arXiv:2602.00968v1 [eess.SY] 1 Feb 2026

一类非仿射非线性系统的鲁棒自适应学习控制

高帅、沈东和Abdelhamid Tayebi

摘要—我们研究了一类具有高相对阶、执行非重复性任务的不确定非仿射非线性系统的跟踪问题。我们提出了一种经过严格证明的鲁棒自适应学习控制方案，该方案依靠梯度下降参数自适应律处理系统中未知的时变参数，并结合状态估计器对不可测状态变量进行估计。此外，尽管非仿射系统本质上具有复杂性，我们仍提供了一种显式的迭代计算方法，以便于所提出控制方案的实现。本文对所提出控制策略的性能进行了全面分析，并通过仿真结果展示了该方法的有效性。

I. 引言

自 [1]早期发展以来，迭代学习控制（ILC）领域取得了长足进展。ILC技术致力于利用先前操作的结果来修改未来任务的控制信号。这使控制器能够在每次迭代中逐步提升其性能，并最终在若干周期后实现精确跟踪。许多受控系统被设计为在有限时间内重复执行类似任务，例如机器人操作器 [2], 、移动机器人 [3], 以及高速列车 [4]。对于这类系统，ILC是一种有效的控制策略，它利用先前迭代中的输入和输出数据来提升后续迭代中的控制性能。关于ILC领域的参考文献，可参阅以下一份并不详尽的列表 [5], [6], [7]–[8], [9], [10], [11]。

非仿射非线性系统在实际控制场景中十分常见，例如水下航行器[12],飞行控制系统 [13],以及包括 pH中和在内的化学反应 [14]。然而，目前尚无针对非仿射非线性系统的系统化控制设计方法。处理这类系统的复杂性源于输入以非线性方式影响系统动力学，这使得对其进行控制颇具挑战性 [14]。尽管迭代学习控制（ILC）领域已取得显著进展，但文献中只有少数论文研究非仿射非线性系统 [15], [16], [17]–[18], [19], [20]。

在 [15],中，针对非仿射非线性系统提出了一种P型迭代学习控制方案，并指出，即使对于相对阶为1的系统，选择能够保证跟踪误差收敛的学习增益也并非易事。针对非仿射非线性系统，还提出了一些基于动态线性化的数据驱动迭代学习控制方法 [16], [17], [18],，其中利用伪偏导数对非仿射特性进行建模。然而，动态线性化要求系统满足广义Lipschitz条件 [16], [17]–[21], [22], ，该条件比常见的全局Lipschitz条件更严格，在实践中往往难以满足。此外，DDILC方法的收敛过程基于压缩映射原理，与所执行的任务密切相关。一旦参考轨迹发生变化，压缩过程就必须重新开始。因此，DDILC方法难以有效跟踪迭代变化的参考轨迹。研究人员还利用神经网络（NN）的逼近能力，为非仿射非线性系统的非重复参考轨迹跟踪问题设计了迭代学习控制策略 [19], [20]。然而，神经网络的逼近结果仅在局部紧集上成立。如何确保系统状态保持在该紧集内，尚未得到充分解决。这一局部逼近问题削弱了基于神经网络的迭代学习控制在理论上的完备性。另一方面，网络复杂度与逼近精度本质上相互冲突，无法同时优化，这进一步限制了神经网络的实用性。

上述方法的核心思想是通过动态线性化将非仿射非线性系统转化为等效线性系统，或利用神经网络逼近学习控制器，从而绕过非仿射系统的复杂性。因此，这些方法被视为间接控制策略。这引出了一个问题：能否针对某些非仿射非线性系统开发直接迭代学习控制方法，以有效跟踪随迭代次数变化的参考轨迹?

现实中的非仿射系统通常具有明确的物理基础（例如， [13] 中的飞机系统和 [23]中的双倒立摆系统）。其动态结构通常可以根据物理定律推导得出，而不确定性的主要来源是未知参数。这类参数化非仿射系统十分常见

本研究部分得到国家自然科学基金委员会项目（批准号：62573422和62173333）的资助；部分得到中国人民大学2025年杰出创新人才培养资助计划的资助。S. Gao和D. Shen任职于中国人民大学数学学院，地址为中国北京100872（电子邮箱：gaoshuai@ruc.edu.cn，dshen@ieee.org）。A. Tayebi任职于湖首大学电气与计算机工程系，地址为加拿大安大略省桑德贝市P7B 5E1（电子邮箱：atayebi@Lakeheadu.ca）。

于工程实践中，且其结构可加以利用，这与我们设计直接迭代学习控制方法来处理此类系统的初衷一致。为增强一般性，我们考虑具有高相对阶且存在非重复扰动的系统。通过采用适当的系统辨识技术，并将辨识误差视为未知扰动，我们的框架有望扩展到更一般的非参数化系统。对于参数化系统，自适应迭代学习控制（AILC）结合了迭代学习控制与传统自适应控制，是一种自然且前景广阔的方法。然而，现有的大多数自适应迭代学习控制研究都局限于仿射系统 [2], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [30], ，参数化非仿射系统这一类系统在很大程度上仍未得到探索。

本文针对一类具有高相对阶和非重复扰动的不确定离散时间参数化非仿射非线性系统，提出一种直接自适应迭代学习控制方案，使其能够在有限时间区间内有效跟踪迭代变化参考轨迹。与现有针对仿射系统的自适应迭代学习控制研究相比，[2], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [30], 非仿射特性给控制器设计与分析带来了独特的技术挑战。首先，在仿射情形下，轨迹跟踪问题的可行性由输入增益决定；而在非仿射情形下，该问题等价于关于输入变量的非线性方程的可解性，目前尚无相关结论。其次，仿射系统的自适应迭代学习控制输入根据确定性等价原理推导得出，并具有显式表达式；然而，非仿射情形下的自适应迭代学习控制输入以隐函数形式给出。因此，必须为控制输入设计高效的数值实现方案。此外，分析控制输入的数值近似误差对轨迹跟踪误差的影响，也是非仿射系统面临的一项独特挑战。最后，考虑非重复扰动和高相对阶等实际因素，虽然增强了控制方案的通用性，却也使这些技术挑战进一步复杂化。因此，当前自适应迭代学习控制框架无法解决本文所考虑的问题，需要采用新的技术方法。

我们采用梯度下降参数自适应（GDPA）律，并结合一个状态估计器来估计不可测状态变量，从而设计出一种鲁棒的自适应迭代学习控制，确保在存在外部扰动时跟踪误差收敛至零的邻域内，而在不存在扰动时实现完美跟踪。我们利用全局隐函数定理证明了控制输入的存在性和唯一性 [31]。

由于所研究的系统是非仿射的，控制输入可能并非总能得到显式解。为解决这一问题，我们提出了一种基于压缩映射的迭代数值计算方法，用于近似求解控制输入，从而便于实施所提出的控制策略。我们还详细分析了近似误差对跟踪精度的影响。此外，还提供了两个仿真示例，以说明所提出方法的有效性。

本文的主要贡献概述如下：

- 我们针对一类具有高相对阶和非重复扰动的不确定非仿射非线性系统，提出了一种有效的控制方案。由于这类系统本身较为复杂，关于其控制设计的研究仍相对有限。
- 通过分析非仿射系统的结构特性，我们提出了一种直接自适应迭代学习控制方法，与现有的数据驱动迭代学习控制 [16], [17],[18] 和基于神经网络的迭代学习控制 [19], [20] 方法显著不同。该方法无需使用神经网络，并放宽了对系统和参考轨迹的严格要求（例如广义Lipschitz条件和重复参考轨迹）。所提出的设计路径包括未知参数估计、隐式控制输入设计以及对所设计控制输入进行显式数值近似，为解决非仿射非线性系统的轨迹跟踪问题提供了新思路。
- 不同于现有关于自适应迭代学习控制 [2], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [30],的研究，我们针对非仿射系统提出了一种自适应迭代学习控制方法，开展了跟踪问题的可行性分析，并给出了隐式控制输入设计及其数值实现算法。定量刻画了跟踪精度与扰动、相对阶以及控制输入的数值逼近误差之间的关系。

本文其余部分的安排如下。第二节对跟踪控制问题进行 formulates。第三节给出了跟踪控制问题的可行性分析和自适应迭代学习控制设计。第四节分析了所提出的自适应迭代学习控制方案的性能。第五节给出了所提出自适应迭代学习控制方案的显式且可实现解。第六节给出了一些仿真示例。第七节对全文进行总结。

记号：正整数集合记为 $\mathbb{Z}^+$。实数集合和 n维实数空间分别记为 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}^n$。对于向量 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$，$\|\boldsymbol{\alpha}\|$ 表示 $\boldsymbol{\alpha}$ 的2-范数。在 $\mathbb{R}^n$ 中，以 $\boldsymbol{x_0}$为中心、半径为 r_0 的球记为 $\mathcal{B}(\boldsymbol{x_0},\ r_0) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}\| \leq r_0\}$。

II. 问题表述

考虑以下非仿射非线性重复系统：

$$x_k(t+\rho) = F(\boldsymbol{X}_k(t), u_k(t), t) + w_k(t), \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{X}_k(t) = [x_k(t+\rho-1)\ x_k(t+\rho-2)\ \cdots,\ x_k(t)]^\top$。变量 $x_k(t) \in \mathbb{R}$、$u_k(t) \in \mathbb{R}$和 $w_k(t) \in \mathbb{R}$分别表示可测状态、系统输入和未知扰动。时间变量表示为 $t \in \{0, 1, \cdots, T-\rho\}$，迭代变量表示为

$k \in \mathbb{Z}^+$。非线性函数 $F(\boldsymbol{X}_k(t)\ u_k(t)\ t)$ 满足以下条件：

$$F(\boldsymbol{X}_k(t), u_k(t), t) = \boldsymbol{\theta}(t)^\top \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t), u_k(t)),$$

其中 $\boldsymbol{\theta}(t) \in \mathbb{R}^p$ 是未知时变参数向量，且 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}, u)$: $\mathbb{R}^{\rho+1} \to \mathbb{R}^p$ 是分量充分光滑的已知函数向量。根据 [32], 中的定义，相对阶的概念表示输入与输出之间的延迟。对于系统(1)，时刻 t的控制输入决定 ρ 步之后的输出。因此，(1)的相对阶为 ρ。

对于我们的控制设计，需要以下假设：

假设 *1:* 存在一个已知闭邻域$\mathcal{B}(\boldsymbol{\theta}, R)$，使得 $\boldsymbol{\theta}(t) \in \mathcal{B}(\boldsymbol{\theta}, R)$，并且对于任意 p维向量 $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{B}(\boldsymbol{\theta}, R)$，$\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^\rho$，$u \in \mathbb{R}$，不等式$\left|\boldsymbol{\phi}^\top \frac{\partial}{\partial u} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}, u)\right| > d_0$成立，其中 d_0 是未知正常数。

假设*2*：系统扰动 $w_k(t)$有界，*i*.e.，$w \triangleq \sup_{k,t} |w_k(t)| < \infty$，其中 w 是一个未知的上确界。

假设*3*：向量值函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}, u)$满足全局利普希茨条件。换言之，存在正常数 $L^{\boldsymbol{X}}$ 和 L^u，使得

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_1, u) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_2, u)\| \le L^{\boldsymbol{X}} \|\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2\|,$$
$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}, u_1) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}, u_2)\| \le L^u |u_1 - u_2|.$$

假设*4*：对于所有 $k \in \mathbb{Z}^+$，变量 $x_k(0)$、$x_k(1)$、...、$x_k(\rho-1)$均有界且已知。

注*1*：假设1等价于要求仿射系统具有非零输入增益，如 [30], [28]所示；对于非仿射系统 [33], [19]，这也是一项常见假设。虽然本研究关注单输入单输出（SISO）系统，但所提出的自适应迭代学习控制框架预计可推广至多输入多输出（MIMO）场景。关键在于确定能够保证跟踪可行性的合理假设（类似于SISO情形下的假设1）。例如，如果系统函数关于输入向量的雅可比矩阵严格对角占优，则可以实现推广。更一般的可行性条件仍需进一步详细探讨。由于实际系统中的大多数扰动都有界，因此假设2是合理且普遍采用的 [34], [35],[36]。此外，本研究的结果还可扩展至某些特定的无界扰动情形，例如参数化扰动。假设3对非线性施加了一定限制，如 [34], [37], [38],所示；许多实用的非仿射系统都满足这一条件，例如复杂电路 [39] 和单连杆机械臂 [40]。鉴于系统的相对阶为 ρ，每次迭代的初始 ρ 值 $x_k(0)$、$x_k(1)$、...、$x_k(\rho-1)$无法控制，而是由迭代 k开始前对系统进行重置来确定。因此，我们假设这些值已知且有界。

备注*2*：以下严格反馈系统常见于现有文献中 [41], [42], [30]:

$$\begin{cases} x_k^{(j)}(t+1) = x_k^{(j+1)}(t) + f_j\big(x_k^{(1)}(t), \cdots, x_k^{(j)}(t)\big), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad j = 1 \cdots \rho - 1, \\ x_k^{(\rho)}(t+1) = \boldsymbol{\theta}(t)^\top f_\rho(x_k^{(1)}(t), \cdots, x_k^{(\rho)}(t), u_k(t)), \end{cases} \tag{2}$$

