arXiv:2602.00963v1 [math.CO] 1 Feb 2026

# 关于具有最小度的图对于 $[1,b]$-奇因子为 $k$-临界的一些充分条件 *

Jiaxu Zhong,Yong Lu†江苏师范大学数学与统计学院，中国江苏徐州 221116，中华人民共和国。电子邮箱：JXZhong@163.com，luyong@jsnu.edu.cn

摘要

如果对于每个满足 $|S| = k$ 的子集$S \subseteq V(G)$， $G - S$ 都具有完美匹配，则称图 $G$ 是 $k$-因子临界的。如果生成子图 $H$ 满足 $b \equiv 1$(模 2) 且对于每个 $v \in V(G)$都有 $d_H(v) \in \{1,3,\ldots,b\}$，则称其为 $[1,b]$-奇因子，其中$d_H(v)$ 表示顶点 $v$ 在 $H$ 中的度。此外，如果对于每个满足 $|X| = k$ 的子集 $X \subseteq V(G)$， $G - X$ 都包含一个 $[1,b]$-奇因子，则称 $G$ 关于 $[1,b]$-奇因子是 $k$-临界的。本文基于距离谱半径和距离无符号拉普拉斯谱半径，给出了具有最小度的图关于 $[1,b]$-奇因子为 $k$-临界的一些充分条件。

关键词：距离谱半径；距离无符号拉普拉斯谱半径；最小度； $k$-临界； $[1,b]$-奇因子。

美国数学会主题分类（2020）：05C35；05C50。

## 1 引言

设 $G = (V(G)\ E(G))$ 是一个有限无向简单图，其中 $V(G)$ 是顶点集， $E(G)$ 是边集。我们分别用 $|V(G)| = n$ 和 $|E(G)| = e(G)$ 表示 $G$ 的阶和大小。设 $d(v)$ 表示顶点 $v \in V(G)$ 的度， $\delta(G)$ 表示 $G$的最小度（或简称 $\delta$）。对于 $G$的顶点子集 $S$，我们分别用 $G-S$ 和 $G[S]$ 表示从 $G$ 中删除 $S$ 中的顶点及其关联边后得到的子图，以及由 $S$诱导的 $G$ 的子图。 $G$ 的连通分支数和奇分支数分别记为 $c(G)$ 和 $o(G)$。令 $K_n$ 表示阶为 $n$的完全图。对于两个顶点不交图 $G_1$ 和 $G_2$，我们用 $G_1 \cup G_2$ 表示 $G_1$ 和 $G_2$的不交并。联 $G_1 \vee G_2$ 是由 $G_1 \cup G_2$ 通过添加 $V(G_1)$ 与 $V(G_2)$ 之间所有可能的边得到的图。阶为 $n$ 的图 $G$ 称为 $k$-连通图，如果$n > k$，且对于每个满足 $|X| < k$ 的集合 $X \subseteq V(G)$， $G - X$ 都是连通的，其中 $k$ 是正整数。

*本研究得到国家自然科学基金（项目编号：12371348、12201258）和江苏师范大学研究生科研与实践创新计划（项目编号：2025XKT0633）的资助。

†通讯作者

对于阶为 $n$的简单图 $G$，其邻接矩阵 $A(G) = (a_{ij})_{n\times n}$ 是一个对称矩阵，当且仅当顶点 $v_i$ 和 $v_j$ 相邻时，$a_{ij} = 1$；否则，$a_{ij} = 0$。$G$ 的谱半径 $\rho(G)$ 是 $A(G)$ 的最大特征值。$G$^ ^ 的无符号拉普拉斯矩阵定义为 $Q(G) = D+A(G)$，其中 $D$ 表示 $G$的对角度矩阵。无符号拉普拉斯谱半径 $q(G)$ 是 $Q(G)$ 的最大特征值。对于顶点 $v_i$、$v_j \in V(G)$，$v_i$与 $v_j$之间的距离记为 $d_G(v_i, v_j)$（或简称 $d_{ij}$），即连接 $v_i$ 与 $v_j$的最短路长度。$G$ 的距离矩阵 $D(G) = (d_{ij})_{n\times n}$ 是一个对称矩阵，其 $(i, j)$ 元素为 $d_{ij}$，而 $\mu_1(G) \geq \mu_2(G) \geq \cdots \geq \mu_n(G)$ 是 $D(G)$ 的特征值。最大特征值 $\mu_1(G)$ 称为 $G$ 的距离谱半径。顶点 $v \in V(G)$ 的传输量 $Tr(v)$ 是从 $v$ 到 $G$中所有顶点的距离之和。如果距离矩阵各行的元素之和均为常数 $k$，则称图为 $k$-传输正则图（或简称传输正则图）。Aouchiche 和 Hansen [2] 引入了 $G$的距离无符号拉普拉斯矩阵 $Q_D(G) = D(G) + Tr(G)$，其中 $Tr(G)$ 是一个对角矩阵，其对角元素为 $G$中各顶点的传输量。设 $Q_D(G)$ 的特征值为 $\eta_1(G) \geq \eta_2(G) \geq \cdots \geq \eta_n(G)$。最大特征值 $\eta_1(G)$ 称为 $G$的距离无符号拉普拉斯谱半径。

图 $G$ 中的匹配是 $E(G)$的一个子集 $M$，其中 $G$ 的任意顶点都至多关联 $M$中的一条边。图 $G$ 中的完美匹配是指一种匹配，其中$G$ 的每个顶点都恰好关联其中一条边。确定一般图何时存在完美匹配，是图论中的经典课题。1917年，Frobenius [7] 开创了对完美匹配的刻画，并证明一个有 $n$个顶点的二部图存在完美匹配，当且仅当每个顶点覆盖的基数至少为 $\frac{n}{2}$。1947年，Tutte[15] 发表了著名定理，为一般图存在完美匹配提供了充要条件。Anderson [1] 利用邻域条件研究了图中完美匹配的存在性。此后，许多研究者致力于利用各种图不变量寻找充分条件，以保证图中存在完美匹配，参见 [13, 14, 18]。

另一方面，研究人员一直对研究这样一类图感兴趣：其中每个给定阶的子图都有完美匹配。Favaron [6] 和 Yu [21] 独立引入了 $k$-因子临界图的概念：阶为 $n$的图 $G$ 称为 $k$-因子临界图（其中 $0 \leq k < n$），如果删除任意 $k$ 个顶点后，剩余图都有完美匹配。显然，若 $G$ 是一个有 $n$ 个顶点的 $k$-因子临界图，则 $k$ 和 $n$具有相同的奇偶性。Fan 和 Lin [4] 给出了连通图满足最小度条件而成为 $k$-因子临界图的邻接谱条件。Zheng 等人 [22] 基于连通图的大小、无符号拉普拉斯谱半径和距离谱半径，建立了三个使其成为 $k$-因子临界图的充分条件。Zhou 和 Zhang [27] 推导出了关于无符号拉普拉斯谱半径的一个条件，以保证 $2k$-因子临界图的存在。关于谱半径与生成子图之间关系的更多结果可参见 [23, 25, 27, 28]。

设 $g$ 和 $f$ 是定义在 $V(G)$ 上的两个正整数值函数，且对任意 $x \in V(G)$，均有 $g(x) \leq f(x)$。若生成子图 $F$ 满足对任意 $v \in V(G)$，均有 $g(v) \leq d_F(v) \leq f(v)$，则称其为 $(g, f)$-因子。设 $a$ 和 $b$ 是满足 $a \leq b$ 的两个正整数。若 $(g, f)$-因子对任意 $v \in V(G)$ 均满足 $g(v) = a$ 且 $f(v) = b$，则称其为 $[a, b]$-因子。若图 $G$ 的生成子图 $F$ 对每个 $v \in V(G)$ 均满足 $f(v) \equiv 1$(模 2) 且 $d_F(v) \in \{1, 3, \ldots, f(v)\}$，则称其为 $(1, f)$-奇因子。若 $(1, f)$-奇因子对每个 $v \in V(G)$ 均满足 $f(v) = b$(一个奇整数)，则称其为 $[1, b]$-奇因子。事实上，当 $b = 1$ 时，完美匹配是特殊的 $[1, b]$-奇因子。Cui 和 Kano [3] 给出了图存在 $\{1, 3, \ldots, 2n - 1\}$-因子的一个充分条件。Fan、Lin 和 Lu [5] 给出了具有最小度的连通图中存在 $[1, b]$-奇因子，以及存在 $[a, b]$-因子的一些谱条件。

Zhou 和 Liu [26] 建立了连通图存在 a$[1,b]$-奇因子的谱半径条件，并进一步推导出偶阶图边数的三个下界，以保证此类因子的存在。关于图因子的其他结果可见 [8, 9, 23]。

对于整数 $k \geq 1$，若图 $G$ 的阶为 $n \geq k+2$，且对于任意满足 $|X| = k$ 的子集 $X \subseteq V(G)$，图 $G - X$ 都包含一个 $(1, f)$-奇因子，则称该图关于 $(1, f)$-奇因子是 $k$-临界的。类似地，若对于每个满足 $|X| = k$ 的 $X \subseteq V(G)$，$G - X$ 都包含一个 $[1,b]$-奇因子，则称 $G$ 关于 $[1,b]$-奇因子是 $k$-临界的。

Zhou [24] 建立了关于图的大小和谱半径的条件，以判定具有给定最小度的图关于 $[1,b]$-奇因子是否为 $k$-临界。Wang 等人 [17]提出了一个基于无符号拉普拉斯谱半径的充分条件，以保证具有给定最小度的图关于 $[1,b]$-奇因子是 $k$-临界的。Wang 和 Zhang [16] 则从距离谱半径的角度，研究了阶为 $n$ 的连通图中的上述问题。

首先，我们重述 Zhou [24] 的两个充分条件。这些条件基于图 $G$ 的大小及其谱半径，保证具有给定最小度的图 $k$ 关于 $[1,b]$-奇因子是临界的。

定理 1.1. *[24]* 设 $b$、$k$ 和 $n$ 为三个正整数，满足 $n \equiv k$（模 2）和 $b \equiv 1$（模 2），并设 $G$ 为一个阶为

$$n \geq \max\left\{ \frac{b^2k^2-2b^2k\delta-4b^2k-bk+b^2\delta^2+4b^2\delta+7b\delta+b^2+8b+1}{6b},\ (b+5)\delta-(b+4)k-b+1+\frac{5}{b} \right\}$$

最小度为 $\delta$ 的图。如果

$$e(G) \geq e(K_\delta \vee (K_{n-(b+1)\delta+bk-1} \cup (b\delta - bk + 1)K_1)),$$

那么 $G$ 关于 $[1,b]$-奇因子是 $k$-临界的，除非

$$G = K_\delta \vee (K_{n-(b+1)\delta+bk-1} \cup (b\delta - bk + 1)K_1).$$

为清楚起见，定理 1.1 中的例外图见图 1。

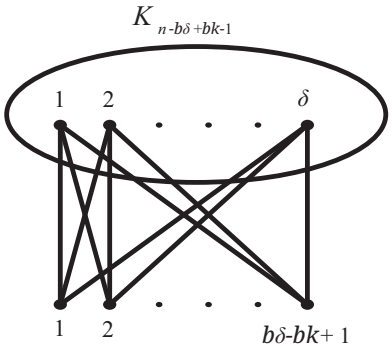


图 1: $K_\delta \vee (K_{n-(b+1)\delta+bk-1} \cup (b\delta - bk + 1)K_1)$。

定理 1.2. *[24]* 设 $b$、$k$ 和 $n$ 为三个正整数，满足 $n \equiv k$（模 2）和 $b \equiv 1$（模 2），并设 $G$ 是一个阶为 $n \geq \max\{b\delta^2 - bk, (2b+3)\delta - bk + 1\}$、最小度为 $\delta$ 的 $(k+1)$-连通图。如果

$$\rho(G) \geq \rho(K_\delta \vee (K_{n-(b+1)\delta+bk-1} \cup (b\delta - bk + 1)K_1)),$$

则 $G$ 关于 $[1,b]$-奇因子是 $k$-临界的，除非

$$G = K_\delta \vee (K_{n-(b+1)\delta+bk-1} \cup (b\delta - bk + 1)K_1).$$

其次，我们回顾 Wang 等人基于无符号拉普拉斯谱半径建立的一个充分条件，该条件针对具有给定最小度的图，使其关于 $[1,b]$-奇因子成为 $k$-临界图。

定理1.3. *[17]* 设 $b$、 $k$ 和 $n$ 为正整数，使得 $n \equiv k$ （模 2）且 $b \equiv 1$（模 2），并且 $n \geq$（$2b + 4.3$）$\delta - 2bk + 1.1$。设 $G$ 为一个阶为 $n$、最小度为 $\delta$的（$k+1$）-连通图。若

$$q(G) \geq q(K_\delta \vee (K_{n-(b+1)\delta+bk-1} \cup (b\delta - bk + 1)K_1)),$$

则 $G$ 是关于 $[1,b]$-奇因子的 $k$-临界图，除非

$$G \cong K_\delta \vee (K_{n-(b+1)\delta+bk-1} \cup (b\delta - bk + 1)K_1).$$

最后，我们回顾 Wang 和 Zhang [16] 基于距离谱半径建立的一个充分条件，该条件针对连通图，使其关于 $[1,b]$-奇因子成为 $k$-临界图。

定理1.4. *[16]* 设 $b$、 $k$ 和 $n$ 为三个正整数，其中 $b \equiv 1$ （模 2）且 $n \equiv k$（模 2），并设 $G$ 为一个阶为 $n \geq \frac{b^2+2bk+5b+2k+4}{b}$ 的连通图。若 $G$ 满足

$$\mu_1(G) \leq \mu_1(K_{k+1} \vee (K_{n-b-k-2} \cup (b+1)K_1)),$$

那么 $G$ 是关于 $[1,b]$-奇因子的 $k$-临界图，除非

$$G \in \{K_k \vee (K_{n-k-1} \cup K_1),\ K_{k+1} \vee (K_{n-k-b-2} \cup (b+1)K_1)\}.$$

