arXiv:2602.00975v1 [math.PR] 1 Feb 2026

随机正则图边缘普适性讲义

Jiaoyang Huang
University of Pennsylvania
huangjy@wharton.upenn.edu

Horng-Tzer Yau
Harvard University
htyau@math.harvard.edu

摘要

本讲义旨在阐述 Huang、McKenzie 和 Yau（2024）关于随机正则图的 Ramanujan 性质与边缘普适性的研究中，证明的结构、总体策略及主要思想。论证的核心是推导随机 d正则图的自洽方程及环方程的微观版本。我们首先回顾随机 d正则图的局部定律，然后介绍推导自洽方程和第一环方程的主要思想。

目录

1 引言 2 2 格林函数的性质 4 3 随机 d-正则图的局部定律 5 4 边缘普适性。13 5 局部重采样 19 6 基于可交换对的集中 22 7 $Q(z)$的期望。23 8 切换边、森林与可容许函数 35 9 使用舒尔补公式进行切换 40 10 使用伍德伯里公式进行切换 41 11 自洽方程的证明 44 12 第一环方程的证明 52 13 局部重采样带来的误差 56

1 引言

我们阐述 [15]中的思想与证明。总体策略由三个主要部分组成：

1. 通过估计这些方程高阶矩的期望，证明自洽方程的集中性，从而得到特征值的最优集中性；2. 证明圈方程的微观版本，可将其视为对自洽方程的精化，并加入一个额外的修正项；3. 将圈方程与 Dyson布朗运动结合，推导边缘普适性。

我们首先在第2 节回顾格林函数的一些有用恒等式，它们是随机矩阵理论中的标准工具。在第 3 节，我们回顾随机 d-正则图的局部定律以及前人工作 [17] 中的相关概念。

为阐明基本思想，本文仅证明自洽方程期望（即一阶矩）的估计，并推导圈方程的第一个微观版本。这些结果陈述于定理 4.5 中。随后，我们在第4 节利用圈方程推导边缘普适性。定理 4.5 的证明构成本文余下部分。

关键工具是第 5 节中的局部重抽样过程，它能有效利用随机 d-正则图的随机性。局部重抽样会生成一对可交换的随机 d-正则图（重抽样前后各一个）。在第 6 节中，我们解释如何利用可交换对证明集中性的基本思路；在第 7 节中，我们讨论如何将这一方法应用于随机 d-正则图。然而，结果误差不够小，远非最优。

为了推导具有最优误差的自洽方程，我们需要：

1. 构建一种迭代机制，反复进行局部重抽样，并使误差在每一步都得到改善（见第 11 节）；2. 在第 8 节中，通过引入可容许函数和森林来追踪迭代产生的各项；3. 对于依赖于局部重抽样后图的项，利用舒尔补公式（见第 9 节）或伍德伯里公式（见第 10 节）将其改写为原图的函数；4. 如第 13 节所述，控制每一步迭代产生的误差。

我们指出，自洽方程的估计与环方程的推导并非相互独立。环方程（如第 12 节所证明的）实质上是通过识别自洽方程的下一阶修正项得出的。

1.1 随机 d-正则图

若图有 N个顶点 $[\![N]\!]=\{1,\dots,N\}$，且每个顶点的度为 d，则称其为 d-正则图。必然有 $1\leqslant d\leqslant N-1$，且 dN 为偶数。本文主要考虑均匀模型$\mathcal{G}_{N,\,d}$：从所有以 N 个顶点 $[\![N]\!]$构成的有限个简单（没有自环或重边） d-正则图中均匀抽样。

除了均匀模型，文献中还研究了其他几种模型。

置换模型。当 d 为偶数时，取 $d/2$ 个相互独立且均匀分布的置换 $\sigma_1,\dots,\sigma_{d/2}$，其定义在 $[\![N]\!]$上。置换模型是一个以 N 个顶点为顶点的随机图：对每个 $i\in[\![N]\!]$ 和 $1\leqslant j\leqslant d/2$，添加一条边 $\{i,\sigma_j(i)\}$。

匹配模型。当 N为偶数时，取 d个相互独立且均匀分布的完美匹配 σ_1，……，σ_d于 $[\![N]\!]$上。匹配模型是这样一种随机图：对于每个 $i\in[\![N]\!]$ 和 $1\leqslant j\leqslant d$，添加一条边 $\{i,\sigma_j(i)\}$，从而得到一个具有 N个顶点的图。

