arXiv:2602.00967v1 [math.FA] 1 Feb 2026

线性算子 T：$\mathbf{R}[x_1,\dots,x_n]\to\mathbf{R}[x_1,\dots,x_n]$与 K-正性保持算子：简要综述

Philipp J. di Dio

数学与统计系，康斯坦茨大学，*Universitätsstraße 10*，*D-78464* 康斯坦茨，德国

计算机与信息科学系，康斯坦茨大学，*Universitätsstraße 10*，*D-78464* 康斯坦茨，德国

Zukunftskolleg，康斯坦茨大学，*Universitätsstraße 10*，*D-78464* 康斯坦茨，德国

philipp.didio@uni-konstanz.de

摘要

在这篇简短综述中，我们介绍有关线性映射T: $\mathbf{R}[x_1,\dots,x_n]\to\mathbf{R}[x_1,\dots,x_n]$的最新进展，尤其是 K-正性保持算子，即，对于所有带有 $p\geq 0$ 的 $p\in\mathbf{R}[x_1,\dots,x_n]$，$Tp\geq 0$ 在 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 上。

关键词： 正性保持算子，矩，非负多项式*2020*年数学学科分类： 主要44A60；次要30E05，26C05。

1. 引言

向量空间 $\mathbf{C}[x_1,\dots,x_n]$ 以及锥

$$\mathrm{Pos}(K):=\big\{f\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]\,\big|\,f\geq 0\text{ on }K\big\}$$

在闭集 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 上的非负多项式属于数学中研究最为广泛的对象之列，也是（实）代数几何的主要研究主题。然而，线性映射的研究则少得多

$$T:\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]\to\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$$

尤其是在.....方面

$$T\mathrm{Pos}(K)\subseteq\mathrm{Pos}(K),$$

例如参见 [GS08、Net10、Bor11、dD24、dDS25、dDL25、dD25]。在这篇简短综述中，我们概述 [dD24、dDS25、dDL25、dD25]中的最新进展。

2. 预备知识

2.1. 矩泛函与序列

设 $n \in \mathbb{N}$，设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$，并设 $s = (s_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ 为一个序列。若存在一个测度 μ，其 $\operatorname{supp}\mu \subseteq K$ 且

$$s_\alpha = \int_K x^\alpha \, \mathrm{d}\mu(x)$$

对所有 $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$。令

$$L : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}$$

为一个线性泛函。若存在一个测度 μ，其支集为 $\operatorname{supp}\mu \subseteq K$，并且

$$L(p) = \int_K p(x) \, \mathrm{d}\mu(x)$$

对所有 $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$。

*2.2. Fréchet*空间与*LF*空间

弗雷歇空间是一种可度量、完备且局部凸的拓扑向量空间。就我们的目的而言，以下示例已足够。

例2.1 （例如参见 [Trè67，第91–92页，例III]）。 向量空间

$$\mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$$

形式幂级数的向量空间是一个弗雷歇空间，其半范数族为

$$\{p_d\}_{d \in \mathbb{N}_0}$$

半范数族

$$p_d(f) = \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| \le d} |c_\alpha|$$

$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} c_\alpha \cdot x^\alpha$上的。 ∘

显然，

$$\mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]] \cong \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}$$

因此，复数序列空间 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}$ 是一个 Fréchet 空间。

向量空间 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 是一个 LF空间 [Trè67，第 130 页，例 I]。LF空间的一般定义可见于 [Trè67，第 126]页，或 [SW99，第 II 章第 6 节4]。就我们的目的而言，只需理解：多项式序列 $(p_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ 收敛到某个 $p \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$，即 $p_i \to p$ 当 $i \to \infty$时，若且唯若 $\sup_{i \in \mathbb{N}_0} \deg p_i < \infty$，并且每个 x^α-系数都收敛到 p的x^α-系数。

