arXiv:2602.00964v1 [math.FA] 1 Feb 2026

从里斯到角谷：表示定理与概率论的分析基础

LUIS ANTONIO CEDEÑO-PÉREZ、HUGO GUADALUPE REYNA-CASTAÑEDA 和 MARÍA DE LOS ÁNGELES SANDOVAL-ROMERO

摘要。现代概率论的分析基础可追溯到一系列表示定理，这些定理重塑了二十世纪的泛函分析。从弗雷歇将线性泛函与希尔伯特空间中的向量对应起来，到角谷对连续函数空间上测度的刻画，每个定理都揭示了线性、对偶性与测度如何交织在一起。沿着这条历史与概念脉络——从弗雷歇–里斯到 Riesz–Stieltjes，从 L^p 对偶性到里斯–马尔可夫–角谷——我们展示了期望、分布、条件期望和维纳测度，都是同一表示原理在分析上的体现。从这一视角来看，概率论不仅仅是测度论的延伸，更是泛函分析本身的几何实现：每个概率概念都体现了函数空间中的存在唯一性原理。

目录

1. 引言 1
2. 从弗雷歇–里斯到角谷：表示原理的诞生 2
3. 从希尔伯特空间到测度：表示原理的表述 5
3.1. 从投影到泛函：弗雷歇–里斯定理 5
3.2. 从连续函数到积分：里斯–斯蒂尔杰斯定理 5
3.3. 从连续函数到勒贝格空间：里斯在 L^p 3.4. 一般形式的原理：里斯–马尔可夫–角谷定理 7
4. 概率论中的表示原理 7
4.1. 弗雷歇–里斯定理：作为向量的期望 7
4.2. 里斯–斯蒂尔杰斯定理：作为代表测度的分布 10
4.3. 里斯定理在 L^p：条件期望 13
4.4. 里斯–马尔可夫–角谷定理：维纳测度的构造 15

参考文献 18

1. 引言

现代概率论在很大程度上建立在泛函分析的原理之上；参见 [13]。随机现象可以通过线性对象——泛函、算子或测度——来描述，这一思想以表示定理为基础。表示定理确立了函数空间的结构与作用于其上的测度之间的深刻对应关系。从这个意义上说，概率可以被视为对偶性、连续性和投影等概念的自然延伸；这些概念是在二十世纪泛函分析的框架内发展起来的（例如参见 [7]）。

体现这一联系的结果包括弗雷歇–里斯、Riesz–Stieltjes、L^p中的里斯以及里斯–马尔可夫–角谷表示定理。它们各自揭示了同一统一原理的不同侧面：将每一个

连续线性泛函与一个可测对象等同起来——无论是向量、函数还是测度——该对象唯一地表示它。

本文以这一原则为核心视角，表明概率论中的若干基本概念——期望、随机变量的分布、条件期望以及维纳测度——都可以获得统一的分析性解释。我们的贡献在于明确指出，这些构造中的每一个，都是在适当的函数空间上自然提出的线性表示问题的解。我们不再将这些概念视为彼此孤立或纯粹概率性的对象，而是揭示出：一旦确定了正确的泛函分析框架，它们的存在性与唯一性便可直接由里斯表示定理推出。

尽管这一视角隐含于经典文献之中，但尚未得到系统阐述：在本文中，我们分别确定每个概率概念背后的线性泛函，并将相应的里斯定理作为构造该泛函的机制。这一方法凸显了这些概念的泛函分析本质，并将其置于弗雷歇、里斯、马尔可夫和角谷的表示定理历史发展进程中。

从这一视角看，表示定理并非仅仅是技术工具，而是支撑现代概率论分析性表述的概念架构。因此，从里斯到角谷的历程勾勒出泛函分析与测度论之间的连续脉络，揭示出每个重要概率概念背后，都悄然蕴含着一个关于函数空间中存在性与唯一性的命题。

下一节将简要回顾弗雷歇–里斯、Riesz–Stieltjes、 L^p 中的里斯以及里斯–马尔可夫–角谷表示定理。这番回顾并非仅为提供背景：所有这些结果都根植于一种源自欧几里得空间的简单几何直觉；当这一思想发展并延伸至无限维空间和拓扑情形时，便显现出指引该理论的概念连续性。纵观这一演变，可以看到一个初等思想如何最终塑造了现代概率论的分析架构。

2. 从弗雷歇–里斯到角谷：表示原理的诞生

表示定理的历史源于线性代数中的一种基本几何直觉。在欧几里得空间 $\mathbb{R}^N$ 中，每个线性泛函 $L:\ \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 都可以写成内积：

$$L(x) = v_1x_1 + \cdots + v_Nx_N = \langle v, x\rangle_{\mathbb{R}^N} = v^\top x.$$

这个来自数学入门课程的熟悉表达式蕴含着一个深刻的思想：每个线性泛函都可以由一个向量表示，该向量充当其投影方向。

行向量 $v^\top$ 表示该泛函，而 L 作用于 x 时，只是衡量它们的对齐程度（见图 1）。

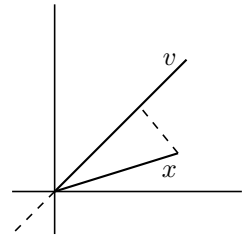

图 1。 $L(x)$ 的值衡量向量 x 在 v 方向上的投影。

二十世纪初，分析学正经历一场决定性的变革。柯西、魏尔斯特拉斯和勒贝格的进展，为抽象结构的出现奠定了基础：度量空间、赋范空间和拓扑空间；参见 [3, 7]。

在这套新语言中，数学家开始探究泛函与向量之间的对应关系能否延伸到有限维世界之外。换言之：当空间具有无限多个维度时，是否仍然可以认为每个连续泛函都是沿某个方向进行的投影？

答案逐渐浮现，来自一系列发现。这些发现勾勒出现代泛函分析的诞生，也催生了我们如今所称的里斯表示定理。

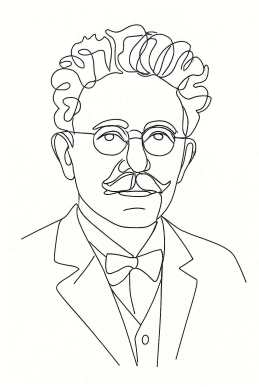

图 2. 莫里斯·勒内·弗雷歇（1878–1973）。

第一步由莫里斯·勒内·弗雷歇（1878–1973）迈出（见图2）。在他 1906 年的论文《关于泛函微积分的若干问题》；参见 [12], 他引入了度量空间以及依赖于函数的泛函等概念，奠定了将线性代数思想拓展至函数领域的概念框架。

不久之后，弗里吉斯·里斯（1880–1956）（见图3）为这一直觉赋予了最精确的数学形式。1907年，在他那篇著名论文《关于线性泛函运算》；参见 [20], 中，他证明了希尔伯特空间上的每个连续线性泛函 $\mathcal{H}$ 都可以唯一地表示为该空间中某个向量与其他向量的内积。这个结果如今称为弗雷歇–里斯定理，它保留了有限维情形下的几何直觉：应用一个泛函等同于将向量投影到空间中的某个方向上。

由此诞生了表示原理——每个线性运算都可以由一个几何对象来“体现”的思想。

里斯继续推广他的结果。1909年，在他的长篇论文《关于线性泛函运算》中；参见 [21], 他将这一原理推广到了紧区间上连续函数构成的空间 $\mathcal{C}([a,b])$，并证明每个连续线性泛函都可以表示为关于某个有界变差函数的黎曼–斯蒂尔切斯积分。