其中 $f_j,\ j = 1, \cdots, \rho$是满足全局利普希茨条件的已知函数，而 $\boldsymbol{\theta}(t)$ 是未知的时变参数向量。将 $x_k^{(1)}(t)$ 视为可测状态，并将 $x_k^{(i)}($ t t $t+)$ 重写为 $1 \cdots x_k^{(1)}\ t+i-1\quad i = 1 \cdots \rho$ $x_k^{(1)}()$ $x_k^{(1)}()$, $()$, , 的函数。代数递推表明，系统（2）可转换为系统（1）的形式。

目标：在假设1-4下，设计迭代学习自适应控制输入序列 $\{u_k(t)\}_{k=1}^\infty$，使状态 $\{x_k(t)\}_{k=1}^\infty$ 尽可能准确地跟踪迭代变化参考轨迹 $\{r_k(t)\}_{k=1}^\infty$，对于所有 $t \in \{\rho, \cdots, T\}$，当 k 趋于无穷大时均如此。将跟踪误差记为 $e_k(t) = x_k(t) - r_k(t)$，我们的自适应迭代学习控制应保证

$$\limsup_{k\to\infty} |e_k(t)| \in \mathcal{B}(0, \mathcal{R}(w)),\ t \in \{\rho, \cdots, T\},$$

其中 $\mathcal{R}(w)$是依赖于扰动上确界的收敛球半径，且

$$\lim_{k\to\infty} |e_k(t)| = 0,\ t \in \{\rho, \cdots, T\},$$

在没有扰动的情况下（即 $w_k(t) \equiv 0$）。

为实现控制目标，我们必须设计一条参数自适应律，以处理控制方案中的未知参数向量 $\boldsymbol{\theta}(t)$，并设计一个状态估计器，用于估计不可测状态变量。由于自适应迭代学习控制输入未必总有显式解，因此我们将提出一种高效的数值方法，以设计可显式实现的控制输入。

III. 跟踪可行性与自适应迭代学习控制设计

A. 跟踪可行性分析

我们首先关注跟踪控制问题的可行性。我们将证明，对于满足 $w_k(t) \equiv 0$的系统（1），存在理想控制输入 $u_k^*(t)$，使得对所有 $t \in \{0, \cdots, T-\rho\}$，均有 $x_k(t+\rho) = r_k(t+\rho)$。为此，只需检查以下关于 u的方程是否可解：

$$\boldsymbol{\theta}(t)^\top \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t), u) - r_k(t+\rho) = 0. \tag{3}$$

根据假设1，有 $|\boldsymbol{\theta}(t)^\top \frac{\partial}{\partial u} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t)\ u)| > d_0 > 0$。为简便起见且不失一般性，考虑情形 $\boldsymbol{\theta}(t)^\top \frac{\partial}{\partial u} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t)\ u) > d_0$，并定义映射 $\mathcal{Z}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ u \mapsto \overline{\mathcal{Z}(u)} = \boldsymbol{\theta}(t)^\top \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t)\ u) - r_k(t+\rho)$。令 $c = \mathcal{Z}(0)$。若 $c = 0$，则$\boldsymbol{\theta}(t)^\top \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t), 0) = r_k(t+\rho)$，这意味着 $u = 0$已满足(3)。若 $c \neq 0$，我们定义如下映射：$\mathcal{T}$：$\mathcal{B}\left(0, \frac{|c|}{d_0}\right) \to \mathbb{R}$，$u \mapsto \mathcal{T}(u) = u - \frac{1}{l}\mathcal{Z}(u)$，其中$l > 0$为常数，使得 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{B}\left(0, \frac{|c|}{d_0}\right)$上的压缩映射。于是 $\mathcal{T}$具有唯一不动点，该不动点即为(3)的解，如下述命题所述：

命题*1*：在假设1下，对任意 $t \in \{0,1,\cdots,T-\rho\}$ 和 $k \in \mathbb{Z}^+$，存在唯一的理想控制输入 $u=u_k^*(t)$，使得(3)成立。此外，存在一个已知的压缩映射 $\mathcal{T}$，使得 $u_k^*(t)$是 $\mathcal{T}$的不动点，即，$\mathcal{T}(u_k^*(t))=u_k^*(t)$。

证明：参见附录A。

*B. GDPA*方案

命题1表明，若 $w_k(t)\equiv 0$，则存在理想控制输入 $u_k^*(t)$，可实现完美跟踪$x_k(t+\rho)=r_k(t+\rho)$。然而，$u_k^*(t)$取决于未知的 $\boldsymbol{\theta}(t)$，且 $\boldsymbol{X}_k(t)$包含不可测分量 $x_k(t+1)$、$x_k(t+\rho-2)$、...、$x_k(t+\rho-1)$。因此，我们必须估计 $\boldsymbol{\theta}(t)$和 $\boldsymbol{X}_k(t)$。下文中，我们将 $\boldsymbol{\theta}(t)$在第 k次迭代时的估计值记为$\hat{}\,\hat{}\boldsymbol{\theta}_k(t)$。通过最小化以下代价函数，可得到 $\boldsymbol{\theta}_k(t)$的自适应律：

$$J(\hat{\boldsymbol{\theta}}(t))=\frac{(x_k(t+\rho)-\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)^\top \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t),u_k(t)))^2}{2m_k(t)^2},\ \textbf{w.r.t}\ \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$$

其中，$m_k(t)=\sqrt{1+\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t)\ u_k(t))\|^2}$是一个归一化因子。使用梯度下降法，可推导出如下形式的参数自适应律：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)=\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)+\eta\frac{(x_k(t+\rho)-\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)^\top \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t),u_k(t)))}{m_k(t)^2}\times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t),u_k(t)),$$

其中 η 为自适应增益。

由于存在系统扰动，需要进行鲁棒性修正。我们引入随迭代变化的死区函数 $a_k(t)$和投影算子 Proj(·)，将最终的 GDPA 律设计如下：

$$\epsilon_k(t+\rho)=\frac{x_k(t+\rho)-\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)^\top \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t),u_k(t))}{m_k(t)^2}, \tag{4}$$

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)=\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)+\eta a_k(t)\epsilon_k(t+\rho)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t),u_k(t)), \tag{5}$$

$$a_k(t)=\begin{cases}0,\ \text{if}\ |\epsilon_k(t+\rho)|\le\frac{\hat{w}_k(t)}{m_k(t)^2},\\ 1-\frac{\hat{w}_k(t)}{|\epsilon_k(t+\rho)|m_k(t)^2},\ \text{otherwise},\end{cases} \tag{6}$$

$$\hat{w}_{k+1}(t)=\hat{w}_k(t)+\eta a_k(t)|\epsilon_k(t+\rho)|, \tag{7}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)=\mathrm{Proj}_{\mathcal{B}(\underline{\boldsymbol{\theta}},R)}\left(\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)\right)=\begin{cases}\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t),\ \text{if}\ \bar{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)\in\mathcal{B}(\underline{\boldsymbol{\theta}},R),\\ \underline{\boldsymbol{\theta}}+\frac{R(\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)-\underline{\boldsymbol{\theta}})}{\|\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)-\underline{\boldsymbol{\theta}}\|},\ \text{otherwise}.\end{cases} \tag{8}$$

$\hat{}$ 初始值 $\boldsymbol{\theta}_0(t)$ 可任意选取。变量$\epsilon_k(t+\rho)$表示以$m_k(t)$为因子的归一化建模误差。死区信号 $a_k(t)$ 用于补偿系统扰动。给定未知扰动上确界 w，我们采用估计上确界 $\hat{}\,w_k(t)$，并将 $\hat{}\,w_0(t)=0$初始化，以确保 $\hat{}\,w_k(t)\ge 0$。投影算子 $\mathrm{Proj}_{\mathcal{B}(\boldsymbol{\theta},R)}(\cdot)$ $\hat{}$将 $\boldsymbol{\theta}_k(t)$ 限制在闭球 $\mathcal{B}(\boldsymbol{\theta},R)$ 内。估计值 $\hat{}\,\hat{}\boldsymbol{\theta}_k(t)$ 和 $\hat{}\,w_k(t)$ 利用先前试验的数据迭代更新，从而确保 GDPA 律 (4)-(8) 满足因果性。

C. 状态估计

应用 GDPA 律，在第 k 次迭代的时刻 t，状态变量 $x_k(0)\ \cdots, x_k(t)$、输入 $u_k(0)\ \cdots, u_k(t-\hat{}\,\hat{}\,1)$ 以及参数估计值 $\boldsymbol{\theta}_k(0)\ \cdots, \boldsymbol{\theta}_k(T-\rho)$ 均可用。随后利用这些信息设计状态估计器，以估计$\boldsymbol{X}_k(t)$中的不可测状态变量，如下所示：

$$x_k^e(t+\rho-1|t)=\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t-1)^\top \boldsymbol{f}\big(x_k^e(t+\rho-2|t),\cdots, x_k^e(t+1|t),x_k(t),x_k(t-1),u_k(t-1)\big) \tag{9}$$

$$x_k^e(t+\rho-2|t)=\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t-2)^\top \boldsymbol{f}\big(x_k^e(t+\rho-3|t),\cdots, x_k^e(t+1|t),x_k(t),x_k(t-1),x_k(t-2),u_k(t-2)\big) \tag{10}$$

$$\vdots$$

$$x_k^e(t+1|t)=\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t-\rho+1)^\top \boldsymbol{f}\big(x_k(t),\cdots,x_k(t-\rho+1),u_k(t-\rho+1)\big), \tag{11}$$

$$x_k^e(t|t)=x_k(t), \tag{12}$$

对于 $0\le t'\le t\le\rho-1$，我们将 $x_k^e(t|t')=x_k(t)$ 设为 $x_k(0)$，...，$x_k(\rho-1)$ 均可用（回顾假设 4）。时刻 $t+\rho$ 的状态估计值由以下模型获得：

$$x_k^e(t+\rho|t)=\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)^\top \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k^e(t),u_k(t)), \tag{13}$$

where $\boldsymbol{X}_k^e(t)=[x_k^e(t+\rho-1|t),\cdots,x_k^e(t+1|t),x_k^e(t|t)]^\top$.

D. 隐式 *AILC* 设计

现在，我们将使用模型 (13) 和可用数据，证明隐式自适应迭代学习控制输入 $u_k(t)$ 的存在性。令$x_k^e(t+\rho|t)=r_k(t+\rho)$，并考虑模型 (13)，隐式自适应迭代学习控制输入 $u_k(t)$ 是以下方程的解：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)^\top \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k^e(t),u_k(t))=r_k(t+\rho). \tag{14}$$

作为式 (14) 的解，自适应迭代学习控制输入 $u_k(t)$ 的存在性将在下述命题中给出：

命题*2*：在假设1下，存在唯一的自适应迭代学习控制输入 $u_k(t)$，使得式 (14) 成立。此外，存在一个已知的压缩映射 $\mathcal{T}'$：$\mathcal{B}(0,\frac{|c'|}{d_0})\to\mathbb{R}$,$\mathcal{T}'$ u u $u=u_k$ t —— ( ) $=u-\frac{1}{l'}\mathcal{Z}'(\,)$，使得：( ) 是 $\mathcal{T}'$ 的不动点，其中 $\mathcal{Z}'(u)=\hat{}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)^\top \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k^e(t)\ u)-r_k(t+\rho)$,$c'=\mathcal{Z}'(0)$ and $l'>\sup_{u\in\mathcal{B}(0,\frac{|c'|}{d})}|\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)^\top \frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k^e(t)\ u)|$。 —

证明：证明与命题1的证明类似，故为简洁起见予以省略。

$\hat{}$ 给定参数估计 $\boldsymbol{\theta}_k(t)$、估计状态向量 $\boldsymbol{X}_k^e(t)$ 以及参考轨迹 $r_k(t+\rho)$，自适应迭代学习控制输入 $u_k(t)$ 是由下式给出的隐函数

$$u_k(t)=\mathcal{G}(\boldsymbol{X}_k^e(t),\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t),r_k(t+\rho)). \tag{15}$$

隐式迭代学习自适应控制方案包括 GDPA 律 (4)-(8)、状态估计器 (9)-(12) 和控制输入 (15)，如图 1 所示。

注*3*：值得指出的是，GDPA 律 (4)-(8) 可针对特定情形加以简化。若函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X},u)$ 有界，则可令 $m_k(t)\equiv 1$。在无扰动情形下，可令 $a_k(t)\equiv 1$ 并省略

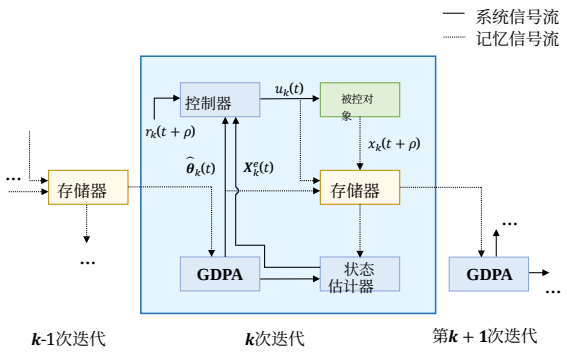


图1. 自适应迭代学习控制方案的框图。

估计 $\hat{w}_k(t)$，以改善跟踪性能（见第四节中的推论2和第五节中的推论 3）。若扰动 $w_k(t)$ 具有已知上界 w^+（$|w_k(t)| \le w^+$），则可在 (6) 中使用 w^+ 并跳过估计律 (7)，而 w^+ 与 w 之间的较大差异可能会影响跟踪精度。