因此，空间 $\mathbb{C}[[x_1,\dots,x_n]]$ 和 $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ 通过以下方式互为对偶

$$\langle f,p\rangle := \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} c_\alpha \cdot p_\alpha$$

for

$$f=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} c_\alpha\cdot x^\alpha \in \mathbb{C}[[x_1,\dots,x_n]] \quad \text{and} \quad p=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} p_\alpha\cdot x^\alpha \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n].$$

感兴趣的读者可以在例如[Trè67、SW99]中找到更多关于弗雷歇空间和LF空间的内容。

2.3. 正则弗雷歇李群

定义 2.2（另见例如 [Omo97，第 63 页，定义 1。1]）。 如果满足以下条件，我们称（G， $\cdot$）为正则弗雷歇李群：

（i） G 是一个无限维光滑弗雷歇流形。

（ii）（G， $\cdot$）是一个群。

(iii) The map $G\times G\to G$, $(A,B)\mapsto A\cdot B^{-1}$ is smooth.

（iv） G的弗雷歇李代数 $\mathfrak{g}$ 与G 在单位元 $e\in G$处的切空间 T_eG 同构。

(v) exp： $\mathfrak{g}\to G$ 是一个光滑映射，使得 $\mathrm{d}\ \mathrm{d}t\exp(tu)\big|_{t=0} = u$ 对所有$u\in\mathfrak{g}$ 均成立。

(vi) 在弗雷歇拓扑下，空间 $C^1(G,\ \mathfrak{g})$ 中的 C^1-曲线与 G 中所有 C^1-曲线的集合一致。

感兴趣的读者可以在例如 [Omo97,Sch23] 中找到有关无限维流形、微分演算、李群和李代数的更多内容。

3. $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ 上线性算子的表示

为了研究 $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ 上的线性算子，我们首先要了解它们的形式，也就是说，本节将讨论不同类型的表示。首先介绍典范表示。

定理 3.1 (民间结果，典范表示)。设 $n\in\mathbb{N}$，并设

$$T:\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]\to\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$$

是线性的。那么，对所有 $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$，存在唯一的多项式 $q_\alpha\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$，使得

$$T=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} q_\alpha\cdot\partial^\alpha. \tag{1}$$

例如，可在 [Net10] 中找到上述结果的证明。利用表示式 (1)，尤其是保次数映射，即，

$$T\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]_{\le d} \subseteq \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]_{\le d}$$

对所有 $d \in \mathbb{N}_0$, 都可以很容易地刻画，正如我们在下一个结果中所见。

引理 3.2 ([dDS25，引理 5.1])**.** 设 $n \in \mathbb{N}$ 并设

$$T : \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n] \to \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n] \quad with \quad T = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} q_\alpha \cdot \partial^\alpha$$

对所有 $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$是线性的，且具有唯一的 $q_\alpha \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$。则下列各项等价:

(i) $T\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]_{\le d} \subseteq \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]_{\le d}$ *for all* $d \in \mathbb{N}_0$.

(ii) 对所有 $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$，次数 $q_\alpha \le |\alpha|$。

第二种表示可以视为施瓦茨核定理的一个推论或一种形式，参见例如 [Trè67，第 50]章。

引理 3.3 ([dDL25，注 2.3])**.** 设 $n \in \mathbb{N}$ 并设

$$T : \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n] \to \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$$

是线性的。那么，对于所有 $i \in \mathbb{N}_0$, ，存在一些线性泛函

$$l_i : \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n] \to \mathbb{R}$$

以及多项式 $p_i \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$，使得

$$T = \sum_{i\in\mathbb{N}_0} l_i \cdot p_i, \quad i.e., \quad Tf = \sum_{i\in\mathbb{N}_0} l_i(f)\cdot p_i \tag{2}$$

对于所有 $f \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$。

在 $T\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ 上的线性映射中，满足

$$Tx^\alpha = t_\alpha \cdot x^\alpha \quad \text{and} \quad t_\alpha \in \mathbb{R} \tag{3}$$