这个 Riesz–Stieltjes 定理在经典积分微积分与新兴的测度理论之间搭建了第一座桥梁：坐标向量被有界变差函数取代，有限和则被积分取代。

1910 年至 1916 年间，里斯更进一步，提出了 n 维实数空间的对偶性。在其 1916 年的论文《论线性泛函方程》中；参见 [22], ，他证明了，$L^p(a,\ b)$ 上的每个连续线性泛函都可以表示为对 $L^q(a,\ b)$ 中某个函数的积分，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。这一著名的 L^p–L^q 对偶性成为现代分析的支柱之一，表明线性泛函可以被



图 3. 弗里吉斯·里斯（1880–1956）。

解释为由可积函数而非向量所介导的广义投影。

到 20 世纪 30 年代中期，表示原理已臻成熟。1937年，里斯发表了《论连续函数》；参见 [23]，证明了在 $C(K)$ 上的每个正连续线性泛函，其中 K 是紧致的，都与一个正则博雷尔测度唯一对应。

这赋予抽象泛函以具体含义：函数空间上的线性运算可以理解为其定义域上的测度。投影的几何学由此演变为测度的几何学。

下一步来自俄罗斯分析与概率学派。1938年，小安德烈·安德烈耶维奇·马尔可夫（1903–1979）（见图 4）发表了《论平均值与外部密度》；参见 [16]，他通过将里斯的结果推广到局部紧空间，取消了紧致性假设。他证明，在 $C_c(\Omega)$ 上的连续正线性泛函——即紧支撑连续函数空间上的泛函——同样可以用正则博雷尔测度表示。



图4. 小安德烈·安德烈耶维奇·马尔可夫（1903–1979）。

尽管他的著作以俄语写成，在西方鲜有传播，但它在里斯的理论与后来由角谷静夫完成的现代表述之间建立了关键联系。

最后，在1941年，角谷静夫（1911–2004）（见图5）在连续函数空间的框架内统一了里斯和马尔可夫的思想。在他的论文抽象（M）空间的具体表示（连续函数空间的一种刻画）；参见 [15]，他提出了里斯–马尔可夫–角谷定理的最终版本，指出在 $C(\Omega)$上，Ω 为紧豪斯多夫空间时，每个连续正线性泛函都可以由一个正则博雷尔测度表示。

由此，泛函分析的抽象性达到了最具体的表达：泛函成为测度，线性运算成为积分。这个始于



图 5. 角谷静夫（1911–2004）。

矩阵表示的故事，在 $\mathbb{R}^N$ 最终发展为一套涵盖无限维空间和拓扑结构的理论。

从弗雷歇和里斯到角谷的历程，不仅展现了一系列数学成果，也讲述了人们对线性这一概念的理解发生的深刻转变。现在，我们将严谨地介绍这些以人名命名的表示定理。

3. 从希尔伯特空间到测度：表示原理的表述

本节将介绍本文后续部分所采用的里斯表示定理的确切版本。由于每个结果都会根据其所处的泛函背景而有不同的表述，因此我们有必要从一开始就明确本文将采用的具体假设和结论。

论述顺序遵循表示原理的自然发展脉络：首先介绍希尔伯特空间中的弗雷歇–里斯定理（见 [11, 定理 5。25]），接着介绍实数轴上的 Riesz–Stieltjes 定理（见 [1, 定理 9。9]）以及 n 维实数空间中的里斯定理（见 L^p 空间（见 [1, 定理 8。15]），最后介绍适用于紧支撑连续函数空间的里斯–马尔可夫–角谷定理（见 [10, 定理 1。1]）。

这些表述确立了泛函框架，为后续发展提供了共同基础。

3.1. 从投影到泛函：弗雷歇–里斯定理。

表示原理的起点在于希尔伯特空间，在那里，对偶性通过内积来表达。

定理 3.1 (弗雷歇–里斯，1907年)。 设 $\mathcal{H}$ 为实希尔伯特空间。若 $L : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ 是一个线性连续泛函，则存在唯一的向量 $w \in \mathcal{H}$，使得

$$L(u) = \langle u, w \rangle \qquad \forall\, u \in \mathcal{H}.$$

这一结果将希尔伯特空间的对偶空间与其自身等同起来，完整保留了有限维情形的几何直觉：作用一个泛函等价于向空间中的某个特定方向进行投影。

3.2. 从连续函数到积分：里斯–斯蒂尔杰斯定理。

当从向量空间过渡到函数空间时，投影的概念转化为积分。

考虑紧区间$[a,b] \subset \mathbb{R}$上的实连续函数空间 $\mathcal{C}([a,b])$，并赋予其上确界范数

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

在此范数下， $\mathcal{C}([a,b])$ 是一个巴拿赫空间。

定理 3.2 (Riesz–Stieltjes, 1909年)。 设 $L:\ \mathcal{C}([a,b]) \to \mathbb{R}$ 是一个线性连续泛函。那么存在一个有界变差函数 $\alpha:\ [a,b] \to \mathbb{R}$，使得

$$L(f) = \int_{[a,b]} f(t)\, d\lambda_\alpha(t) \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}([a,b]),$$

其中， λ_α 表示由 α生成的勒贝格–斯蒂尔切斯测度。

一旦固定该函数 α 在某一点的值，并要求其右连续，它就是唯一的。此外，若 L 为正（$L(f) \geq 0$ 对每个 $f \geq 0$都成立），则 α 单调不减。

里斯的想法是用一个有界变差函数来替代“表示” L 的向量，并用积分替代有限和。这样一来，泛函与测度之间的对应关系便在实数轴上得到了明确体现。

类似地，也可以针对实数轴上的紧支撑连续函数，表述一个类似的结果。令 $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ 表示实连续紧支撑函数空间（即在 $\mathbb{R}$ 的某个紧子集之外为零的函数），并赋予该空间上确界范数。结果可表述如下。

定理 3.3 (Riesz–Stieltjes 在 $\mathbb{R}$)。 设 $L:\ \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 是一个线性连续泛函。那么存在一个函数 $\alpha:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，它在每个紧区间上都有有界变差，并且满足

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, d\lambda_\alpha(t) \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}),$$

其中 λ_α 是相应的勒贝格–斯蒂尔切斯测度。

函数 α 唯一（相差一个初始值），且可以取为右连续。如果 L 是正的，那么 α 单调不减。

证明可通过将紧致情形推广到整个实数轴来完成。考虑递增区间族 $[-n,n]$，$n \in \mathbb{N}$，并在每个区间上定义限制泛函 $L_n = L|_{\mathcal{C}([-n,n])}$。

每个 L_n 都是线性且连续的，并且根据定理 3.2 存在一个有界变差函数 $\alpha_n:\ [-n,n] \to \mathbb{R}$ 使得

$$L(f) = \int_{[-n,n]} f(t)\, d\lambda_{\alpha_n}(t) \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}([-n,n]).$$

固定一种归一化方式，例如 $\alpha_n(0) = 0$，并要求每个 α_n 都右连续，定理的唯一性部分保证这些函数在重叠部分上相等：若 $m > n$，则 $\alpha_m|_{[-n,n]} = \alpha_n$。

因此，可以定义函数 $\alpha:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得只要$x \in [-n,n]$，就有 $\alpha(x) = \alpha_n(x)$。此函数在每个紧区间上都有有界变差，并满足

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, d\lambda_\alpha(t) \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}).$$

此外，若 L为正，则每个 α_n 都单调不减；根据相容性， α也单调不减。因此，连续线性泛函的积分表示自然扩展到整个实数轴，无需紧致性。

3.3. 从连续函数到勒贝格空间：中的里斯 L^p。表示原理演进的下一步出现在勒贝格空间 L^p的背景下，此处线性与积分以最一般的形式交织在一起。

设 $(\Omega\ \mathcal{F},\ \mu)$ 是一个测度空间，且 $p,\ q \in (1,\ \infty)$ 是共轭指数，即满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$。

