2+4\alpha m+5m+3)$$
$$-k^3(12\alpha^3+50\alpha^2+66\alpha+12m^3+36\alpha m^2+49m^2+36\alpha^2m+98\alpha m+65m+28)$$
$$+k^2(8\alpha^4+68\alpha^3+162\alpha^2+150\alpha+18m^4+72\alpha m^3+98m^3+98\alpha^2m^2+284\alpha m^2$$
$$+191m^2+52\alpha^3m+254\alpha^2m+362\alpha m+159m+48)-k(24\alpha^4+116\alpha^3+198\alpha^2$$
$$+142\alpha+12m^5+60\alpha m^4+84m^4+108\alpha^2m^3+324\alpha m^3+224m^3+84\alpha^3m^2$$
$$+424\alpha^2m^2+628\alpha m^2+283m^2+24\alpha^4m+212\alpha^3m+528\alpha^2m+510\alpha m$$
$$+167m+36)+16\alpha^4+60\alpha^3+82\alpha^2+48\alpha+4m^5+20\alpha m^4+26m^4+44\alpha^2m^3$$
$$+108\alpha m^3+66m^3+52\alpha^3m^2+182\alpha^2m^2+212\alpha m^2+81m^2+24\alpha^4m+128\alpha^3m$$
$$+230\alpha^2m+174\alpha m+47m+10), \tag{A.5}$$

其中

$$D_{b_2(k)}=2(\alpha+m+1)(\alpha+m+2)(-2k^5(2\alpha+2m+3)^2-4k^4(m+1)(2\alpha+m+2)$$
$$+k^3(32\alpha^4+200\alpha^3+472\alpha^2+478\alpha+36m^4+144\alpha m^3+216m^3+212\alpha^2m^2$$
$$+644\alpha m^2+483m^2+136\alpha^3m+628\alpha^2m+954\alpha m+477m+178)+k^2(m+1)\times($$
$$32\alpha^3+136\alpha^2+186\alpha+18m^3+72\alpha m^2+90m^2+88\alpha^2m+232\alpha m+149m+82)-k($$
$$32\alpha^4+128\alpha^3+192\alpha^2+126\alpha+4m^4+16\alpha m^3+24m^3+48\alpha^2m^2+96\alpha m^2$$
$$+59m^2+64\alpha^3m+192\alpha^2m+190\alpha m+69m+32)-(m+1)(8\alpha^3+24\alpha^2+26\alpha$$
$$+2m^3+8\alpha m^2+10m^2+12\alpha^2m+28\alpha m+17m+10))$$