这些模型会产生一个 d-正则多重图，其中可能存在自环和重边；以简单性为条件即可得到均匀模型 $\mathcal{G}_{N,\,d}$。本文主要讨论均匀模型，但许多结果也适用于其他模型。

我们可以用其邻接矩阵 A来表示一个 d-正则图。令 $\mathcal{G}$ 为顶点集 $[\![N]\!]$上的一个简单无向随机图。其邻接矩阵 $A=(A_{ij})\in\{0,1\}^{N\times N}$定义为：当且仅当$i$ 与 j 相邻时， $A_{ij}=1$。对于 d-正则图，显然 A有一个平凡特征值 d，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{e}=(1,\ 1,\ \ldots\ldots,\ 1)^{\top}$。此外，根据佩龙-弗罗贝尼乌斯定理，其他所有特征值的绝对值均不超过 d。为方便起见，我们将考虑归一化邻接矩阵

$$H:=A/\sqrt{d-1}. \tag{1.1}$$

我们将一个 d-正则图 $\mathcal{G}$ 在 N 个顶点上的归一化邻接矩阵 H 的特征值记为$\lambda_1=d/\sqrt{d-1}\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_N$。我们还引入归一化邻接矩阵 H的经验特征值分布的格林函数和斯蒂尔切斯变换

$$G(z):=(H-z)^{-1},\quad m_N(z):=\frac{1}{N}\sum_i G_{ii}(z)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\lambda_i-z},\quad z\in\mathbb{C}^+. \tag{1.2}$$

根据局部弱收敛，随机 d-正则图的经验特征值密度收敛于无限 d-正则树的经验特征值密度，即所谓的Kesten-McKay分布；参见 [19, 21]。该密度为

$$\varrho_d(x):=\mathbf{1}_{x\in[-2,2]}\left(1+\frac{1}{d-1}-\frac{x^2}{d}\right)^{-1}\frac{\sqrt{4-x^2}}{2\pi}. \tag{1.3}$$

注意，当 接近谱边缘 ±2时，Kesten-McKay分布具有平方根行为：

$$x\to\pm2,\quad \varrho_d(x)=\frac{\mathcal{A}\sqrt{2\mp x}}{\pi}+\mathrm{O}(|2\mp x|),\quad \mathcal{A}:=\frac{d(d-1)}{(d-2)^2}. \tag{1.4}$$

我们用 $m_d(z)$ 表示 Kesten–McKay分布 $\varrho_d(x$ 的斯蒂尔切斯变换),

$$m_d(z)=\int_{\mathbb{R}}\frac{\varrho_d(x)\mathrm{d}x}{x-z}=(d-1)\frac{-(d-2)z+d\sqrt{z^2-4}}{2(d^2-(d-1)z^2)},\quad z\in\mathbb{C}^+:=\{w\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}[w]>0\}.$$

我们回顾半圆分布 $\varrho_{\mathrm{sc}}(x)$ 及其斯蒂尔切斯变换 $m_{\mathrm{sc}}(z)$ ：

$$\varrho_{\mathrm{sc}}(x)=\mathbf{1}_{x\in[-2,2]}\frac{\sqrt{4-x^2}}{2\pi},\quad m_{\mathrm{sc}}(z)=\int_{\mathbb{R}}\frac{\varrho_{\mathrm{sc}}(x)\mathrm{d}x}{x-z}=\frac{-z+\sqrt{z^2-4}}{2}. \tag{1.5}$$

具体而言，Kesten–McKay分布 $m_d(z)$ 的斯蒂尔切斯变换可用斯蒂尔切斯变换 $m_{\mathrm{sc}}(z$ 表示：

$$m_d(z)=\frac{1}{-z-\frac{d}{d-1}m_{\mathrm{sc}}(z)}. \tag{1.6}$$

1.2 主要结果

我们的主要结果在 [15]中验证了 Sarnak[24]以及 Miller、Novikoff 和Sabelli [23]提出的随机 d正则图边缘普适性猜想。

定理 1.1 (边缘特征值普适性 [15])。 取 $d\geqslant3$， $k\geqslant1$和 s_1， s_2， $\cdots$， $s_k\in\mathbb{R}$，并令 $\mathcal{A}=d(d-1)/(d-2)^2$ 来自 (1.4)。存在一个足够小的 $\varepsilon>0$，使得随机 $\lambda_1=d/\sqrt{d-1}\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_N$-正则图的归一化邻接矩阵的特征值 H 满足： d