定理 3.4（中的里斯，L^p，1916）。设 $L:\ L^p(\Omega\ \mathcal{F}, \mu) \to \mathbb{R}$ 是一个线性连续泛函。那么存在唯一的函数 $g \in L^q(\Omega\ \mathcal{F}, \mu)$，使得

$$L(f) = \int_\Omega f(\omega)\, g(\omega)\, d\mu(\omega) \qquad \forall\, f \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu).$$

这一结果刻画了 L^p 的对偶空间为共轭空间 L^q，也可以视为将弗雷歇–里斯定理从内积推广到积分乘积。

3.4.一般形式的表示原理：里斯–马尔可夫–角谷定理。表示原理在一般拓扑环境中的应用达到了巅峰。

设 $(\Omega\ \tau)$ 是一个局部紧豪斯多夫空间，并令 $\mathcal{C}_c(\Omega)$ 表示赋予上确界范数的紧支撑连续函数空间。

定理 3.5（里斯–马尔可夫–角谷，1941年）。设 $L:\ \mathcal{C}_c(\Omega) \to \mathbb{R}$ 是一个线性、正且连续的泛函。那么，存在唯一的正则博雷尔测度 μ 定义在 Ω上，使得

$$L(f) = \int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega) \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}_c(\Omega).$$

这一由里斯（1909年、1937年）、马尔可夫（1938年）和角谷（1941年）的成果综合而成的定理，给出了表示原理最一般的表述：连续函数空间上的连续正线性泛函与正则博雷尔测度一一对应。

通过这些表述，我们确立了本文将采用的泛函与记号框架。它们各自展现了里斯所受启发的同一几何原理的一个阶段：每一种连续线性作用最终都可以理解为某种积分形式。

本文接下来的最后一节将阐述概率论的基本概念（如期望、分布、条件期望和维纳测度）如何体现为单一表示原理的解析表现。此外，基础概率论并非仅仅是测度论的扩展，更是泛函分析本身的几何实现。

4. 概率论中的表示原理

4.1. **弗雷歇–里斯定理：将期望视为向量**。在经典概率论中，人们通常研究取值于 $\mathbb{R}^N$ 的随机变量，在这类情形下，期望、方差和分布等概念都有众所周知的几何与解析解释。然而，在更一般的情形下——例如研究随机偏微分方程、随机演化过程或分析随机场时——自然会考虑取值于无限维巴拿赫空间或希尔伯特空间的随机变量；参见 [6]。在这种情况下，“期望值”的概念不再显而易见：仅仅对坐标进行积分是不够的；我们需要一种与空间的向量结构和拓扑结构相一致的积分概念。

博赫纳积分正是为满足这一需求而产生的。它是将勒贝格积分自然推广到取值于巴拿赫

空间的函数上的方法，其目标是将经典的期望概念扩展到向量值随机变量的情形。在这一框架下，可积性以空间范数和强可测性来表述，而积分则定义为空间中的一个元素，它能一致地再现所有连续线性泛函作用于可积函数时的结果（参见 [8, 第 2 章和 3]）。这一构造保留了标量积分的基本性质 —— 线性、连续性和唯一性 —— 并为研究抽象向量空间中的随机变量奠定了坚实基础。

当巴拿赫空间实际上是可分希尔伯特空间时，理论便会变得格外清晰。根据弗雷歇–里斯表示定理，每个连续线性泛函都对应于希尔伯特空间本身中的一个唯一向量，因此，向量值随机变量的期望的存在性和唯一性可以直接推导出来。由此可见，博赫纳积分不仅为此情境下期望值的构造提供了一种优雅而严谨的方法，也凸显了泛函分析原理与现代概率论基础之间的深刻联系：二者都围绕着线性表示和结构对偶这一相同理念展开。

设 $(\Omega\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ 是一个完备概率空间，且 $(\mathcal{H},\ \langle\cdot,\ \cdot\rangle,\ \|\cdot\|)$ 是一个定义在 $\mathbb{R}$上的可分希尔伯特空间。

$\mathcal{H}$ 的拓扑结构自然导出其博雷尔 σ-代数，记作 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$，它由该空间的开集生成。因此，$(\mathcal{H}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ 是一个可测空间。在此背景下，函数 $X : \Omega \to \mathcal{H}$ 若可测，则称为一个 $\mathcal{H}$ 值随机变量；也就是说，对于每个开集 $\mathcal{O} \subset \mathcal{H}$，都有 $X^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{F}$。

每个随机变量 $X : \Omega \to \mathcal{H}$ 都会自然地在 $\mathcal{H}$上诱导出一个概率测度，用以描述 X 的值在希尔伯特空间中的分布。这个测度称为 X的分布，是推前测度 $X_\sharp\mathbb{P} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to [0, 1]$，定义如下:

$$X_\sharp\mathbb{P}(\mathcal{O}) := \mathbb{P}\big(X^{-1}(\mathcal{O})\big).$$

测度 $X_\sharp\mathbb{P}$ 是 $(\mathcal{H}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ 上的概率测度，并满足变量替换公式，即:

$$\int_\Omega f\big(X(\omega)\big)\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathcal{H}} f(v)\, d\big(X_\sharp\mathbb{P}\big)(v),$$

对于每个可测的 $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ （参见 [6, 定理 2.1]）。这一恒等式使我们能够通过将 $\mathbb{P}$ 推前至随机变量 X的值域，直接在 $\mathcal{H}$ 上定义积分。

设 $X : \Omega \to \mathcal{H}$ 是一个随机变量。为分析 X取值的大小，考虑范数映射 $\|\cdot\| : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$。由于范数是连续的，因此它是可测的；于是复合映射 $\|\cdot\| \circ X : \Omega \to \mathbb{R}$ 定义了一个实值随机变量。这使我们能够量化 X 取值的大小，并在 $\mathcal{H}$中表述可积性条件。特别地，我们将关注满足以下条件的随机变量

$$\int_{\mathcal{H}} \|v\|\, d\big(X_\sharp\mathbb{P}\big)(v) < \infty,$$

该条件保证 X的期望范数有限。

在这一假设下，可以通过对 X的分布积分，在 $\mathcal{H}$ 上定义一个线性连续泛函。

设 $X : \Omega \to \mathcal{H}$ 是一个满足以下条件的随机变量

$$\int_{\mathcal{H}} \|v\|\, d\big(X_\sharp\mathbb{P}\big)(v) < \infty.$$

定义 $L\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ 如下

$$L(u) := \int_{\mathcal{H}} \langle u, v\rangle\, d\big(X_\sharp\mathbb{P}\big)(v),$$

根据 $\mathcal{H}$ 上内积的性质，这显然是线性的。此外，应用柯西–施瓦茨不等式，我们得到

$$|L(u)| \le \int_{\mathcal{H}} |\langle u, v\rangle| \, d\big(X_\sharp \mathbb{P}\big)(v) \, d\big(X_\sharp \mathbb{P}\big)(v) \le \|u\| \int_{\mathcal{H}} \|v\| \, d\big(X_\sharp \mathbb{P}\big)(v) \quad \forall\, u \in \mathcal{H},$$

这意味着 L 在 $\mathcal{H}$上连续。

根据弗雷歇–里斯表示定理（见定理 3.1），存在唯一的 $\mu \in \mathcal{H}$ 使得

$$\int_{\mathcal{H}} \langle u, v\rangle \, d\big(X_\sharp \mathbb{P}\big)(v) \;=\; L(u) \;=\; \langle u, \mu\rangle \qquad \forall\, u \in \mathcal{H}.$$

该向量 μ 刻画了泛函 L，进而通过其分布刻画了随机变量X。元素 μ称为 X 的**博赫纳积分**，并表示其**期望**；为方便起见，我们记作 $\mu = \mathbb{E}(X)$。