IV. 收敛性分析

本节将建立所提出的自适应迭代学习控制方案 (15) 在 GDPA 律 (4)-(8) 和状态估计 (9)-(12) 下的收敛性质。我们的结果由以下定理给出：

定理*1*：考虑满足假设1-4的系统 (1)，在自适应迭代学习控制输入 (15)、GDPA 律 (4)-(8) 和状态估计 (9)-(12) 下，对于 $0 < \eta < 2$，对所有$t \in \{0, \cdots, T-\rho\}$，存在常数 $K^{i,t} \ge 0$，$i = 0, \cdots, t-1$，使得

$$\limsup_{k\to\infty} |e_k(t+\rho)| \le w + \sqrt{2V_0(t)} + \sum_{i=0}^{t-1} K^{i,t}\left(w + \sqrt{2V_0(i)}\right),$$

其中 $V_0(t) = \frac{1}{2}\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_0(t) - \boldsymbol{\theta}(t)\|^2 + \frac{1}{2}(\hat{w}_0(t) - w)^2$。

证明：见附录 B。

定理1表明，跟踪误差 $e_k(t+\rho)$ 收敛到零点周围的一个闭球。首先，该闭球的半径与 $K^{i,t}$ 有关，而它取决于未知常数 d_0、利普希茨常数 $L^{\boldsymbol{X}}$, L^u、参考轨迹的上界 $\sup_{k,t} r_k(t+\rho)$、初始估计 $\boldsymbol{\theta}_0(t)$ 和半径 R。无论设计何种控制器，这些值都无法改进。因此，定理1中的上界是紧的。另一方面，该半径取决于从时间 0 到 t 的扰动。这是由相对阶 ρ导致的，它使得状态变量 $x_k(t+\rho-1)$,..., $x_k(t+1)$ 不可测。因此，我们利用时间 t 之前的历史信息来估计这些不可测状态变量（见 (9)-(12)）。对于特殊情况 $\rho = 1$，$u_k(t)$ 可由模型 $r_k(t+1) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)^\top \boldsymbol{f}(x_k(t)\ u_k(t))$ 得到，无需进行状态估计，从而得到以下推论：

推论*1*：对于 $\rho = 1$，在定理 1 的条件下，对于每个 $t \in \{0, \cdots, T-1\}$，有

$$\limsup_{k\to\infty} |e_k(t+1)| \le w + \sqrt{2V_0(t)}.$$

证明：参见附录C。

在无扰动情形下，即 $w_k(t) \equiv 0$，令死区函数 $a_k(t)$ 为 1，这将参数自适应律 (5) 简化为：

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) + \eta\epsilon_k(t+\rho)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t), u_k(t)), \qquad (16)$$

由此可实现如下推论所述的完美跟踪：

推论*2*：考虑系统 (1)，其中 $w_k(t) \equiv 0$，满足假设 1、3、4，在采用自适应迭代学习控制输入 (15)、GDPA 律 (4)、(16)、(8) 和状态估计值 (9)-(12)，且 $0 < \eta < 2$ 的条件下，可实现完美跟踪，即

$$\lim_{k\to\infty} |e_k(t+\rho)| = 0,$$

对所有 $t \in \{0, \cdots, T-\rho\}$。

证明：参见附录 D。

V. 显式自适应迭代学习控制设计

本节为自适应迭代学习控制输入 (15) 提供一种显式且可实现的解。为此，我们提出一种迭代计算方法，在第 k 次迭代的时间 t，构造序列 $\{\mathrm{u}_k^p(t)\}_{p=0}^{\infty}$，如下所示：

$$\mathrm{u}_k^p(t) = \begin{cases} \mathcal{T}'(\mathrm{u}_k^{p-1}(t)), & p > 0, \\ 0, & p = 0, \end{cases} \qquad (17)$$

其中，映射 $\mathcal{T}'$ 在命题 2 中定义。由于 $\mathcal{T}'$ 是 $\mathcal{B}(0, \frac{|c'|}{d_0})$ 上的压缩映射，可以证明序列 $\{\mathrm{u}_k^p(t)\}_{p=0}^{\infty}$ 收敛。令等式 (17) 两边的 $p \to \infty$，可得

$$\lim_{p\to\infty} \mathrm{u}_k^p(t) = \mathcal{T}'\big(\lim_{p\to\infty} \mathrm{u}_k^p(t)\big),$$

根据不动点的唯一性，可得

$$\lim_{p\to\infty} \mathrm{u}_k^p(t) = u_k(t),$$

其中，$u_k(t)$ 是由 (15) 给出的隐式控制输入。注意，$\mathrm{u}_k^p(t)$ 是 $u_k(t)$ 的数值近似，当 p 足够大时，该近似是准确的。在实际实现中，必须经过有限步后停止迭代过程 $\mathrm{u}_k^p(t) = \mathcal{T}'(\mathrm{u}_k^{p-1}(t))$，这会导致 $\mathrm{u}_k^p(t)$ 与 $u_k(t)$ 之间存在近似误差。下面给出该迭代过程的实用停止准则：

迭代停止准则：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，迭代过程 $\mathrm{u}_k^p(t) = \mathcal{T}'(\mathrm{u}_k^{p-1}(t))$ 在经过 $p_o(k,t)$ 次迭代后停止，其中

$$p_o(k,t) = \begin{cases} \left\lfloor \log_{(1-\frac{d_0}{l'})} \frac{\varepsilon d_0}{l'|\mathrm{u}_k^1(t) - \mathrm{u}_k^0(t)|} \right\rfloor + 1, & \text{if } \mathrm{u}_k^1(t) \ne \mathrm{u}_k^0(t), \\ 1, & \text{if } \mathrm{u}_k^1(t) = \mathrm{u}_k^0(t). \end{cases} \qquad (18)$$

算子 $\lfloor\cdot\rfloor$ 表示向下取整函数，即将一个数向下舍入到最接近的整数。

引理 1 给出了在上述迭代停止准则下，迭代近似 $\mathrm{u}_k^p(t)$ 与自适应迭代学习控制输入 $u_k(t)$ 之间的近似误差。

引理 *1*：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，迭代过程（17）保证 $|\mathrm{u}^{p_o(k,t)}{}_k(t)-u_k(t)|<\varepsilon$，其中 $p_o(k,t)$ 由停止准则（18）给出。

证明：见附录E。

注4：注意，$p_o(k,t)$ 是使 $|\mathrm{u}_k^p(t)-u_k(t)|<\varepsilon$ 成立的最小迭代次数的上界。ε 的值越小，$p_o(k,t)$ 的值越大，因为 $\left\lfloor \log_{(1-\frac{d_0}{l'}\ l'|\ \frac{1}{k}\ t}\frac{\varepsilon d_0}{-\mathrm{u}(\,)\,\mathrm{u}_k^0(t)|}\right\rfloor$ 是 ε 的减函数。若将对数值进行一次加法、乘法、赋值或比较视为一次基本运算，并假设 $\mathrm{u}_k^1(t)-\mathrm{u}_k^0(t)$ 为常数，则对于 $\varepsilon=\frac{1}{n}$，采用数值近似的自适应迭代学习控制方案（4）-（8）、（9）-（12）、（15）、（17）在一次迭代（k）中所需的基本运算次数为 $O\left((\ln\ n+p\rho)\,\tilde{T}\right)$，其中 $\tilde{T}=T-\rho+1$ 为跟踪时间长度。因此，随着阈值 $\frac{1}{n}$ 减小，以及参数维数 p、相对阶 ρ 和跟踪时间长度 T 增大，所需的计算开销也会增加。

在采用GDPA律(4)-(8)、状态估计(9)-(12)和迭代近似(17)的自适应迭代学习控制输入(15)下，可以陈述如下定理:

定理*2:* 考虑满足假设1-4的系统(1)，在采用GDPA律(4)-(8)、状态估计(9)-(12)和迭代近似(17)的自适应迭代学习控制输入(15)下。对于任意给定的 $\varepsilon>0$，若 $p>p_o(k,t)$且 $0<\eta<2$，则存在常数 $K^{i,t}_{*}$，$t=0,\cdots,T-\rho$，$i=0,\cdots,t-1$，使得

$$\limsup_{k\to\infty}|e_k(t+\rho)|\le w+\sqrt{2V_0(t)}+\sum_{i=0}^{t-1}K_*^{i,t}(w+\sqrt{2V_0(i)})+L^u\left(\sqrt{2V_0(t)}+\|\boldsymbol{\theta}(t)\|\right)\varepsilon.$$

证明：见附录F。

如定理 2所述，跟踪误差界取决于两个不确定性来源。第一个来源是时间 t 之前 $\sqrt{2V_0\ i}$ 的系统扰动，由 $\sum_{i=0}^{t-1}K^{i,t}_{*}(\,(\,))$表示。第二个来源是自适应迭代学习控制输入的近似误差，由 $L^u\left(\sqrt{2V_0(t)}+\|\boldsymbol{\theta}(t)\|\right)\varepsilon$给出。为提高跟踪精度，必须通过增加迭代过程(17)中的迭代次数来减小 ε。与推论2类似，在无扰动情形下，可通过采用带有修正的GDPA控制律(4)、(16)、(8)、状态估计(9)-(12)和迭代近似(17)的自适应迭代学习控制方案(15)来改善跟踪性能。

推论 *3*：考虑满足假设1、3、4的系统(1)，其中 $w_k(t)\equiv0$；在采用 GDPA 律(4)、(16)、(8)的自适应迭代学习控制输入(15)、状态估计(9)-(12)以及迭代近似(17)，且 $p>p_o(k,\ t)$和 $0<\eta<2$ 的条件下，有

$$\limsup_{k\to\infty}|e_k(t+\rho)|\le L^u\left(\sqrt{2V_0(t)}+\|\boldsymbol{\theta}(t)\|\right)\varepsilon,$$

对所有 $t\in\{0,1,\cdots,T-\rho\}$。

证明：见附录 G。

备注*5*：目前为止使用了三个控制输入符号：$u_k^*(t)$、$u_k(t)$和$\mathrm{u}_k^p(t)$。变量 $u_k^*(t)$表示为建立命题1中的结果而引入的理想控制输入，该结果表明跟踪问题是可行的。由于未知参数和不可测状态变量，该输入无法实现。变量$u_k(t)$表示式(15)中给出的隐式自适应迭代学习控制，它是式(14)的一个解，并用于命题 2。该输入依赖于测量和估计的信号，但由于其以隐式形式给出，因此并非总能实现。控制输入$\mathrm{u}_k^p(t)$是$u_k(t)$的显式迭代逼近，当无法求得式(14)的显式解时，可用于实现。

注释 *6*：根据 [15],，即使对于相对阶为一的非仿射系统，P型迭代学习控制也需要谨慎选择学习增益，并要求系统扰动最小（ [15]中的假设A4）。相比之下，我们提出的自适应迭代学习控制方案适用于具有高相对阶的非仿射系统，且其收敛条件更容易满足。对于数据驱动迭代学习控制，其收敛性分析的核心是压缩映射原理。该收敛过程与所执行的任务有关：参考轨迹一旦发生变化，就必须重新启动压缩过程。因此，现有的数据驱动迭代学习控制研究通常假设参考轨迹是迭代不变的 [16], [17], [18]。所提出的自适应迭代学习控制方法的收敛性分析基于类李雅普诺夫函数方法和关键技术引理（见附录），与所执行的任务无关。因此，它能够有效跟踪随迭代变化的参考轨迹。

VI. 数值仿真

本节给出两个仿真示例，以说明所提出的自适应迭代学习控制方案的有效性。首先，我们将所提出的自适应迭代学习控制与DDILC方法应用于一个相对阶为一的非仿射非线性系统，并进行比较。接下来，将所提出的自适应迭代学习控制方案应用于一个相对阶为二的双倒立摆系统。在这些仿真中，使用MATLAB中的“solve”函数，根据式（14）直接求解自适应迭代学习控制输入 $u_k(t)$。

A. 例*1*

系统模型由 [21]（第2章，第25页）修改而来，如下所示:

$$\begin{aligned}x_k(t+1)&=\left(0.5+\frac{t}{50}\right)\frac{x_k(t)\sin(x_k(t))}{1+x_k(t)^2}+\left(0.75+\frac{t}{75}\right)\mathrm{e}^{\frac{x_k(t)}{100}}\\&\quad+\left(1.5+0.5\times(-1)^t\right)u_k(t)^3\\&\quad+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{100}t\right)(\arctan(u_k(t))+u_k(t)),\\&=\boldsymbol{\theta}(t)^\top\boldsymbol{f}(x_k(t),u_k(t)),\qquad t\in[1,50],\end{aligned}$$

其中

$$\boldsymbol{\theta}(t)=\left[0.5+\frac{t}{50},0.75+\frac{t}{75},1.5+0.5\times(-1)^t,\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{100}t\right)\right]^\top$$