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_H\left((\mathcal{A}N)^{2/3}(\lambda_2-2)\geqslant s_1,\cdots,(\mathcal{A}N)^{2/3}(\lambda_{k+1}-2)\geqslant s_k\right)\\&=\mathbb{P}_{\mathrm{GOE}}\left(N^{2/3}(\mu_1-2)\geqslant s_1,\cdots,N^{2/3}(\mu_k-2)\geqslant s_k\right)+\mathrm{O}(N^{-\varepsilon}),\end{aligned}$$

其中 $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_N$ 是高斯正交系综的特征值。类似的结论也适用于最小的特征值 $-\lambda_N, \ldots, -\lambda_{N-k+1}$。

当度 d随图的规模增长时，随机 d-正则图的边缘普适性此前已在 $N^{2/3+\mathrm{o}(1)} \leqslant d \leqslant N/2$的情形下由 He 证明 [14],，而在 $N^{\mathrm{o}(1)} \leqslant d \leqslant N^{1/3-\mathrm{o}(1)}$的情形下由本文作者证明 [16],，推广了 Bauerschmidt、Knowles 和本文作者此前关于 $N^{2/9+\mathrm{o}(1)} \leqslant d \leqslant N^{1/3-\mathrm{o}(1)}$ 的结果 [2]。

定理1.1意味着第二大特征值的涨落收敛于 Tracy-Widom$_1$分布。Tracy-Widom$_1$ 分布约有 83% 的概率质量落在集合 $\{x: \ x<0\}$[11]。因此，定理1.1 意味着 83% 的 d-正则图的第二大特征值小于2。定理1.1的证明可以推广，从而证明最大和最小的非平凡特征值的分布收敛于相互独立的Tracy-Widom$_1$ 分布。由此可得以下结果。

推论 1.2 ([15])。固定 $d \geqslant 3$ 和 N 足够大。随机采样的图以约 69% 的概率是 d-正则图，且 $\{\lambda_2, |\lambda_N|\} \leqslant 2$，因此是 *Ramanujan* 图。

1.3 参数

本文将参数固定如下

$$0 < \mathfrak{o} \ll \mathfrak{b} \ll \mathfrak{c} \ll \mathfrak{g} \ll 1, \tag{1.7}$$

令 $\mathfrak{R} = (\mathfrak{c}/4)\log_{d-1} N$，并选择 ℓ，使得 $\ell/\log_{d-1} N \ll \mathfrak{b}$。下面介绍它们的含义及其引入位置:

- 许多估计涉及包含 $N^{\mathfrak{o}}$ 因子的界，这些因子无关紧要。
- $\mathfrak{b}$ 与格林函数元素的集中性有关，误差由 $N^{-\mathfrak{b}}$ 界定，见（3.20）和（3.21）。
- 对于格林函数和斯蒂尔切斯变换中的谱参数 $z \in \mathbb{C}^+$，我们将其限制在 $\mathrm{Im}[z] \geqslant N^{-1+\mathfrak{g}}$，见（1.8）。
- ℓ 源自第 5 节中的局部重采样，我们对半径为 ℓ 的球的边界边进行重采样。
- $\mathfrak{c}$ 定义 $\mathfrak{R}$，并且高概率地，随机 d-正则图在半径 $\mathfrak{R}$ 邻域内具有类树结构，见定理 3.1。

我们将分析限制在谱域内

$$\mathbf{D} = \{z \in \mathbb{C}^+ : N^{-1+\mathfrak{g}} \leqslant \mathrm{Im}[z] \leqslant N^{-\mathfrak{o}}, |\mathrm{Re}[z]| \leqslant 2 + N^{-\mathfrak{o}}\}. \tag{1.8}$$

在谱域 $\mathbf{D}$ 中，我们施加条件 $\mathrm{Im}[z] \leqslant N^{-\mathfrak{o}}$ 和 $|\mathrm{Re}[z]| \leqslant 2 + N^{-\mathfrak{o}}$。这些约束确保 $|m_{\mathrm{sc}}(z)|$ 接近于 1，具体满足 $||m_{\mathrm{sc}}(z)| - 1| \lesssim N^{-\mathfrak{o}/2}$。

2 格林函数的性质

在本文中，我们会反复使用一些（众所周知的）格林函数恒等式，并在此汇总。

2.1 预解式恒等式

以下这个著名恒等式被称为预解式恒等式：对于两个大小相同的可逆矩阵 A 和 B，有

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B-A)B^{-1} = B^{-1}(B-A)A^{-1}. \tag{2.1}$$