受 [16, 17, 24], 启发，我们研究关于 $[1,b]$-奇因子的 $k$-临界图是否存在这一问题，并提出了一个不同的距离谱半径充分条件，以确保一个 $G$ 的最小度为 $k$的图是关于$[1,b]$-奇因子的临界图。我们的主要结果如下:

定理1.5. 设 $b$、 $k$ 和 $n$ 为正整数，满足 $n \equiv k$ 模2且 $b \equiv 1$ 模2，并设 $G$ $k+1$ $n \geq$ $\{2b^2+3b+11$ $\delta - 2b^2+\frac{5}{2}b+\frac{3}{2}$ $k+$为一个阶为max( )( )、连通 $\frac{3}{2}b+2+\frac{3}{2b}$ $\frac{2}{3}b^2\delta^3+\frac{4}{3}b^2k\delta^2\}$ $\delta$ 度为( )的连通图，其最小度为。如果

$$\mu_1(G) \leq \mu_1(K_\delta \vee (K_{n-(b+1)\delta+bk-1} \cup (b\delta - bk + 1)K_1)),$$

那么，除非.....， $G$ 是关于 $[1,b]$-奇因子的 $k$-临界图

$$G \cong K_\delta \vee (K_{n-(b+1)\delta+bk-1} \cup (b\delta - bk + 1)K_1).$$

设 $b$、 $k$ 和 $n$ 为三个正整数，满足 $n \equiv k$ （模 2）和 $b \equiv 1$ （模 2），并令$G' := K_\delta \vee ($ $K_{n-(b+1)\delta+bk-1} \cup (b\delta - bk + 1)K_1)$。若 $\delta = k+2$，则 $G' = K_{k+2} \vee (K_{n-2b-k-3} \cup (2b+1)K_1)$。容易看出， $K_{k+2} \vee (K_{n-2b-k-3} \cup (2b+1)K_1)$ 是定理 1.4 中讨论的极值图 $K_{k+1} \vee (K_{n-b-k-2} \cup ($ $b+1)K_1)$ 的一个真子图。令 $G^*$为从 $K_{k+2} \vee (K_{n-2b-k-3} \cup (2b+1)K_1)$ 得到的图：在 $(2b+1)$ $K_1$. 中的两个顶点之间添加一条独立边。见（图2）， $G^*$ 也是 $K_{k+1} \vee (K_{n-b-k-2} \cup (b+1)K_1)$ 的一个真子图。我们进一步得到 $\mu_1(K_{k+1} \vee (K_{n-b-k-2} \cup (b+1)K_1)) < \mu_1(G^*) <$

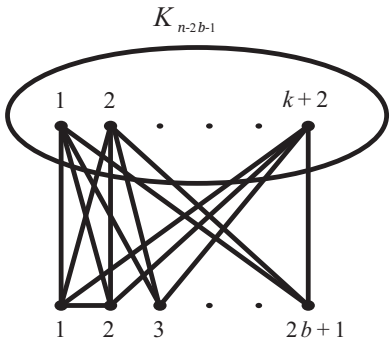


图2： $G^*$。

$\mu_1(K_{k+2} \vee (K_{n-2b-k-3} \cup (2b+1)K_1))$。根据定理 1.1，我们知道 $G^*$ 不符合定理1.4的条件，但它仍然是关于 $[1,b]$-奇因子的 $k$-临界图。这也是我们提出定理1.5的原因。

我们的第二个主要结果基于图 $G$的距离无符号拉普拉斯谱半径，给出了一个充分条件，以确保最小度为 $G$ 的图对于 $[1,b]$-奇因子是 $k$-临界的。

定理1.6. 设 $b$、 $k$ 和 $n$ 为正整数，且 $n \equiv k$ （模 2）、 $b \equiv 1$ （模 2）和 $b \geq k$成立；设 $G$ 是一个阶为 $n \geq \max\{(2b^2+4b)\delta^2+2\delta+2b^2k^2, \frac{6}{5}b^2\delta^3+\frac{8}{5}b^2k\delta^2\}$、连通度为$(k+1)$的连通图，其最小度为 $\delta$。若

$$\eta_1(G) \leq \eta_1(K_\delta \vee (K_{n-(b+1)\delta+bk-1} \cup (b\delta-bk+1)K_1)),$$

则 $G$ 对于 $[1,b]$-奇因子是 $k$-临界的，除非

$$G \cong K_\delta \vee (K_{n-(b+1)\delta+bk-1} \cup (b\delta-bk+1)K_1).$$

Kano 和 Matsuda [8] 建立了如下关于对于(1, $f$)-奇因子是$k$-临界的图的连通性。

定理1.7. *[8]* 设 $k$ 为正整数，且设 $G$ 为阶为 $n \geq k+2$ 的图，使得 $n \equiv k$（模2）。若 $G$ 关于(1, $f$)-奇因子是 $k$-临界的，则 $G$ 是 $k$-连通的。

在定理1.5和定理1.6的证明中，我们假设 $G$ 是$(k+1)$-连通的，这就留下了一个未决问题：这些结果对于连通度恰好为 $k$的图是否仍然成立。

本文其余部分组织如下：在第2节中，给出本文所用的若干引理。在第3节中，我们给出定理 1.5 的证明。在第4节中，我们给出定理1.6的证明。

## 2 预备知识

本节首先给出图关于 (1, $f$)-奇因子成为$k$-临界图的充要条件。Cui 和 Kano [3] 证明了 $k=0$情形下的以下结果，而 Kano 和 Matsuda [8] 后来将该结果推广到了正整数$k$。

引理 2.1。 *[3, 8]* 设 $k$ 为非负整数，且 $G$ 是一个阶为 $n \geq k+2$的图。那么， $G$ 是关于 (1, *f*)-奇因子的 $k$-临界图，当且仅当

$$o(G-S) \leq \sum_{v \in S} f(v) - \max\left\{\sum_{v \in X} f(v) : X \subseteq S, |X| = k\right\}$$

对于每个满足 $|S| \geq k$ 的子集 $S \subseteq V(G)$，其中 $o(G-S)$ 表示 $G-S$ 中奇分支的数量。

接下来，我们介绍商矩阵和可容许划分的概念。设 $M$ 是一个实 $n \times n$ 矩阵，且 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$。给定一个满足 $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_m$ 的划分 $\Pi = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$，矩阵 $M$ 可写成以下分块形式

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1m} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{m1} & M_{m2} & \cdots & M_{mm} \end{pmatrix}.$$

矩阵 $M$（相对于给定划分）的商矩阵 $R(M)$ 是一个 $m \times m$ 矩阵，其元素为 $M$ 的子块 $M_{i,j}$ 的平均行和。若 $M$ 的每个子块 $M_{i,j}$ 都具有常数行和，则称上述划分为可容许划分。

引理 2.2. *[20]*设 $M$ 是一个阶为 $n$ 且具有可容许划分 $\Pi$ 的实矩阵，并设 $R(M)$ 为相应的平衡商矩阵。则 $R(M)$ 的特征值也是 $M$ 的特征值。此外，若 $M$ 非负，则 $\rho(R(M)) = \rho(M)$，其中 $\rho(R(M))$ 和 $\rho(M)$ 分别表示矩阵 $R(M)$ 和 $M$ 的最大特征值。

引理 2.3. *[17]* 设 $M$ 是一个具有可容许划分 $\Pi$的 $n$ 阶非负不可约矩阵，且 $X$ 是 $M$的佩龙向量。那么， $X$ 的元素在划分 $\Pi$的每个单元上均为常数。

我们给出关于图的距离谱半径和距离无符号拉普拉斯谱半径的以下两个基本结果。

引理 2.4. *[12]*设 $G$ 是一个具有两个不相邻顶点 $u$、$v \in V(G)$ 的连通图。那么 $\mu_1(G+uv) < \mu_1(G)$。

引理 2.5. *[12]* 设 $e$ 是图 $G$ 的一条边，且 $G-e$ 仍然连通。那么$\eta_1(G-e) > \eta_1(G)$。

引理 2.6. *[12]*设 $A$ 是一个实对称 $n \times n$ 矩阵，且 $B$ 是 $A$ 的一个 $m \times m$ 主子矩阵，其中 $m < n$。设 $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \cdots \geq \lambda_n(A)$ 是 $A$的特征值，且$\lambda_1(B) \geq \lambda_2(B) \geq \cdots \geq \lambda_m(B)$ 是 $B$ 的特征值。那么对于 $i = 1, 2, \ldots, m$,

$$\lambda_i(A) \geq \lambda_i(B) \geq \lambda_{n-m+i}(A).$$

连通图 $G$ （阶为 $n$ ）的维纳指数 $W(G)$ 定义为图 $G$ 中所有距离之和，即 $W(G) = \sum d_{ij}(G)$。Xing 等人 [19] 给出了图的距离无符号拉普拉斯谱半径的一个下界 $_{i<j}$。

引理 2.7。 *[19]*设 $G$ 是一个阶为 $n$ 的连通图。则

$$\eta_1(G) \geq \frac{4W(G)}{n}$$

等号成立当且仅当 $G$ 是传输正则的。

最后，我们介绍几个图的距离谱半径与距离无符号拉普拉斯谱半径大小之间的一些关系。

$_t$引理 2.8。 *[22]*设$n = s + \sum n_i$。 若 $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_t \geq p \geq 1$且 $n_1 < n - s - p(t-1)$, $_{i=1}$则 $\mu_1(K_s \vee (K_{n_1} \cup K_{n_2} \cup \cdots \cup K_{n_t})) > \mu_1(K_s \vee (K_{n-s-p(t-1)} \cup (t-1)K_p))$。

引理 2.9。 *[10]*设 $n$、 $t$、 $s$和 $n_i(i = 1$、2、.....、$t)$为正整数，且 $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq tn_t \geq 1$ 以及$n = s + \sum n_i$。 则$_{i=1}$

$$\eta_1(K_s \vee (K_{n_1} \cup K_{n_2} \cup \cdots \cup K_{n_t})) \geq \eta_1(K_s \vee (K_{n-s-t+1} \cup (t-1)K_1))$$

当且仅当 $K_s \vee (K_n$ 时等号成立 $_1 \cup K_{n_2} \cup \cdots \cup K_{n_t}) \cong K_s \vee (K_{n-s-t+1} \cup (t-1)K_1)$ 。

引理 2.10. *[11]*设 $n$, $p$, $s$, $t$和 $n_i(i = 1,2,\ldots,t)$ 为正整数，且 $n_1 \geq 5p, tt \geq s+1$, $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_t \geq p \geq 1$ 和 $n = s + \sum n_i$。 则$_{i=1}$

$$\eta_1(K_s \vee (K_{n_1} \cup K_{n_2} \cup \cdots \cup K_{n_t})) \geq \eta_1(K_s \vee (K_{n-s-p(t-1)} \cup (t-1)K_p))$$

当且仅当 $K_s \vee (K_{n_1} \cup K_{n_2} \cup \cdots \cup K_{n_t}) \cong K_s \vee (K_{n-s-p(t-1)} \cup (t-1)K_p)$ 时等号成立。

## 3 定理1.5 的证明

本节将给出定理1.5 的证明。

定理 1.5 的证明。

假设 $G$ 是一个 $(k+1)$-连通图，且关于 $[1,b]$-奇因子不是 $k$-临界的。由引理 2.1（取 $f = b$），存在一个子集 $S \subseteq V(G)$，使得$|S| = s \geq k$ 满足 $o(G-S) \geq bs - bk + 1$。由于 $k \equiv n \equiv s + o(G-S)$ 模 2，且$b \equiv 1$ 模 2，因此 $s - k \equiv o(G-S)$ 模 2，且 $s - k \equiv b(s-k)$ 模 2。因此，$o(G-S) \geq b(s-k) + 2$。这意味着

$$n \geq s + o(G-S) \geq s + b(s-k) + 2 \Longrightarrow s \leq \frac{n + bk - 2}{b+1}.$$

于是， $G$是 $G_1 = K_s \vee (K_{n_1} \cup K_{n_2} \cup \cdots \cup K_{n_{bs-bk+2}})$的一个生成子图，其中$_{bs-bk+2}$、 $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_{bs-bk+2}$ 和$\sum$ $n_i = n - s$是某些正奇整数。由引理 2.4，得到$_{i=1}$

$$\mu_1(G) \geq \mu_1(G_1)$$

当且仅当$G \cong G_1$时等号成立。若 $s = k$，则 $o(G - S) \geq 2$，这与 $G$的$(k + 1)$-连通性矛盾。因此，$s \geq k + 1$。接下来我们分三种可能的情形进行讨论。

情况 1。$s \geq \delta + 1$。

设 $G_2 = K_s \vee (K_{n-(b+1)s+bk-1} \cup (bs - bk + 1)K_1)$。由引理 2.8，我们有

$$\mu_1(G_1) \geq \mu_1(G_2)$$

等号成立当且仅当 $(n_1, n_2, \ldots, n_{bs-bk+2}) = (n - (b + 1)s + bk - 1, 1, \ldots, 1)$。