$$c_1(k)$$

$$= \frac{D_{c_1}(k)}{1}(4k^{11}(2\alpha+2m+3)^2+8k^{10}(24\alpha^2+74\alpha+25m^2+50\alpha m+75m+56)$$
$$-2k^9(56\alpha^4+296\alpha^3+134\alpha^2-948\alpha+36m^4+144\alpha m^3+216m^3+236\alpha^2m^2$$
$$+668\alpha m^2-25m^2+184\alpha^3m+748\alpha^2m+10\alpha m-1047m-954)-2k^8($$
$$560\alpha^4+3016\alpha^3+5044\alpha^2+1778\alpha+378m^4+1512\alpha m^3+2268m^3$$
$$+2460\alpha^2m^2+6996\alpha m^2+3753m^2+1896\alpha^3m+7764\alpha^2m+8082\alpha m+1053m$$
$$-1050)-2k^7(-64\alpha^6-248\alpha^5+2408\alpha^4+14830\alpha^3+29456\alpha^2+22870\alpha+108m^6$$
$$+648\alpha m^5+972m^5+1440\alpha^2m^4+4680\alpha m^4+5289m^4+1440\alpha^3m^3+7920\alpha^2m^3$$
$$+20076\alpha m^3+17154m^3+548\alpha^4m^2+5416\alpha^3m^2+26755\alpha^2m^2+49715\alpha m^2$$
$$+28497m^2-56\alpha^5m+956\alpha^4m+14486\alpha^3m+47611\alpha^2m+56613\alpha m+21420m$$
$$+5496)-2k^6(-512\alpha^6-2048\alpha^5+5704\alpha^4+45874\alpha^3+96580\alpha^2+84892\alpha$$
$$+918m^6+5508\alpha m^5+8262m^5+12186\alpha^2m^4+39726\alpha m^4+34800m^4$$
$$+12024\alpha^3m^3+66780\alpha^2m^3+129696\alpha m^3+84870m^3+4424\alpha^4m^2+44920\alpha^3m^2$$
$$+160015\alpha^2m^2+234179\alpha m^2+119955m^2-512\alpha^5m+7568\alpha^4m+71090\alpha^3m$$
$$+195697\alpha^2m+221385\alpha m+89487m+27234)+k^5(256\alpha^8+4416\alpha^7+32256\alpha^6$$
$$+115312\alpha^5+198000\alpha^4+90880\alpha^3-185336\alpha^2-267104\alpha+972m^8+7776\alpha m^7$$
$$+11664m^7+26460\alpha^2m^6+80892\alpha m^6+54177m^6+49896\alpha^3m^5+233604\alpha^2m^5$$
$$+318258\alpha m^5+120177m^5+56736\alpha^4m^4+362952\alpha^3m^4+764688\alpha^2m^4$$
$$+586902\alpha m^4+96579m^4+39456\alpha^5m^3+325584\alpha^4m^3+960144\alpha^3m^3$$
$$+1164216\alpha^2m^3+404478\alpha m^3-120933m^3+16096\alpha^6m^2+166656\alpha^5m^2$$
$$+660552\alpha^4m^2+1169632\alpha^3m^2+731072\alpha^2m^2-263998\alpha m^2-355132m^2$$
$$+3392\alpha^7m+44064\alpha^6m+233232\alpha^5m+587336\alpha^4m+622960\alpha^3m-48416\alpha^2m$$
$$-587444\alpha m-315984m-102840)+k^4(1536\alpha^8+26752\alpha^7+183104\alpha^6+654656\alpha^5$$
$$+1328576\alpha^4+1512896\alpha^3+856760\alpha^2+134196\alpha+6318m^8+50544\alpha m^7$$
$$+75816m^7+171504\alpha^2m^6+525312\alpha m^6+381783m^6+321408\alpha^3m^5$$
$$+1511136\alpha^2m^5+2242098\alpha m^5+1047843m^5+361872\alpha^4m^4+2330784\alpha^3m^4$$
$$+5324988\alpha^2m^4+5079846\alpha m^4+1686189m^4+248256\alpha^5m^3+2068128\alpha^4m^3$$
$$+6521976\alpha^3m^3+9617412\alpha^2m^3+6517542\alpha m^3+1564101m^3+99584\alpha^6m^2$$
$$+1043520\alpha^5m^2+4311472\alpha^4m^2+8854024\alpha^3m^2+9340320\alpha^2m^2+4595918\alpha m^2$$
$$+724636m^2+20608\alpha^7m+271296\alpha^6m+1437248\alpha^5m+3923168\alpha^4m$$
$$+5847024\alpha^3m+4563856\alpha^2m+1526480\alpha m+69690m-41956)+2k^3($$
$$1280\alpha^8+23008\alpha^7+161152\alpha^6+597576\alpha^5+1289880\alpha^4+1650074\alpha^3$$
$$+1206664\alpha^2+449834\alpha+6696m^8+53568\alpha m^7+80352m^7+180474\alpha^2m^6$$
$$+555450\alpha m^6+410967m^6+332892\alpha^3m^5+1582182\alpha^2m^5+2402676\alpha m^5$$
$$+1167615m^5+365112\alpha^4m^4+2394684\alpha^3m^4+5627514\alpha^2m^4+5615112\alpha m^4$$
$$+2008008m^4+241104\alpha^5m^3+2063208\alpha^4m^3+6721860\alpha^3m^3+10403022\alpha^2m^3$$