2.2 伍德伯里公式

设 $A+UCV^\top$ 是 A的秩为 r的扰动。即， U， $V\in\mathbb{R}^{N\times r}$ 以及 $C\in\mathbb{R}^{r\times r}$。那么，伍德伯里公式给出

$$(A+UCV^\top)^{-1}-A^{-1}=-A^{-1}U(C^{-1}+V^\top A^{-1}U)^{-1}V^\top A^{-1}. \tag{2.2}$$

2.3 舒尔补公式

给定一个 $N\times N$ 矩阵 H 和一个指标集 $\mathbb{T}\subset[\![N]\!]$，回忆一下，我们用 $H|_{\mathbb{T}}$ 表示将 H 限制到 $\mathbb{T}$后得到的 $\mathbb{T}\times\mathbb{T}$-矩阵，用 $H^{(\mathbb{T})}=H|_{\mathbb{T}^\complement}$ 表示删除与 $\mathbb{T}$中的指标相对应的行和列后得到的矩阵。因此，对于任意 $\mathbb{T}\subset[\![N]\!]$，任意对称矩阵 H 都可以（对指标重新排列后）写成分块形式

$$H=\begin{bmatrix}A & B^\top\\ B & D\end{bmatrix},$$

其中 $A=H|_{\mathbb{T}}$ 且 $D=H^{(\mathbb{T})}$。舒尔补公式断言，对于任意 $z\in\mathbb{C}^+$,

$$G=(H-z)^{-1}=\begin{bmatrix}(A-B^\top G^{(\mathbb{T})}B)^{-1} & -(A-B^\top G^{(\mathbb{T})}B)^{-1}B^\top G^{(\mathbb{T})}\\ -G^{(\mathbb{T})}B(A-B^\top G^{(\mathbb{T})}B)^{-1} & G^{(\mathbb{T})}+G^{(\mathbb{T})}B(A-B^\top G^{(\mathbb{T})}B)^{-1}B^\top G^{(\mathbb{T})}\end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

其中 $G^{(\mathbb{T})}=(D-z)^{-1}$. 在本文中，我们经常使用（2.3）的以下特例：

$$\begin{aligned}G|_{\mathbb{T}}&=(A-B^\top G^{(\mathbb{T})}B)^{-1},\\ G|_{\mathbb{T}\mathbb{T}^\complement}&=-G|_{\mathbb{T}}B^\top G^{(\mathbb{T})},\\ G|_{\mathbb{T}^\complement}&=G^{(\mathbb{T})}+G|_{\mathbb{T}^\complement\mathbb{T}}(G|_{\mathbb{T}})^{-1}G|_{\mathbb{T}\mathbb{T}^\complement}=G^{(\mathbb{T})}-G^{(\mathbb{T})}BG|_{\mathbb{T}\mathbb{T}^\complement},\end{aligned} \tag{2.4}$$

以及特殊情形

$$G^{(k)}_{ij}=G_{ij}-\frac{G_{ik}G_{kj}}{G_{kk}}=G_{ij}+(G^{(k)}H)_{ik}G_{kj}. \tag{2.5}$$

2.4 Ward 恒等式

对于任意对称矩阵 $N\times N$，其格林函数 $G(z)=(H-z)^{-1}$ 满足 Ward 恒等式

$$\sum_{j=1}^N|G_{ij}(z)|^2=\frac{\operatorname{Im}G_{jj}(z)}{\eta}, \tag{2.6}$$

其中 $\eta=\operatorname{Im}[z]$。这可通过对 $G-G^*$应用（2.1）推得。该恒等式给出了和式 $\sum_{j=1}^N|G_{ij}(z)|^2$ 的一个界，该界由格林函数的对角元表示。

3 随机 d-正则图的局部定律

本节介绍 [17]中的局部定律结果。结果表明，随机d-正则图的格林函数可由一般权重的格林函数扩展近似，而后者易于计算。我们将在第 3.2 节介绍一般权重的格林函数扩展这一概念，并在第 3.3 节陈述局部定律。

3.1 局部呈类树结构的图

随机 d 正则图在局部呈类树结构，具体而言，每个半径为 $\mathsf{O}(\log_{d-1}(N))$ 的邻域要么是截断树（不含环），要么最多包含一个环。

定义 3.1。固定 $d\geqslant 3$ 以及一个充分小的 $0<\mathfrak{c}<1$， $\mathfrak{R}=(\mathfrak{c}/4)\log_{d-1}N$ 如 (1.7)所示。我们定义事件 Ω，其中以下情况成立：

1. 没有半径为 $\mathfrak{R}$ 的树邻域的顶点数量至多为 $N^{\mathfrak{c}}$.