对于所有 $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ 的线性算子称为对角的。显然，对角算子由其对角序列 $t = (t_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ 唯一确定，而且每个实序列 $t = (t_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ 都定义了一个良定义的对角算子。它们具有一般的 $[x_1,\dots,x_n]$ 上的线性映射所不具备的特殊结构，因此也具有特殊性质。将 (3) 代入定理 3.1，可得以下结论。

推论 3.4 ([dDL25，第 4 条注。2])。设 $n \in \mathbb{N}$ 并设

$$T : \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n] \to \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$$

是一个线性算子。则以下各项等价:

(i) T 是一个对角算子，即，

$$Tx^\alpha = t_\alpha \cdot x^\alpha \quad and \quad t_\alpha \in \mathbb{R}$$

对所有 $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$。

(ii) 算子 T 的形式为

$$T = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{c_\alpha}{\alpha!} \cdot x^\alpha \cdot \partial^\alpha \tag{4}$$

其中实序列 $c = (c_\alpha)^{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ 是唯一的。

若等价命题 *(i)* 或 *(ii)* 成立，则对角序列$t = (t_\alpha)^{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$与系数 $c = (c_\alpha)^{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ c_α 满足以下关系

$$t_\alpha = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^n:\ \beta \preceq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \cdot c_\beta \qquad and \qquad c_\alpha = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^n:\ \beta \preceq \alpha} (-1)^{|\alpha - \beta|} \cdot \binom{\alpha}{\beta} \cdot t_\beta$$

对所有 $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$。

4. *K*-保正算子

现在我们来讨论本文的主题： K-正性保持算子。

定义 4.1。 设 $n \in$N，设 $K \subseteq \mathrm{R}^n$ 为闭集，并且

$$T : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

是线性的。如果

$$T\mathrm{Pos}(K) \subseteq \mathrm{Pos}(K),$$

那么我们称 T 为一个 K-正性保持算子。若 $K =\mathrm{R}^n$，则简称 T 为一个正性保持算子。

如果 K 为空（$K = \emptyset$），那么

$$\mathrm{Pos}(\emptyset) = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

因此每个线性映射

$$T : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

是一个 $\emptyset$-正性保持算子。 $K = \emptyset$ 显然成立，因此我们可以假设 $K \neq \emptyset$。**例 4.2**。 设 n， $k \in$ N，设 $K \subseteq \mathrm{R}^n$ 为闭且非空，设p_1、.....、 $p_k \in$ Pos(K)，并设

$$l_1, \ldots, l_k : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}$$

是 K-矩泛函。则

$$T : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n], \quad f \mapsto Tf := \sum_{i=1}^{k} l_i(f) \cdot p_i$$

是一个 K-正性保持算子。 ∘

并非每个 K正性保持算子都具有定理4.2所给出的形式。

例4.3 ([dDL25，注2.3])。 设 $n \in \mathbb{N}$ 且

$$\mathrm{id} : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n], \quad f \mapsto f$$

是 $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 上的恒等映射。显然，对于任意（非空） $K \subseteq \mathbb{R}^n$，id 都是一个 K-正性保持算子。令 $K = \mathbb{R}^n$。那么 id 无法表示为定理4.2中的形式。为此，假设 id 有这样的表示，即存在一个 $k \in \mathbb{N}$、多项式 $p_1, \ldots, p_k \in \mathrm{Pos}(K)$，以及 $\mathbb{R}^n$-矩泛函

$$l_1, \ldots, l_k : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}$$

使得

$$\mathrm{id} = \sum_{i=1}^{k} l_i \cdot p_i.$$

但是，由于 $\mathrm{id}(x_1+a)^2 = (x_1+a)^2, (x_1+a)^2$ 是 $\mathrm{Pos}(\mathbb{R}^n)$ 的一个极值点，且对于任意 $a \in \mathbb{R}$， $l_i((x_i+a)^2) \geq 0$，因此 $(x_1+a)^2$ 必须包含在$\{p_1, \ldots, p_k\}$中。但是，由于 $\{p_1, \ldots, p_k\}$ 是有限（可数）的，而 $\mathbb{R}$ 是不可数的，我们得到了矛盾，即 id 不具有定理4.2中的形式。◦