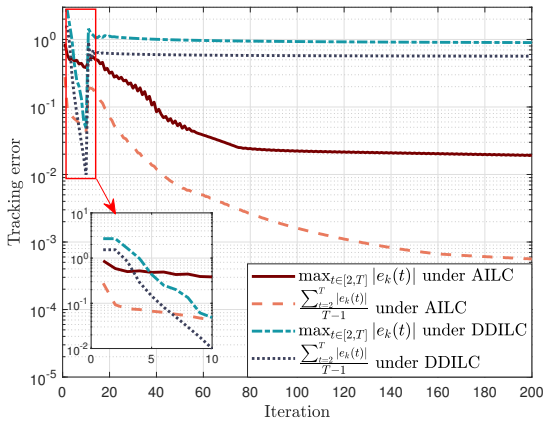
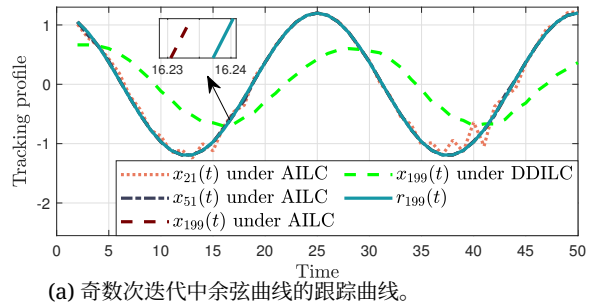
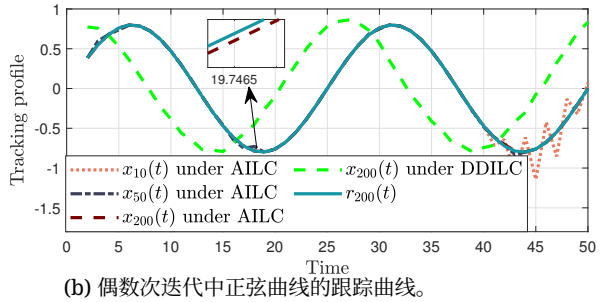


图2. 例1中 AILC 和 DDILC 下的最大跟踪误差和平均跟踪误差。



(a) 奇数次迭代中余弦曲线的跟踪曲线。



(b) 偶数次迭代中正弦曲线的跟踪曲线。

图3. 例1中 AILC 和 DDILC 下迭代变化参考轨迹的跟踪曲线。

and

$$\boldsymbol{f}(x_k(t),u_k(t)) = \left[\frac{x_k(t)\sin(x_k(t))}{1+x_k(t)^2}, \mathrm{e}^{\frac{x_k(t)}{100}}, u_k(t)^3, \arctan(u_k(t))+u_k(t)\right]^\top$$

分别为未知参数向量和已知函数向量。需要注意的是，$\boldsymbol{f}(x_k(t)\ u_k(t))$中存在各种强非线性，例如多项式函数和指数函数，它们不满足全局利普希茨条件。然而，正如仿真结果将显示的那样，我们的控制方案仍能实现高精度轨迹跟踪。

首先，我们将所提出的自适应迭代学习控制与数据驱动迭代学习控制进行比较，

表I 例1中的扰动。

	扰动情形	数学表达式
1	均匀分布	$\mathcal{U}[-0.01, 0.01]$
2	高斯分布	$\mathcal{N}(0, 0.01)$
3	类伯努利分布	$\begin{cases} P(w_k(t) = 0.03) = 0.3 \\ P(w_k(t) = -0.01) = 0.7 \end{cases}$
4	三角函数扰动	$w_k(t) = 0.01\,\text{正弦}(\frac{k\pi}{50}t) + 0.006\cos(\frac{k\pi t}{2})$
5	高阶内模扰动	$w_k(t) = \begin{cases} \frac{5}{3}w_{k-1}(t) - \frac{2}{3}w_{k-2}(t) & k > 2 \\ -0.02, & k = 2 \\ 0.02, & k = 1 \end{cases}$
6	状态依赖扰动	$w_k(t) = 0.01x_k(t) - 0.01\,\text{正弦}(x_k(t)\pi)$

比较情形为无扰动情形。参考轨迹设定为

$$r_k(t) = \begin{cases} 0.8\sin\left(\frac{2\pi}{25}t\right), & k \le 10, \text{ or } k \bmod 2 = 0, \\ 1.2\cos\left(\frac{2\pi}{25}t\right), & k > 10, \text{ and } k \bmod 2 = 1. \end{cases}$$

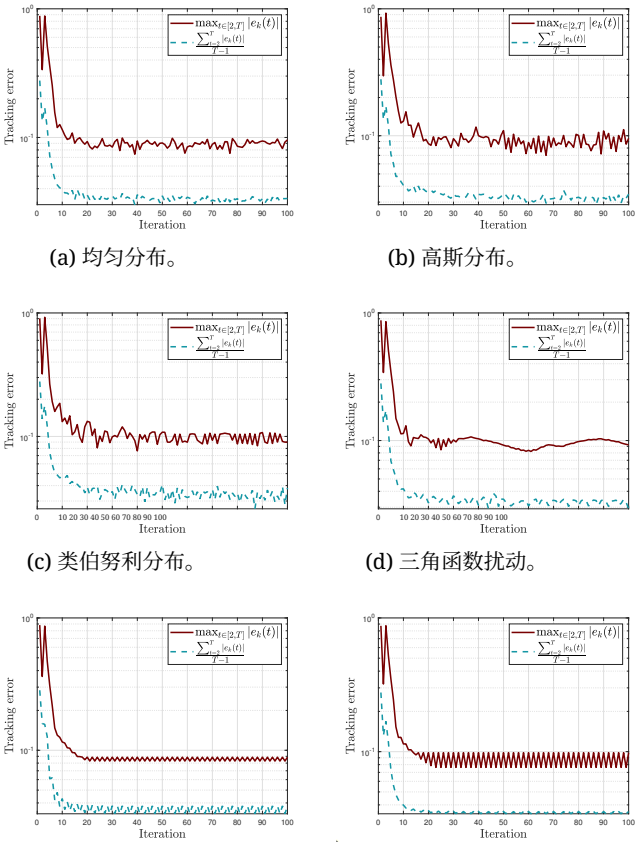
显然，前 10 次迭代中，$r_k(t)$ 是迭代不变的，这旨在说明 DDILC 和所提出的 AILC 对不变参考轨迹的有效性。从第 11 次迭代开始，$r_k(t)$ 在每次迭代中，奇数 k 时采用余弦曲线，偶数 k 时采用正弦曲线。初始状态设为 $x_k(1) = 0$。令 $\Delta x_k(t) = x_k(t) - x_{k-1}(t)$ 和 $\Delta u_k(t) = u_k(t) - u_{k-1}(t)$ 分别表示相邻迭代之间状态或输入的差异。DDILC方法如下（ [21]中的方案（2.16）-（2.18））：

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \frac{\rho'\hat{\theta}'_{k+1}(t)(r_k(t+1) - x_k(t+1))}{\lambda' + |\hat{\theta}'_{k+1}(t)|^2},$$

其中，$\theta'_{k+1}(t) = \theta'_0(t)$，若 $\text{sgn}(\theta'_{k+1}(t)) \neq \text{sgn}(\theta'_0(t))$ 或 $|\theta'_{k+1}(t)| \le 10^{-4}$ 或 $|u_k(t) - u_{k-1}(t)| \le 10^{-4}$，否则

$$\hat{\theta}'_{k+1}(t) = \hat{\theta}'_k(t) + \frac{\eta'\Delta u_k(t)(\Delta x_k(t+1) - \hat{\theta}'_k(t)\Delta u_k(t))}{\mu' + |\Delta u_k(t)|^2}.$$

DDILC方法中的参数选取为 $\eta' = 0.5$,$\rho' = 0.4$, $\lambda' = 1$, $\mu' = 0.5$。PPD估计和输入的初始值选取为 $\theta'_0(t) = 1, u_0(t) = 0$。对于改进的AILC方法(4)、(16)、(8)、(9)-(12)和(15)，投影所用闭球的中心和半径$\mathcal{B}(\boldsymbol{\theta}, R)$分别选取为 $\boldsymbol{\theta} = (1, 1, 1, 1)$和 $R = 0.9$。估计增益设为 $\eta = 1.9$，参数估计的初始值选取为 $\boldsymbol{\theta}_0(t) = (1, 1, 1, 1)$。在图2中，我们沿迭代轴以对数尺度绘制了DDILC和AILC的最大跟踪误差与平均跟踪误差。可以看到，在前10次迭代中，DDILC和AILC都能降低迭代不变参考轨迹的跟踪误差；然而，从第11次迭代开始，由于参考轨迹发生变化，DDILC所依赖的压缩映射过程必须在每次迭代时重新启动。我们提出的AILC方法在跟踪非重复参考轨迹方面具有显著优势。图3比较了DDILC和AILC下的参考轨迹与实际轨迹（请注意，此例中的相对阶为1，因此



(a) 均匀分布。 (b) 高斯分布。

(c) 类伯努利分布。 (d) 三角函数扰动。

(e) 高阶内模扰动。 (f) 状态依赖扰动。

Fig. 4. 例1中不同扰动下的跟踪误差

跟踪曲线从时间 $t=2$开始），这表明所提出的AILC方法具有出色的学习能力，并能有效实现轨迹跟踪目标。

接下来，我们验证所提出的自适应迭代学习控制方法 (4)-(8)、(9)-(12) 和 (15) 对未知扰动的鲁棒性。参考轨迹设定为

$$r_k(t)=\begin{cases}0.8\sin\left(\frac{2\pi}{25}t\right), & \text{if } k \bmod 2=1,\\ 0.5+0.5\times(-1)^{\lfloor\frac{t}{20}\rfloor}, & \text{if } k \bmod 2=0.\end{cases}$$

显然， $r_k(t)$在每次迭代中，奇数k 时切换为正弦波，偶数 k 时切换为方波曲线。初始状态值 $x_k(0)$在 $[0,0.01]$内随机选取。我们考虑表I所示的六种不同类型的扰动，以描述各种情形。情况1、2和3为随机扰动，情况4、5和6为确定性扰动。在控制参数相同的条件下，六种不同扰动情况下对应的误差收敛曲线如图4所示。可以看出，跟踪误差收敛到零附近。请注意，由于高阶内部模态的特征多项式稳定，其产生的扰动沿迭代轴收敛，从而减轻了图4 (e)中的振荡效应。状态依赖扰动和服从高斯分布的随机扰动不满足有界性条件（假设2），但如图4 (b)和(f)所示，自适应迭代学习控制方案仍具有鲁棒性。

B. 例2

我们将所提出的自适应迭代学习控制方案应用于由以下动力学描述的双倒立摆系统 [23],[43]:

$$\begin{cases}\dot{x}_{1,1}=x_{1,2},\\ \dot{x}_{1,2}=(\frac{m_1gr}{J_1}-\frac{kr^2}{4J_1})\sin(x_{1,1})+\frac{kr(l-b)}{2J_1}\\ \qquad +\frac{kr^2}{4J_1}\sin(x_{2,2})+\frac{u_{1\max}}{J_1}\tanh(u_1),\\ \dot{x}_{2,1}=x_{2,2},\\ \dot{x}_{2,2}=(\frac{m_2gr}{J_2}-\frac{kr^2}{4J_2})\sin(x_{2,1})+\frac{kr(l-b)}{2J_2}\\ \qquad +\frac{kr^2}{4J_2}\sin(x_{1,2})+\frac{u_{2\max}}{J_2}\tanh(u_2),\end{cases}\tag{19}$$

其中，$x_{1,1}$ 和$x_{2,1}$ 表示摆杆相对于竖直方向的角位移。 l、b、 g、k、 r、 J_i、 m_i和 $u_{i_{\max}}$ $(i=1,2)$ 的物理含义见 [23]。令 $\theta^{i1}=\frac{m_igr}{J_i}-\frac{kr^2}{4J_i}$、 $\theta^{i2}=\frac{kr}{2J_i}(l-b)$ 、 $\theta^{i3}=\frac{kr^2}{4J_i}$、 $\theta^{i4}=\frac{u_{i\max}}{J_i}$、 $i=1,2$。根据 [23] 中的数据计算出未知参数θ^{i2}、 θ^{i3}和 θ^{i4} 的真实值，并给出为 $\boldsymbol{\theta}^{(1)}=[\theta^{11},\theta^{12},\theta^{13},\theta^{14}]=[7.12,30,12.5,40]$ 和 $\boldsymbol{\theta}^{(2)}=[\theta^{21},\theta^{22},\theta^{23},\theta^{24}]=[9.62,24,10,32]$。

采用欧拉离散化方法并加入迭代索引后，(19)可改写为如下具有两个输入和两个输出的离散时间非仿射非线性系统:

$$\begin{cases}x_k^{(1)}(t+2)=2x_k^{(1)}(t+1)-x_k^{(1)}(t)+\theta^{11}\sin(x_k^{(1)}(t))\\ \qquad +\theta^{12}+\theta^{13}\sin(x_k^{(2)}(t+1)-x_k^{(2)}(t))\\ \qquad +\theta^{14}\tanh(u_k^{(1)}(t)),\\ x_k^{(2)}(t+2)=2x_k^{(2)}(t+1)-x_k^{(2)}(t)+\theta^{21}\sin(x_k^{(2)}(t))\\ \qquad +\theta^{22}+\theta^{23}\sin(x_k^{(1)}(t+1)-x_k^{(1)}(t))\\ \qquad +\theta^{24}\tanh(u_k^{(2)}(t)),\end{cases}\tag{20}$$

其中， $x_k^{(1)}(t)$和 $x_k^{(2)}(t)$表示摆杆相对于垂直位置的角位移，且 $t\in[1,50]$。其相对阶为二。MIMO系统(20)关于输入的雅可比矩阵为对角矩阵（因此严格对角占优）。将所提出的自适应迭代学习控制方法推广至系统(20)是直接明了的。我们使用第$(k-1)$次迭代中的数据生成参数估计值$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k^{(i)}(t)$，然后在第 k次迭代的 t时刻，使用信号$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k^{(i)}(t)$、 $x_k^{(i)}(t)$、 $x_k^{(i)}($ $t-1$)估计不可用状态 $x_k^{(i)}(t+1)$。输入 $u_k(t)$通过求解由 $x_k^{(i)}\ t\ \ x_k^{(i)\,e}\ t+(\ )$、 $1|t\ \ \boldsymbol{\theta}_k^{(i)}\ t\ \ \ \ r_k^{(i)}\ t+2$ $(\ )$、$\hat{}\,(\ )$和$(\ )$确定的隐函数得到。