2. 每个顶点的半径为 $\mathfrak{R}$ 的邻域的超额（即独立环的数量）至多为 1。

事件 Ω 是一个典型事件。以下来自 [17, 命题 2。1] 说明 Ω 以高概率成立。

命题 3.2 （[17, 命题 2。1]）。Ω 发生的概率为 $1-\mathrm{O}(N^{-(1-\mathfrak{c})})$。

我们将看到，对于满足 $\mathcal{G}\in\Omega$ 的图，其格林函数以压倒性的高概率可由树扩展近似。对于无限 d-正则树和无限 $(d-1)$-叉树（根的度为 $d-1$，所有其他顶点的度为 d 的树），以下命题明确计算了它们的格林函数。

命题 3.3 （[17, 命题 2。2]）。设 $\mathcal{X}$ 为无限 d-正则树。对于所有 $z\in\mathbb{C}^+$，其格林函数为

$$G_{ij}(z)=m_d(z)\left(-\frac{m_{\mathrm{sc}}(z)}{\sqrt{d-1}}\right)^{\mathrm{dist}_{\mathcal{X}}(i,j)}, \tag{3.1}$$

其中，$\mathrm{dist}_{\mathcal{X}}(i,\ j)$ 表示图 $\mathcal{X}$ 中两个顶点 i、j 之间的图距离。设 $\mathcal{Y}$ 为以根顶点 o 为根的无限 $(d-1)$-叉树。其格林函数为

$$G_{ij}(z)=m_d(z)\left(1-\left(-\frac{m_{\mathrm{sc}}(z)}{\sqrt{d-1}}\right)^{2\mathrm{anc}_{\mathcal{Y}}(i,j)+2}\right)\left(-\frac{m_{\mathrm{sc}}(z)}{\sqrt{d-1}}\right)^{\mathrm{dist}_{\mathcal{Y}}(i,j)}, \tag{3.2}$$

其中 $\mathrm{anc}_{\mathcal{Y}}(i,j)$ i 是顶点 i,j 的共同祖先到根 o 的距离。特别 $r,$

$$G_{oi}(z)=m_{\mathrm{sc}}(z)\left(-\frac{m_{\mathrm{sc}}(z)}{\sqrt{d-1}}\right)^{\mathrm{dist}_{\mathcal{Y}}(o,i)}. \tag{3.3}$$

3.2 一般权重下的格林函数扩展

我们回顾一下第 Δ 节 [17, 23] 中一般权重下格林函数扩展的概念。粗略地说，我们考虑顶点 ℓ 的半径 $\mathcal{T}=\mathcal{B}_\ell(o,\mathcal{G})$ 邻域 o 中的 $\mathcal{G}$。假设它是一棵树，那么 $\mathcal{T}$ 的边界顶点就是叶节点（即度为 1 的顶点），我们为每个叶节点赋予一个权重 $-\Delta$；见图1左图。由此得到的 $\mathcal{T}$ 在这些边界权下的格林函数称为一般权重下的格林函数扩展 Δ。下面的形式化定义稍微扩展了这一概念，以允许出现环。

定义 3.4. 固定度数 $d\geqslant 3$，并取一个度数有界于 d 的图 $\mathcal{T}$。我们将函数$P(\mathcal{T},z,\Delta)$ 定义如下。记 $A(\mathcal{T})$ 为 $\mathcal{T}$ 的邻接矩阵，$D(\mathcal{T})$ 为$\mathcal{T}$的度数对角矩阵，并且 $\mathbb{I}$ 为以图 $\mathcal{T}$ 的顶点集 $\mathbb{T}$ 为索引的对角矩阵。于是

$$P(\mathcal{T},z,\Delta):=\frac{1}{-z+A(\mathcal{T})/\sqrt{d-1}-(d\mathbb{I}-D(\mathcal{T}))\Delta/(d-1)}. \tag{3.4}$$