考虑划分 $V(G_2) = V(K_s) \cup V(K_{n-(b+1)s+bk-1}) \cup V((bs - bk + 1)K_1)$，$D(G_2)$ 的相应商矩阵等于

$$\begin{pmatrix} s-1 & n-(b+1)s+bk-1 & bs-bk+1 \\ s & n-(b+1)s+bk-2 & 2(bs-bk+1) \\ s & 2(n-(b+1)s+bk-1) & 2(bs-bk) \end{pmatrix}.$$

于是我们得到，$D(G_2)$ 的相应商矩阵的特征多项式由$g_{D(G_2)}(x)$ 给出，其中

$$\begin{aligned} g_{D(G_2)}(x) =& x^3 + (3 + bk - n - bs)x^2 + [(2b^2 + 3b)s^2 - (2bn + 4b^2k + 3bk - 3b - 3)s + (2bk \\ & - 5)n + 2b^2k^2 - 3bk + 6]x - (b^2 + b)s^3 + (bn + 2b^2k + bk + 2b^2 + b - 1)s^2 \\ & - (bkn + 2bn - n + b^2k^2 + 4b^2k + bk - 4b - 2)s + (2bk - 4)n + 2b^2k^2 - 4bk + 4. \end{aligned}$$

由于划分 $V(G_2) = V(K_s) \cup V(K_{n-(b+1)s+bk-1}) \cup V((bs - bk + 1)K_1)$ 是均等的，由引理 2.2，$g_{D(G_2)}(x) = 0$ 的最大根等于 $\mu_1(G_2)$。

设 $G' = K_\delta \vee (K_{n-(b+1)\delta+bk-1} \cup (b\delta - bk + 1)K_1)$。现在考虑划分 $V(G') = V(K_\delta) \cup V(K_{n-(b+1)\delta+bk-1}) \cup V((b\delta - bk + 1)K_1)$，$D(G')$ 的相应商矩阵等于

$$\begin{pmatrix} \delta-1 & n-(b+1)\delta+bk-1 & b\delta-bk+1 \\ \delta & n-(b+1)\delta+bk-2 & 2(b\delta-bk+1) \\ \delta & 2(n-(b+1)\delta+bk-1) & 2(b\delta-bk) \end{pmatrix}.$$

$D(G')$ 的相应商矩阵的特征多项式为$g_{D(G')}(x)$，其中

$$\begin{aligned} g_{D(G')}(x) =& x^3 + (3 + bk - n - b\delta)x^2 + [(2b^2 + 3b)\delta^2 - (2bn + 4b^2k + 3bk - 3b - 3)\delta + (2bk \\ & - 5)n + 2b^2k^2 - 3bk + 6]x - (b^2 + b)\delta^3 + (bn + 2b^2k + bk + 2b^2 + b - 1)\delta^2 \\ & - (bkn + 2bn - n + b^2k^2 + 4b^2k + bk - 4b - 2)\delta + (2bk - 4)n + 2b^2k^2 - 4bk + 4. \end{aligned}$$

由于划分 $V(G') = V(K_\delta) \cup V(K_{n-(b+1)\delta+bk-1}) \cup V((b\delta - bk + 1)K_1)$ 是均等的，根据引理 2.2，$g_{D(G')}(x) = 0$的最大根等于 $\mu_1(G')$。根据引理 2.6，我们有$\mu_1(G') \geq \mu_1(K_{n-b\delta+bk-1}) = n - b\delta + bk - 2$。

为了证明 $\mu_1(G_2) > \mu_1(G')$，只需证明 $g_{D(G_2)}(\mu_1(G')) < 0$。注意，$g_{D(G')}(\mu_1(G')) = 0$。因此，

$$\begin{aligned} g_{D(G_2)}(\mu_1(G')) =& g_{D(G_2)}(\mu_1(G')) - g_{D(G')}(\mu_1(G')) \\ =& (\delta - s)[b\mu_1^2(G') + (b(2n + 3k - 3(s + \delta + 1)) - 2b^2(s + \delta - 2k) - 3) \end{aligned}$$

$$\cdot \mu_1(G') + n(bk + 2b - 1) + (bk - 1)(bk + 4b + 2)$$
$$- (s + \delta)(b(n + k - \delta + 1) + b^2(2k - \delta + 2) - 1) + b(1 + b)s^2].$$

设 $g(x) = bx^2 + [b(2n + 3k - 3(s + \delta + 1)) - 2b^2(s + \delta - 2k) - 3]x + n(bk + 2b - 1) + (bk - 1)(bk + 4b + 2) - (s + \delta)[b(n + k - \delta + 1) + b^2(2k - \delta + 2) - 1] + b(1 + b)s^2$ 是 $x$ 上的一个实函数，且满足 $x \in [n - b\delta + bk - 2, +\infty)$。那么 $g(x)$ 的导函数为

$$g'(x) = 2bx + b(2n + 3k - 3(s + \delta + 1)) - 2b^2(s + \delta - 2k) - 3.$$

因此，$\frac{2b^2(s+\delta-2k)+3-b(2n+3k-3(s+\delta+1))}{2b}$是 $g'(x) = 0$的唯一解。结合 $n \geq s + b(s - k) + 2$和 $n \geq (2b^2 + 3b + 11)\delta - (2b^2 + \frac{5}{2}b + \frac{3}{2})k + \frac{3}{2}b + 2 + \frac{3}{2b}$，我们得到

$$\begin{aligned}
&(n - b\delta + bk - 2) - \frac{2b^2(s + \delta - 2k) + 3 - b[2n + 3k - 3(s + \delta + 1)]}{2b} \\
=&\frac{4bn + (6b^2 + 3b)k - (2b^2 + 3b)s - (4b^2 + 3b)\delta - 7b - 3}{2b} \\
\geq&\frac{bn + (6b^2 + 3b)k - (2b^2 + 3b)s - (4b^2 + 3b)\delta - 3 - 7b + 3bs + 3b^2s - 3b^2k + 6b}{2b} \\
=&\frac{bn + (3b^2 + 3b)k - (4b^2 + 3b)\delta + b^2s - b - 3}{2b} \\
\geq&\frac{(2b^3 + 3b^2 + 11b)\delta - (2b^3 + \frac{5}{2}b^2 + \frac{3}{2}b)k + \frac{3}{2}b^2 + 2b + \frac{3}{2} + (3b^2 + 3b)k - (4b^2 + 3b)\delta + b^2}{2b} \\
&\frac{+b^2 - b - 3}{2b} \\
=&\frac{(2b^3 + 8b)\delta - (2b^3 - \frac{1}{2}b^2 - \frac{3}{2}b)k + \frac{5}{2}b^2 + b - 3}{2b} \\
\geq&\frac{\frac{1}{2}b^2k + 2b^3 + \frac{5}{2}b^2 - \frac{1}{2}b - \frac{3}{2}}{2b} \\
>&0.
\end{aligned}$$

因此，$g(x)$在区间 $[n - b\delta + bk - 2, +\infty)$上单调递增。我们得到

$$\begin{aligned}
g(\mu_1(G')) \geq& g(n - b\delta + bk - 2) \\
=&b(b + 1)s^2 + [-2b(b + 2)n - b(2b^2 + 5b + 1)k + b(2b^2 + 4b + 1)\delta + 2b^2 + 5b + 1]s \\
&+ 3bn^2 + [(8k - 6\delta)b^2 - (4\delta - 4k + 9)b - 4]n + (5b^3 + 4b^2)k^2 - b[(8b^2 + 8b + 1)\delta \\
&+ 11b + 8]k + b(3b^2 + 4b + 1)\delta^2 + (9b^2 + 8b + 1)\delta + 6b + 4.
\end{aligned}$$

设 $g_1(x) = b(b + 1)x^2 + [-2b(b + 2)n - b(2b^2 + 5b + 1)k + b(2b^2 + 4b + 1)\delta + 2b^2 + 5b + 1]x + 3bn^2 + [(8k - 6\delta)b^2 - (4\delta - 4k + 9)b - 4]n + (5b^3 + 4b^2)k^2 - b[(8b^2 + 8b + 1)\delta + 11b + 8]k + b(3b^2 + 4b + 1)\delta^2 + (9b^2 + 8b + 1)\delta + 6b + 4$ 是 $x$ 上的一个实函数，满足$x \in [\delta + 1, \frac{n+bk-2}{b+1}]$. 。容易验证，$g_1(x)$的导函数为

$$g_1'(x) = 2b(b + 1)x - 2b(b + 2)n - b(2b^2 + 5b + 1)k + b(2b^2 + 4b + 1)\delta + 2b^2 + 5b + 1.$$

因此，$\frac{2b_{(b+2)n+b(2b^2+5b+1)k-b\ 2b^2+4b+1\ \delta-2b^2-5b-1}}{2b\ b+1}$ 是 $g_1'(x) = 0$ 的唯一解。显然，

$$\frac{2b(b + 2)n + b(2b^2 + 5b + 1)k - b(2b^2 + 4b + 1)\delta - 2b^2 - 5b - 1}{2b(b + 1)} > \frac{n + bk - 2}{b + 1}.$$

那么， $g_1(x)$ 在 $x$ 中单调递减，且 $x \in [\delta+1, \frac{n+bk-2}{b+1}]$。因此 ，

$$
\begin{aligned}
g_1(s) \geq & g_1(\frac{n+bk-2}{b+1}) \\
= & \frac{1}{b+1}[b^2n^2 + ((4b^3+5b^2+3b)k - (4b^3+6b^2+3b)\delta - 3b^2 - 4b - 3)n \\
& + (3b^4+5b^3+3b^2)k^2 - ((6b^4+12b^3+8b^2+b)\delta + 5b^3+8b^2+5b)k \\
& + (3b^4+7b^3+5b^2+b)\delta^2 + (5b^3+9b^2+7b+1)\delta + 2b^2+4b+2].
\end{aligned}
$$

设 $g_2(x) = b^2x^2 + [(4b^3+5b^2+3b)k - (4b^3+6b^2+3b)\delta - 3b^2 - 4b - 3]x + (3b^4+5b^3+3b^2)k^2 - [(6b^4+12b^3+8b^2+b)\delta + 5b^3+8b^2+5b]k + (3b^4+7b^3+5b^2+b)\delta^2 + (5b^3+9b^2+7b+1)\delta + 2b^2+4b+2$ 是定义在 $x$ 上的实函数，且满足 $x \in [(2b^2+3b+11)\delta - (2b^2+\frac{5}{2}b+\frac{3}{2})k + \frac{3}{2}b + 2 + \frac{3}{2b}, +\infty)$。我们可以得到 $g_2(x)$ 的导函数为

$$
g_2'(x) = 2b^2x + (4b^3+5b^2+3b)k - (4b^3+6b^2+3b)\delta - 3b^2 - 4b - 3.
$$

因此，$\frac{(4b^3+6b^2+3b)\delta+3b^2+4b+3-(4b^3+5b^2+3b)k}{2b^2}$ 是 $g_2'(x) = 0$的唯一解。显然，

$$
\begin{aligned}
\frac{(4b^3+6b^2+3b)\delta+3b^2+4b+3-(4b^3+5b^2+3b)k}{2b^2} < & (2b^2+3b+11)\delta - (2b^2+\frac{5}{2}b+\frac{3}{2})k \\
& + \frac{3}{2}b + 2 + \frac{3}{2b}.
\end{aligned}
$$

则 $g_2(x) = [(2b^2+3b+11)\delta - (2b^2+\frac{5}{2}b+\frac{3}{2})k + \frac{3}{2}b + 2 + \frac{3}{2b}, +\infty)$ 在区间 $(\ )(\ ),)$ 上单调递增。因此，

$$
\begin{aligned}
g_2(n) \geq & g_2((2b^2+3b+11)\delta - (2b^2+\frac{5}{2}b+\frac{3}{2})k + \frac{3}{2}b + 2 + \frac{3}{2b}) \\
= & (4b^6+4b^5+32b^4+5b^3+51b^2-32b)\delta^2 - [(8b^6+6b^5+27b^4-16b^3-\frac{79}{2}b^2-\frac{73}{2}b)k \\
& - 6b^5 - 5b^4 - 22b^3 + \frac{23}{2}b^2 + 28b + \frac{73}{2}]\delta + (4b^6+2b^5-\frac{19}{4}b^4-12b^3-\frac{39}{4}b^2-\frac{9}{2}b)k^2 \\
& - (6b^5+\frac{7}{2}b^4-\frac{11}{2}b^3-\frac{39}{2}b^2-\frac{35}{2}b-9)k + \frac{9}{4}b^4+\frac{3}{2}b^3-\frac{3}{2}b^2-7b-\frac{9}{2b}-\frac{31}{4}.
\end{aligned}
$$

设 $g_3(x) = (4b^6+4b^5+32b^4+5b^3+51b^2-32b)x^2 - [(8b^6+6b^5+27b^4-16b^3-\frac{79}{2}b^2-\frac{73}{2}b)k - 6b^5 - 5b^4 - 22b^3 + \frac{23}{2}b^2 + 28b + \frac{73}{2}]x + (4b^6+2b^5-\frac{19}{4}b^4-12b^3-\frac{39}{4}b^2-\frac{9}{2}b)k^2 - (6b^5+\frac{7}{2}b^4-\frac{11}{2}b^3-\frac{39}{2}b^2-\frac{35}{2}b-9)k + \frac{9}{4}b^4+\frac{3}{2}b^3-\frac{3}{2}b^2-7b-\frac{9}{2b}-\frac{31}{4}$ 是定义在 $x$ 上且满足 $x \in [k+1, s-1]$的实函数。我们可以得到 $g_3(x)$的导函数为

$$
\begin{aligned}
g_3'(x) = & (8b^6+8b^5+64b^4+10b^3+102b^2-64b)x - (8b^6+6b^5+27b^4-16b^3-\frac{79}{2}b^2-\frac{73}{2}b)k \\
& + 6b^5+5b^4+22b^3-\frac{23}{2}b^2-28b-\frac{73}{2}.
\end{aligned}
$$