$$
\begin{aligned}
&+ 7641144\alpha m^3 + 2127087m^3 + 91888\alpha^6 m^2 + 998976\alpha^5 m^2 + 4278260\alpha^4 m^2 \\
&+ 9225572\alpha^3 m^2 + 10546601\alpha^2 m^2 + 6036963\alpha m^2 + 1341995m^2 + 17888\alpha^7 m \\
&+ 246384\alpha^6 m + 1353400\alpha^5 m + 3867724\alpha^4 m + 6208378\alpha^3 m + 5569857\alpha^2 m \\
&+ 2557891\alpha m + 454128m + 61758) + 2k^2(2272\alpha^7 + 33888\alpha^6 + 191328\alpha^5 \\
&+ 540776\alpha^4 + 841030\alpha^3 + 727732\alpha^2 + 326608\alpha + 4374m^8 + 34992\alpha m^7 + 52488m^7 \\
&+ 114858\alpha^2 m^6 + 359802\alpha m^6 + 269415m^6 + 199260\alpha^3 m^5 + 988038\alpha^2 m^5 \\
&+ 1547964\alpha m^5 + 771363m^5 + 195216\alpha^4 m^4 + 1386732\alpha^3 m^4 + 3454704\alpha^2 m^4 \\
&+ 3609678\alpha m^4 + 1345731m^4 + 105648\alpha^5 m^3 + 1044984\alpha^4 m^3 + 3766428\alpha^3 m^3 \\
&+ 6289626\alpha^2 m^3 + 4927992\alpha m^3 + 1464057m^3 + 27728\alpha^6 m^2 + 400128\alpha^5 m^2 \\
&+ 2047536\alpha^4 m^2 + 5000612\alpha^3 m^2 + 6303013\alpha^2 m^2 + 3947503\alpha m^2 + 971301m^2 \\
&+ 2272\alpha^7 m + 63408\alpha^6 m + 491184\alpha^5 m + 1740784\alpha^4 m + 3258206\alpha^3 m \\
&+ 3317555\alpha^2 m + 1730691\alpha m + 361755m + 59106) - k(2816\alpha^8 + 40640\alpha^7 \\
&+ 224896\alpha^6 + 644720\alpha^5 + 1065568\alpha^4 + 1048520\alpha^3 + 600572\alpha^2 + 180960\alpha \\
&+ 1500m^8 + 12000\alpha m^7 + 18000m^7 + 48048\alpha^2 m^6 + 132048\alpha m^6 + 93687m^6 \\
&+ 120288\alpha^3 m^5 + 468720\alpha^2 m^5 + 616554\alpha m^5 + 276183m^5 + 190992\alpha^4 m^4 \\
&+ 983424\alpha^3 m^4 + 1869924\alpha^2 m^4 + 1578102\alpha m^4 + 502521m^4 + 186048\alpha^5 m^3 \\
&+ 1229088\alpha^4 m^3 + 3131160\alpha^3 m^3 + 3888852\alpha^2 m^3 + 2376726\alpha m^3 + 573381m^3 \\
&+ 104352\alpha^6 m^2 + 871200\alpha^5 m^2 + 2875272\alpha^4 m^2 + 4841976\alpha^3 m^2 + 4422324\alpha^2 m^2 \\
&+ 2086314\alpha m^2 + 394938m^2 + 29376\alpha^7 m + 311520\alpha^6 m + 1316112\alpha^5 m \\
&+ 2899848\alpha^4 m + 3626472\alpha^3 m + 2586900\alpha^2 m + 973332\alpha m + 146070m + 20844) \\
&- 3(512\alpha^8 + 6016\alpha^7 + 29952\alpha^6 + 82816\alpha^5 + 139488\alpha^4 + 146824\alpha^3 + 94288\alpha^2 \\
&+ 33624\alpha + 350m^8 + 2800\alpha m^7 + 4200m^7 + 10060\alpha^2 m^6 + 29660\alpha m^6 \\
&+ 21715m^6 + 21160\alpha^3 m^5 + 92100\alpha^2 m^5 + 132630\alpha m^5 + 63135m^5 + 28304\alpha^4 m^4 \\
&+ 162408\alpha^3 m^4 + 345752\alpha^2 m^4 + 324098\alpha m^4 + 112693m^4 + 24416\alpha^5 m^3 \\
&+ 174256\alpha^4 m^3 + 489856\alpha^3 m^3 + 679904\alpha^2 m^3 + 466210\alpha m^3 + 126033m^3 \\
&+ 13120\alpha^6 m^2 + 112608\alpha^5 m^2 + 394400\alpha^4 m^2 + 724032\alpha^3 m^2 + 736348\alpha^2 m^2 \\
&+ 393194\alpha m^2 + 85778m^2 + 3968\alpha^7 m + 40128\alpha^6 m + 169344\alpha^5 m + 387968\alpha^4 m \\
&+ 522696\alpha^3 m + 414628\alpha^2 m + 178960\alpha m + 32208m + 5040)), \quad \text{(A.6}
\end{aligned}
$$