矩阵 $P(\mathcal{T},z,\Delta)$ 是由 $A(\mathcal{T})/\sqrt{d-1}$ 通过对每个顶点 $i\in\mathcal{T}$ 附加权重 $-(d-D_{ii}(\mathcal{T}))\overline{\Delta/(d-1)}$ 得到的矩阵的格林函数，见图 1 的中间面板（$d=3$ 且一个边界顶点的度为 2）。当 $\Delta=m_{\mathrm{sc}}(z)$ 时，(3.4) 是 $\mathcal{T}$ 的树扩张的格林函数，即将 $\mathcal{T}$通过向 $\mathcal{T}$附加无限 $(d-1)$-叉树的副本进行扩张，使每个顶点的度为 d。若 $\mathcal{T}$是一棵树，则在此情形下，该格林函数与无限 d-正则树的格林函数一致，如 (3.1) 所示。对于 $\mathcal{T}$ 中的任意顶点集 $\mathbb{X}$，我们定义如下去掉顶点 $\mathbb{X}$ 后的格林函数，见图 1 的右侧面板。令 $A^{(\mathbb{X})}(\mathcal{T})$ 与 $D^{(\mathbb{X})}(\mathcal{T})$ 表示由 $A(\mathcal{T})$ $D(\mathcal{T})$ 去掉与顶点 $\mathbb{X}$ 相关联的行和列后得到的矩阵，且 $\mathbb{I}$ 为以顶点集$\mathbb{T}\setminus\mathbb{X}$为指标的对角矩阵。格林函数随后定义为:

$$P^{(\mathbb{X})}(\mathcal{T},z,\Delta):=\frac{1}{-z+A^{(\mathbb{X})}(\mathcal{T})/\sqrt{d-1}-(d\mathbb{I}-D^{(\mathbb{X})}(\mathcal{T}))\Delta/(d-1)}, \tag{3.5}$$

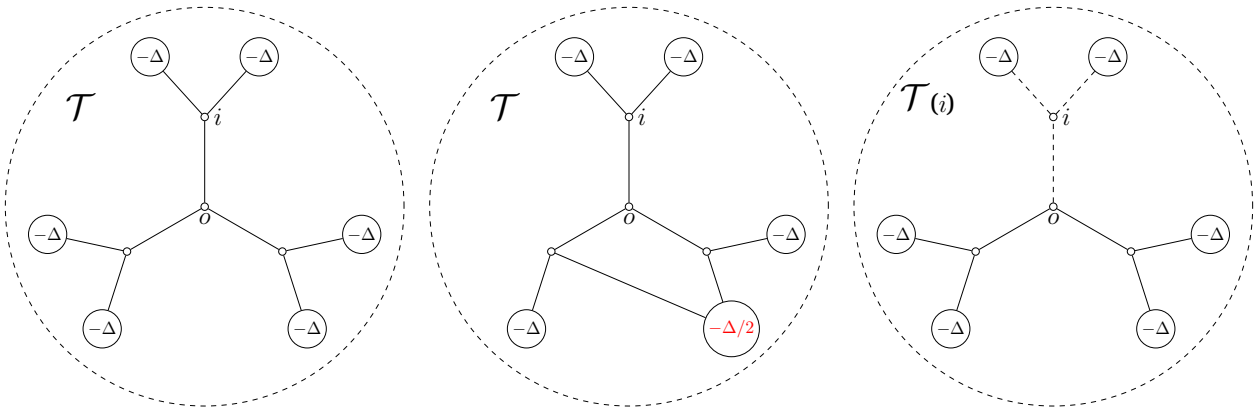

图 1：左图：对于截断的 d-正则树 $\mathcal{T}$，我们为每个叶顶点附加权重 $-\Delta$；中图：对于一般图 $\mathcal{T}$，我们为每个顶点附加权重 $-(d-D_{ii}(\mathcal{T}))/(d-1)$；右图：移除顶点集 $\mathbb{X}=\{i\}$。

对任意整数 $\ell \geqslant 1$，我们将函数 $X_\ell(\Delta,z)$ $Y_\ell(\Delta,z)$ 定义为

$$X_\ell(\Delta,z)=P_{oo}(\mathcal{B}_\ell(o,\mathcal{X}),z,\Delta),\quad Y_\ell(\Delta,z)=P_{oo}(\mathcal{B}_\ell(o,\mathcal{Y}),z,\Delta), \tag{3.6}$$

其中，$\mathcal{X}$是以根顶点 o 为根的无限 d-正则树，而 $\mathcal{Y}$是以根顶点o为根的无限 $(d-1)$-叉树。于是，$m_{\mathrm{sc}}(z)$ 是函数 Y_ℓ 的一个不动点，即 $Y_\ell(m_{\mathrm{sc}}(z)\ z)=m_{\mathrm{sc}}(z)$。此外，$X_\ell(m_{\mathrm{sc}}(z\ z)=m_d(z)$。下述命题指出，如果 Δ 足够接近 $m_{\mathrm{sc}}(z)$，那么 $Y_\ell(\Delta,w)$ 接近 $m_{\mathrm{sc}}(z)$，且 $X_\ell(\Delta,w)$ 接近 $m_d(z)$。