因此，$\frac{(8b^6+6b^5+27b^4-16b^3-\frac{79}{2}b^2-\frac{73}{2}b)k-6b^5-5b^4-22b^3+\frac{23}{2}b^2+28b+\frac{73}{2}}{8b^6+8b^5+64b^4+10b^3+102b^2-64b}$ 是 $g_3'(x) = 0$的唯一解。显然，

$$
\frac{(8b^6+6b^5+27b^4-16b^3-\frac{79}{2}b^2-\frac{73}{2}b)k-6b^5-5b^4-22b^3+\frac{23}{2}b^2+28b+\frac{73}{2}}{8b^6+8b^5+64b^4+10b^3+102b^2-64b} < k+1.
$$

这是 这意味着 $g_3(x)$ 在区间 $[k+1, s-1]$ 内单调递增。因此 ,

$$\begin{aligned} g_3(\delta) \geq & g_3(k+1) \\ = & (\frac{1}{4}b^4 + 9b^3 + \frac{323}{4}b^2)k^2 + (2b^5 + \frac{77}{2}b^4 + \frac{107}{2}b^3 + \frac{299}{2}b^2 - 38b - \frac{55}{2})k \\ & + 4b^6 + 10b^5 + \frac{157}{4}b^4 + \frac{57}{2}b^3 + 38b^2 - 67b - \frac{9}{2b} - \frac{177}{4} \\ > & 0. \end{aligned}$$

因此， $g(\mu_1(G')) > 0$和 $g_{D(G_2)}(\mu_1(G')) < 0$。所以， $\mu_1(G_2) > \mu_1(G')$。结合$\mu_1(G) \geq \mu_1(G_1) \geq \mu_1(G_2)$，我们可以得出结论： $\mu_1(G) > \mu_1(G')$，这与条件矛盾。

情形 2. $s = \delta$。

由引理 2.8，我们有 $\mu_1(G_1) \geq \mu_1(K_\delta \vee (K_{n-(b+1)\delta+bk-1} \cup (b\delta - bk + 1)K_1))$，当且仅当 $G_1 \cong K_\delta \vee (K_{n-(b+1)\delta+bk-1} \cup (b\delta - bk + 1)K_1)$ 时等号成立。结合 $\mu_1(G) \geq \mu_1(G_1)$，得到 $\mu_1(G) \geq \mu_1(K_\delta \vee (K_{n-(b+1)\delta+bk-1} \cup (b\delta - bk + 1)K_1))$，当且仅当 $G \cong K_\delta \vee (K_{n-(b+1)\delta+bk-1} \cup (b\delta - bk + 1)K_1)$ 时等号成立。注意到 $K_\delta \vee (K_{n-(b+1)\delta+bk-1} \cup (b\delta - bk + 1)K_1)$ 不是关于 $[1, b]$-奇因子的 $k$-临界图，这就产生了矛盾。

情形 3. $s \leq \delta - 1$。

回忆一下， $G$是 $G_1 = K_s \vee (K_{n_1} \cup K_{n_2} \cup \cdots \cup K_{n_{bs-bk+2}})$的一个生成子图，其中 $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_{bs-bk+2}$ 且$\sum_{i=1}^{bs-bk+2} n_i = n - s$。显然， $s + n_{bs-bk+2} - 1 \geq \delta$ ，因为 $G_1$ 的最小度至少为 $\delta$。令 $G_3 = K_s \vee (K_{n-s-(\delta+1-s)(bs-bk+1)} \cup (bs - bk + 1)K_{\delta+1-s})$。由引理 2.8，得 $\mu_1(G_1) \geq \mu_1(G_3)$，当且仅当$(n_1, n_2, \ldots, n_{bs-bk+2}) = (n - s - (\delta + 1 - s)(bs - bk + 1), \delta + 1 - s, \ldots, \delta + 1 - s)$时等号成立。

考虑划分 $V(G_3) = V(K_s) \cup V(K_{n-s-(\delta+1-s)(bs-bk+1)}) \cup V((bs-bk+1)K_{\delta+1-s})$， $D(G_3)$ 的相应商矩阵等于

$$\begin{pmatrix} s-1 & n-s-(\delta+1-s)(bs-bk+1) & (bs-bk+1)(\delta+1-s) \\ s & n-s-(\delta+1-s)(bs-bk+1)-1 & 2(bs-bk+1)(\delta+1-s) \\ s & 2(n-s-(\delta+1-s)(bs-bk+1)) & \delta-s+2(bs-bk)(\delta+1-s) \end{pmatrix}.$$

于是我们得到，相应商矩阵$D(G_3)$ 的特征多项式为$g_{D(G_3)}(x)$，其中

$$\begin{aligned} g_{D(G_3)}(x) = & x^3 + [-n + bs^2 - (bk + b\delta + b)s + (b\delta + b)k + 3]x^2 + [2b^2s^4 - (4b^2\delta + 4b^2k + 4b^2 \\ & - 2b)s^3 + (2bn + (8b^2\delta + 8b^2 - 2b)k + 2b^2k^2 + 2b^2\delta^2 + (4b^2 - 7b)\delta + 2b^2 - 5b)s^2 \\ & + (-(2bk + 2b\delta + 2b - 3)n - (4b^2\delta + 4b^2)k^2 - (4b^2\delta^2 + (8b^2 - 7b)\delta + 4b^2 - 5b)k \\ & + 5b\delta^2 + (8b - 3)\delta + 3b - 3)s + ((2b\delta + 2b)k - 3\delta - 5)n + (2b^2\delta^2 + 4b^2\delta + 2b^2) \\ & \cdot k^2 - (5b\delta^2 + 8b\delta + 3b)k + 3\delta^2 + 6\delta + 6]x - b^2s^5 + (2b^2k + 2b^2\delta + 4b^2 - b)s^4 \\ & - [bn + (4b^2\delta + 8b^2 - b)k + b^2k^2 + b^2\delta^2 + (6b^2 - 3b)\delta + 5b^2 - 5b]s^3 + [(bk + b\delta \\ & + 3b - 1)n + (2b^2\delta + 4b^2)k^2 + (2b^2\delta^2 + (12b^2 - 3b)\delta + 10b^2 - 5b)k + (2b^2 - 2b) \\ & \cdot \delta^2 + (4b^2 - 11b + 1)\delta + 2b^2 - 8b + 1]s^2 + [-(b^2\delta^2 + 6b^2\delta + 5b^2)k^2 - ((4b^2 - 2b) \\ & \cdot \delta^2 + (8b^2 - 11b)\delta + 4b^2 - 8b)k - ((b\delta + 3b)k + (2b - 1)\delta + 2b - 4)n + (5b - 1) \\ & \cdot \delta^2 + (9b - 5)\delta + 4b - 4]s + [(2b\delta + 2b)k - 3\delta - 4]n + (2b^2\delta^2 + 4b^2\delta + 2b^2)k^2 \end{aligned}$$

$$-(5b\delta^2+9b\delta+4b)k+3\delta^2+6\delta+4.$$

由于划分 $V(G_3)=V(K_s)\cup V(K_{n-s-(\delta+1-s)(bs-bk+1)})\cup V((bs-bk+1)K_{\delta+1-s})$ 是均等的，根据引理 2.2，$g_{D(G_3)}(x)=0$ 的最大根等于 $\mu_1(G_3)$。

设 $G'=K_\delta\vee(K_{n-(b+1)\delta+bk-1}\cup(b\delta-bk+1)K_1)$。现在考虑划分 $V(G')=V(K_\delta)\cup V(K_{n-(b+1)\delta+bk-1})\cup V((b\delta-bk+1)K_1)$，$D(G')$ 的相应商矩阵等于

$$\begin{pmatrix}\delta-1 & n-(b+1)\delta+bk-1 & b\delta-bk+1\\ \delta & n-(b+1)\delta+bk-2 & 2(b\delta-bk+1)\\ \delta & 2(n-(b+1)\delta+bk-1) & 2(b\delta-bk)\end{pmatrix}.$$

$D(G')$ 的相应商矩阵的特征多项式为$g_{D(G')}(x)$，其中

$$\begin{aligned}g_{D(G')}(x)=&x^3+(3+bk-n-b\delta)x^2+[(2b^2+3b)\delta^2-(2bn+4b^2k+3bk-3b-3)\delta\\&+(2bk-5)n+2b^2k^2-3bk+6]x-(b^2+b)\delta^3+(bn+2b^2k+bk+2b^2+b-1)\delta^2\\&-(bkn+2bn-n+b^2k^2+4b^2k+bk-4b-2)\delta+(2bk-4)n+2b^2k^2-4bk+4.\end{aligned}$$

容易看出，划分 $V(G')=V(K_\delta)\cup V(K_{n-(b+1)\delta+bk-1})\cup V((b\delta-bk+1)K_1)$ 是均等的。由引理 2.2，$g_{D(G')}(x)=0$ 的最大根等于 $\mu_1(G')$。由引理 2.6，我们得到 $\mu_1(G')\geq\mu_1(K_{n-b\delta+bk-1})=n-b\delta+bk-2.$

为了证明 $\mu_1(G_3)>\mu_1(G')$，只需证明 $g_{D(G_3)}(\mu_1(G'))<0$。注意，$g_{D(G')}(\mu_1(G'))=0$。因此，

$$\begin{aligned}g_{D(G_3)}(\mu_1(G'))=&g_{D(G_3)}(\mu_1(G'))-g_{D(G')}(\mu_1(G'))\\=&(s-\delta)[b(s-k-1)\mu_1^2(G')+(2b^2s^3+(2b-4b^2-4b^2k-2b^2\delta)s^2+(2bn\\&+2b^2k^2+(4b^2\delta+8b^2-2b)k-5b\delta+2b^2-5b)s+(3-2b-2bk)n-(4b^2\\&+2b^2\delta)k^2+(5-4b^2+5b\delta)k+(2b^2+3b-3)\delta+3b-3)\mu_1(G')-b^2s^4\\&+(2b^2k+b^2\delta+4b^2-b)s^3-(bn+b^2k^2+(2b^2\delta+8b^2-b)k+(2b^2-2b)\delta\\&+5b^2-5b)s^2+((bk+3b-1)n+(b^2\delta+4b^2)k^2+((4b^2-2b)\delta+10b^2-5b)\\&\cdot k-(b^2+6b-1)\delta+2b^2-8b+1)s-(3bk-b\delta+2b-4)n-(5b^2+2b^2\delta)\\&\cdot k^2+((2b^2+6b)\delta-4b^2+8b)k-(b^2+b)\delta^2+(2b^2+b-4)\delta+4b-4].\end{aligned}$$

设 $h(x)=b(s-k-1)x^2+[2b^2s^3+(2b-4b^2-4b^2k-2b^2\delta)s^2+(2bn+2b^2k^2+(4b^2\delta+8b^2-2b)k-5b\delta+2b^2-5b)s+(3-2b-2bk)n-(4b^2+2b^2\delta)k^2+(5b-4b^2+5b\delta)k+(2b^2+3b-3)\delta+3b-3]x-b^2s^4+(2b^2k+b^2\delta+4b^2-b)s^3-[bn+b^2k^2+(2b^2\delta+8b^2-b)k+(2b^2-2b)\delta+5b^2-5b]s^2+[(bk+3b-1)n+(b^2\delta+4b^2)k^2+((4b^2-2b)\delta+10b^2-5b)k-(b^2+6b-1)\delta+2b^2-8b+1]s-(3bk-b\delta+2b-4)n-(5b^2+2b^2\delta)k^2+[(2b^2+6b)\delta-4b^2+8b]k-(b^2+b)\delta^2+(2b^2+b-4)\delta+4b-4$ 是 $x$ 中满足 $x\in[n-b\delta+bk-2,+\infty$ 的实函数。则 $h(x)$ 的导函数为

$$\begin{aligned}h'(x)=&2b(s-k-1)x+2b^2s^3+(2b-4b^2-4b^2k-2b^2\delta)s^2+[2bn+2b^2k^2+(4b^2\delta+8b^2\\&-2b)k-5b\delta+2b^2-5b]s+(3-2b-2bk)n-(4b^2+2b^2\delta)k^2+(5b-4b^2+5b\delta)k\\&+(2b^2+3b-3)\delta+3b-3.\end{aligned}$$

结合 $k+1\leq s\leq\delta-1$ 和 $n\geq\frac{2}{3}b^2\delta^3+\frac{4}{3}b^2k\delta^2$，我们得到

$$h'(x)\geq h(n-b\delta+bk-2)$$

$$
\begin{aligned}
=&2b^2s^3-(4b^2k+2b^2\delta+4b^2-2b)s^2+[4bn+2b^2k^2+(4b^2\delta+10b^2-2b)k-(5b+2b^2)\delta\\
&+2b^2-9b]s-(4bk+4b-3)n-(6b^2+2b^2\delta)k^2+[(2b^2+5b)\delta-6b^2+9b]k+(4b^2\\
&+3b-3)\delta+7b-3\\
\geq&2b^2(k+1)^3-(4b^2k+2b^2\delta+4b^2-2b)(\delta-1)^2+[4bn+2b^2k^2+(4b^2\delta+10b^2-2b)k\\
&-(5b+2b^2)\delta+2b^2-9b](k+1)-(4bk+4b-3)n-(6b^2+2b^2\delta)k^2+[(2b^2+5b)\delta\\
&-6b^2+9b]k+(4b^2+3b-3)\delta+7b-3\\
=&3n-2b^2\delta^3-(4b^2k-2b)\delta^2+(2b^2k^2+12b^2k+8b^2-6b-3)\delta+4b^2k^3+(12b^2-2b)k^2\\
&+(8b^2-2b)k-3\\
\geq&3(\frac{2}{3}b^2\delta^3+\frac{4}{3}b^2k\delta^2)-2b^2\delta^3-(4b^2k-2b)\delta^2+(2b^2k^2+12b^2k+8b^2-6b-3)\delta+4b^2k^3\\
&+(12b^2-2b)k^2+(8b^2-2b)k-3\\
=&2b^2\delta+(2b^2k^2+12b^2k+8b^2-6b-3)\delta+4b^2k^3+(12b^2-2b)k^2+(8b^2-2b)k-3\\
>&0.
\end{aligned}
$$