下面给出一个详细的例子。

例 4.1. 考虑概率空间 $((0,1)\ \mathcal{L}(0,1)\ \lambda)$，其中 $\mathcal{L}(0,1)$ 表示勒贝格 σ-代数，且 λ 为勒贝格测度。令 $L^2(0,1)$ 为赋有内积的可分希尔伯特空间（见 [14,第 23]章）

$$\langle u, v\rangle \;=\; \int_{(0,1)} u(t)\, v(t)\, d\lambda(t), \qquad u, v \in L^2(0,1).$$

定义 χ：（0，1）$\to L^2$(0，1) 为

$$\chi(\omega) := \mathbf{1}_{(0,\omega)}.$$

我们断言，χ 是一个 L^2（0，1）值随机变量。事实上，关于 L^2（0，1）范数的 χ连续性可以直接验证：给定 $\omega_0 \in$（0，1）和 $\varepsilon > 0$，令 $\delta := \varepsilon^2 > 0$，对于每个满足 $|\omega_0 - \omega| < \delta$ 的 $\omega \in$（0，1），我们有

$$\begin{aligned} \|\chi(\omega_0) - \chi(\omega)\|^2_{L^2(0,1)} &= \int_{(0,1)} \big|\mathbf{1}_{(0,\omega_0)}(t) - \mathbf{1}_{(0,\omega)}(t)\big|^2 \, d\lambda(t) \\ &= \int_{(0,1)} \mathbf{1}_{(0,\omega_0)\triangle(0,\omega)}(t) \, d\lambda(t) \\ &= \lambda\big((0,\omega_0)\triangle(0,\omega)\big) = |\omega_0 - \omega| < \varepsilon^2, \end{aligned}$$

其中，（0，ω_0）△（0，ω）表示对称差。因此，χ 是连续的，因而是可测的。

对于每个 $\omega \in$（0，1），我们还有

$$\|\chi(\omega)\|^2_{L^2(0,1)} = \int_{(0,1)} \big|\mathbf{1}_{(0,\omega)}(t)\big|^2 \, d\lambda(t) = \lambda(0,\omega) = \omega.$$

利用变量替换公式，我们得到

$$\begin{aligned} \int_{L^2(0,1)} \|v\|_{L^2(0,1)} \, d\big(\chi_\sharp \lambda\big)(v) &= \int_{(0,1)} \|\chi(\omega)\|_{L^2(0,1)} \, d\lambda(\omega) \\ &= \int_{(0,1)} \left(\int_{(0,1)} \big|\mathbf{1}_{(0,\omega)}(t)\big|^2 \, d\lambda(t) \right)^{1/2} d\lambda(\omega) \\ &= \int_{(0,1)} \omega^{1/2} \, d\lambda(\omega) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

令 $u \in L^2(0,\ 1)$ 为任意值。再次利用变量替换公式和富比尼定理（参见 [9,定理 1.7。2]），

$$\begin{aligned}\int_{L^2(0,1)} \langle v, u\rangle \, d\big(\chi_\sharp \lambda\big)(v) &= \int_{(0,1)} \langle \chi(\omega), u\rangle \, d\lambda(\omega) \\ &= \int_{(0,1)} \left(\int_{(0,1)} \mathbf{1}_{(0,\omega)}(t)\, u(t)\, d\lambda(t) \right) d\lambda(\omega) \\ &= \int_{(0,1)} \left(\int_{(0,1)} \mathbf{1}_{(t,1)}(\omega)\, u(t)\, d\lambda(\omega) \right) d\lambda(t) \\ &= \int_{(0,1)} (1-t)\, u(t)\, d\lambda(t).\end{aligned}$$

根据弗雷歇–里斯定理，随机变量的期望（博赫纳积分） χ 是函数 μ： $(0,1) \to \mathbb{R}$ 定义为 $\mu(t) = 1-t$，它属于 $L^2(0,1)$（见图*6*）。

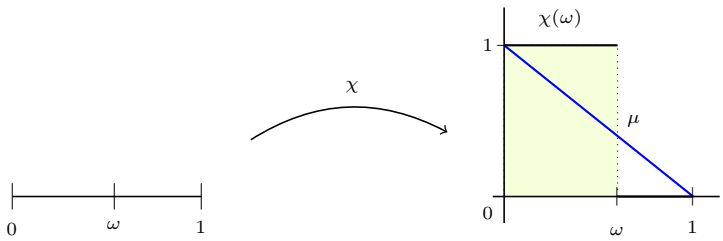

图6. 随机变量 χ 的期望值的图示：$(0,1) \to L^2(0,1)$。

因此，可分希尔伯特空间中的期望概念自然地源于弗雷歇–里斯定理：取值于 $\mathcal{H}$ 的随机变量的期望值是 $\mathcal{H}$ 中唯一能够表示由 X诱导的积分泛函的向量。

4.2. 里斯–斯蒂尔杰斯定理：分布作为代表测度。在现代概率论中，分布函数的概念是描述实值随机变量 X 行为的基本支柱之一。函数

$$F_X(x) = \mathbb{P}\big(X^{-1}((-\infty, x])\big),$$

包含了关于 X的所有概率信息：其概率分布、其矩、计算期望值的可能性，以及更一般而言，其统计结构。分布函数使我们能够将随机现象从抽象空间$(\Omega\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ 转换到实数域，在那里，测度论和积分为其分析提供了精确的框架（例如参见 [9, §1.2]）。

除了其基本定义之外，F_X 的存在性和性质可以理解为一个泛函分析原理的深刻结果：里斯–斯蒂尔切斯表示定理。该定理确立了空间 $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$上的正线性泛函与 $\mathbb{R}$上的有限博雷尔测度之间的对应关系，而后者又可以由有界变差的右连续函数表示。

从这一视角来看，分布函数不仅仅是一个概率对象，更是泛函分析与测度论之间对应关系的具体体现：每个期望值都是一个线性泛函的取值，而根据里斯–斯蒂尔杰斯定理，该泛函可表示为关于某个有界变差函数的积分。在概率语境中，这个函数正是分布函数。

设 $(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{P})$ 是一个概率空间，且 $X:\Omega\ \to\mathbb{R}$ 是一个实值随机变量。考虑由下式定义的泛函 $L:\mathcal{C}_c(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$

$$L(f):=\mathbb{E}\big(f(X)\big)=\int_\Omega f(X(\omega))\,d\mathbb{P}(\omega).$$

根据勒贝格积分的性质， L是线性且为正的。此外，

$$|L(f)|\le\int_\Omega|f(X(\omega))|\,d\mathbb{P}(\omega)\le\|f\|_\infty\int_\Omega 1\,d\mathbb{P}(\omega)=\|f\|_\infty,\qquad\forall f\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R}),$$

这意味着 L 在 $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ 上连续。

将里斯–斯蒂尔杰斯表示定理应用于 L（见定理 3.3），可得一个右连续非减函数 $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得

$$L(f)=\int_{\mathbb{R}}f(t)\,d\lambda_\alpha(t),\qquad\forall f\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R}),\tag{4.1}$$

其中， λ_α 表示其相应的勒贝格–斯蒂尔切斯测度。

对每个 $j\in\mathbb{N}$，考虑一个连续函数 $\psi_j:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $0\le\psi_j\le1$,$\psi_j=1$ 在 $[-j,j]$ 上，以及 $\psi_j=0$ 在 $\mathbb{R}\setminus[-(j+1)\ j+1]$（见图 7）。