命题 3.5. 给定 z、Δ、$\Delta'\in\mathbb{C}^+$，使得 $\ell^2|\Delta-m_{\mathrm{sc}}(z)|$、$\ell^2|\Delta'-m_{\mathrm{sc}}(z)|\ll 1$，则函数$X_\ell(\Delta、\ z)$ $Y_\ell(\Delta、\ z)$ 满足

$$\begin{aligned}Y_\ell(\Delta,z)-m_{\mathrm{sc}}(z)=&\,m_{\mathrm{sc}}^{2\ell+2}(z)m_d(z)\left(\frac{1-m_{\mathrm{sc}}^{2\ell+2}(z)}{d-1}+\frac{d-2}{d-1}\frac{1-m_{\mathrm{sc}}^{2\ell+2}(z)}{1-m_{\mathrm{sc}}^2(z)}\right)(\Delta-m_{\mathrm{sc}}(z))^2\\&+m_{\mathrm{sc}}^{2\ell+2}(z)(\Delta-m_{\mathrm{sc}}(z))+\mathrm{O}(\ell^5|\Delta-m_{\mathrm{sc}}(z)|^3).\end{aligned} \tag{3.7}$$

and

$$X_\ell(\Delta,z)-m_d(z)=\frac{d}{d-1}m_d^2(z)m_{\mathrm{sc}}^{2\ell}(z)(\Delta-m_{\mathrm{sc}}(z))+\mathrm{O}\left(|\Delta-m_{\mathrm{sc}}(z)|^2\right). \tag{3.8}$$

此外，差值 $Y_\ell(\Delta,z)-Y_\ell(\Delta',z)$ 满足

$$|Y_\ell(\Delta,z)-Y_\ell(\Delta',z)|\lesssim \ell|\Delta-\Delta'|, \tag{3.9}$$

命题 3.5 的证明。X_ℓ 和 Y_ℓ 的证明完全相同，因此我们只给出 Y_ℓ的证明。记 $\mathcal{H}=\mathcal{B}_\ell(o,\mathcal{Y})$为第 ℓ层截断的（$d-1$）叉树。记其顶点集为 $\mathbb{H}$，归一化邻接矩阵为 H。记 $\mathbb{I}$ 和 $\mathbb{I}^\partial$ 为对角矩阵，使得对于 x、$y\in\mathbb{H}$、$\mathbb{I}_{xy}=\delta_{xy}$ 和 $\mathbb{I}^\partial_{xy}=\mathbf{1}$，有 $(\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(x,o)=\ell)\delta_{xy}$。于是，由 (3.4) 可得

$$Y_\ell(\Delta,z)=P(\mathcal{H},z,\Delta)=\left(H-z-\Delta\mathbb{I}^\partial\right)^{-1},\quad P=P(\mathcal{H},z,m_{\mathrm{sc}}(z))=(H-z-m_{\mathrm{sc}}(z)\mathbb{I}^\partial)^{-1}.$$

在证明的其余部分，我们将简写为 $m_{\mathrm{sc}}=m_{\mathrm{sc}}(z)$。我们可以通过扰动论证计算格林函数 $P(\mathcal{H},\ z,\ \Delta)$,

$$\begin{aligned}P(\mathcal{H},z,\Delta)=&\left(H-z-\Delta\mathbb{I}^\partial\right)^{-1}=\left(H-z-m_{\mathrm{sc}}\mathbb{I}^\partial-(\Delta-m_{\mathrm{sc}})\mathbb{I}^\partial)\right)^{-1}\\=&\,P+\sum_{k\geqslant 1}(\Delta-m_{\mathrm{sc}})^kP(\mathbb{I}^\partial P)^k.\end{aligned} \tag{3.10}$$

利用式（ P 3.3）给出的显式表达式，我们可以计算

$$\left(P\mathbb{I}^{\partial}P\right)_{oo}=\sum_{l}P_{ol}P_{lo}=\sum_{l,l'}m_{\mathrm{sc}}^{2}\left(-\frac{m_{\mathrm{sc}}}{\sqrt{d-1}}\right)^{2\ell}=m_{\mathrm{sc}}^{2\ell+2} \tag{3.11}$$