与定理4.3中的论证相比，这个论证简单得多，因此也比 [dDL25] 中的论证简单得多：定理4.2中所述的任何 K-正性保持算子都只有有限维像。因此，任何具有无限维像的 K-正性保持算子都不能表示为定理4.2中的形式，因为所有 $l_i \geq 0$ 都在 $\mathrm{Pos}(K)$ 上。

在给出 K-保正算子的刻画之前，我们需要以下定义。

定义4.4. 设对所有 $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$， $q_\alpha \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$，并且

$$T = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} q_\alpha \cdot \partial^\alpha$$

是一个线性算子。对于 $y \in \mathbb{R}^n$，我们定义线性映射

$$T_y : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \quad \text{by} \quad T_y := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} q_\alpha(y) \cdot \partial^\alpha. \tag{5}$$

现在可以给出以下对 K-保正算子的刻画。

定理 4.5 ([dDS25，主定理 3.5])。 设 $n \in \mathbb{N}$， $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 是闭的，并且

$$T : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \quad \textit{with} \quad T = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} q_\alpha \cdot \partial^\alpha$$

为线性， $q_\alpha \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 对所有 $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$均成立。则以下命题等价：

(i) T 是 K-正性保持算子。

(ii) 对所有 $y \in K$，序列 $(\alpha! \cdot q_\alpha(y))^{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ 是一个 $(K-y)$-矩序列。

如果等价条件 *(i)* 或 *(ii)* 中的一个成立，那么对于任意 $y \in K$，

$$(T_y f)(y) = \int f(x+y)\ \mathrm{d}\mu_y(x)$$

对所有 $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$，其中 μ_y 是$(K-y)$-矩序列 $(\alpha! \cdot q_\alpha(y))^{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ 的一个表示测度。

如前所述，若 $K = \emptyset$，则 $\mathrm{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 上的任意线性映射都是K-正性保持算子，即定理 4.5 中的 (i) 总是成立，而定理 4.5 中的 (ii) 是空条件，也总是成立。

由定理 4.5 取 $K = \mathrm{R}^n$，我们立即得到 Julius Borcea 关于 R^n-正性保持算子的经典刻画。

推论 4.6 ([Bor11,Thm. 3.1])。设

$$T = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} q_\alpha \cdot \partial^\alpha$$

属于 $q_\alpha \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$。则以下条件等价:

(i) T 是一个$\mathbb{R}^n$-正性保持算子。

(ii) 对于每个 $y \in \mathbb{R}^n$，$(\alpha! \cdot q_\alpha(y))^{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ 都是一个$\mathbb{R}^n$-矩序列。

如果其中一个等价条件成立，那么对于每个 $y \in \mathbb{R}^n$，线性映射 T_y 由下式给出

$$(T_y p)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} p(x+z)\ \mathrm{d}\mu_y(z)$$

对于 $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$，其中 μ_y 是$(\alpha! \cdot q_\alpha(y))^{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ 的表示测度。

5. 线性映射 A 的生成元 T: $T = e^A$

在线性映射中

$$T : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

有一类特殊映射，其形式为

$$T = e^A$$

对于一个线性映射

$$A : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n].$$

并非每个 T 都能写成 $T = e^A$，并非每个 A 都能给出定义良好的 e^A。因此，首先我们必须确定哪些 A 能给出定义良好的 e^A。

定义 5.1. 设 $n \in \mathbb{N}$。定义

$$\mathfrak{g} := \big\{ A : \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \,\big|\, A \text{ linear and } e^{tA} : \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \text{ well-defined for all } t \in \mathbb{R} \big\}.$$

虽然 $\mathfrak{g}$ 是一个抽象集合，但以下内容给出了一个刻画。

定理 5.2 ([dD25，定理 4.4])。设 $n \in \mathbb{N}$ 且

$$A : \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$$

是线性的。以下条件等价：

(i) $A \in \mathfrak{g}$。

(ii) $\sup_{k \in \mathbb{N}_0} A^k x^\alpha < \infty$ 对所有 $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$。