)

其中

$$
\begin{aligned}
&D_{c_1(k)} \\
&= (k-1)k(-2\alpha + k - 1)(-\alpha + k - 1)(k - \alpha)(\alpha + k)(\alpha + k + 1)(2\alpha + k + 1) \\
&\quad \times (2k^5(2\alpha + 2m + 3)^2 + 4k^4(20\alpha^2 + 62\alpha + 21m^2 + 42\alpha m + 63m + 47) \\
&\quad - k^3(32\alpha^4 + 200\alpha^3 + 152\alpha^2 - 546\alpha + 36m^4 + 144\alpha m^3 + 216m^3 \\
&\quad + 212\alpha^2 m^2 + 644\alpha m^2 + 131m^2 + 136\alpha^3 m + 628\alpha^2 m + 250\alpha m - 579m - 606) \\
&\quad - k^2(192\alpha^4 + 1232\alpha^3 + 2328\alpha^2 + 942\alpha + 234m^4 + 936\alpha m^3 + 1404m^3
\end{aligned}
$$

$$+ 1360\alpha^2m^2 + 4168\alpha m^2 + 2401m^2 + 848\alpha^3m + 3992\alpha^2m + 4670\alpha m + 885m - 482)$$
$$- k(352\alpha^4 + 2400\alpha^3 + 5376\alpha^2 + 4178\alpha + 500m^4 + 2000\alpha m^3 + 3000m^3 + 2848\alpha^2m^2$$
$$+ 8848\alpha m^2 + 5925m^2 + 1696\alpha^3m + 8240\alpha^2m + 11394\alpha m + 4275m + 736)$$
$$- 192\alpha^4 - 1464\alpha^3 - 3656\alpha^2 - 3394\alpha - 350m^4 - 1400\alpha m^3 - 2100m^3 - 1940\alpha^2m^2$$
$$- 6140\alpha m^2 - 4355m^2 - 1080\alpha^3m - 5500\alpha^2m - 8230\alpha m - 3615m - 974)$$

$$c_2(k) = -\frac{1}{D_{c_2}(k)(k+3)(k+4)(-2\alpha+k-2m-1)(2\alpha+k+2m+5)(2k^5($$

$$2\alpha + \overline{2m+3})^2 + 4k^4(m+1)(2\alpha+m+2) - k^3($$
$$32\alpha^4 + 200\alpha^3 + 472\alpha^2 + 478\alpha + 36m^4 + 144\alpha m^3$$
$$+ 216m^3 + 212\alpha^2m^2 + 644\alpha m^2 + 483m^2 + 136\alpha^3m + 628\alpha^2m + 954\alpha m + 477m + 178)$$
$$- k^2(m+1)(32\alpha^3 + 136\alpha^2 + 186\alpha + 18m^3 + 72\alpha m^2 + 90m^2 + 88\alpha^2m$$
$$+ 232\alpha m + 149m + 82) + k(32\alpha^4 + 128\alpha^3 + 192\alpha^2 + 126\alpha + 4m^4 + 16\alpha m^3 + 24m^3$$
$$+ 48\alpha^2m^2 + 96\alpha m^2 + 59m^2 + 64\alpha^3m + 192\alpha^2m + 190\alpha m + 69m + 32) + (m+1)\times($$
$$8\alpha^3 + 24\alpha^2 + 26\alpha + 2m^3 + 8\alpha m^2 + 10m^2 + 12\alpha^2m + 28\alpha m + 17m + 10)), \quad \text{(A.7)}$$