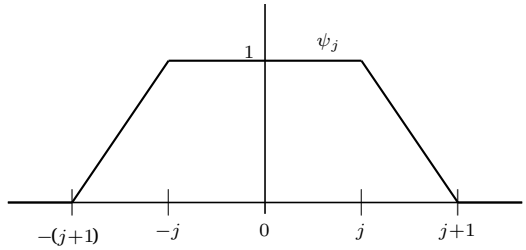

图 7. 函数 ψ_j 的图像

因此 (ψ_j) 是 $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ 中的一个单调不减序列，逐点收敛于常值函数 1 于 $\mathbb{R}$上。根据单调收敛定理（参见[1,定理 4。6]），我们得到

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha(\mathbb{R})&=\int_{\mathbb{R}}1(t)\,d\lambda_\alpha(t)\\&=\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\psi_j(t)\,d\lambda_\alpha(t)\\&=\lim_{j\to\infty}L(\psi_j)\\&=\lim_{j\to\infty}\mathbb{E}[\psi_j(X)]\\&=\mathbb{E}[1]=1,\end{aligned}$$

因此， λ_α 是一个概率测度。

令 $x\in\mathbb{R}$ 固定但任意。对于每个 $j\in\mathbb{N}$，定义连续函数$f_j:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得

$$f_j(t)=\begin{cases}1, & t\le x,\\ 1-j(t-x), & x\le t\le x+\frac{1}{j},\\ 0, & t\ge x+\frac{1}{j}.\end{cases}$$

因此 (f_j) 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数单调不减序列，满足$f_j\to\mathbf{1}_{(-\infty,x]}$ 在 $\mathbb{R}$ 上逐点成立（见图 8）。

由于 $f_j\notin\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ 对于 $j\in\mathbb{N}$，我们考虑对它们进行截断。对于每个 $m\in\mathbb{N}$，任取 $\theta_m\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, 使得 $0\le\theta_m\le1$, $\theta_m=1$ 在 $[-m,m]$上，且 $\theta_m=0$在 $\mathbb{R}\setminus[-(m+1)\ m+1]$上。定义函数 $g_{j,m}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，令 $g_{j,m}:=f_j\,\theta_m$。因此，对于所有 j，都有$g_{j,m}\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$（例如参见图 9）。

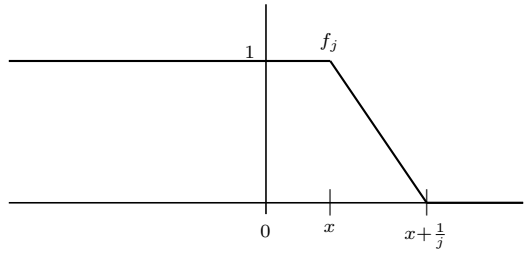

图 8. 函数 f_j 的图像

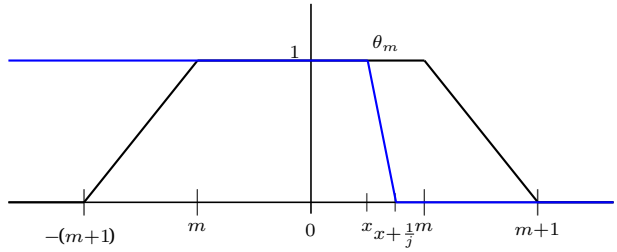

图9. f_j 的截断

对于固定的 $j \in \mathbb{N}$，我们有 $g_{j,\ m} \to f_j$ 在 $\mathbb{R}$ 上逐点成立，当 $m \to \infty$时。将（4.1）应用于$g_{j,\ m}$ 并令 $m \to \infty$ 趋于极限，由单调收敛定理可得

$$\mathbb{E}(f_j(X)) = \int_{\mathbb{R}} f_j(t)\, d\lambda_\alpha(t).$$

现在，令 $j \to \infty$ 趋于极限，再次应用单调收敛定理，我们得到

$$\mathbb{E}\big(\mathbf{1}_{X^{-1}(-\infty,x]}\big) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(-\infty,x]}(t)\, d\lambda_\alpha(t).$$

因此，

$$\lambda_\alpha((-\infty, x]) = \mathbb{P}(X^{-1}((-\infty, x])).$$

由于族 $\{(-\infty,\ x] :\ x \in \mathbb{R}\}$ 是生成 π 的-系统，$\mathcal{B}(\mathbb{R})$，Dynkin定理（见 [9,定理 A.1。5]）意味着

$$\lambda_\alpha(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)), \qquad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{4.2}$$

由于 $\alpha :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是右连续且单调不减的，单侧极限

$$c_- := \lim_{x \to -\infty} \alpha(x), \qquad c_+ := \lim_{x \to +\infty} \alpha(x),$$

存在，并且 $\lambda_\alpha((-\infty,\ x]) = \alpha(x) - c_-$。因此，对于任意 $x \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(x) - c_- = \mathbb{P}(X \le x).$$

定义 $F :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为 $F(x) :\ = \alpha(x) - c_-$，可见 F 是右连续、单调不减的，并且满足

$$F(x) = \mathbb{P}(X^{-1}((-\infty, x])), \qquad \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = \lambda_\alpha(\mathbb{R}) = 1.$$

最后，利用（4.1）以及 $\lambda_\alpha = \lambda_F$这一事实，我们得到

$$\mathbb{E}\big(f(X)\big) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, d\lambda_\alpha(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dF(x), \qquad \forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}).$$

因此 $F :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是随机变量 X的分布函数。

因此，里斯–斯蒂尔杰斯定理表明，随机变量的分布函数在表示定理的框架内自然产生。

将期望泛函等同于勒贝格–斯蒂尔杰斯积分，我们看到， $\mathbb{R}$ 上的每一个概率博雷尔测度都可以由一个右连续、单调不减的函数来描述，其变差恰好再现累积概率。

4.3. **中的里斯定理 L^p：条件期望**。条件期望是现代概率论的基本概念之一，它描述了可用信息受到子σ-代数限制时的期望（见 [9, 第 4]章）。除了概率解释之外，这一概念还具有深刻的解析结构，可以在一般的 L^p 空间框架内加以理解。

本节将说明，条件期望的存在性与唯一性可直接由 L^p 中的里斯表示定理推出。该定理将连续线性泛函表示为关于对偶空间 L^q 中元素的积分，为我们提供了必要工具，使条件期望能够表述为 L^p 中唯一一个函数，它表示最初在 L^q 中定义的同一泛函。

因此，构造条件期望既不需要 L^2 中的拉东–尼科迪姆定理，也不需要几何论证；它自然源自 L^p 与 L^q 之间的结构对偶；参见 [19]。这一视角揭示了条件期望真正的泛函本质，并将条件性置于积分所源自的同一表示原理之中，凸显了这两个过程在概念上的统一性。

定义 4.2. 设$(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为一个概率空间， $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$的一个子σ-代数，且 $X \in L^1(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$为一个随机变量。 X 在给定 $\mathcal{G}$ 条件下的条件期望是唯一的函数 $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \in L^1(\Omega\ \mathcal{G}, \mathbb{P})$，使得

$$\int_\Omega X\, \mathbf{1}_A \, d\mathbb{P} = \int_\Omega \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\, \mathbf{1}_A \, d\mathbb{P} \qquad \forall\, A \in \mathcal{G}. \tag{4.3}$$

我们首先建立 $L^p(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$中随机变量的条件期望概念，然后证明该结果自然地推广到情形 $L^1(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$（见 [14, 引理 23.1]）。

设 $\mathcal{G}$为 $\mathcal{F}$的一个子σ-代数，并设 $p, q \in (1, \infty)$满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$。假设$X \in L^p(\Omega\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$。

考虑由下式定义的泛函 $L\colon\ L^q(\Omega\ \mathcal{G}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$

$$L(Y) := \int_\Omega X\, Y \, d\mathbb{P},$$

它显然是线性的。由霍尔德不等式（见 [14,定理 23.10]），我们有，

$$|L(Y)| \le \int_\Omega |X\, Y| \, d\mathbb{P} \le \|X\|_{L^p(\Omega)}\, \|Y\|_{L^q(\Omega)}, \qquad \forall\, Y \in L^q(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}),$$