参考轨迹为 $r_k^{(1)}(t)=r_k^{(2)}(t)=0.1\sin\left(\frac{2\pi t}{25}\right)$， $t\in[1,50]$。投影所用闭球的中心和半径设为 $\boldsymbol{\theta}^{(1)}=(7.13,29.98,12.52,39.97)$， $R^{(1)}(t)=0.11$，以及 $\boldsymbol{\theta}^{(2)}=(9.63,24.02,9.98,32.02)$， $R^{(2)}(t)\equiv 0.11$。初始状态值 $x_k^{(i)}(1)$， $x_k^{(i)}(2)$， $i=1,2$ 在 $[0,0.1]$ 内随机选取。初始估计设为 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0^{(i)}(t)=0, i=1,2$。

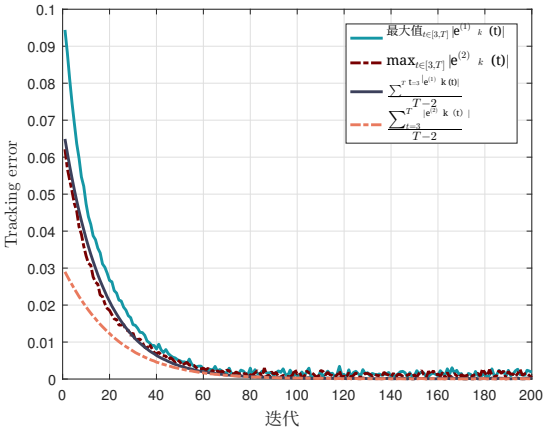


图5. 例2中无扰动时每次迭代的最大跟踪误差和平均跟踪误差。

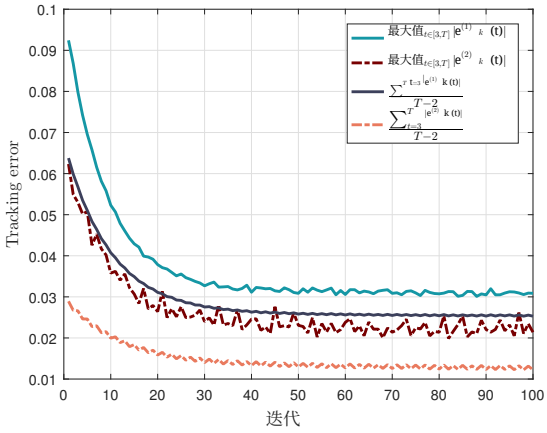
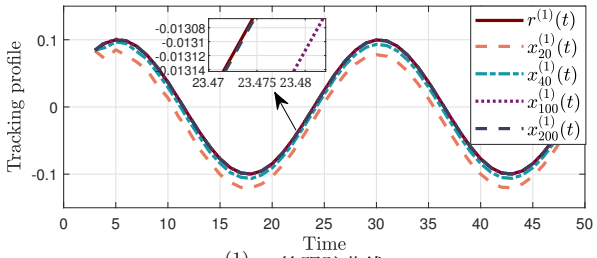
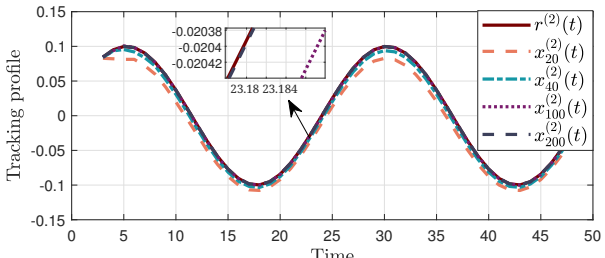


图7. 例2中存在扰动时每次迭代的最大跟踪误差和平均跟踪误差。



(a) $x_k^{(1)}(t)$的跟踪曲线。



(b) $x_k^{(2)}(t)$的跟踪曲线。

图6. 例2中无扰动时第20、40、100和200次迭代的跟踪曲线。

我们首先在不存在系统扰动的情况下，验证改进的 AILC 方案 (4)、(16)、(8)、(9)-(12) 和 (15) 的控制性能。控制增益设为 $\eta^{(1)}=\eta^{(2)}=0.1$。图 5 展示了最大跟踪误差和平均跟踪误差随迭代次数的变化，表明误差迅速减小。图 6 绘出了第 20、40、100 和 200 次迭代时的参考轨迹与实际轨迹，表明到第 200 次迭代时，实际轨迹已收敛至参考轨迹附近（注意，本例中的相对阶为 2，因此跟踪曲线从时间 $t=3$ 开始）。这验证了所提出的 AILC 方案的学习能力。

接下来，我们采用自适应迭代学习控制方案 (4)-(8)、(9)-(12) 和 (15)，验证存在系统扰动时的控制性能。系统扰动建模为 $w_k^1(t)=1\times10^{-4}\cos(kt\pi)+1\times10^{-4}\sin\left(\frac{kt\pi}{2}\right)$ 和 $w_k^2(t)=1\times10^{-4}\cos(2kt\pi)+1\times10^{-4}\sin(kt\pi)$。控制参数的选择保持不变。图 7 展示了最大跟踪误差和平均跟踪误差随迭代次数的收敛情况，图 8 展示了第 100 次迭代时的参考轨迹和实际轨迹。结果表明，尽管总体上实现了良好的跟踪，但系统扰动在一定程度上降低了跟踪精度。

VII. 结论

本文研究一类非仿射非线性系统的轨迹跟踪问题。本文提出了一种经过严格设计的自适应迭代学习控制方案，该方案结合了 GDPA 律和状态估计器，与现有依赖动态线性化技术或神经网络的迭代学习控制方法有显著不同。该方案全面考虑了多种实际因素，包括高相对阶、系统不确定性和扰动，以及迭代变化参考轨迹。我们还提出了一种数值方法，在无法获得非仿射系统的显式自适应迭代学习控制输入时，可将控制输入近似到所需精度。此外，本文通过数值仿真验证了对跟踪性能的严格分析。

未来的工作将着重于放宽全局利普希茨条件。具体而言，可以探索两种可能的技术路线：直接路线是开发新的收敛性分析工具，以处理变量之间的非线性关系，而不依赖关键技术引理；间接路线则是在紧集内先通过确保系统信号有界（例如采用输入饱和或屏障函数），将局部 Lipschitz 系统转化为全局系统。

附录

A. 命题1的证明

不失一般性，我们考虑 $\boldsymbol{\theta}(t)^\top\frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t)\ u)>d_0$ 的情形。由于

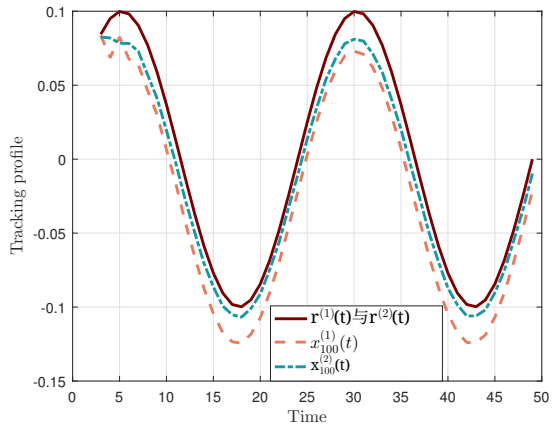


图8. 例2中存在扰动时第100次迭代的跟踪曲线。

$\boldsymbol{\theta}(t)^\top \frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t)\ u)$ 的连续性，存在一个常数 $M>0$，使得 $\sup_{u\in\mathcal{B}(0,\frac{|c|}{d_0})}|\boldsymbol{\theta}(t)^\top \frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t)\ u)|<M$。取 $l>M$，可得

$$\left|1-\frac{1}{l}\boldsymbol{\theta}(t)^\top\frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t),u)\right|\le 1-\frac{d_0}{l},\ \forall\ u\in\mathcal{B}\left(0,\frac{|c|}{d_0}\right).$$

因此，对任意 $u\in\mathcal{B}\left(0,\frac{|c|}{d_0}\right)$，由微分中值定理可得

$$\begin{aligned}|\mathcal{T}(u)|&=\left|u-\frac{\mathcal{Z}(0)}{l}-\frac{1}{l}(\mathcal{Z}(u)-\mathcal{Z}(0))\right|\\&=\left|u-\frac{c}{l}-\boldsymbol{\theta}(t)^\top\frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t),u)\big|_{u=\xi}\frac{u}{l}\right|\\&=\frac{|c|}{l}+\left|(1-\frac{1}{l}\boldsymbol{\theta}(t)^\top\frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t),u)\big|_{u=\xi})u\right|\\&\le\frac{|c|}{l}+(1-\frac{d_0}{l})\frac{|c|}{d_0}\\&=\frac{|c|}{d_0},\end{aligned}$$

其中 ξ 是满足 $|\xi|\le|u|$ 的一个中值。因此，映射 $\mathcal{T}$ 将 $\mathcal{B}\left(0,\frac{|u|c|}{d_0}\right)$ 映射到自身。对任意 $\mathcal{B}\left(0,\frac{|c|}{d_0}\right)$ ，由微分中值定理可得

$$\begin{aligned}&\left|\mathcal{T}(u_1)-\mathcal{T}(u_2)\right|\\&\le\left|1-\frac{1}{l}\boldsymbol{\theta}(t)^\top\frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t),u)\big|_{u=\xi'}\right||u_1-u_2|\\&\le(1-\frac{d_0}{l})|u_1-u_2|,\end{aligned}\tag{21}$$

其中 ξ' 是满足 $|\xi'|\le\max\{|u_1|,|u_2|\}$ 的一个中值。由(21)可知，$\mathcal{T}$ 是一个压缩映射。根据巴拿赫不动点定理，存在唯一的 $u_k^*\ t\ \in(\ )$，$\mathcal{B}\left(0,\frac{|c|}{d_0}\right)$ $\mathcal{T}\ u_k^*\ t\ =u_k^*\ t$ $u_k^*\ t$ 使得(( )) ( )，这意味着( )满足(3)。证明完毕。■

B. 定理*1*的证明

在此证明中，我们用大写字母 C 表示与 k 无关的常数。

引理*2:* 在定理1的条件下，对于每个$t\in\{0,\cdots,T-\rho\}$，以下陈述成立：

（1）估计值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)$ 和 $\hat{}w_k(t)$ 有界。

（2）当 k 趋于无穷时，$a_k(t)^2\epsilon_k(t+\rho)^2m_k(t)^2$ 和 $\hat{}w_k(t)$ 分别收敛于零和某个正的常数。

˜ ˆ引理 *2* 的证明：令 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k(t)=\boldsymbol{\theta}_k(t)-\boldsymbol{\theta}(t)$和 $\tilde{w}_k(t)=\hat{}w_k(t)-w_\circ$ 有

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)=\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k(t)+\eta a_k(t)\epsilon_k(t+\rho)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t),u_k(t))+\boldsymbol{g}_k(t),$$

其中

$$\boldsymbol{g}_k(t)=\begin{cases}\boldsymbol{0},\ \text{if}\ \bar{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)\in\mathcal{B}_2(\underline{\boldsymbol{\theta}},R),\\\left(\frac{R}{\|\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)-\underline{\boldsymbol{\theta}}\|}-1\right)(\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)-\underline{\boldsymbol{\theta}}),\ \text{otherwise.}\end{cases}$$

注意

$$\tilde{w}_{k+1}(t)=\tilde{w}_k(t)+\eta a_k(t)|\epsilon_k(t+\rho)|.\tag{22}$$

定义一个类李雅普诺夫正定函数

$$V_k(t)=\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k(t)^\top\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k(t)+\frac{1}{2}\tilde{w}_k(t)^2.$$

$V_k(t)$中第一部分的相邻迭代之差由下式给出

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)^\top\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)-\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k(t)^\top\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k(t)\\&=\frac{1}{2}a_k(t)^2\eta^2\epsilon_k(t+\rho)^2\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t),u_k(t))\|^2\\&\quad+\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k(t)^\top\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t),u_k(t))a_k(t)\eta\epsilon_k(t+\rho)\\&\quad+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{g}_k(t)\|^2+\boldsymbol{g}_k(t)^\top(\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)-\boldsymbol{\theta}(t)).\end{aligned}\tag{23}$$

¯若 $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)\notin\mathcal{B}_2(\boldsymbol{\theta},R)$，则可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|\boldsymbol{g}_k(t)\|^2+\boldsymbol{g}_k(t)^\top(\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)-\boldsymbol{\theta}(t))\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{R}{\|\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)-\underline{\boldsymbol{\theta}}\|}\right)^2\|\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)-\underline{\boldsymbol{\theta}}\|^2\\&\quad-\left(1-\frac{R}{\|\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)-\underline{\boldsymbol{\theta}}\|}\right)(\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)-\underline{\boldsymbol{\theta}})^\top\\&\quad\times(\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)-\underline{\boldsymbol{\theta}}+\underline{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}(t))\\&\le\frac{1}{2}\left(\|\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)-\underline{\boldsymbol{\theta}}\|-R\right)^2\\&\quad-\left(\|\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)-\underline{\boldsymbol{\theta}}\|-R\right)\Big(\|\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)-\underline{\boldsymbol{\theta}}\|\\&\quad-\|\boldsymbol{\theta}(t)-\underline{\boldsymbol{\theta}}\|\Big)\\&\le\left(\|\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)-\underline{\boldsymbol{\theta}}\|-R\right)\left(\|\boldsymbol{\theta}(t)-\underline{\boldsymbol{\theta}}\|-R\right)\\&\le 0.\end{aligned}\tag{24}$$