(iii) 上确界次数 $A^k p < \infty$ 对所有 $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$，$k \in \mathbb{N}_0$

(iv) 对所有 $i \in \mathbb{N}_0$，，存在子向量空间 $V_i \subseteq \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$，满足

(a) 维数 $V_i < \infty$ 对所有 $i \in \mathbb{N}_0$，*(b)* $\bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} V_i = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$，且 *(c)* $AV_i \subseteq V_i$ 对所有 $i \in \mathbb{N}_0$。

定理 5.2 的一个直接推论如下。

命题 5.3。设 $n \in \mathbb{N}$ 和 $A \in \mathfrak{g}$。那么 A 有一个复特征值。

证明。根据定理 5.2，存在一个 $V \subseteq \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$，满足

$$\dim V < \infty \quad \text{and} \quad AV \subseteq V,$$

即，$A|_V : V \to V$ 是有限维向量空间上的线性算子（矩阵），因此至少有一个（复）特征值。 □

由于根据 5.2，只需知道每个 $A \in \mathfrak{g}$ 在有限维不变子空间 V_i 上的情况，因此我们有以下结论。

推论 5.4 ([dDS25，推论 5.6] 和 [dD25，推论 4.5])。令 $A \in \mathfrak{g}$。那么

$$\exp A = \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} \frac{A^k}{k!} = \lim_{k \to \infty} \left(\mathbb{1} + \frac{A}{k} \right)^k = \lim_{k \to \infty} \left(\mathbb{1} - \frac{A}{k} \right)^{-k}.$$

6. 保持 K-正性的半群 $(e^{tA})_{t\geq 0}$ 的生成元 A

虽然我们已经刻画了 $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ 上所有使 e^A 有良好定义的线性映射 A，但现在我们想知道，这些 A 中哪些是 K-正性保持半群（e^{tA}）$_{t\geq 0}$ 的生成元。

定义 6.1。设 $n\in\mathbb{N}$，设 $K\subseteq\mathbb{R}^n$ 为闭的，且 $A\in\mathfrak{g}$。我们称 A 是半群 K-正性保持半群 $(e^{tA})_{t\geq 0}$ 的生成元，若对所有 $t\geq 0$，e^{tA} 都是一个 K-正性保持算子。

我们从常系数这一较简单的情形开始。

定义 6.2。设 $n\in\mathbb{N}$。我们定义

$$\mathfrak{D}_c := \left\{ \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} q_\alpha\cdot\partial^\alpha \,\middle|\, q_\alpha\in\mathbb{R},\ q_0=1 \right\}$$

and

$$\mathfrak{d}_c := \left\{ \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\setminus\{0\}} d_\alpha\cdot\partial^\alpha \,\middle|\, d_\alpha\in\mathbb{R} \text{ for all } \alpha\in\mathbb{N}_0^n\setminus\{0\} \right\}.$$

定理 6.3 ([dD24，定理 2。17])。设 $n\in\mathbb{N}$。则作为弗雷歇空间，$(\mathfrak{D}_c,\cdot)$ 是一个交换正则弗雷歇李群，其交换弗雷歇李代数为$(\mathfrak{d}_c,\cdot,+)$。指数映射

$$\exp:\mathfrak{d}_c\to\mathfrak{D}_c,\quad A\mapsto\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\frac{A^k}{k!}$$

是光滑且双射的，其逆映射也光滑且双射

$$\log:\mathfrak{D}_c\to\mathfrak{d}_c,\quad A\mapsto-\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{(\mathbb{1}-A)^k}{k}.$$

对于常系数情形，我们可以刻画所有生成 $\mathbb{R}^n$-保正半群的生成元。

定义 6.4。令 $n\in\mathbb{N}$。我们定义集合

$$\mathfrak{D}_{c,+} := \{A\in\mathfrak{D}_c \,|\, A \text{ is a positivity preserver}\}$$