因而 L 在 $L^q(\Omega\ \mathcal{G},\ \mathbb{P})$上连续。

根据 L^p 中的里斯表示定理（见定理3.4），存在唯一的$\xi \in L^p(\Omega\ \mathcal{G},\ \mathbb{P})$ 使得

$$L(Y) = \int_\Omega \xi\, Y \, d\mathbb{P}, \qquad \forall\, Y \in L^q(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}).$$

特别地，

$$\int_\Omega X\, \mathbf{1}_A \, d\mathbb{P} = \int_\Omega \xi\, \mathbf{1}_A \, d\mathbb{P}, \qquad \forall\, A \in \mathcal{G}. \tag{4.4}$$

因此，我们将 ξ 等同于给定 $\mathcal{G}$时 X 的条件期望，即 $L^p(\Omega\ \mathcal{G},\ \mathbb{P})$中的$\xi = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$。

这种构造保持正性：若 $X \ge 0$，则 $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \ge 0$ 在 Ω 上几乎必然成立。事实上，设

$$A(\xi) := \{\omega \in \Omega : \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})(\omega) < 0\} \in \mathcal{G}.$$

由于 $\mathbf{1}_{A(\xi)} \geq 0$，由此可得 $X\,\mathbf{1}_{A(\xi)} \geq 0$，并由（4.4），

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\,\mathbf{1}_{A(\xi)}\big) = \mathbb{E}(X\,\mathbf{1}_{A(\xi)}) \geq 0.$$

然而，如果 $\mathbb{P}(A(\xi)) > 0$，被积函数在 $A(\xi)$ 上严格为负，这与前面的等式矛盾。因此 $\mathbb{P}(A(\xi)) = 0$，从而 $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \geq 0$ 在 Ω 上几乎必然成立。

作为直接推论，如果 X_1，$X_2 \in L^p(\Omega\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ 满足 $X_1 \leq X_2$，那么

$$\mathbb{E}(X_1 \mid \mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(X_2 \mid \mathcal{G})$$

在 Ω 上几乎必然成立。

这就证明了 $L^p(\Omega\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ 情形下的结论。现在我们将这一构造推广到一般情形 $L^1(\Omega\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$，并说明可以将同一论证视为单调逼近的极限（参见 [14,引理 23。1]）。

定理 4.3。设 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{F}$ 的一个子-σ-代数。对于任意随机变量 $X \in L^1(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$，存在唯一的 $\xi \in L^1(\Omega\ \mathcal{G}, \mathbb{P})$ 使得

$$\int_A X\,d\mathbb{P} = \int_A \xi\,d\mathbb{P}, \qquad \forall\, A \in \mathcal{G}.$$

因此，条件期望 $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ 存在。

证明。设 $X \in L^1(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$，并假设 Ω 上的 $X \geq 0$。

对每个 $j \in \mathbb{N}$，定义随机变量 $X_j : \Omega \to \mathbb{R}$，如下：

$$X_j(\omega) := \min\{X(\omega),\, j\}.$$

显然 $X_j \in L^p(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 因为 $|X_j|^p \leq j^p$，且 $X_j \leq X_{j+1}$ 对每个 $j \in \mathbb{N}$ (见图 10)。

因此，(X_j) 是 $L^p(\Omega\ \mathcal{G}, \mathbb{P})$ 中的单调不减序列，且在 Ω 上逐点满足 $X_j \to X$。事实上，设 $\omega \in \Omega$。由于 $X(\omega) \geq 0$，存在 $j(\omega) \in \mathbb{N}$，使得 $X(\omega) < j(\omega)$，因此对所有 $j \geq j(\omega)$，$X_j(\omega) = X(\omega)$。

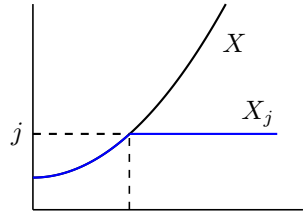

图 10. X 在水平 j上的截断。

根据 L^p 中的前一个结果，对于每个 $j \in \mathbb{N}$，存在唯一的 $\xi_j \in L^p(\Omega\ \mathcal{G},\ \mathbb{P})$，满足

$$\int_\Omega \xi_j\,\mathbf{1}_A\,d\mathbb{P} = \int_\Omega X_j\,\mathbf{1}_A\,d\mathbb{P}, \qquad \forall\, A \in \mathcal{G}.$$

由于 $X_j \leq X_{j+1}$，条件期望在 L^p 下的单调性蕴含：$\xi_j \leq \xi_{j+1}$ 在 Ω 上几乎必然成立。定义

$$\xi(\omega) := \lim_{j\to\infty} \xi_j(\omega), \qquad \omega \in \Omega,$$

它是 $\mathcal{G}$-可测的，因为它是 $\mathcal{G}$-可测函数的逐点极限。

应用单调收敛定理（参见 [14, 定理 9。1]），我们得到，对于每个 $A \in \mathcal{G}$，

$$\int_\Omega \xi\,\mathbf{1}_A\,d\mathbb{P} = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega \xi_j\,\mathbf{1}_A\,d\mathbb{P} = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega X_j\,\mathbf{1}_A\,d\mathbb{P} = \int_\Omega X\,\mathbf{1}_A\,d\mathbb{P}.$$

因此，对于每个 $X \geq 0$，$\xi = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$。

对于一般的随机变量 $X \in L^1(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$，记作 $X = X^+ - X^-$ withX^+, $X^- \in L^1(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 和 $X^+, X^- \geq 0$。将前面的论证应用于每个函数，我们定义

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) := \mathbb{E}(X^+ \mid \mathcal{G}) - \mathbb{E}(X^- \mid \mathcal{G}),$$

由此完成证明。 □

总之，通过里斯表示定理来表述条件期望 L^p 揭示了其真正的分析本质。

条件期望 $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ 并非是针对每种情形分别定义的平均值，而是 $L^p(\Omega\ \mathcal{G}, \mathbb{P})$ 中唯一一个在 $\mathcal{G}$-可测函数子空间上通过积分再现 X 线性作用的元素。

4.4. 里斯–马尔可夫–角谷定理：维纳测度的构造。维纳过程也称为布朗运动，在随机过程理论和随机积分的发展中占据着核心地位。它不仅是最早得到严格研究的随机过程之一，还以其结构简单以及能够描述连续随机行为的理想模型所具备的性质而著称。事实上，恰恰当积分器是维纳过程时，伊藤积分的定义才呈现出最自然、最直观的形式。

从数学的观点来看，随机过程可以通过其概率分布得到完整描述，也就是说，通过一个为可能轨迹的集合赋予概率的测度来描述。就维纳过程而言，这一概率分布称为维纳测度。该测度作用的对象不是实数，而是函数：每条轨迹都是时间的连续函数。

严格构造这一测度，需要赋予轨迹空间一种与刻画维纳过程的高斯动力学相一致的概率结构。然而，这一目标无法借助有限维测度论的初等方法实现，因为连续轨迹空间并非欧几里得空间。正是在这里，里斯–马尔可夫–角谷定理发挥着关键作用。该定理建立了定义在连续函数空间 $\mathcal{C}_c(\Omega)$ 上的连续线性泛函与同一空间Ω上的正则博雷尔测度之间的对应关系。换言之，构造一个测度相当于定义一个正连续线性泛函。应用于我们的情形，这一原理提供了一种获得维纳测度的泛函方法：我们并不假定其存在，而是将其推导为——在里斯–马尔可夫–角谷意义下——表示由满足柯尔莫哥洛夫相容性方程的高斯核所构造的线性泛函的那个测度；参见 [25,第 6]章。