这意味着 $h(x)$ 在区间 $[n-b\delta+bk-2,+\infty)$ 上单调递增。因此,

$$
\begin{aligned}
h(\mu_1(G'))\geq&h(n-b\delta+bk-2)\\
=&-b^2s^4+[2b^2n+(2b^3+2b^2)k+(b^2-2b^3)\delta-b]s^3+[-(4b^2k+2b^2\delta+4b^2-b)n\\
&-(4b^3+b^2)k^2+((2b^3-2b^2)\delta-4b^3+2b^2+b)k+2b^3\delta^2+(4b^3+2b)\delta+3b^2+b]\\
&\cdot s^2+[3bn^2+(2b^2k^2+(4b^2\delta+12b^2-b)k-(4b^2+5b)\delta+2b^2-10b-1)n\\
&+2b^3k^3+((2b^3+b^2)\delta+9b^3-2b^2)k^2-(4b^3\delta^2+(10b^3+7b^2+2b)\delta-2b^3+15b^2\\
&+b)k+(b^3+5b^2)\delta^2-(2b^3-8b^2-4b-1)\delta-2b^2+6b+1]s-(3bk+3b-3)n^2\\
&-[(2b^2\delta+8b^2)k^2-((4b^2+5b)\delta-8b^2+13b)k-(6b^2+b-3)\delta-9b+5]n\\
&-(2b^3\delta+5b^3)k^3+[2b^3\delta^2+(7b^2+6b^3)\delta-5b^3+12b^2]k^2-[(b^3+5b^2)\delta^2-(8b^3\\
&-4b^2-7b)\delta-11b^2+9b]k-(3b^3+4b^2-2b)\delta^2-(9b^2+2b-2)\delta-6b+2\\
\geq&-b^2(\delta-1)^4+[2b^2n+(2b^3+2b^2)k+(b^2-2b^3)\delta-b](k+1)^3+[-(4b^2k+2b^2\delta\\
&+4b^2-b)n-(4b^3+b^2)k^2+((2b^3-2b^2)\delta-4b^3+2b^2+b)k+2b^3\delta^2+(4b^3\\
&+2b)\delta+3b^2+b](\delta-1)^2+[3bn^2+(2b^2k^2+(4b^2\delta+12b^2-b)k-(4b^2+5b)\delta\\
&+2b^2-10b-1)n+2b^3k^3+((2b^3+b^2)\delta+9b^3-2b^2)k^2-(4b^3\delta^2+(10b^3+7b^2\\
&+2b)\delta-2b^3+15b^2+b)k+(b^3+5b^2)\delta^2-(2b^3-8b^2-4b-1)\delta-2b^2+6b+1]\\
&\cdot(k+1)-(3bk+3b-3)n^2-[(2b^2\delta+8b^2)k^2-((4b^2+5b)\delta-8b^2+13b)k\\
&-(6b^2+b-3)\delta-9b+5]n-(2b^3\delta+5b^3)k^3+[2b^3\delta^2+(7b^2+6b^3)\delta-5b^3\\
&+12b^2]k^2-[(b^3+5b^2)\delta^2-(8b^3-4b^2-7b)\delta-11b^2+9b]k-(3b^3+4b^2-2b)\delta^2\\
&-(9b^2+2b-2)\delta-6b+2\\
=&3n^2+[4b^2k^3+(2b^2\delta+12b^2-b)k^2-(4b^2\delta^2-12b^2\delta-8b^2-2b+1)k-2b^2\delta^3\\
&+b\delta^2+(8b^2-6b-3)\delta-6]n+(4b^3+2b^2)k^4+[(2b^2-2b^3)\delta+12b^3+4b^2-b]\\
&\cdot k^3-[(6b^3+b^2)\delta^2-(6b^2-2b)\delta-8b^3+4b]k^2+[(2b^3-2b^2)\delta^3-(12b^3-6b^2\\
&-b)\delta^2-(6b^2+7b-1)\delta-2b^2-6b+1]k+(2b^3-b^2)\delta^4+(4b^2+2b)\delta^3-(8b^3\\
&+2b^2+b)\delta^2-(2b^2-2b-3)\delta+3.
\end{aligned}
$$

设 $h_1(x) = 3x^2 + [4b^2k^3 + (2b^2\delta + 12b^2 - b)k^2 - (4b^2\delta^2 - 12b^2\delta - 8b^2 - 2b + 1)k - 2b^2\delta^3 + b\delta^2 + (8b^2 - 6b - 3)\delta - 6]x + (4b^3 + 2b^2)k^4 + [(2b^2 - 2b^3)\delta + 12b^3 + 4b^2 - b]k^3 - [(6b^3 + b^2)\delta^2 - (6b^2 - 2b)\delta - 8b^3 + 4b]k^2 + [(2b^3 - 2b^2)\delta^3 - (12b^3 - 6b^2 - b)\delta^2 - (6b^2 + 7b - 1)\delta - 2b^2 - 6b + 1]k + (2b^3 - b^2)\delta^4 + (4b^2 + 2b)\delta^3 - (8b^3 + 2b^2 + b)\delta^2 - (2b^2 - 2b - 3)\delta + 3$ 是定义在$x$上的实函数，且满足 $x \in [\frac{2}{3}b^2\delta^3 + \frac{4}{3}b^2k\delta^2, +\infty)$。我们可以得到 $h_1(x)$ 的导函数为

$$\begin{aligned} h_1'(x) =& 6x + 4b^2k^3 + (2b^2\delta + 12b^2 - b)k^2 - (4b^2\delta^2 - 12b^2\delta - 8b^2 - 2b + 1)k - 2b^2\delta^3 + b\delta^2 \\ &+ (8b^2 - 6b - 3)\delta - 6. \end{aligned}$$

因此，$\frac{-4b^2k^3-(2b^2\delta+12b^2-b)k^2+(4b^2\delta^2-12b^2\delta-8b^2-2b+1)k+2b^2\delta^3-b\delta^2-(8b^2-6b-3)\delta+6}{6}$ 是 $h_1'(x) = 0$ 的唯一解。显然，

$$6(\frac{2}{3}b^2\delta^3 + \frac{4}{3}b^2k\delta^2) + 4b^2k^3 + (2b^2\delta + 12b^2 - b)k^2 - (4b^2\delta^2 - 12b^2\delta - 8b^2 - 2b + 1)k - 2b^2\delta^3 + b\delta^2 + (8b^2 - 6b - 3)\delta + 6 > 0.$$

由此可知，$h_1(x)$在区间 $[\frac{2}{3}b^2\delta^3 + \frac{4}{3}b^2k\delta^2, +\infty)$上单调递增。因此，

$$\begin{aligned} h_1(n) \geq& h_1(\frac{2}{3}b^2\delta^3 + \frac{4}{3}b^2k\delta^2) \\ =& \frac{2}{3}b^3\delta^5 + [\frac{4}{3}b^4k^2 + (\frac{4}{3}b^3 + 8b^4)k + \frac{16}{3}b^4 - 2b^3 - 3b^2]\delta^4 + [\frac{16}{3}b^4k^4 + (24b^4 - \frac{2}{3}b^3)k^2 \\ &+ (16b^4 - \frac{14}{3}b^3 - \frac{20}{3}b^2)k + 2b]\delta^3 + [\frac{16}{3}b^4k^4 + (16b^4 - \frac{4}{3}b^3)k^3 + (\frac{32}{3}b^4 - \frac{10}{3}b^3 - \frac{7}{3}b^2) \\ &\cdot k^2 - (12b^3 + 2b^2 - b)k - 8b^3 - 2b^2 - b]\delta^2 + [(2b^2 - 2b^3)k^3 + (6b^2 - 2b)k^2 + (1 - 7b \\ &- 6b^2)k - 2b^2 + 2b + 3]\delta + (4b^3 + 2b^3)k^4 + (12b^3 + 4b^2 - b)k^3 + (8b^3 - 4b)k^2 - (2b^2 \\ &+ 6b - 1)k + 3 \\ >& 0. \end{aligned}$$

因此，$h(\mu_1(G')) > 0$ 且$g_{D(G_3)}(\mu_1(G')) < 0$。故 $\mu_1(G_3) > \mu_1(G')$。结合$\mu_1(G) \geq \mu_1(G_1) \geq \mu_1(G_3)$，我们可以得出 $\mu_1(G) > \mu_1(G')$，这与该条件矛盾。

证明至此完成。 □

# 4 定理1.6的证明

本节将给出定理1.6的证明。

定理1.6的证明。

假设 $G$ 是一个（$k+1$）连通图，且关于 $[1, b]$-奇因子并非 $k$-临界。于是，由引理 2.1（取 $f = b$），存在一个子集 $S \subseteq V(G)$，使得$|S| = s \geq k$ 满足 $o(G - S) \geq bs - bk + 1$。由于 $k \equiv n \equiv s + o(G - S)$（模 2）且$b \equiv 1$（模 2），可得 $s - k \equiv o(G - S)$（模 2）且 $s - k \equiv b(s - k)$（模 2）。因此，$o(G - S) \geq b(s - k) + 2$。这意味着

$$n \geq s + o(G - S) \geq s + b(s - k) + 2 \Longrightarrow s \leq \frac{n + bk - 2}{b + 1}.$$

那么，对于某些正的$bs-bk+2$奇整数 $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_{bs-bk+2}$ 和 $\sum_{i=1} n_i = n-s$， $G$ 是 $G_1 = K_s \vee (K_{n_1} \cup K_{n_2} \cup \cdots \cup K_{n_{bs-bk+2}})$ 的一个生成子图。由引理 2.5 可得

$$\eta_1(G) \geq \eta_1(G_1)$$

当且仅当 $G \cong G_1$ 时等号成立。若 $s = k$，则 $o(G-S) \geq 2$，这与 $G$ 的 $(k+1)$-连通性矛盾。因此， $s \geq k+1$。接下来考虑以下三种可能的情况。

情况 1. $s \geq \delta + 1$。

设 $G_2 = K_s \vee (K_{n-(b+1)s+bk-1} \cup (bs-bk+1)K_1)$。根据引理 2.9，可得

$$\eta_1(G_1) \geq \eta_1(G_2)$$

with 当且仅当 $(n_1, n_2, \ldots, n_{bs-bk+2}) = (n-(b+1)s+bk-1, 1, \ldots, 1)$ 时等号成立 .

现在考虑划分 $V(G_2) = V(K_s) \cup V(K_{n-(b+1)s+bk-1}) \cup V((bs-bk+1)K_1)$， $Q_D(G_2)$ 的相应商矩阵为

$$\begin{pmatrix} n+s-2 & n-(b+1)s+bk-1 & bs-bk+1 \\ s & 2n-s-2 & 2(bs-bk+1) \\ s & 2(n-(b+1)s+bk-1) & 2(n-bk-1)+(2b-1)s \end{pmatrix}.$$

于是得到，$Q_D(G_2)$的相应商矩阵的特征多项式为$g_{Q_D(G_2)}(x)$，其中

$$\begin{aligned} g_{Q_D(G_2)}(x) =& x^3 + [(1-2b)s - 5n + 2bk + 6]x^2 + [(4b^2+4b)s^2 + ((2b-3)n - (8b^2+4b)k \\ &+ 8)s + 8n^2 - (2bk+24)n + 4b^2k^2 + 16]x - 2b^2s^3 + [-(4b^2+4b)n + 4b^2k + 8b^2 \\ &+ 6b]s^2 + [2n^2 + ((8b^2+4b)k - 4b - 10)n - 2b^2k^2 - (16b^2+6b)k + 8b + 12]s \\ &- 4n^3 + 20n^2 - (4b^2k^2 - 4bk + 32)n + 8b^2k^2 - 8bk + 16. \end{aligned}$$

由于划分 $V(G_2) = V(K_s) \cup V(K_{n-(b+1)s+bk-1}) \cup V((bs-bk+1)K_1)$是均等的，根据引理 2.2，$g_{Q_D(G_2)}(x)$的最大根 $= 0$ 等于 $\eta_1(G_2)$。

令 $G' = K_\delta \vee (K_{n-(b+1)\delta+bk-1} \cup (b\delta - bk + 1)K_1)$。现在考虑划分 $V(G') = V(K_\delta) \cup V(K_{n-(b+1)\delta+bk-1}) \cup V((b\delta-bk+1)K_1)$， $Q_D(G')$的相应商矩阵为

$$\begin{pmatrix} n+\delta-2 & n-(b+1)\delta+bk-1 & b\delta-bk+1 \\ \delta & 2n-\delta-2 & 2(b\delta-bk+1) \\ \delta & 2(n-(b+1)\delta+bk-1) & 2(n-bk-1)+(2b-1)\delta \end{pmatrix}.$$