所有 常系数正性保持算子的集合 并定义集合

$$\mathfrak{d}_{c,+} := \{A\in\mathfrak{d}_c \,|\, \exp(tA)\in\mathfrak{D}_{c,+} \text{ for all } t\geq 0\}$$

所有 常系数正性保持算子的生成元的集合。

为进行刻画，我们需要以下结果。

定理 6.5 ([dD24，主要定理 4。7])。设 $n \in \mathbb{N}$。则以下命题等价：

(i) $A \in \mathfrak{d}_{c,+}$。

(ii) $\exp A$ 具有一个无限可分的表示测度。

(iii) $\exp(tA)$ 对于某个 $t > 0$具有一个无限可分的表示测度。

(iv) $\exp(tA)$ 对于所有 $t > 0$均具有一个无限可分的表示测度。

结合定理 6.5 以及通过 Lévy–Khinchin 公式对无限可分测度的刻画，可得如下结论。

定理 6.6 ([dD24, 主定理 4。11])。设 $n \in \mathbb{N}$。则以下命题等价：

(i) $A = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \setminus \{0\}} \frac{a_\alpha}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha \in \mathfrak{d}_{c,+}$.

(ii) 存在一个对称矩阵 $\Sigma = (\sigma_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^n$，满足 $\Sigma \succeq 0$；一个向量$b = (b_1, \ldots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$；以及一个测度 ν，定义在 $\mathbb{R}^n$ 上，满足

$$\nu(\{0\}) = 0 \qquad and \qquad \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha| \, \mathrm{d}\nu(x) < \infty$$

对于 $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$，满足 $|\alpha| \geq 2$，使得

$$a_{e_i} = b_i + \int_{\|x\|_2 \geq 1} x_i \, \mathrm{d}\nu(x) \qquad for\ all\ i = 1, \ldots, n,$$

$$a_{e_i + e_j} = \sigma_{i,j} + \int_{\mathbb{R}^n} x^{e_i + e_j} \, \mathrm{d}\nu(x) \qquad for\ all\ i, j = 1, \ldots, n,$$

and

$$a_\alpha = \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \, \mathrm{d}\nu(x) \qquad for\ all\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n\ with\ |\alpha| \geq 3.$$

定理 6.6 中的测度 ν 是由莱维–欣钦公式刻画无限可分测度时所对应的莱维测度。

对于非常系数情形，我们有以下结果。通过非平凡论证，可由常系数情形推出该结果。

定理 6.7 ([dDS25，主定理 6.12])。设

$$A = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{a_\alpha}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha$$

对于所有 $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$，均有 $a_\alpha \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]_{\leq |\alpha|}$。那么，以下条件等价：

(i) e^{tA} 是对所有 $t \geq 0$ 都成立的 $\mathbb{R}^n$-正性保持算子。

(ii) 对于每个 $y \in R^n$，都存在一个实数项对称矩阵 $\Sigma(y) = (\sigma_{i,j}(y))_i^n$、一个向量 $b(y) = (b_1(y) \ldots, b_n(y))^T \in R^n$、一个常数 $a_0 \in R$，以及一个定义在 R^n 上的 σ-有限测度 ν_y，使得 $\Sigma(y) \succeq 0$

$$\nu_y(\{0\}) = 0 \qquad and \qquad \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha| \, \mathrm{d}\nu_y(x) < \infty$$

对于所有满足以下条件的 $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ 和 $|\alpha| \geq 2$

$$a_{e_i}(y) = b_i(y) + \int_{\|x\|_2 \geq 1} x_i \, \mathrm{d}\nu_y(x) \qquad for\ i = 1, \ldots, n,$$

$$a_{e_i+e_j}(y) = \sigma_{i,j}(y) + \int_{\mathbb{R}^n} x^{e_i+e_j} \, \mathrm{d}\nu_y(x) \qquad for\ all\ i, j = 1, \ldots, n,$$

and

$$a_\alpha(y) = \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \, \mathrm{d}\nu_y(x) \qquad \text{对于满足 } |\alpha| \geq 3. \text{ 的 } \alpha \in \mathbb{N}_0^n$$