¯若 $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)\in\mathcal{B}_2(\boldsymbol{\theta},R)$，则 $\boldsymbol{g}_k(t)=\boldsymbol{0}$ 且式（24）仍成立。因此，由式（23）和式（24）可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)^\top\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)-\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k(t)^\top\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k(t)\\&\le\frac{1}{2}a_k(t)^2\eta^2\epsilon_k(t+\rho)^2\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t),u_k(t))\|^2\\&\quad+\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k(t)^\top\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t),u_k(t))a_k(t)\eta\epsilon_k(t+\rho).\end{aligned}$$

由式（1）和式（4）可得

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k(t)^\top \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t), u_k(t)) = -m_k(t)^2\epsilon_k(t+\rho) + w_k(t).$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)^\top\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t) - \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k(t)^\top\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k(t)\\
&\le \frac{1}{2}a_k(t)^2\eta^2\epsilon_k(t+\rho)^2\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t), u_k(t))\|^2 - a_k(t)\\
&\quad\times \eta m_k(t)^2\left(\epsilon_k(t+\rho)^2 - \frac{|\epsilon_k(t+\rho)|w}{m_k(t)^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}a_k(t)^2\eta^2\epsilon_k(t+\rho)^2\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t), u_k(t))\|^2 - a_k(t)\\
&\quad\times \eta m_k(t)^2\left(\epsilon_k(t+\rho)^2 - \frac{|\epsilon_k(t+\rho)|\hat{w}_k(t)}{m_k(t)^2}\right)\\
&\quad - a_k(t)\eta|\epsilon_k(t+\rho)|\tilde{w}_k(t).
\end{aligned}$$

若 $|\epsilon_k(t+\rho)| > \frac{\hat{w}_k(t)}{m_k(t)^2}$，则可得

$$\begin{aligned}
&a_k(t)^2\epsilon_k(t+\rho)^2m_k(t)^2\\
&= a_k(t)\epsilon_k(t+\rho)^2m_k(t)^2\left(1 - \frac{\hat{w}_k(t)}{|\epsilon_k(t+\rho)|m_k(t)^2}\right)\\
&= a_k(t)m_k(t)^2\left(\epsilon_k(t+\rho)^2 - \frac{\hat{w}_k(t)|\epsilon_k(t+\rho)|}{m_k(t)^2}\right). \quad (25)
\end{aligned}$$

若 $|\epsilon_k(t+\rho)| \le \frac{\hat{w}_k(t)}{m_k(t)^2}$，则 $a_k(t) = 0$，且式 (25) 仍然成立。因此，有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t)^\top\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}(t) - \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k(t)^\top\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k(t)\\
&\le \frac{1}{2}a_k(t)^2\eta^2\epsilon_k(t+\rho)^2\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t), u_k(t))\|^2\\
&\quad - a_k(t)\eta|\epsilon_k(t+\rho)|\tilde{w}_k(t)\\
&\quad - \eta a_k(t)^2\epsilon_k(t+\rho)^2m_k(t)^2. \quad (26)
\end{aligned}$$

对于 $V_k(t)$ 的第二部分，由式 (22) 可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\tilde{w}_{k+1}(t)^2 - \frac{1}{2}\tilde{w}_k(t)^2 =& \frac{1}{2}a_k(t)^2\eta^2\epsilon_k(t+\rho)^2\\
&+ \tilde{w}_k(t)\eta a_k(t)|\epsilon_k(t+\rho)|. \quad (27)
\end{aligned}$$

此外，由式 (26) 和 (27) 可得

$$\begin{aligned}
\Delta V_{k+1}(t) &= V_{k+1}(t) - V_k(t)\\
&\le \left(\frac{1}{2}\eta^2 - \eta\right)a_k(t)^2\epsilon_k(t+\rho)^2m_k(t)^2. \quad (28)
\end{aligned}$$

若 $0 < \eta < 2$，则 $-\frac{1}{2}\eta^2 - \eta < 0$，且 $V_k(t)$ 沿迭代轴单调递减。因此，$\boldsymbol{\theta}_k(t)$ 和 $\hat{w}_k(t)$ 有界。引理 2 的第一个结论得证。

由（28）可得

$$(\eta - \frac{1}{2}\eta^2)a_k(t)^2\epsilon_k(t+\rho)^2m_k(t)^2 \le V_k(t) - V_{k+1}(t).$$

将两边从 $k = 1$ 到 k' 求和，可得

$$\sum_{k=1}^{k'}(\eta - \frac{1}{2}\eta^2)a_k(t)^2\epsilon_k(t+\rho)^2m_k(t)^2 \le V_1(t) - V_{k'+1}(t). \quad (29)$$

不等式（29）表明级数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k(t)^2\epsilon_k(t+\rho)^2m_k(t)^2$ 收敛。因此，

$$\lim_{k\to\infty}a_k(t)^2\epsilon_k(t+\rho)^2m_k(t)^2 = 0.$$

此外，根据（7），序列 $\{\hat{w}_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ 单调递增且有界。因此，$\lim_{k\to\infty}\hat{w}_k(t)$ 存在。引理 2 得证。■

以下定义刻画了线性有界性，以便进一步分析。

定义*1*：对于变量序列 $\{a_k\}$，$\{b_k^{(1)}\}$，$\{b_k^{(2)}\}\cdots\{b_k^{(n)}\}$ $\{a_k\}$,,, 如果存在与 k 无关的正常数 $C^{(1)}, C^{(2)},\cdots,C^{(n)}$，使得线性有界于 $\{b_k^{(1)}\}$，$\{b_k^{(2)}\},\cdots,\{b_k^{(n)}\}$，则称其为

$$\|a_k\| \le C^{(1)}\|b_k^{(1)}\| + C^{(2)}\|b_k^{(2)}\| + \cdots + C^{(n)}\|b_k^{(n)}\|.$$

引理*3*：在定理 1 的条件下，对于每个 $t \in \{0,\cdots,T-\rho\}$，以下陈述均成立：

(1) 变量 $m_k(0)$ 有界。对于 $t \ge 1$，$m_k(t)$ 由 $e_k(t+\rho-1)$ $e_k(t+\rho-2)\cdots$，$e_k(\rho)$ 线性有界。

(2) 存在常数 $K^{0,t}$，$K^{1,t}$，$\cdots$，$K^{t-1,t}$，使得

$$|e_k(t+\rho)| < \varpi_k(t+\rho,\cdots,t) + \sum_{i=0}^{t-1}K^{i,t}|\varpi_k(i+\rho,\cdots,i)|,$$

where $\varpi_k(t+\rho,\cdots,t) = x_k(t+\rho) - \hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)^\top\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t), u_k(t))$.

Proof of Lemma 3: From the definition of $u_k(t)$ we obtain (15)

$$\begin{aligned}
|u_k(t)| &\le \frac{|c'|}{d_0} \le C(\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)\|\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k^e(t), 0)\| + |r_k(t+\rho)|)\\
&\le C\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k^e(t), 0)\| + C. \quad (30)
\end{aligned}$$

最后一个不等式成立，这是因为 $\|\boldsymbol{\theta}_k(t)\|$ 和 $|r_k(t+\rho)|$ 有界。结合假设3和（30），显然 $u_k(t)$ 由 $\boldsymbol{X}_k^e(t)$ 线性有界。

情形 $t < \rho$：根据假设4和状态估计设定，对于任意 $0 \le t \le \rho-1$ 和 $0 \le t' \le t$，均有 $x_k^e(t|t') = x_k(t)$。由于向量 $\boldsymbol{X}_k^e(0) = [x_k^e(\rho-1|0),$ $x_k^e(\rho-2|0),\cdots, x_k^e(1|0), x_k(0)]^\top = [x_k(\rho-1)\cdots, x_k(1)\ x_k(0)]^\top$ 有界，因此 $u_k(0)$ 有界。只要 $x_k^e(\rho|1)$ 有界，向量 $\boldsymbol{X}_k^e(1) = [x_k^e(\rho|1)\ x_k(\rho-1)\cdots, x_k(1)]^\top$ 便有界。根据式（9），由于 $x_k^e(\rho-1|1)$ 有界，$x_k^e(\rho|1)$ 有界；此外，$x_k(\rho-1)\cdots, x_k^e(2|1) = x_k(2)\ x_k(1)\ x_k(0)$ 和 $u_k(0)$ 也有界。由 $\boldsymbol{X}_k^e(1)$ 有界可知 $u_k(1)$ 有界。通过递推，可以证明 $u_k(2)\cdots, u_k(\rho-1)$ 有界。

情形 $t \ge \rho$：根据式 (11)，$x_k^e(t+1|t)$ 由 $x_k(t)\cdots, x_k(t-\rho+1)$ 和 $u_k(t-\rho+1)$ 线性有界。此外，$x_k^e(t+2|t)$ 由 $x_k^e(t+1|t)\ x_k(t)\cdots, x_k(t-\rho+2)$ 和 $u_k(t-\rho+2)$ 线性有界。通过递归可知，$x_k^e(t+\rho-1|t)\ x_k^e(t+\rho-2|t)\cdots$, $x_k^e(t+1|t)$ 均由 $x_k(t)\cdots, x_k(t-\rho+1)$ 和 $u_k(t-1)\ u_k(t-2)$ $\cdots, u_k(t-\rho+1)$ 线性有界。因此，

$$|u_k(t)| \le C + \sum_{i=1}^{\rho}Cx_k(t-\rho+i) + \sum_{i=1}^{\rho-1}Cu_k(t-\rho+i).$$

类似地，

$$|u_k(t-1)| \le C + \sum_{i=1}^{\rho} C|x_k(t-\rho-1+i)| + \sum_{i=1}^{\rho-1} C|u_k(t-\rho-1+i)|.$$

通过递推，

$$|u_k(t)| \le C + \sum_{i=1}^{t} C|x_k(i)| + \sum_{i=1}^{\rho-1} C|u_k(i)|. \quad (31)$$

由(31)以及 $u_k(0)\ \cdots, u_k(\rho-1)$,$x_k(0)\ \cdots, x_k(\rho-1)$的有界性可知， $u_k(t)$受 $x_k(t)\ x_k(t-1)\ \cdots, x_k(\rho)$线性有界。

根据 $m_k(t)$的定义以及 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}, u)$的Lipschitz连续性，可知 $m_k(t)$受$x_k(t+\rho-1)\ \cdots, x_k(t)$和 $u_k(t)$线性有界。基于前面对 $u_k(t)$上界的讨论，显然 $m_k(0)$有界。对于 $t \ge 1$，有

$$|m_k(t)| \le C + \sum_{i=\rho}^{t+\rho-1} C|x_k(i)| \le C + \sum_{i=\rho}^{t+\rho-1} C|e_k(i)|,$$

其中，最后一个不等式成立是因为 $x_k(\cdot) = r_k(\cdot) + e_k(\cdot)$, 且参考轨迹 $r_k(\cdot)$有界。引理3的第一个结论得证。

对于第二个结论，有

$$\begin{aligned}
|e_k(t+\rho)| &= |x_k(t+\rho) - r_k(t+\rho)| \\
&\le |x_k(t+\rho) - \hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)^\top \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t), u_k(t))| \\
&\quad + |\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)^\top \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k(t), u_k(t)) - r_k(t+\rho)| \\
&\le |\varpi_k(t+\rho, \cdots, t)| + C\|\boldsymbol{X}_k(t) - \boldsymbol{X}_k^e(t)\| \\
&\le |\varpi_k(t+\rho, \cdots, t)| + \sum_{i=1}^{\rho-1} C|x_k(t+i) - x_k^e(t+i|t)| \\
&\le |\varpi_k(t+\rho, \cdots, t)| + \sum_{i=1}^{\rho-1} C|e_k(t+i)| \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\rho-1} C|r_k(t+i) - x_k^e(t+i|t)|. \quad (32)
\end{aligned}$$

考察项 $|r_k(t+\rho-1) - x_k^e(t+\rho-1|t)|$。由式 (9) 和 (14)，可得

$$\begin{aligned}
&|r_k(t+\rho-1) - x_k^e(t+\rho-1|t)| \\
&\le \sum_{i=1}^{\rho-2} C|x_k^e(t+i|t) - x_k^e(t+i|t-1)| \\
&\quad + C|x_k(t) - x_k^e(t|t-1)|. \quad (33)
\end{aligned}$$

由于Lipschitz条件，有

$$\begin{aligned}
&|x_k^e(t+1|t) - x_k^e(t+1|t-1)| \le C|x_k(t) - x_k^e(t|t-1)|, \\
&|x_k^e(t+2|t) - x_k^e(t+2|t-1)| \\
&\le C|x_k^e(t+1|t) - x_k^e(t+1|t-1)| + C|x_k(t) - x_k^e(t|t-1)| \\
&\le C|x_k(t) - x_k^e(t|t-1)|.
\end{aligned}$$

通过递推，(33)右端的每一项都小于 $C|x_k(t) - x_k^e(t|t-1)|$，其中 C 是与 k无关的常数。因此，可以得到 $|r_k(t+\rho-1) - x_k^e(t+\rho-1|t)| \le C|x_k(t) - x_k^e(t|t-1)|$。

类似地，可以验证，对于 $i = 1, \cdots, \rho-1$,

$$\begin{aligned}
&|r_k(t+\rho-i) - x_k^e(t+\rho-i|t)| \\
&\le \sum_{j=1}^{i} C|x_k(t-i+j) - x_k^e(t-i+j|t-i)|. \quad (34)
\end{aligned}$$