则 $Q_D(G')$ 的对应商矩阵的特征多项式为$g_{Q_D(G')}(x)$，其中

$$\begin{aligned} g_{Q_D(G')}(x) =& x^3 + [(1-2b)\delta - 5n + 2bk + 6]x^2 + [(4b^2+4b)\delta^2 + ((2b-3)n - (8b^2+4b)k \\ &+ 8)\delta + 8n^2 - (2bk+24)n + 4b^2k^2 + 16]x - 2b^2\delta^3 + [-(4b^2+4b)n + 4b^2k + 8b^2 \\ &+ 6b]\delta^2 + [2n^2 + ((8b^2+4b)k - 4b - 10)n - 2b^2k^2 - (16b^2+6b)k + 8b + 12]\delta \\ &- 4n^3 + 20n^2 - (4b^2k^2 - 4bk + 32)n + 8b^2k^2 - 8bk + 16. \end{aligned}$$

注意，划分 $V(G')=V(K_\delta)\cup V(K_{n-(b+1)\delta+bk-1})\cup V((b\delta-bk+1)K_1)$ 是均等的。根据引理 2.2，$g_{Q_D(G')}(x)$ 的最大根 $=0$ 等于 $\eta_1(G')$。

根据维纳指数的定义，我们有

$$\begin{aligned}W(G')=&\sum_{i<j}d_{ij}(G')\\=&\frac{1}{2}\delta(\delta-1)+[n-(b+1)\delta+bk-1]\delta+(b\delta-bk+1)\delta+(b\delta-bk+1)(b\delta-bk)\\&+\frac{1}{2}[n-(b+1)\delta+bk-1][n-(b+1)\delta+bk-2]\\&+2[n-(b+1)\delta+bk-1](b\delta-bk+1)\\=&\frac{1}{2}[n^2+(2b\delta-2bk+1)n-(b^2+2b)\delta^2+((2b^2+2b)k-3b-2)\delta-b^2k^2+3bk-2].\end{aligned}$$

由引理 2.7，由于 $n\geq 2(b^2+2b)\delta^2+2\delta+2b^2k^2$，可得

$$\begin{aligned}\eta_1(G')\geq&\frac{4W(G')}{n}\\=&2[n+2b\delta-2bk+1-\frac{(b^2+2b)\delta^2-((2b^2+2b)k-3b-2)\delta+b^2k^2-3bk+2}{n}]\\=&2n+4b\delta-4bk+1+\frac{n-2b(b+2)\delta^2+2[b(2b+2)k-3b-2]\delta-2b^2k^2+6bk-4}{n}\\\geq&2n+4b\delta-4bk+1+\frac{2[2kb^2+(2k-3)b-1]\delta+6bk-4}{n}\\\geq&2n+4b\delta-4bk+1+\frac{2(2k^3+2k^2-3k-1)\delta+6k^2-4}{n}\\>&2n+4b\delta-4bk+1.\end{aligned}$$

为了证明 $\eta_1(G_2)>\eta_1(G')$，只需证明 $g_{Q_D(G_2)}(\eta_1(G'))<0$。注意到$g_{Q_D(G')}(\eta_1(G'))=0$。因此，

$$\begin{aligned}g_{Q_D(G_2)}(\eta_1(G'))=&g_{Q_D(G_2)}(\eta_1(G'))-g_{Q_D(G')}(\eta_1(G'))\\=&(\delta-s)[(2b-1)\eta_1^2(G')-((2b-3)n+(4b^2+4b)(s+\delta)-(4b+8b^2)k+8)\\&\cdot\eta_1(G')+2b^2s^2+((4b^2+4b)n+2b^2\delta-4b^2k-8b^2-6b)s-2n^2\\&+((4b^2+4b)\delta-(4b+8b^2)k+4b+10)n+2b^2k^2-(4b^2\delta-16b^2-6b)k\\&+2b^2\delta^2-(6b+8b^2)\delta-8b-12].\end{aligned}$$

设 $w(x)=(2b-1)x^2-[(2b-3)n+(4b^2+4b)(s+\delta)-(4b+8b^2)k+8]x+2b^2s^2+[(4b^2+4b)n+2b^2\delta-4b^2k-8b^2-6b]s-2n^2+[(4b^2+4b)\delta-(4b+8b^2)k+4b+10]n+2b^2k^2-(4b^2\delta-16b^2-6b)k+2b^2\delta^2-(6b+8b^2)\delta-8b-12$ 是 $x$ 上满足 $x\in[2n+4b\delta-4bk+1,+\infty)$ 的实函数。那么，$w(x)$ 的对称轴为

$$x=\frac{(2b-3)n+(4b^2+4b)(s+\delta)-(4b+8b^2)k+8}{2(2b-1)}.$$

由于 $\delta\geq k+1$ 和 $n\geq(b+1)s-bk+2$，我们有

$$\begin{aligned}&2(2b-1)(2n+4b\delta-4bk+1)-[(2b-3)n+(4b^2+4b)(s+\delta)-(4b+8b^2)k+8]\\=&(6b-1)n+(12b^2-12b)\delta-(8b^2-12b)k-(4b^2+4b)s+4b-10\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq (2b-1)n + (12b^2-12b)\delta - (8b^2-12b)k - (4b^2+4b)s + 4b - 10 + 4b[(b+1)s - bk + 2] \\
&= (2b-1)n + 12b(b-1)\delta - 12b(b-1)k + 12b - 10 \\
&\geq (2b-1)n + 12b^2 - 10 \\
&> 0.
\end{aligned}
$$

因此， $w(x)$ 在区间 $[2n+4b\delta-4bk+1, +\infty)$ 上单调递增。我们有

$$
\begin{aligned}
w(\eta_1(G')) \geq & w(2n+4b\delta-4bk+1) \\
= & 2b^2s^2 - [(4b+4b^2)n + (14b^2+16b^3)\delta - (12b^2+16b^3)k + 12b^2 + 10b]s \\
& + 4bn^2 + [(20b^2-8b)\delta - (16b^2-8b)k + 10b - 7]n - 30b^2k^2 + (8b^2+50b)k \\
& + (16b^3-30b^2)\delta^2 + [(60b^2-16b^3)k + 4b^2 - 50b]\delta - 6b - 21.
\end{aligned}
$$

设 $w_1(x) = 2b^2x^2 - [(4b+4b^2)n + (14b^2+16b^3)\delta - (12b^2+16b^3)k + 12b^2 + 10b]x + 4bn^2 + [(20b^2-8b)\delta - (16b^2-8b)k + 10b - 7]n - 30b^2k^2 + (8b^2+50b)k + (16b^3-30b^2)\delta^2 + [(60b^2-16b^3)k + 4b^2 - 50b]\delta - 6b - 21$ 是定义在 $x$ 上的实函数，且满足 $x \in [\delta+1, \frac{n+bk-2}{b+1}]$。容易验证， $w_1(x)$ 的对称轴为

$$
x = \frac{(4b+4b^2)n + (14b^2+16b^3)\delta - (12b^2+16b^3)k + 12b^2 + 10b}{4b^2}.
$$

经过一些计算，我们得到

$$
\frac{(4b+4b^2)n + (14b^2+16b^3)\delta - (12b^2+16b^3)k + 12b^2 + 10b}{4b^2} > \frac{n+bk-2}{b+1}.
$$

于是 $w_1(x)$ 关于 $x$ 随 $x \in [\delta+1, \frac{n+bk-2}{b+1}]$ 单调递减。因此 ，

$$
\begin{aligned}
w_1(s) \geq & w_1(\frac{n+bk-2}{b+1}) \\
= & \frac{1}{(b+1)^2}[2b^2n^2 + ((4b^4+2b^3-10b^2-8b)\delta + (-4b^4+8b^2+8b)k + 6b^3 - b^2 - 6b - 7) \\
& \cdot n + (16b^5+2b^4-44b^3-30b^2)\delta^2 + ((-32b^5-2b^4+90b^3+60b^2)k + 36b^4 + 18b^3 \\
& - 68b^2 - 50b)\delta + (16b^5-48b^3-30b^2)k^2 + (-36b^4-20b^3+74b^2+50b)k + 18b^3 \\
& + 19b^2 - 28b - 21].
\end{aligned}
$$

设 $w_2(x) = 2b^2x^2 + [(4b^4+2b^3-10b^2-8b)\delta + (-4b^4+8b^2+8b)k + 6b^3 - b^2 - 6b - 7]x + (16b^5 + 2b^4 - 44b^3 - 30b^2)\delta^2 + [(-32b^5-2b^4+90b^3+60b^2)k + 36b^4 + 18b^3 - 68b^2 - 50b]\delta + (16b^5-48b^3-30b^2)k^2 + (-36b^4-20b^3+74b^2+50b)k + 18b^3 + 19b^2 - 28b - 21$ 是定义在 $x$ 上的实函数，且满足 $x \in [2(b^2+2b)\delta^2 + 2\delta + 2b^2k^2, +\infty)$。我们可以得到 $w_2(x)$ 的导函数为

$$
w_2'(x) = 4b^2x + (4b^4+2b^3-10b^2-8b)\delta + (-4b^4+8b^2+8b)k + 6b^3 - b^2 - 6b - 7
$$

and

$$
\begin{aligned}
w_2'(x) \geq & 4b^2[2(b^2+2b)\delta^2 + 2\delta + 2b^2k^2] + (4b^4+2b^3-10b^2-8b)\delta + (-4b^4+8b^2+8b)k \\
& + 6b^3 - b^2 - 6b - 7 \\
= & (8b^4+16b^3)\delta^2 + (4b^4+2b^3-2b^2-8b)\delta + 8b^4k^2 + (-4b^4+8b^2+8b)k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+6b^3-b^2-6b-7\\
\geq&(8b^4+16b^3)(k+1)^2+(4b^4+2b^3-2b^2-8b)(k+1)+8b^4k^2+(-4b^4+8b^2+8b)k\\
&+6b^3-b^2-6b-7\\
=&16(b^4+b^3)k^2+(16b^4+34b^3+6b^2)k+12b^4+24b^3-3b^2-14b-7\\
>&0.
\end{aligned}
$$

显然， $w_2(x)$ 在区间 $[2(b^2+2b)\delta^2+2\delta+2b^2k^2,+\infty)$ 上单调递增。因此，

$$
\begin{aligned}
w_2(n)\geq&w_2(2(b^2+2b)\delta^2+2\delta+2b^2k^2)\\
=&(8b^6+32b^5+32b^4)\delta^4+(8b^6+20b^5+4b^4-24b^3-32b^2)\delta^3+[(16b^6+32b^5)k^2\\
&+(-8b^6-16b^5+16b^4+48b^3+32b^2)k+28b^5+32b^4-56b^3-80b^2-44b]\delta^2\\
&[(8b^6+4b^5-4b^4-16b^3)k^2+(-32b^5-10b^4+90b^3+76b^2+16b)k+36b^4+30b^3\\
&-70b^2-62b-14]\delta+8b^6k^4+(-8b^6+16b^4+16b^3)k^3+(28b^5-2b^4-60b^3-44b^2)\\
&\cdot k^2+(-36b^4-20b^3+74b^2+50b)k+18b^3+19b^2-28b-21\\
\geq&(8b^6+32b^5+32b^4)(k+1)^4+(8b^6+20b^5+4b^4-24b^3-32b^2)(k+1)^3\\
&+[(16b^6+32b^5)k^2+(-8b^6-16b^5+16b^4+48b^3+32b^2)k+28b^5+32b^4-56b^3\\
&-80b^2-44b](k+1)^2+[(8b^6+4b^5-4b^4-16b^3)k^2+(-32b^5-10b^4+90b^3+76b^2\\
&+16b)k+36b^4+30b^3-70b^2-62b-14](k+1)+8b^6k^4+(-8b^6+16b^4+16b^3)k^3\\
&+(28b^5-2b^4-60b^3-44b^2)k^2+(-36b^4-20b^3+74b^2+50b)k+18b^3+19b^2-28b\\
&-21\\
=&(32k^4+64k^3+80k^2+48k+16)b^6+(64k^4+200k^3+280k^2+196k+80)b^5\\
&+(32k^4+160k^3+252k^2+210k+104)b^4+(24k^3-18k^2-36k-32)b^3\\
&-(80k^2+144k+163)b^2-(28k^2+84k+134)b-14k-35\\
\geq&32k^{10}+128k^9+312k^8+488k^7+488k^6+272k^5-12k^4-204k^3-247k^2-148k\\
&-35\\
>&0.
\end{aligned}
$$

因此，我们可以得出 $w(\eta_1(G'))>0$和 $g_{Q_D(G_2)}(\eta_1(G'))<0$。因此， $\eta_1(G_2)>\eta_1(G')$。结合 $\eta_1(G)\geq\eta_1(G_1)\geq\eta_1(G_2)$，我们可以得出 $\eta_1(G)>\eta_1(G')$，这与该条件矛盾。

情形 2。 $s=\delta$。

根据引理 2.9，我们有 $\eta_1(G_1)\geq\eta_1(K_\delta\vee(K_{n-(b+1)\delta+bk-1}\cup(b\delta-bk+1)K_1))$，当且仅当 $G_1\cong K_\delta\vee(K_{n-(b+1)\delta+bk-1}\cup(b\delta-bk+1)K_1)$ 时等号成立。结合 $\eta_1(G)\geq\eta_1(G_1)$，可得 $\eta_1(G)\geq\eta_1(K_\delta\vee(K_{n-(b+1)\delta+bk-1}\cup(b\delta-bk+1)K_1))$，当且仅当 $G\cong K_\delta\vee(K_{n-(b+1)\delta+bk-1}\cup(b\delta-bk+1)K_1)$ 时等号成立。注意到 $K_\delta\vee(K_{n-(b+1)\delta+bk-1}\cup(b\delta-bk+1)K_1)$ 关于 $[1,b]$-奇因子不是 $k$-临界的，这就产生了矛盾。