其中

$$D_{c_2(k)} = (k-1)k(-2\alpha+k-1)(-\alpha+k-1)(k-\alpha)(\alpha+k)(\alpha+k+1)(2\alpha+k+1)$$
$$\times (2k^5(2\alpha+2m+3)^2 + 4k^4(20\alpha^2 + 62\alpha + 21m^2 + 42\alpha m + 63m + 47) - k^3($$
$$32\alpha^4 + 200\alpha^3 + 152\alpha^2 - 546\alpha + 36m^4 + 144\alpha m^3 + 216m^3 + 212\alpha^2m^2$$
$$+ 644\alpha m^2 + 131m^2 + 136\alpha^3m + 628\alpha^2m + 250\alpha m - 579m - 606) - k^2(192\alpha^4$$
$$+ 1232\alpha^3 + 2328\alpha^2 + 942\alpha + 234m^4 + 936\alpha m^3 + 1404m^3 + 1360\alpha^2m^2 + 4168\alpha m^2$$
$$+ 2401m^2 + 848\alpha^3m + 3992\alpha^2m + 4670\alpha m + 885m - 482) - k(352\alpha^4 + 2400\alpha^3$$
$$+ 5376\alpha^2 + 4178\alpha + 500m^4 + 2000\alpha m^3 + 3000m^3 + 2848\alpha^2m^2 + 8848\alpha m^2$$
$$+ 5925m^2 + 1696\alpha^3m + 8240\alpha^2m + 11394\alpha m + 4275m + 736) - 192\alpha^4 - 1464\alpha^3$$
$$- 3656\alpha^2 - 3394\alpha - 350m^4 - 1400\alpha m^3 - 2100m^3 - 1940\alpha^2m^2 - 6140\alpha m^2$$
$$- 4355m^2 - 1080\alpha^3m - 5500\alpha^2m - 8230\alpha m - 3615m - 974)$$

## 参考文献

[1] Harer J 和 Zagier D 1986 曲线模空间的欧拉示性数 《数学发明》**85** 457–85[2] Haagerup U 和 Thorbjørnsen S 2003 具有复高斯元素的随机矩阵 《数学博览》**21** 293–337[3] Ledoux M 2004 经典正交多项式所对应不变系综的微分算子与谱分布：连续情形 《电子概率期刊》**9** 177–208[4] Ledoux M 2009 高斯正交系综矩的递推公式 《亨利·庞加莱研究所年刊 ´概率与统计》**45**754–69