将式 (34) 代入式 (32)，得到

$$\begin{aligned}
|e_k(t+\rho)| &\le |\varpi_k(t+\rho, \cdots, t)| + \sum_{i=1}^{\rho-1} C|e_k(t+i)| \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\rho-1}\sum_{j=1}^{i} C|x_k(t-i+j) - x_k^e(t-i+j|t-i)| \\
&\le |\varpi_k(t+\rho, \cdots, t)| + \sum_{i=1}^{2\rho-2} C|e_k(t-\rho+1+i)| \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\rho-1}\sum_{j=1}^{i} C|r_k(t-i+j) - x_k^e(t-i+j|t-i)|. \quad (35)
\end{aligned}$$

对于式 (35) 中的 $|r_k(t-i+j) - x_k^e(t-i+j|t-i)|$，采用与式 (32)–(34) 相同的过程，通过递推并注意到当 $0 \le t'' < t' \le \rho-1$时，$x_k^e(t'|t'') - x_k(t') = 0$，可得

$$|e_k(t+\rho)| \le |\varpi_k(t+\rho, \cdots, t)| + \sum_{i=\rho}^{t+\rho-1} C|e_k(i)|.$$

类似地，

$$|e_k(t+\rho-1)| \le |\varpi_k(t+\rho-1, \cdots, t-1)| + \sum_{i=\rho}^{t+\rho-2} C|e_k(i)|,$$

$$\cdots$$

$$|e_k(\rho)| = |\varpi_k(\rho, \cdots, 0)|.$$

递归可得，

$$\begin{aligned}
|e_k(t+\rho)| &\le |\varpi_k(t+\rho, \cdots, t)| + \sum_{i=0}^{t-1} C|\varpi_k(i+\rho, \cdots, i)| \\
&\triangleq |\varpi_k(t+\rho, \cdots, t)| + \sum_{i=0}^{t-1} K^{i,t}|\varpi_k(i+\rho, \cdots, i)|. \quad (36)
\end{aligned}$$

由此证明了引理3的第二个结论。 ■

定理*1*的证明：由引理 2 可得

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(a_k(t)\varpi_k(t+\rho, \cdots, t))^2}{m_k(t)^2} = 0. \quad (37)$$

如果 $|\epsilon_k(t+\rho)| \succeq \hat{w}_k(t)\, m_k(t)^2$，则 $a_k(t) = \frac{1 - \hat{w}_k(t)}{|\varpi_k(t+\rho, \cdots, t)|}$，并且

$$a_k(t)|\varpi_k(t+\rho, \cdots, t)| = |\varpi_k(t+\rho, \cdots, t)| - \hat{w}_k(t). \quad (38)$$

如果 $|\epsilon_k(t+\rho)| \le \hat{w}_k(t)\, m_k(t)^2$，即，$\varpi_k(t+\rho,\cdots,t) \le \hat{w}_k(t)$，则 $a_k(t)=0$ 并且

$$|\varpi_k(t+\rho,\cdots,t)| \le a_k(t)|\varpi_k(t+\rho,\cdots,t)| + \hat{w}_k(t). \tag{39}$$

由式（38）和（39）可得

$$|\varpi_k(t+\rho,\cdots,t)| \le a_k(t)|\varpi_k(t+\rho,\cdots,t)| + \hat{w}_k(t). \tag{40}$$

根据引理2和引理3，有

$$\begin{aligned} m_k(t) &\le C + \sum_{i=0}^{t-1} C|\varpi_k(i+\rho,\cdots,i)| \\ &\le C + \sum_{i=0}^{t-1} C a_k(i)|\varpi_k(i+\rho,\cdots,i)| \\ &\le C + C \max_{i\in\{0,\cdots,T-\rho\}} a_k(i)|\varpi_k(i+\rho,\cdots,i)| \\ &\le C + C \max_{l\le k} a_l(\psi_l-\rho)|\varpi_k(\psi_l,\cdots,\psi_l-\rho)|, \end{aligned} \tag{41}$$

其中 $a_l(\psi_l-\rho)|\varpi_k(\psi_l,\cdots,\psi_l-\rho)| = \max_{i\in\{0,\cdots,T-\rho\}} a_l(i)|\varpi_l(i+\rho,\cdots,i)|$。由式（37）和（41）可得

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(a_k(\psi_k-\rho)\varpi_k(\psi_k,\cdots,\psi_k-\rho))^2}{(C + C\max_{l\le k} a_l(\psi_l-\rho)|\varpi_k(\psi_l,\cdots,\psi_l-\rho)|)^2} = 0. \tag{42}$$

根据式（42）以及 [44]（第6章，第181–182页）中的关键技术引理，可得 $\lim_{k\to\infty} a_k(\psi_k-\rho)\varpi_k(\psi_k,\cdots,\psi_k-\rho)=0$，这等价于

$$\lim_{k\to\infty} a_k(t)\varpi_k(t+\rho,\cdots,t) = 0,\ t\in\{0,\cdots,T-\rho\}. \tag{43}$$

对式（40）两边取上极限，得到

$$\begin{aligned} &\limsup_{k\to\infty} \varpi_k(t+\rho,\cdots,t) \\ &\le \limsup_{k\to\infty} \left(a_k(t)|\varpi_k(t+\rho,\cdots,t)| + \hat{w}_k(t)\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} \hat{w}_k(t). \end{aligned} \tag{44}$$

T对式（36）两边取上极限，得到 y 域

$$\begin{aligned} &\limsup_{k\to\infty} |e_k(t+\rho)| \\ &\le \lim_{k\to\infty} \hat{w}_k(t) + \sum_{i=0}^{t-1} K^{i,t} \lim_{k\to\infty} \hat{w}_k(i) \\ &\le \lim_{k\to\infty} \left(w + |\tilde{w}_k(t)| + \sum_{i=0}^{t-1} K^{i,t}(w + |\tilde{w}_k(i)|)\right) \\ &\le w + \sqrt{2V_0(t)} + \sum_{i=0}^{t-1} K^{i,t}(w + \sqrt{2V_0(i)}). \end{aligned} \tag{45}$$

最后一个不等式成立是因为 $\frac{1}{2}|\tilde{w}_k(t)|^2 \le V_k(t) \le V_0(t)$。定理1的证明完毕。■

C. 推论*1*的证明

考虑到

$$\varpi_k(t+1,t) = x_k(t+1) - \hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)^\top \boldsymbol{f}(x_k(t),u_k(t)),$$

可得 $e_k(t+1)=\varpi_k(t+1,t)$。采用与得到(44)相同的过程，可以证明

$$\limsup_{k\to\infty} |\varpi_k(t+1,t)| \le \lim_{k\to\infty} \hat{w}_k(t) \le w + \sqrt{2V_0(t)}.$$

至此证明完毕。■

D. 推论*2*的证明

对于无扰动系统，在自适应迭代学习控制方案(15)、(4)、(16)、(8)、(9)-(12)下，可通过与附录 B中相同的过程得到(36)和(43)。然而，由于$a_k(t)\equiv 1$，(43)变为 $\lim_{k\to\infty}\varpi_k(t+\rho,\cdots,t)=0, t\in\{0,\cdots,T-\rho\}$。令 k 在(36)的两边趋于 ∞，即可得到推论2中的结果。■

E. Proof of Lemma 1

对于任意固定的 t 和 k，由 (17) 得

$$\begin{aligned} |\mathrm{u}_k^p(t) - \mathrm{u}_k^{p-1}(t)| &= |\mathcal{T}'(\mathrm{u}_k^{p-1}(t)) - \mathcal{T}'(\mathrm{u}_k^{p-2}(t))| \\ &\le (1-\frac{d_0}{l'})|\mathrm{u}_k^{p-1}(t) - \mathrm{u}_k^{p-2}(t)| \\ &\le (1-\frac{d_0}{l'})^{p-1}|\mathrm{u}_k^1(t) - \mathrm{u}_k^0(t)|. \end{aligned} \tag{46}$$

那么，对于任意 $p'>p$，有

$$\begin{aligned} |\mathrm{u}_k^{p'}(t) - \mathrm{u}_k^p(t)| &\le \sum_{i=p+1}^{p'} |\mathrm{u}_k^i(t) - \mathrm{u}_k^{i-1}(t)| \\ &\le \sum_{i=p+1}^{p'} (1-\frac{d_0}{l'})^{i-1}|\mathrm{u}_k^1(t) - \mathrm{u}_k^0(t)| \\ &\le \frac{(1-\frac{d_0}{l'})^p[1-(1-\frac{d_0}{l'})^{p'-p}]}{1-(1-\frac{d_0}{l'})}|\mathrm{u}_k^1(t) - \mathrm{u}_k^0(t)|. \end{aligned} \tag{47}$$

令 p' 在 (47) 两边趋于无穷大，可得

$$|u_k(t) - \mathrm{u}_k^p(t)| \le \frac{l'(1-\frac{d_0}{l'})^p}{d_0}|\mathrm{u}_k^1(t) - \mathrm{u}_k^0(t)|.$$

因此，如果 $\mathrm{u}_k^1(t)\ u_k\ t\ |\ {}_k^{p_o}\ k\ t\ \ t\ -u_k\ t\,|=0$ ${}_k^1\ t \neq {}_0^0\ t$ $\mathrm{u}_k^0(t)$，那么 $\mathrm{u}^{p_o(k,t)}(t)\,\mathrm{u}_k^1(t)\,(),\ \mathrm{u}_{(,)}\,()\,()$。如果 $\mathrm{u}\,()\,\mathrm{u}\,()$，那么，

$$|\mathrm{u}_k^{p_o(k,t)}(t) - u_k(t)| \le \frac{l'(1-\frac{d_0}{l'})^{p_o(k,t)}}{d_0}|\mathrm{u}_k^1(t) - \mathrm{u}_k^0(t)| < \varepsilon.$$

引理 1 得证。■

F. 定理 *2* 的证明

令 $r_k^*(t+\rho) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)^\top \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k^e(t),\mathrm{u}_k^p(t))$。则对每个 $t\in\{0,\cdots,T-\rho\}$,

$$\begin{aligned} &|r_k(t+\rho) - r_k^*(t+\rho)| \\ &= \left|\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)^\top\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k^e(t),u_k(t)) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k^e(t),\mathrm{u}_k^p(t))\right)\right| \\ &\le L^u\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)\|\cdot|u_k(t) - \mathrm{u}_k^p(t)| \\ &\le L^u\left(\sqrt{2V_0(t)} + \|\boldsymbol{\theta}(t)\|\right)\varepsilon. \end{aligned} \tag{48}$$

采用与附录 B 中相同的步骤，存在与k无关的正常数 $K^{i,t}_*,\ i=0,1,\cdots,t-1$，使得

$$\begin{aligned}&\limsup_{k\to\infty}|x_k(t+\rho)-r_k^*(t+\rho)|\\&\le\lim_{k\to\infty}\hat{w}_k(t)+\sum_{i=0}^{t-1}K_*^{i,t}\lim_{k\to\infty}\hat{w}_k(i).\end{aligned}\tag{49}$$

不等式（48）和（49）可得

$$\begin{aligned}&\limsup_{k\to\infty}|e_k(t+\rho)|\\&\le\limsup_{k\to\infty}\left(|x_k(t+\rho)-r_k^*(t+\rho)|+|r_k^*(t+\rho)-r_k(t+\rho)|\right)\\&\le\lim_{k\to\infty}\hat{w}_k(t)+\sum_{i=0}^{t-1}K_*^{i,t}\lim_{k\to\infty}\hat{w}_k(i)\\&\quad+L^u\left(\sqrt{2V_0(t)}+\|\boldsymbol{\theta}(t)\|\right)\varepsilon\\&\le w+\sqrt{2V_0(t)}+\sum_{i=0}^{t-1}K_*^{i,t}(w+\sqrt{2V_0(i)})\\&\quad+L^u\left(\sqrt{2V_0(t)}+\|\boldsymbol{\theta}(t)\|\right)\varepsilon.\end{aligned}$$

定理 2 的证明完成。 ■

G. 推论 *3* 的证明

令 $r_k^*(t+\rho)=\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)^\top\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k^e(t),\ \mathrm{u}_k^p(t))$。那么，根据推论2，可得

$$\lim_{k\to\infty}|r_k^*(t+\rho)-x_k(t+\rho)|=0.\tag{50}$$

对所有 $t\in\{0,1,\cdots,T-\rho\}$ 均成立。由（48）和（50）可得

$$\begin{aligned}&\limsup_{k\to\infty}|e_k(t+\rho)|\\&\le\limsup_{k\to\infty}\left(|x_k(t+\rho)-r_k^*(t+\rho)|+|r_k^*(t+\rho)-r_k(t+\rho)|\right)\\&\le L^u\left(\sqrt{2V_0(t)}+\|\boldsymbol{\theta}(t)\|\right)\varepsilon.\end{aligned}$$