情形 3. $s\leq\delta-1$。

回忆一下， $G$ 是 $G_1=K_s\vee(K_{n_1}\cup K_{n_2}\cup\cdots\cup K_{n_{bs-bk+2}})$的一个生成子图，其中$n_1\geq n_2\geq\cdots\geq n_{bs-bk+2}$ 且$\sum_{i=1}^{bs-bk+2}n_i=n-s$。显然， $s+n_{bs-bk+2}-1\geq\delta$，因为 $G_1$ 的最小度至少为 $\delta$。结合 $s\geq k+1$ 和 $b\geq k$，我们得到

$(bs-bk+2)-s-1=(b-1)s-bk+1\geq(b-1)(k+1)-bk+1=b-k\geq 0$. 我们断言 $n_1\geq 5(\delta-s+1)$。反设 $n_1\leq(5\delta-5s+4)$。注意到$n_1\geq n_2\geq\cdots\geq n_{bs-bk+2}\geq\delta+1-s$，我们得到

$$\begin{aligned}
n=&s+n_1+n_2+\cdots+n_{bs-bk+2}\\
\leq&s+(5\delta-5s+4)(bs-bk+2)\\
=&-5bs^2+(5b\delta+5bk+4b-9)s-5bk\delta+10\delta-4bk+8\\
\leq&-5b(\frac{5b\delta+5bk+4b-9}{10b})^2+\frac{(5b\delta+5bk+4b-9)^2}{10b}-5bk\delta+10\delta-4bk+8\\
=&\frac{5}{4}b\delta^2+(-\frac{5}{2}bk+2b+\frac{11}{2})\delta+\frac{5}{4}bk^2-2bk-\frac{9}{2}k+\frac{4}{5}b+\frac{81}{20b}+\frac{22}{5}
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&2(b^2+2b)\delta^2+2\delta+2b^2k^2-[\frac{5}{4}b\delta^2+(-\frac{5}{2}bk+2b+\frac{11}{2})\delta+\frac{5}{4}bk^2-2bk-\frac{9}{2}k+\frac{4}{5}b+\frac{81}{20b}\\
&+\frac{22}{5}]\\
=&(2b^2+\frac{11}{4}b)\delta^2+(\frac{5}{2}bk-2b-\frac{7}{2})\delta+2b^2k^2-\frac{5}{4}bk^2+2bk+\frac{9}{2}k-\frac{4}{5}b-\frac{81}{20b}-\frac{22}{5}\\
\geq&(4k^2+4k+2)b^2+(4k^2+8k-\frac{1}{20})b+k-\frac{81}{20b}-\frac{79}{10}\\
\geq&4k^4+8k^3+10k^2+\frac{19}{20}k-\frac{81}{20k}-\frac{79}{10}\\
>&0.
\end{aligned}$$

这与 $n$ 的条件矛盾。

令 $G_3=K_s\vee(K_{n-s-(\delta+1-s)(bs-bk+1)}\cup(bs-bk+1)K_{\delta+1-s})$。根据引理 2.10，我们有$\eta_1(G_1)\geq\eta_1(G_3)$，且等号成立当且仅当 $(n_1,n_2,\ldots,n_{bs-bk+2})=(n-s-(\delta+1-s)(bs-bk+1),\ \delta+1-s,\ldots,\delta+1-s)$。

考虑划分 $V(G_3)=V(K_s)\cup V(K_{n-s-(\delta+1-s)(bs-bk+1)})\cup V((bs-bk+1)K_{\delta+1-s})$，$Q_D(G_3)$ 的相应商矩阵等于

$$\begin{pmatrix}
n+s-2 & n-s-(\delta+1-s)(bs-bk+1) & (bs-bk+1)(\delta+1-s)\\
s & 2n-s-2 & 2(bs-bk+1)(\delta+1-s)\\
s & 2(n-s-(\delta+1-s)(bs-bk+1)) & 2(n-1+(bs-bk)(\delta+1-s))-s
\end{pmatrix}.$$

于是我们得到，$Q_D(G_3)$ 的对应商矩阵的特征多项式为$g_{Q_D(G_3)}(x)$，其中

$$\begin{aligned}
g_{Q_D(G_3)}(x)=&x^3+[2bs^2-(2b\delta+2bk+2b-1)s-5n+2bk\delta+2bk+6]x^2+[4b^2s^4+(4b\\
&-8b^2-8b^2k-8b^2\delta)s^3+(4b^2\delta^2+(16b^2k+8b^2-12b)\delta-2bn+4b^2k^2+(16b^2\\
&-4b)k+4b^2-4b)s^2+((2bk+2b\delta+2b+1)n-8b^2k^2+(4b-8b^2)k+(8b\\
&-8b^2k)\delta^2+(-8b^2k^2+(-16b^2+12b)k+8b-4)\delta)s+8n^2-((2bk+4)\delta\\
&+2bk+24)n+4b^2k^2+(4b^2k^2-8bk+4)\delta^2+(8b^2k^2-8bk+8)\delta+16]x\\
&-2b^2s^5+(-4b^2n+4b^2\delta+4b^2k+12b^2-2b)s^4+[(8b^2\delta+8b^2k+8b^2-4b)n\\
&-2b^2\delta^2-(8b^2k+20b^2-4b)\delta-2b^2k^2+(-24b^2+2b)k-18b^2+12b]s^3\\
&+[(-4b^2\delta^2+(-16b^2k-8b^2+12b)\delta-4b^2k^2+(-16b^2+4b)k-4b^2+8b)n
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(4b^2k+8b^2-2b)\delta^2+(4b^2k^2+(40b^2-4b)k+16b^2-28b)\delta+12b^2k^2+(36b^2\\
&-12b)k+8b^2-18b]s^2+[-2n^2+((8b^2k-8b)\delta^2+(8b^2k^2+(16b^2-12b)k\\
&-12b+4)\delta+8b^2k^2+(8b^2-8b)k-4b+6)n+(-2b^2k^2+(-16b^2+2b)k\\
&+16b)\delta^2+(-20b^2k^2+(-32b^2+28b)k+24b-8)\delta-18b^2k^2+(-16b^2+18b)k\\
&+8b-4]s-4n^3+(4\delta+20)n^2+[(-4b^2k^2+8bk-4)\delta^2+(-8b^2k^2+12bk\\
&-16)\delta-4b^2k^2+4bk-32]n+(8b^2k^2-16bk+8)\delta^2+(16b^2k^2-24bk+16)\delta\\
&+8b^2k^2-8bk+16.
\end{aligned}
$$

由于划分 $V(G_3)=V(K_s)\cup V(K_{n-s-(\delta+1-s)(bs-bk+1)})\cup V((bs-bk+1)K_{\delta+1-s})$ 是均等的，根据引理 2.2，$g_{Q_D(G_3)}(x)$ 的最大根 $=0$ 等于 $\eta_1(G_3)$。

令 $G'=K_\delta\vee(K_{n-(b+1)\delta+bk-1}\cup(b\delta-bk+1)K_1)$。现在考虑划分 $V(G')=V(K_\delta)\cup V(K_{n-(b+1)\delta+bk-1})\cup V((b\delta-bk+1)K_1)$，$Q_D(G')$ 的相应商矩阵等于

$$
\begin{pmatrix}
n+\delta-2 & n-(b+1)\delta+bk-1 & b\delta-bk+1\\
\delta & 2n-\delta-2 & 2(b\delta-bk+1)\\
\delta & 2(n-(b+1)\delta+bk-1) & 2(n-bk-1)+(2b-1)\delta
\end{pmatrix}.
$$

则 $Q_D(G')$ 的相应商矩阵的特征多项式为$g_{Q_D(G')}(x)$，其中

$$
\begin{aligned}
g_{Q_D(G')}(x)=&x^3+[(1-2b)\delta-5n+2bk+6]x^2+[(4b^2+4b)\delta^2+((2b-3)n-(8b^2+4b)k\\
&+8)\delta+8n^2-(2bk+24)n+4b^2k^2+16]x-2b^2\delta^3+[-(4b^2+4b)n+4b^2k+8b^2\\
&+6b]\delta^2+[2n^2+((8b^2+4b)k-4b-10)n-2b^2k^2-(16b^2+6b)k+8b+12]\delta\\
&-4n^3+20n^2-(4b^2k^2-4bk+32)n+8b^2k^2-8bk+16.
\end{aligned}
$$

注意到，根据引理 2.2，划分 $V(G')=V(K_\delta)\cup V(K_{n-(b+1)\delta+bk-1})\cup V((b\delta-bk+1)K_1)$ 是均等的，$g_{Q_D(G')}(x)$ 的最大根 $=0$ 等于 $\eta_1(G')$。

为了证明 $\eta_1(G_3)>\eta_1(G')$，只需证明 $g_{Q_D(G_3)}(\eta_1(G'))<0$。注意，$g_{Q_D(G')}(\eta_1(G'))=0$。因此，

$$
\begin{aligned}
g_{Q_D(G_3)}(\eta_1(G'))=&g_{Q_D(G_3)}(\eta_1(G'))-g_{Q_D(G')}(\eta_1(G'))\\
=&(s-\delta)[(2bs-2bk-2b+1)\eta_1^2(G')+((2bk+2b+1)n+4b^2s^3-(4b^2\delta\\
&+8b^2k+8b^2-4b)s^2+((8b^2k-8b)\delta-2bn+4b^2k^2+(16b^2-4b)k+4b^2\\
&-4b)s+(-4b^2k^2+8bk+4b^2+4b-4)\delta-8b^2k^2+(-8b^2+4b)k)\eta_1(G')\\
&-2b^2s^4+(-4b^2n+2b^2\delta+4b^2k+12b^2-2b)s^3+((4b^2\delta+8b^2k+8b^2\\
&-4b)n+(-4b^2k-8b^2+2b)\delta-2b^2k^2+(-24b^2+2b)k-18b^2+12b)s^2\\
&+(((-8b^2k+8b)\delta-4b^2k^2+(-16b^2+4b)k-4b^2+8b)n+(2b^2k^2\\
&+(16b^2-2b)k-2b^2-16b)\delta+12b^2k^2+(36b^2-12b)k+8b^2-18b)s\\
&-2n^2+((4b^2k^2-8bk-4b^2-4b+4)\delta+8b^2k^2+(8b^2-8b)k-4b+6)n\\
&-18b^2k^2-(16b^2-18b)k-2b^2\delta^2+(-8b^2k^2+(4b^2+16b)k+8b^2+6b\\
&-8)\delta+8b-4].
\end{aligned}
$$

设 $z(x)=(2bs-2bk-2b+1)x^2+[(2bk+2b+1)n+4b^2s^3-(4b^2\delta+8b^2k+8b^2-4b)s^2+((8b^2k-8b)\delta-2bn+4b^2k^2+(16b^2-4b)k+4b^2-4b)s+(-4b^2k^2+8bk+4b^2+4b-4)\delta-$

$8b^2k^2+(-8b^2+4b)k]x-2b^2s^4+(-4b^2n+2b^2\delta+4b^2k+12b^2-2b)s^3+[(4b^2\delta+8b^2k+8b^2-4b)n+($
$-4b^2k-8b^2+2b)\delta-2b^2k^2+(-24b^2+2b)k-18b^2+12b]s^2+[((-8b^2k+8b)\delta-4b^2k^2+(-16b^2+4b)k-4b^2+8b)$
$n+(2b^2k^2+(16b^2-2b)k-2b^2-16b)\delta+12b^2k^2+(36b^2-12b)k+8b^2-18b]s-2n^2+[($
$4b^2k^2-8bk-4b^2-4b+4)\delta+8b^2k^2+(8b^2-8b)k-4b+6]n-18b^2k^2-(16b^2-18b)k-2b^2\delta^2+[-8b^2k^2+($
$4b^2+16b)k+8b^2+6b-8]\delta+8b-4$ 是$x$ 中满足 $x\in[2n+4b\delta-4bk+1,+\infty$的实函数。于是， $z(x)$的对称轴为

$$x=-\frac{(2bk+2b+1)n+4b^2s^3-(4b^2\delta+8b^2k+8b^2-4b)s^2+((8b^2k-8b)\delta-2bn+4b^2k^2}{2(2bs-2bk-2b+1)}$$
$$\frac{+(16b^2-4b)k+4b^2-4b)s+(-4b^2k^2+8bk+4b^2+4b-4)\delta-8b^2k^2+(-8b^2+4b)k}{2(2bs-2bk-2b+1)}.$$