[5]Dubrovin B 和 Yang D 2017 GUE关联函数的生成级数 Lett. Math. Phys. 107 1971–2012[6] Cunden F D、Mezzadri F、O'Connell N 和 Simm N 2019 随机矩阵与超几何正交多项式的矩 Commun. Math. Phys. 369 1091–145[7] Gisonni M、Grava T 和 Ruzza G 2020 拉盖尔系综：关联函数、Hurwitz数与Hodge积分 Ann. Henri Poincar´e 21 3285–339[8] Gisonni M、Grava T 和 Ruzza G 2021 雅可比系综、Hurwitz数与Wilson多项式 Lett. Math. Phys. 111 67[9] Huang Y 和 Wei L 2025 纠缠熵的累积量结构 (arXiv:2502.05371)[10] Byun S-S 2024 椭圆GinOE的 Harer-Zagier型递推公式 Bull. Sci. Math. 197 103526[11] Byun S-S、Forrester P J 和 Oh J 2024 $q$-变形高斯酉系综：谱矩与亏格型展开 (arXiv:2404.03400)[12] Byun S-S 和 Forrester P J 2024 实 Ginibre系综的谱矩 Ramanujan J. 64 1497–519[13] Akemann G、Byun S-S 和 Oh S 2025 复数与辛非厄米随机矩阵的谱矩 (arXiv:2505.12271)[14] Byun S-S、Jung Y-G 和 Oh J 2025 具有Al-Salam–Carlitz权的 $q$-变形酉系综的谱分析 (arXiv:2507.18042)[15] Kumar S 和 Pandey A 2011 随机纯态中的纠缠：谱密度与平均冯·诺依曼熵 《物理学杂志 A：数学与理论》44 445301[16] Kumar S 2015 若干Meijer G 函数的精确求值，以及两个高斯矩阵乘积的所有本征值均为实数的概率 《物理学杂志 A：数学与理论》48 445206[17] Kumar S 2015 涉及高斯Wigner矩阵和Wishart矩阵的随机矩阵系综及其双正交结构 Phys. Rev. E 92 032903[18] Kumar S、Sambasivam B 和 Anand S 2017 规则或定迹复Wishart-拉盖尔系综的最小本征值密度，以及耦合踢陀螺中的纠缠 《物理学杂志 A：数学与理论》50 345201[19] Kumar S 2019 $\beta$-Wishart-拉盖尔系综最小本征值密度的递推 J. Stat. Phys. 175 126–49[20] Sarkar A 和 Kumar S 2019 Bures-Hall系综：谱密度与平均熵 《物理学杂志 A：数学与理论》52 295203[21] Forrester P J 和 Kumar S 2019 最大 $\beta$-Wishart-拉盖尔本征值与量子输运中朗道尔电导的递推方案 《物理学杂志 A：数学与理论》52 42LT02[22] Kumar S 2020 Wishart矩阵与随机密度矩阵：希尔伯特-施密特距离均方值的解析结果 Phys. Rev. A 102(1) 012405[23] Sarkar A 和 Kumar S 2021 利用耦合踢陀螺生成Bures-Hall混合态 Phys. Rev. A 103(3) 032423[24] Laha A、Aggarwal A 和 Kumar S 2021 随机密度矩阵：平均根保真度与Bures距离均方值的解析结果 Phys. Rev. A 104(2) 022438[25] Forrester P J 和 Kumar S 2022 $\beta$-雅可比系综迹分布的微分递推关系 Phys. D 434 133220[26] Sarkar A 和 Kumar S 2023 时间反演不变自旋链系统的纠缠谱统计：随机矩阵理论带来的启示 Eur. Phys. J. B 96 120[27] Forrester P J 和 Kumar S 2023 $\beta$-雅可比系综边缘本征值分布的可计算结构公式 Ramanujan J. 61 87–110[28] Laha A 和 Kumar S 2024 随机密度矩阵：平方希尔伯特-施密特距离方差的闭式表达式 Phys. Lett. A 514-515 129591[29] Forrester P J 2025 纪念：Santosh Kumar在随机矩阵理论精确结果方面的工作 J. Phys. A: Math. Theor. 58 463001[30] Wei L 2020 证明Sarkar-Kumar关于Bures-系综上平均纠缠熵的猜想