这样一来，维纳测度便成为概率论与泛函分析之间自然的桥梁。线性泛函的语言不仅保证了它的存在性与唯一性，还赋予它精确的概念性解释：维纳测度表示连续高斯过程所有可能轨迹的分布。

我们从高斯核开始

$$\varphi(x - y, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4Dt}\right),$$

它是热方程的基本解，描述了 $\mathbb{R}^n$ 中的高斯过程的转移概率（例如，参见 [13, 6]）。此核满足柯尔莫哥洛夫相容性方程（参见 [25,第 6]章）

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x - y, t - s)\, \varphi(y - z, s - u)\, dy = \varphi(x - z, t - u),$$

它表达了转移分布在时间上的一致性。换言之，从 x 到 z 在时间 $t-u$ 内的转移概率，可以表示为对所有中间状态 y的积分，这体现了维纳过程的马尔可夫性质；参见 [6, 第 5]章。

这些高斯测度在 $\mathbb{R}^n$ 上的乘积构成一个测度，使得若 $\{V_i\}_{i=1}^n$是一组博雷尔集，且 $\{t_i\}_{i=1}^n \subset [0,t]$ 是一个时间划分，则其测度为

$$V := \{(x_1,\dots,x_n) : x_i \in V_i \text{ for all } i\}$$

由下式给出

$$\int_{V_1} \cdots \int_{V_n} \prod_{i=1}^{n} \varphi(x_i - x_{i-1}, t_i - t_{i-1})\, dx_1 \cdots dx_n,$$

其中 $x_0 = x$、 $x_n = y$、 $t_0 = 0$和 $t_n = t$。此表达式表示在由 φ支配的高斯动力学下，事件 $V_1,\dots,V_n$ 分别在时刻 $t_1,\dots,t_n$发生的联合概率。

然而，对于维纳过程，集合族和时间点的数量必须可以任意大。因此，维纳测度不能定义在任何有限维空间$\mathbb{R}^n$上；相反，它必须存在于一个由轨迹构成的无限维空间中。

设 $\Omega_{x,y;t}$ 为区间 $[0,t]$内连接 x 和 y 的（可能不连续的）轨迹空间。给定博雷尔集 $\{V_i\}_{i=1}^N$和时间划分 $\{t_i\}_{i=1}^N \subset [0,t]$，定义

$$\mathcal{C} := \{\gamma \in \Omega_{x,y;t} : \gamma(t_i) \in V_i \text{ for all } i = 1,\dots,N\}.$$

这些集合表示轨迹 γ 在时刻 $t_1,\dots,t_N$取指定值的事件。

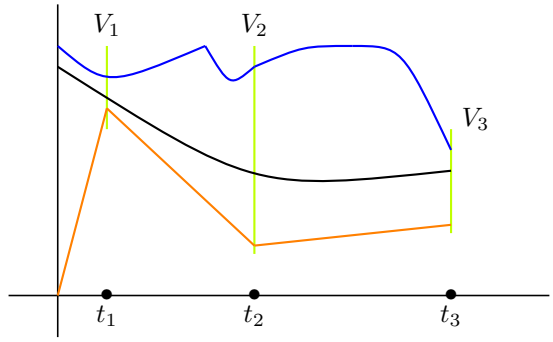

图 11. 轨迹空间 $\Omega_{x,y;t}$中的柱集，带有约束 $\gamma(t_i) \in V_i$ 以及满足这些约束的轨迹示例。

我们希望求出这一事件的概率：

$$\int_{V_1} \cdots \int_{V_N} \prod_{i=1}^{N+1} \varphi(x_i - x_{i-1}, t_i - t_{i-1})\, dx_1 \cdots dx_N.$$

为了通过里斯–马尔可夫–角谷定理证明存在这样的测度，我们必须先在一个紧豪斯多夫空间上定义线性泛函。因此，我们为轨迹空间赋予一种满足这些条件的拓扑。

˄令 $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 表示实数轴的一点紧化。对于 $t > 0$，令 Ω_t 为所有函数 f: $[0,t] \to$ ˄$\mathbb{R}$组成的集合。给定 $x, y \in \mathbb{R}^n$，定义

$$\Omega_{x,y;t} := \{\gamma \in \Omega_t : \gamma(0) = x,\ \gamma(t) = y\}.$$

我们赋予该空间乘积（逐点收敛）拓扑 τ_{prod}。根据吉洪诺夫定理，$\Omega_{x,\ y;t}$ 是一个紧豪斯多夫拓扑空间 [26, 定理 17.8]。

令 $\mathcal{B}(\Omega)$ 表示与该拓扑相关的博雷尔 σ–代数。此后，可测空间 $(\Omega_{x,\ y;t},\ \mathcal{B}(\Omega))$ 将作为我们的基础域。

根据里斯–马尔可夫–角谷定理（见定理3.5），在 $\Omega_{x,\ y;t}$ 上构造正则博雷尔测度归结为在连续函数空间 $\mathcal{C}(\Omega_{x,\ y;t})$ 上定义一个正的有界线性泛函。我们现在引入该泛函将首先在其上定义的函数类。

定义 4.4. 函数 $F\colon \Omega_{x,\ y;t} \to \mathbb{R}$ 称为柱函数，如果 F 连续，且存在有限时间点集 $T = \{0 \le t_1 \le \cdots \le t_j\} \subset [0,t]$和函数 $\tilde{F}\colon \hat{}\mathbb{R}^j \to \mathbb{R}$，使得

$$F(\gamma) = \tilde{F}\big(\gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_j)\big)$$

对每个 $\gamma \in \Omega_{x,\ y;t}$。

用 $\mathcal{C}_{\mathrm{cyl}}(\Omega_{x,\ y;t})$表示所有柱面函数的集合。它是 $\mathcal{C}(\Omega_{x,\ y;t})$的一个向量子空间，即 $\Omega_{x,\ y;t}$上所有连续实值函数的空间。

定义泛函 $L\colon\ \mathcal{C}_{\mathrm{cyl}}(\Omega_{x,\ y;t}) \to \mathbb{R}$ 如下

$$L(F) = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \tilde{F}(x_1, \ldots, x_N) \prod_{i=1}^{N+1} \varphi(x_i - x_{i-1}, t_i - t_{i-1})\, dx_1 \cdots dx_N,$$

˜其中，F是与 F在时刻 $(t_1,\ \ldots,\ t_N)$ 相对应的函数。

柯尔莫哥洛夫相容性方程保证了 L 定义良好：若柱函数仅依赖于 j 个坐标，将它人为扩展为依赖于 $j+k$个坐标，并不会改变 L的值，因为对额外高斯核进行积分后，恰好会化简为原来的表达式。

此外，由于 φ非负，

$$L(1) = \varphi(x - y, t),$$

并且对每个 $F \in \mathcal{C}_{\mathrm{cyl}}(\Omega_{x,\ y;t})$,

$$|L(F)| \le \varphi(x - y, t)\, \|F\|_\infty.$$

因此，L 是范数为 $\|L\| = \varphi(x - y,\ t)$ 的连续线性泛函。

根据哈恩–巴拿赫定理 [17, 定理 1.9。6], L 可将其扩展为定义在整个 $\mathcal{C}(\Omega_{x,\ y;t})$ 上的连续线性泛函，且不增加其范数。因此，我们可以将 L 视为对偶空间 $\mathcal{C}(\Omega_{x,\ y;t})^*$中的一个元素。

最后，根据里斯–马尔可夫–角谷定理（参见定理 3.5），存在唯一的正则博雷尔测度 $\mathcal{W}^{x,\ y;t}$ 定义在 $\Omega_{x,\ y;t}$ 上，使得对每个柱函数F,

$$\int_{\Omega_{x,y;t}} F(\gamma)\, d\mathcal{W}^{x,y;t}(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \tilde{F}(x_1, \ldots, x_N) \times \prod_{i=1}^{N+1} \varphi(x_i - x_{i-1}, t_i - t_{i-1})\, dx_1 \cdots dx_N.$$