定理 6.7 解决了次数保持的 $\mathbb{R}^n$-正性保持半群生成元的情形，但一般情形下显式描述仍是一个未解问题。

7. 总结

尽管

$$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \quad \text{and} \quad \mathrm{Pos}(K)$$

在（实）代数几何中已经得到了充分研究，但令人惊讶的是，即使是线性算子

$$T : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

也几乎未得到研究。尤其是在 T 是 K-正性保持算子的条件下，迄今为止人们所知甚少。这些算子受到如此少的研究令人惊讶，因为在每门线性代数课程中，首先都会介绍并研究向量空间 V（维数、基、子空间等），然后当人们考察线性算子时，真正的线性代数才开始

$$T : V \to V$$

对于有限维的 V，即 T 是矩阵。从向量空间 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 和锥 $\mathrm{Pos}(K)$ 转到其上的线性映射，这一步迄今几乎未受到关注。这可能有两个原因。首先，（实）代数几何高度依赖乘法（在 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 中），而一般而言，我们会

$$T(f \cdot g) \neq Tf \cdot Tg,$$

也就是说，我们失去了使代数成为代数、而不仅仅是对向量空间进行研究的最基本运算。其次，$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 是无限维的，因此会涉及拓扑方面，而代数学家通常不需要考虑这些方面。

只有从一种（不同寻常的）泛函分析视角来看待这些问题，才能克服这些局限。矩和测度通过对偶性与 Pos(K) 密切相关，而“通常的”泛函分析则研究希尔伯特空间和有限维李群。我们只能在 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 上进行研究，又不能将其构造成希尔伯特空间（就像通常通过研究矩所做的那样），因此不得不放弃希尔伯特空间的丰富理论，转而研究弗雷歇空间、LF空间和正则弗雷歇李群。在这里，需要考虑更多技术细节，因为我们不再像在希尔伯特空间中那样只有一个范数，而是必须处理一族半范数。

不过，对文献 [dD24、dDS25、dDL25、dD25] 的综述表明，仍然可以得到一些结果，而且我们或许（也希望）正处于线性算子研究的最初阶段。

$$T : \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n].$$

资助

作者及本项目获得德国研究联合会（DFG）的资助，资助编号为 DI-2780/2-1；作者在康斯坦茨大学 Zukunftskolleg 的研究奖学金则由德国联邦政府和州政府卓越战略资助。

参考文献

[Bor11] J.Borcea，保留椭圆、正及非负多项式的线性算子分类，《纯粹与应用数学杂志》**650**（2011年），67– 82。[dD24] P. J. di Dio，关于具有常系数的保正算子及其生成元，《代数杂志》**660** （2024年），882–907。[dD25] ，将非负多项式转化为平方和，https://arxiv.org/abs/2506.16321。[dDL25] P. J. di Dio 和 L.-L. Langer，矩序列的哈达玛积、对角保正算子及其生成元，《积分方程与算子理论》**97**（2025年），第32号文章。[dDS25] P. J. di Dio 和 K. Schmüdgen， K-正性保持算子及其生成元，《SIAM应用代数与几何杂志》**9** （2025年），第4期，794–824。[GS08] A. Guterman 和 B. Shapiro，保留正多项式集合的线性算子，《不动点理论与应用杂志》**3** （2008年），411–429。

[Net10] T. Netzer，正性保持映射的表示与逼近，几何分析杂志**20** （2010年），751–770。[Omo97] H. Omori，无穷维李群，数学专著译丛，第158号，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1997年。[Sch23] A. Schmeding，无穷维微分几何导论，剑桥高等数学研究丛书，第202号，剑桥大学出版社，英国剑桥，2023年。[SW99] H. H. Schaefer 和 M. P. Wolff，拓扑向量空间，第2版，施普林格出版社，纽约，1999年。[Trè67] F. Trèves，拓扑向量空间、分布与核，学术出版社，纽约，1967年。