推论 3 的证明完成。 ■

参考文献

[1] S. Arimoto、S. Kawamura 和 F. Miyazaki，《通过学习改善机器人的操作》，《机器人系统学报》，第 1 卷，140，1984，123 页。–。《机器人操作器自适应迭代学习控制的进一步结果》，Automatica，第 44 卷，第 3 期，830–837 页，2008 年。[2] A. Tayebi，《机器人操作器的自适应迭代学习控制》，*Automatica*，第 40 卷，第 7 期，第 1195–1203 页，2004 年。[3] X. Jin，《具有输出约束的移动机器人非重复轨迹跟踪的容错迭代学习控制》，*Automatica*，第 94 卷，第 63–71 页，2018 年。[4] S. Gao、Q. Song 和 D. Shen，《面向运行安全约束的高速列车分布式学习控制》，《*IEEE* 控制论汇刊》，第 54 卷，第 3 期，第 1794–1805 页，2024 年。[5] D. Bristow、M. Tharayil 和 A. Alleyne，《迭代学习控制综述》，《*IEEE* 控制系统杂志》，第 26 卷，第 3 期，第 96–114 页，2006 年。[6] H.-S. Ahn、Y. Chen 和 K. L. Moore，《迭代学习控制：简要综述与分类》，《*IEEE* 系统、人和控制论汇刊 *C* 部分（应用与综述）》，第 37 卷，第 6 期，第 1099–1121 页，2007 年。[7] D. Shen，《不完整信息下的迭代学习控制：综述》，《*IEEE/CAA* 自动化学报》，第 5 卷，第 5 期，第 885–901 页，2018 年。

[8] D. Shen and X. Li，《随机变化试验长度下迭代学习控制综述：模型、综合与收敛性分析》，《控制年度评论》，第 48 卷，89–102 页，2019 年。[9] D. Meng，《控制对数学的反馈：通过观测器系统设计改进迭代方法》，IEEE自动控制汇刊，第 68 卷，第 4 期，2498–2505 页，2023 年。[10] D. Shen and J.-X. Xu，《随机系统中一种具有增益自适应的迭代学习控制算法》，IEEE自动控制汇刊，第 65 卷，第 3 期，1280–1287 页，2020 年。[11] D. H. Owens and B. Chu，《用于加速低增益范数最优迭代学习控制收敛的误差校正参考信号》，IEEE自动控制汇刊，第 69 卷，第 9 期，5836–5851 页，2024 年。[12] B. Geranmehr and S. R. Nekoo，《基于状态相关黎卡提方程的全耦合非仿射六自由度自主水下航行器非线性次优控制》，《海洋工程》，第 96 卷，248–257 页，2015 年。[13] J. D. Boskovic, L. Chen, and R. K. Mehra，《飞行控制中非仿射模型的自适应控制设计》，《制导、控制与动力学杂志》，第 27 卷，第 2 期，209–217 页，2004 年。[14] S. S. Ge, C. C. Hang, T. H. Lee, and T. Zhang，《稳定自适应神经网络控制》。Springer 科学与商业媒体，2013 年。[15] R. Chi, Y. Hui, C.-J. Chien, B. Huang, and Z. Hou，《具有非重复不确定性的局部 Lipschitz 连续非线性非仿射系统采样数据迭代学习控制的收敛性分析》，IEEE自动控制汇刊，第 66 卷，第 7 期，3347–3354 页，2021 年。[16] R. Chi, H. Li, D. Shen, Z. Hou, and B. Huang，《增强型 P 型控制：从设定点更新中进行间接自适应学习》，IEEE自动控制汇刊，第 68 卷，第 3 期，1600–1613 页，2023 年。[17] X. Yu, Z. Hou, and M. M. Polycarpou，《非线性离散时间多智能体系统的分布式数据驱动迭代学习一致性跟踪》，IEEE自动控制汇刊，第 67 卷，第 7 期，3670–3677 页，2022 年。[18] R. Chi, Y. Wei, W. Yao, and J. Xing，《基于观测器的数据驱动迭代学习控制》，《国际系统科学杂志》，第 51 卷，第 13 期，2343–2359 页，2020 年。[19] Q.-Y. Xu and X.-D. Li，《针对未知控制方向纯反馈非仿射离散时间系统的基于 HONN 的自适应迭代学习控制》，《IEEE 神经网络与学习系统汇刊》，第 31 卷，第 1 期，212–224 页，2020 年。[20] K. Xu, B. Meng, and Z. Wang，《基于广义回归神经网络的数据驱动非线性非仿射离散时间系统迭代学习控制》，《专家系统与应用》，第 248 卷，文章编号 123339，2024 年。[21] R. Chi, Y. Hui, and Z. Hou，《离散时间系统的数据驱动迭代学习控制》。Springer Nature 新加坡，2022 年。[22] R. Chi, Z. Liu, N. Lin, Z. Hou, and B. Huang，《数据驱动有限迭代学习控制》，《IEEE 系统、人和控制论汇刊：系统》，第 54 卷，第 9 期，5296–5306 页，2024 年。[23] N. Hovakimyan, F. Nardi, A. J. Calise, and H. Lee，《利用神经网络对一类非线性系统进行自适应输出反馈控制》，《国际控制杂志》，第 74 卷，第 12 期，1161–1169 页，2001 年。[24] A. Tayebi and C.-J. Chien，《不确定非线性系统的统一自适应迭代学习控制框架》，IEEE自动控制汇刊，第 52 卷，第 10 期，1907–1913 页，2007 年。[25] C.-J. Chien and A. Tayebi，[8] D. Shen and X. Li，《随机变化试验长度下迭代学习控制综述：模型、综合与收敛性分析》，《控制年度评论》，第 48 卷，89–102 页，2019 年。[9] D. Meng，《控制对数学的反馈：通过观测器系统设计改进迭代方法》，IEEE自动控制汇刊，第 68 卷，第 4 期，2498–2505 页，2023 年。[10] D. Shen and J.-X. Xu，《随机系统中一种具有增益自适应的迭代学习控制算法》，IEEE自动控制汇刊，第 65 卷，第 3 期，1280–1287 页，2020 年。[11] D. H. Owens and B. Chu，《用于加速低增益范数最优迭代学习控制收敛的误差校正参考信号》，IEEE自动控制汇刊，第 69 卷，第 9 期，5836–5851 页，2024 年。[12] B. Geranmehr and S. R. Nekoo，《基于状态相关黎卡提方程的全耦合非仿射六自由度自主水下航行器非线性次优控制》，《海洋工程》，第 96 卷，248–257 页，2015 年。[13] J. D. Boskovic, L. Chen, and R. K. Mehra，《飞行控制中非仿射模型的自适应控制设计》，《制导、控制与动力学杂志》，第 27 卷，第 2 期，209–217 页，2004 年。[14] S. S. Ge, C. C. Hang, T. H. Lee, and T. Zhang，《稳定自适应神经网络控制》。Springer 科学与商业媒体，2013 年。[15] R. Chi, Y. Hui, C.-J. Chien, B. Huang, and Z. Hou，《具有非重复不确定性的局部 Lipschitz 连续非线性非仿射系统采样数据迭代学习控制的收敛性分析》，IEEE自动控制汇刊，第 66 卷，第 7 期，3347–3354 页，2021 年。[16] R. Chi, H. Li, D. Shen, Z. Hou, and B. Huang，《增强型 P 型控制：从设定点更新中进行间接自适应学习》，IEEE自动控制汇刊，第 68 卷，第 3 期，1600–1613 页，2023 年。[17] X. Yu, Z. Hou, and M. M. Polycarpou，《非线性离散时间多智能体系统的分布式数据驱动迭代学习一致性跟踪》，IEEE自动控制汇刊，第 67 卷，第 7 期，3670–3677 页，2022 年。[18] R. Chi, Y. Wei, W. Yao, and J. Xing，《基于观测器的数据驱动迭代学习控制》，《国际系统科学杂志》，第 51 卷，第 13 期，2343–2359 页，2020 年。[19] Q.-Y. Xu and X.-D. Li，《针对未知控制方向纯反馈非仿射离散时间系统的基于 HONN 的自适应迭代学习控制》，《IEEE 神经网络与学习系统汇刊》，第 31 卷，第 1 期，212–224 页，2020 年。[20] K. Xu, B. Meng, and Z. Wang，《基于广义回归神经网络的数据驱动非线性非仿射离散时间系统迭代学习控制》，《专家系统与应用》，第 248 卷，文章编号 123339，2024 年。[21] R. Chi, Y. Hui, and Z. Hou，《离散时间系统的数据驱动迭代学习控制》。Springer Nature 新加坡，2022 年。[22] R. Chi, Z. Liu, N. Lin, Z. Hou, and B. Huang，《数据驱动有限迭代学习控制》，《IEEE 系统、人和控制论汇刊：系统》，第 54 卷，第 9 期，5296–5306 页，2024 年。[23] N. Hovakimyan, F. Nardi, A. J. Calise, and H. Lee，《利用神经网络对一类非线性系统进行自适应输出反馈控制》，《国际控制杂志》，第 74 卷，第 12 期，1161–1169 页，2001 年。[24] A. Tayebi and C.-J. Chien，《不确定非线性系统的统一自适应迭代学习控制框架》，IEEE自动控制汇刊，第 52 卷，第 10 期，1907–1913 页，2007 年。[25] C.-J. Chien and A. Tayebi，《机器人操作器自适应迭代学习控制的进一步结果》，Automatica，第 44 卷，第 3 期，830–837 页，2008 年。[26] X. Li and D. Huang，《具有各种非重复不确定性的非方非线性系统自适应迭代学习控制：统一方法》，IEEE自动控制汇刊，第 69 卷，第 3 期，1736–1743 页，2024 年。[27] X. Li and Z. Hou，《一般不确定非方 MIMO 系统的鲁棒自适应迭代学习控制》，IEEE自动控制汇刊，第 69 卷，第 4 期，2721–2728 页，2024 年。[28] M. Yu, J. Wang, and D. Qi，《针对具有未知控制方向高阶非线性系统的离散时间自适应迭代学习控制》，《国际控制杂志》，第 86 卷，299–308 页，2013 年。[29] M. Yu and C. Li，《具有随时间和迭代变化参数的离散时间非线性系统鲁棒自适应迭代学习控制》，《IEEE 系统、人和控制论汇刊：系统》，第 47 卷，第 7 期，1737–1745 页，2017 年。

[30] R. Chi, Z. Hou, and J. Xu, 《具有迭代变化轨迹和随机初始条件的一类离散时间系统的自适应迭代学习控制》, *Automatica*, 第 44 卷, 第 8 期, 2207–2213 页, 2008 年。[31] W. Zhang and S. S. Ge, 《一种无需初始点的全局隐函数定理及其在高维非仿射系统控制中的应用》, 数学分析与应用杂志, 第 313 卷, 第 1 期, 251–261 页, 2006 年。[32] J. Cabrera and K. Narendra, 《基于逆控制的神经网络跟踪应用问题》, *IEEE*自动控制汇刊, 第 44 卷, 第 11 期, 2007–2027 页, 1999 年。[33] L.-B. Wu, J. H. Park, X.-P. Xie, C. Gao, and N.-N. Zhao, 《具有全状态约束的一类不确定非仿射非线性系统的模糊自适应事件触发控制》, *IEEE*模糊系统汇刊, 第 29 卷, 第 4 期, 904–916 页, 2021 年。[34] R. Chi, Y. Hui, B. Huang, and Z. Hou, 《非仿射全局 Lipschitz 非线性离散时间系统的主动抗扰控制》, *IEEE*自动控制汇刊, 第 66 卷, 第 12 期, 5955–5967 页, 2021 年。[35] X. Wang, J. Yang, C. Liu, Y. Yan, and S. Li, 《存在不匹配扰动的非线性系统安全关键抗扰控制》, *IEEE*自动控制汇刊, 第 70 卷, 第 4 期, 2722–2729 页, 2025 年。[36] J. Zhang, Z.-G. Wu, and Y. Xia, 《离散时间马尔可夫跳变系统的有限时间复合抗扰控制》, *IEEE*自动控制汇刊, 第 67 卷, 第 12 期, 6866–6872 页, 2022 年。[37] J.-X. Xu and J. Xu, 《具有时变参数不确定性的一类非线性系统的基于观测器的学习控制》, *IEEE*自动控制汇刊, 第 49 卷, 第 2 期, 275–281 页, 2004 年。[38] Y. Hong and Z.-P. Jiang, 《具有参数与动态不确定性的非线性系统有限时间稳定》, *IEEE*自动控制汇刊, 第 51 卷, 第 12 期, 1950–1956 页, 2006 年。[39] G. Wen, W. Yu, M. Z. Q. Chen, X. Yu, and G. Chen, 《具有非周期采样数据通信的有向网络钉扎同步》, *IEEE*电路与系统汇刊 *I*: 常规论文, 第 61 卷, 第 11 期, 3245–3255 页, 2014 年。[40] Z. Li, W. Ren, X. Liu, and M. Fu, 《利用分布式自适应协议实现具有一般线性和 Lipschitz 非线性动力学的多智能体系统一致性》, *IEEE*自动控制汇刊, 第 58 卷, 第 7 期, 1786–1791 页, 2013 年。[41] W. Pan, X. Zhang, D. Fan, and G. Feng, 《严格反馈非线性系统的动态事件触发脉冲跟踪控制：一种增益缩放方法》, *IEEE*自动控制汇刊, 第 69 卷, 第 11 期, 8034–8040 页, 2024 年。[42] L. Zhang, C. Deng, and L. An, 《具有状态/输出触发的非线性严格反馈系统渐近跟踪控制：一种齐次滤波方法》, *IEEE*自动控制汇刊, 第 69 卷, 第 9 期, 6413–6420 页, 2024 年。[43] J. Spooner and K. Passino, 《利用径向基神经网络对非线性系统进行分散自适应控制》, *IEEE*自动控制汇刊, 第 44 卷, 第 11 期, 2050–2057 页, 1999 年。[44] G. Goodwin and K. Sin, 《自适应滤波、预测与控制》。Dover出版社, 2009 年。