由此我们证明了以下定理。

定理 4.5（维纳测度的存在性）。存在唯一的正则博雷尔测度 $\mathcal{W}^{x,\ y;t}$ 定义在 $\Omega_{x,\ y;t}$ 上，使得

$$\int_{\Omega_{x,y;t}} F(\gamma)\, d\mathcal{W}^{x,y;t}(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \tilde{F}(x_1, \ldots, x_N) \times \prod_{i=1}^{N+1} \varphi(x_i - x_{i-1}, t_i - t_{i-1})\, dx_1 \cdots dx_N.$$

对每个柱函数 F，其中 $t_0 = 0$、$t_{N+1} = t$、$x_0 = x$ 和 $x_{N+1} = y$。测度 $\mathcal{W}^{x,\ y;t}$ 称为在时刻 t具有固定端点 x 和 y 的维纳测度 。

这一构造不仅确立了维纳测度的存在性，还 o
为计算相对于它的积分提供了一种有效工具。尤其是， ，
它使人们能够将积分的定义推广到比 n
柱面函数更一般的函数，同时保持线性和连续性。

事实上，令 F 为一个可测函数，且存在一个一致有界的柱面函数序列 $(F_j)_{j\geq 1}$，使得 $F_j \to F$ 逐点成立。根据控制收敛定理，

$$\int_{\Omega_{x,y;t}} F(\gamma)\, d\mathcal{W}^{x,y;t}(\gamma) = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \tilde{F}_j(x_1, \ldots, x_N) \times \prod_{i=1}^{N+1} \varphi(x_i - x_{i-1}, t_i - t_{i-1})\, dx_1 \cdots dx_N.$$

因此，相对于维纳测度的积分可以通过欧几里得空间上的多重积分来近似；这一特点在研究扩散过程和数学物理的微扰方法时尤其有用。

还可以证明（例如，参见 [18]）连续轨迹的集合$\mathcal{C}_{x,\ y;t}$ 在 $\mathcal{W}^{x,\ y;t}$下具有全测度，也就是说，

$$\mathcal{W}^{x,y;t}(A \cap \mathcal{C}_{x,y;t}) = \mathcal{W}^{x,y;t}(A) \qquad \text{for all } A \subset \Omega_{x,y;t}.$$

因此，维纳测度赋予连续轨迹总概率，这反映了维纳过程的样本路径是连续的（尽管处处不可微）；另见 [9,定理 7.1。6]。

这一构造凸显了泛函分析与概率论之间的深刻联系。从定义在柱面函数上的简单线性泛函出发，并借助里斯-马尔可夫-角谷表示定理，自然可以在轨迹空间上得到一个概率测度。

从这一视角来看，随机过程——尤其是维纳过程——体现了函数空间中对偶性与连续性的一般原理。维纳测度为随机积分的表述，以及扩散现象、随机涨落和随机微分方程的研究，提供了恰当的分析框架；参见 [6]。

参考文献

[1] R. G. Bartle，《积分与勒贝格测度的要素》，John Wiley & Sons，纽约，1995年。[2] G. Birkhoff 和 E. Kreyszig，《泛函分析的建立》，Historia Mathematica 11（1984），258–321。doi: 10.1016/0315-0860(84)90036-3。[3] F. Bombal，《泛函分析：历史视角》，载于《数学分析研讨会论文集》，2002–2003，Secretariado de Publicaciones，塞维利亚大学（2003），81–117。[4] H. Brezis，《泛函分析、索伯列夫空间与偏微分方程》，施普林格，纽约，2010年。[5] J. B. Conway，《泛函分析教程》，第2版，Graduate Texts in Mathematics 96，施普林格，纽约，1990年。doi: 10.1007/978-1-4757-4383-8。[6] G. Da Prato，《随机分析与马利亚万微积分导论》，比萨高等师范学院出版物，施普林格，比萨，2014年。[7] J. Dieudonné，《泛函分析史》，Studies in the History of Modern Science 49，North-Holland，阿姆斯特丹，1981年。[8] I. D. Dinov，《博赫纳积分与向量测度》，硕士学位论文（开放获取硕士研究报告），密歇根理工大学，1993年。doi: 10.37099/mtu.dc.etdr/919。[9] R. Durrett，《概率：理论与实例》，第5版，剑桥统计与概率数学丛书，剑桥大学出版社，剑桥，2019年。doi: 10.1017/9781108591034。[10] D. Espejo，《里斯–马尔可夫–角谷表示定理》，技术报告，芝加哥大学数学专业本科生研究体验项目（2023年）。网址：https://math.uchicago.edu/~may/REU2023/REUPapers/Espejo.pdf。[11] G. B. Folland，《实分析：现代技巧及其应用》，第2版，John Wiley & Sons，纽约，1999年。

[12] *M. R. Fréchet*，《关于泛函微积分的若干问题》，巴勒莫数学会纪要 *22*（*1906*），*1–74*。*doi: 10.1007/BF03018603*。[13] *L. G. Gorostiza*，《二十世纪的概率》，数学杂集 *33*（*2001*），*69–92*。[14] *J. Jacod* 和 *P. Protter*，《概率学基础》，第*2*版，施普林格，柏林，*2004*年。*doi: 10.1007/978-3-642-55682-1*。[15] *S. Kakutani*，《抽象（*M*）空间的具体表示》（连续函数空间的一种刻画），《数学年刊》*42*（*1941*），*994–1024*。*doi: 10.2307/1968770*。[16] *A. A. Markov*，《论均值与外密度》，*Matematicheskiĭ Sbornik*，新系列*4*（*1938*），*165–190*。[17] *R. E. Megginson*，《巴拿赫空间理论导论》，*Graduate Texts in Mathematics 183*，施普林格，纽约，*1998*年。*doi: 10.1007/978-1-4612-0603-3*。[18] *E. Nelson*，《费曼积分与薛定谔方程》，《数学物理学杂志》*5*（*1964*），第*3*期，*332–343*。[19] *H. G. Reyna-Castañeda* 和 *M. de los Á. Sandoval-Romero*，《一种计算概率的变分法》，《墨西哥数学会会刊》*9*（*2025*），*3–26*。[20] *F. Riesz*，《关于线性泛函运算》，《巴黎科学院报告》*144*（*1907*），*972–975*。[21] *F. Riesz*，《关于线性泛函运算》，《高等师范学校科学年刊》（第*3*辑）*26*（*1909*），*1–55*。[22] *F. Riesz*，《论线性泛函方程》，《数学学报》*41*（*1916*），*71–98*。*doi: 10.1007/BF02422940*。[23] *F. Riesz*，《论连续函数》，《巴黎科学院报告》*204*（*1937*），*1683–1686*。[24] *H. L. Royden* 和 *P. M. Fitzpatrick*，《实分析》，第*4*版，培生，波士顿，*2010*年。[25] *L. A. Takhtajan*，《数学家的量子力学》，数学研究生进阶丛书*95*，美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，*2008*年。[26] *S. Willard*，《一般拓扑学》，多佛出版社，米尼奥拉，纽约州，*2012*年。

墨西哥国立自治大学理学院数学系，墨西哥墨西哥城

电子邮件地址：luisacp@ciencias.unam.mx

数学系，理学院，墨西哥国立自治大学墨西哥的，墨西哥城，墨西哥

电子邮件地址：hugoreyna46@ciencias.unam.mx

数学系、理学院、墨西哥国立自治大学 A墨西哥的，墨西哥城，墨西哥

电子邮件地址：selegna@ciencias.unam.mx