由于 $k+1\le s\le\delta-1$和 $n\ge\frac{6}{5}b^2\delta^3+\frac{8}{5}kb^2\delta^2$，我们有

$$\begin{aligned}
&2(2bs-2bk-2b+1)(2n+4b\delta-4bk+1)+[(2bk+2b+1)n+4b^2s^3-(\\
&4b^2\delta+8b^2k+8b^2-4b)s^2+((8b^2k-8b)\delta-2bn+4b^2k^2+(16b^2-4b)k+4b^2-4b)s+(\\
&-4b^2k^2+8bk+4b^2+4b-4)\delta-8b^2k^2+(-8b^2+4b)k]=4b^2s^3-(4b^2\delta+8b^2k+8b^2-4b)\\
&s^2+[(8b^2k+16b^2-8b)\delta+6bn+4b^2k^2-4bk+4b^2]s+(5-6b-6bk)n-[4b^2k^2+(\\
&16b^2-8b)k+12b^2-12b+4]\delta+8b^2k^2+(8b^2-8b)k-4b+2\ge4b^2(k+1)^3-(\\
&4b^2\delta+8b^2k+8b^2-4b)(\delta-1)^2+[(8b^2k+16b^2-8b)\delta+6bn+4b^2k^2-4bk+4b^2](k+1)+(\\
&5-6b-6bk)n-[4b^2k^2+(16b^2-8b)k+12b^2-12b+4]\delta+8b^2k^2+(8b^2-8b)k-4b+2\\
&=5n-4b^2\delta^3-(8b^2k-4b)\delta^2+(4b^2k^2+24b^2k+16b^2-4b-4)\delta+8b^2k^3+(24b^2-4b)k^2+(\\
&16b^2-12b)k+2\ge5(\frac{6}{5}b^2\delta^3+\frac{8}{5}kb^2\delta^2)-4b^2\delta^3-(8b^2k-4b)\delta^2+(\\
&4b^2k^2+24b^2k+16b^2-4b-4)\delta+8b^2k^3+(24b^2-4b)k^2+(16b^2-12b)k+2=2b^2\delta^3+4b\delta^2+\\
&(4b^2k^2+24b^2k+16b^2-4b-4)\delta+8b^2k^3+(24b^2-4b)k^2+(16b^2-12b)k+2>0.
\end{aligned}$$

因此， $z(x)$ 在区间 $[2n+4b\delta-4bk+1,+\infty)$ 内单调递增。我们得到

$$\begin{aligned}
z(\eta_1(G'))\ge&z(2n+4b\delta-4bk+1)\\
=&-2b^2s^4+[4b^2n+(16b^3+2b^2)\delta+(4b^2-16b^3)k+16b^2-2b]s^3-[(4b^2\delta+8b^2k\\
&+8b^2-4b)n+16b^3b^2+((16b^3+4b^2)k+32b^3-4b^2-2b)\delta-(32b^3-2b^2)k^2\\
&-(32b^3-48b^2+2b)k+26b^2-16b]s^2+[4bn^2+((8b^2k+24b^2-8b)\delta+4b^2k^2\\
&-(8b^2+4b)k+4b^2+6b)n+(32b^3k+32b^3-32b^2)\delta^2+((-16b^3+2b^2)k^2\\
&+(40b^2-2b)k+16b^3-2b^2-24b)\delta-16b^3k^3+(32b^2-32b^3)k^2-(16b^3-52b^2\\
&+12b^2-20b]s-(4bk+4b-4)n^2+[(-4b^2k^2+(-24b^2+8b)k-20b^2+24b-4)\\
&\cdot\delta+16b^2k^2+(16b^2-26b)k-10b+11]n-[16b^3k^2+(32b^3-32b^2)k+16b^3\\
&-30b^2+16b]\delta^2+[16b^3k^3+(32b^3-44b^2)k^2+(16b^3-44b^2+40b)k-4b^2+18b
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-12]\delta-10b^2k^2+(-8b^2+12b)k+6b-3\\
\geq&-2b^2(\delta-1)^4+[4b^2n+(16b^3+2b^2)\delta+(4b^2-16b^3)k+16b^2-2b](k+1)^3\\
&-[(4b^2\delta+8b^2k+8b^2-4b)n+16b^3b^2+((16b^3+4b^2)k+32b^3-4b^2-2b)\delta\\
&-(32b^3-2b^2)k^2-(32b^3-48b^2+2b)k+26b^2-16b](\delta-1)^2+[4bn^2+((8b^2k\\
&+24b^2-8b)\delta+4b^2k^2-(8b^2+4b)k+4b^2+6b)n+(32b^3k+32b^3-32b^2)\delta^2\\
&+((-16b^3+2b^2)k^2+(40b^2-2b)k+16b^3-2b^2-24b)\delta-16b^3k^3+(32b^2-32b^3)\\
&\cdot k^2-(16b^3-52b^2+16b)k+12b^2-20b](k+1)-(4bk+4b-4)n^2+[(-4b^2k^2\\
&+(-24b^2+8b)k-20b^2+24b-4)\delta+16b^2k^2+(16b^2-26b)k-10b+11]n\\
&-[16b^3k^2+(32b^3-32b^2)k+16b^3-30b^2+16b]\delta^2+[16b^3k^3+(32b^3-44b^2)k^2\\
&+(16b^3-44b^2+40b)k-4b^2+18b-12]\delta-10b^2k^2+(-8b^2+12b)k+6b-3\\
=&4n^2+[-4b^2\delta^3+(-8b^2k+4b)\delta^2+(4b^2k^2+24b^2k+16b^2+8b-4)\delta+8b^2k^3\\
&+(24b^2-4b)k^2+(16b^2-24b)k+11]n-(16b^3+2b^2)\delta^4-[(16b^3+4b^2)k-12b^2\\
&-2b]\delta^3+[(48b^3-2b^2)k^2+(96b^3-40b^2+2b)k+64b^3-48b^2-4b]\delta^2+[(16b^3\\
&+4b^2)k^3+(8b^2-2b)k^2+(92b^2+10b)k+60b^2-36b-12]\delta+(-32b^3+4b^2)k^4\\
&+(-96b^3+60b^2-2b)k^3+(-64b^3+132b^2-22b)k^2+(60b^2-28b)k-3.
\end{aligned}
$$

设 $z_1(x)=4x^2+[-4b^2\delta^3+(-8b^2k+4b)\delta^2+(4b^2k^2+24b^2k+16b^2+8b-4)\delta+8b^2k^3+(24b^2-4b)k^2+(16b^2-24b)k+11]x-(16b^3+2b^2)\delta^4-[(16b^3+4b^2)k-12b^2-2b]\delta^3+[(48b^3-2b^2)k^2+(96b^3-40b^2+2b)k+64b^3-48b^2-4b]\delta^2+[(16b^3+4b^2)k^3+(8b^2-2b)k^2+(92b^2+10b)k+60b^2-36b-12]\delta+(-32b^3+4b^2)k^4+(-96b^3+60b^2-2b)k^3+(-64b^3+132b^2-22b)k^2+(60b^2-28b)k-3$ 是定义在 $x$ 上的实函数，满足 $x\in[\frac{6}{5}b^2\delta^3+\frac{8}{5}kb^2\delta^2,+\infty)$。我们可以得到 $z_1(x)$ 的导函数为

$$
\begin{aligned}
z_1'(x)=&8x-4b^2\delta^3+(-8b^2k+4b)\delta^2+(4b^2k^2+24b^2k+16b^2+8b-4)\delta+8b^2k^3\\
&+(24b^2-4b)k^2+(16b^2-24b)k+11\\
\geq&8(\frac{6}{5}b^2\delta^3+\frac{8}{5}kb^2\delta^2)-4b^2\delta^3+(-8b^2k+4b)\delta^2+(4b^2k^2+24b^2k+16b^2+8b-4)\delta\\
&+8b^2k^3+(24b^2-4b)k^2+(16b^2-24b)k+11\\
=&\frac{28}{5}b^2\delta^3+(\frac{24}{5}kb^2+4b)\delta^2+(4b^2k^2+24b^2k+16b^2+8b-4)\delta+8b^2k^3+(24b^2-4b)k^2\\
&+(16b^2-24b)k+11\\
\geq&\frac{1}{5}(112k^3+392k^2+388k+108)b^2-(8k-12)b-4k+7\\
\geq&\frac{1}{5}(112k^5+392k^4+388k^3+68k^2+40k+35)\\
>&0.
\end{aligned}
$$

因此，$z_1(x)$ 在区间 $[\frac{6}{5}b^2\delta^3+\frac{8}{5}kb^2\delta^2,+\infty)$ 内单调递增。我们得到

$$
\begin{aligned}
z_1(n)\geq&z_1(\frac{6}{5}b^2\delta^3+\frac{8}{5}kb^2\delta^2)\\
=&\frac{1}{25}[24b^4\delta^6+(120b^3-16kb^4)\delta^5+(56b^4k^2+(720b^4+160b^3)k+480b^4-160b^3-170b^2)\\
&\cdot\delta^4+(400b^4k^3+(1680b^4-120b^3)k^2+(1120b^4-800b^3-260b^2)k+630b^2+50b)\delta^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(320b^4k^4+(960b^4-160b^3)k^3+(640b^4+240b^3-50b^2)k^2+(2400b^3-560b^2+50b)\\
&\cdot k+1600b^3-1200b^2-100b)\delta^2+((400b^3+100b^2)k^3+(200b^2-50b)k^2+(2300b^2\\
&+250b)k+1500b^2-900b-300)\delta+(-800b^3+100b^2)k^4-(2400b^3-1500b^2+50b)k^3\\
&-(1600b^3-3300b^2+550b)k^2+(1500b^2-700b)k-75]\\
\geq&\frac{1}{25}[(784k^6+5488k^5+14136k^4+17824k^3+11776k^2+3888k+504)b^4-(560k^4\\
&+520k^3-3400k^2-4920k-1560)b^3-(280k^4-310k^3-3520k^2-3290k-760)b^2\\
&-(200k^2+1350k+950)b-300k-375]\\
>&0.
\end{aligned}
$$

因此，我们可以得出结论：$z(\eta_1(G'))>0$ 和 $g_{Q_D(G_3)}(\eta_1(G'))<0$。因此，$\eta_1(G_3)>\eta_1(G')$。结合 $\eta_1(G)\geq\eta_1(G_1)\geq\eta_1(G_3)$，我们可以得出结论：$\eta_1(G)>\eta_1(G')$，这与条件矛盾。

至此，证明完成。 □

利益冲突声明

作者声明，他们不存在可能影响本文所报告研究工作的已知财务利益冲突或个人关系。

数据可用性

本文所述研究未使用任何数据。

## 参考文献


[1] I. Anderson，图的完美匹配，组合理论杂志B辑 10 (1971) 183-186。[2] M. Aouchiche，P. Hansen，图的距离矩阵的两个拉普拉斯矩阵，线性代数及其应用 439 (2013) 21-33。[3] Y. Cui，M. Kano，关于图的奇因子的一些结果，图论杂志 12 (1988) 327-333。[4] D.D. Fan，H.Q. Lin，二部图的 $k$-可扩展性和 $k$-因子的谱条件，应用数学进展 174 (2026) 103019。[5] D.D. Fan，H.Q. Lin，H.L. Lu，图的谱半径与 $[a,b]$-因子，离散数学 345 (2022) 112892。[6] O. Favaron，关于 $k$-因子临界图，数学讨论·图论 16 (1996) 41-51。.[7] G. Frobenius，关于可分解行列式，普鲁士皇家科学院会议录 (1917) 456-477。[8] M. Kano，H. Matsuda，关于(1, $f$)-奇因子的一些结果，组合学、图论与算法，第I、II卷，卡拉马祖，密歇根州 (1996)，527-533，New Issues Press，卡拉马祖，密歇根州 (1999)。[9] S. Kim，O. Suil，J. Park，H. Ree，由特征值确定正则图上的奇 $[1,b]$-因子，离散数学 348 (2020) 111906。

[10] C. Liu，J. Li，图和二部图的距离无符号拉普拉斯谱半径与完美匹配，arXiv预印本 arXiv:2104.01288，2021年。[11] X.G. Liu，Y. Lu，C.L. Jia，Q.N. Zhou，Y. Cui，涉及最小度的坚韧图的距离无符号拉普拉斯谱半径，arXiv预印本 arXiv:2504.07501，2025年。[12] H. Minc，《非负矩阵》，John Wiley & Sons Inc.，纽约，1988年。[13] O. Ore，图与子图，美国数学会汇刊 84 (1957) 109-136。[14] D.P. Sumner，具有1-因子的图，美国数学会会刊 42 (1974) 8-12。[15] W. Tutte，线性图的因子分解，伦敦数学会杂志 22 (1947) 107-111。[16] S. Wang，W. Zhang，关于$[1,b]$-奇因子为 $k$-临界的图的距离谱半径，arXiv预印本 arXiv:2511.17679，2025年。[17] T. Wang，M. Yang，X. Yang，关于 $[1,b]$-奇因子的 $k$-临界图的无符号拉普拉斯谱条件，Graphs Combin. 41 (2025) 125。[18] S. Win，图包含三个互不相交的1-因子的一个充分条件，图论杂志 6 (1982) 489-492。[19] R. Xing，B. Zhou，J. Li，关于图的距离无符号拉普拉斯谱半径，线性与多线性代数 62 (2014) 1377-1387。[20] L.H. You，M. Yang，W. So，W.G. Xi，关于均等商矩阵的谱及其应用，线性代数及其应用 577 (2019) 21-40。[21] Q. Yu，图中各种匹配扩张的刻画，澳大拉西亚组合数学杂志 7 (1993) 55-64。[22] L. Zheng，S. Li，X. Luo，G. Wang，最小度为 $k$-因子临界图的一些充分条件，离散应用数学 348 (2024) 279-291。[23] S.Z. Zhou，图的绑定数与受限分数$(g, f)$-因子，离散应用数学 305 (2021) 350-356。[24] S.Z. Zhou，关于 $[1,b]$-奇因子的 $k$-临界图的一些充分条件，arXiv预印本 arXiv:2502.07519，2025年。[25] S.Z. Zhou，图的坚韧度、分数可扩展性与距离谱半径，韩国数学会杂志 62 (2025) 601-617。[26] S.Z. Zhou，H. Liu，关于图的奇 $[1,b]$-因子的两个充分条件，线性代数及其应用 661 (2023) 149-162。[27] S.Z. Zhou，Y.L Zhang， $k$-可扩展图的无符号拉普拉斯谱半径，Filomat 39 (2025) 649-657。[28] S.Z. Zhou，Y.L Zhang，Z.R Sun，图的路因子的 $A_\alpha$-谱半径，离散数学 347 (2024) 113940。