Hall系综 《物理学杂志 A：数学与理论》53 235203[31] Wei L 2020 Bures-Hall测度下冯·诺伊曼纠缠熵的精确方差 《物理学杂志 A：数学与理论》102 062128[32] Li S-H and Wei L 2021 量子纯度矩与双正交多项式递推 《物理学杂志 A：数学与理论》54 445204[33] Wei L-F, Huang Y and Wei L 2025 Bures-Hall随机态的冯·诺伊曼熵偏度 (arXiv:2506.06663)[34] Page D N 1993 子系统的平均熵 Phys. Rev. Lett. 71 1291–4[35] Foong S K and Kanno S 1994 关于子系统平均熵的Page猜想的证明 Phys. Rev. Lett. 72(8) 1148–51[36] S´anchez-Ruiz J 1995 关于子系统平均熵的Page猜想的简单证明 Phys. Rev. E 52(5) 5653–5[37] Hayden P, Leung D W and Winter A 2006 一般纠缠的若干方面 Commun. Math. Phys. 265 95–117[38] Vivo P, Pato M P and Oshanin G 2016 随机纯态：量化超越线性统计量的二分纠缠 Phys. Rev. E 93 052106[39] Wei L 2017 关于冯·诺依曼熵涨落的Vivo-Pato-Oshanin猜想的证明 Phys. Rev. E 96 022106[40] Wei L 2020 冯·诺伊曼纠缠熵的偏度 《物理学杂志 A：数学与理论》53 075302[41] Huang Y, Wei L and Collaku B 2021 冯·诺伊曼纠缠熵的峰度 《物理学杂志 A：数学与理论》54 504003[42] Wei L and Witte N S 2022 量子插值系综：双正交多项式与平均熵 Random Matrices: Theory Appl. 12 2250055[43] Forrester P J and Nishigaki S M 2026 与固定迹Laguerre系综相关的可积性辅助计算 (arXiv:2601.01711)[44] ˙Lyd˙zba P, Rigol M and Vidmar L 2020 随机二次哈密顿量中的本征态纠缠熵 Phys. Rev. Lett. 125 180604[45] ˙Lyd˙zba P, Rigol M and Vidmar L 2021 量子混沌二次哈密顿量多体本征态中的纠缠 Phys. Rev. B 103 104206[46] Bianchi E, Hackl L and Kieburg M 2021 费米子高斯态的Page曲线 Phys. Rev. B 103 L241118[47] Huang Y and Wei L 2022 费米子高斯态的二阶统计量 《物理学杂志 A：数学与理论》55 105201[48] Huang Y and Wei L 2023 费米子高斯态的熵涨落公式 Ann. Henri Poincar´e 24 4283–342[49] Huang Y and Wei L 2023 费米子高斯态上冯·诺伊曼熵的精确方差 2023 IEEE Int. Symp. Inf. Theory (ISIT) pp 1914–18[50] Forrester P J and Kieburg M 2016 Bures测度与Cauchy双矩阵模型的关联 Commun. Math. Phys. 342 151–87[51] Bertola M, Gekhtman M and Szmigielski J 2014 Cauchy-Laguerre双矩阵模型与Meijer-G随机点场 Commun. Math. Phys. 326 111–44[52] Hall M J 1998 随机量子关联与密度算符分布 Phys. Lett. A 242 123–9[53] Zyczkowski K and Sommers H-J 2001 混合量子态空间中的诱导测度 《物理学杂志 A：数学与通用》34 7111–25[54] Sommers H-J and Zyczkowski K 2003 混合量子态集合的Bures体积 《物理学杂志 A：数学与通用》36 10083–100[55] Sommers H-J and Zyczkowski K 2004 随机密度矩阵的统计性质 《物理学杂志 A：数学与通用》37 8457–66[56] Osipov V, Sommers H-J and Zyczkowski K 2010 随机Bures混合态及其纯度分布 J

[57] Borot G 和 Nadal C 2012年 广义随机 Bures 混合态的纯度分布 《物理学杂志 *A*：数学与理论》 **45**075209[58] Wei L 2025年 随机态的平均相对熵 (arXiv:2509.21846)[59] Bertola M、Gekhtman M 和 Szmigielski J 2010年 柯西双正交多项式《近似理论杂志》**162**832–67[60] Forrester P J 2010年 对数气体与随机矩阵 ( 普林斯顿：普林斯顿大学出版社 )[61] Prudnikov A P 、 Brychkov Y A 和 Marichev O I 1986 积分与级数：更多特殊函数积分与级数，第3卷（伦敦：戈登与布雷奇科学出版社）[62] Witte N S 和 Wei L 2022年 Bures-Hall系综与Cauchy-Laguerre双矩阵模型的间隙概率 (arXiv:2208.03278)