其中求和遍历满足 $\mathsf{dist}_{\mathcal{H}}(l,o)=\mathsf{dist}_{\mathcal{H}}(l',o)=\ell$ 的 l,l'，且 l 有 $(d-1)^{\ell}$ 个取值。此外，对于 $k\geqslant 2$，我们将证明关于 P 的以下两个关系，

$$\left(P\mathbb{I}^{\partial}P\mathbb{I}^{\partial}P\right)_{oo}=m_{\mathrm{sc}}^{2\ell+2}m_{d}\left(\frac{1-m_{\mathrm{sc}}^{2\ell+2}}{d-1}+\frac{d-2}{d-1}\frac{1-m_{\mathrm{sc}}^{2\ell+2}}{1-m_{\mathrm{sc}}^{2}}\right), \tag{3.12}$$

$$\left(|P|^{k}\right)_{oo}\lesssim(C\ell)^{2k-3}, \tag{3.13}$$

其中对每个 $i,j\in\mathbb{H}$，$|P|_{ij}\coloneqq|P_{ij}|$。

关系（3.12）由利用（3.2）和（3.3）进行显式计算得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{l,l'}P_{ol}P_{ll'}P_{l'o}=\sum_{l,l'}m_{\mathrm{sc}}^{2}\left(-\frac{m_{\mathrm{sc}}}{\sqrt{d-1}}\right)^{2\ell}m_{d}\left(1-\left(-\frac{m_{\mathrm{sc}}}{\sqrt{d-1}}\right)^{2+2\mathrm{anc}_{\mathcal{H}}(l,l')}\right)\left(-\frac{m_{\mathrm{sc}}}{\sqrt{d-1}}\right)^{\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(l,l')}\\
&=\frac{m_{\mathrm{sc}}^{2\ell+2}}{(d-1)^{\ell}}\sum_{l,l'}m_{d}\left(1-\left(\frac{m_{\mathrm{sc}}}{\sqrt{d-1}}\right)^{2+2\mathrm{anc}_{\mathcal{H}}(l,l')}\right)\left(-\frac{m_{\mathrm{sc}}}{\sqrt{d-1}}\right)^{\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(l,l')}\\
&=m_{\mathrm{sc}}^{2\ell+2}m_{d}\left(1-\left(\frac{m_{\mathrm{sc}}}{\sqrt{d-1}}\right)^{2+2\ell}+\sum_{r=1}^{\ell}\left(1-\left(\frac{m_{\mathrm{sc}}}{\sqrt{d-1}}\right)^{2+2(\ell-r)}\right)\left(\frac{m_{\mathrm{sc}}}{\sqrt{d-1}}\right)^{2r}(d-2)(d-1)^{r-1}\right)\\
&=m_{\mathrm{sc}}^{2\ell+2}m_{d}\left(\frac{1-m_{\mathrm{sc}}^{2\ell+2}}{d-1}+\frac{d-2}{d-1}\frac{1-m_{\mathrm{sc}}^{2\ell+2}}{1-m_{\mathrm{sc}}^{2}}\right),
\end{aligned}$$

其中第一行中的求和遍历满足 $\mathsf{dist}_{\mathcal{H}}(l,o)=\mathsf{dist}_{\mathcal{H}}(l',o)=\ell$ 的 l,l'；倒数第二行中，我们用到了 l 有 $(d-1)^{\ell}$ 种选择数；对于给定的 l，有 $(d-2)(d-1)^{r-1}$ 个 l' 的取值满足 $\mathsf{dist}_{\mathcal{H}}(l,l')=2r$、$\mathsf{anc}_{\mathcal{H}}(l,l')=\ell-r$（对 $1\leqslant r\leqslant\ell$）。当 $l=l'$ 时，有 $\mathsf{dist}_{\mathcal{H}}(l,l')=0$、$\mathsf{anc}_{\mathcal{H}}(l,l')=\ell$。

为证明 (3.13)，我们通过归纳法证明，对于任意满足 $\mathsf{dist}\,i$ 的顶点 $\mathcal{H}(o,i)\leqslant\ell$，

$$\left(|P|^{k}\right)_{oi}\lesssim\frac{(C\ell)^{2k-2}}{(d-1)^{\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(o,i)/2}}. \tag{3.14}$$

对于 $k=1$，结论由 (3.2) 得出。假设结论 (3.14) 对 $k-1$成立，我们来证明它对 k也成立，

$$\left(|P|^{k}\right)_{oi}=\sum_{j\in\mathbb{H}}\left(|P|^{k-1}\right)_{oj}|P|_{ji}\lesssim\sum_{j\in\mathbb{H}}\frac{(C\ell)^{2k-4}}{(d-1)^{\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(o,j)/2}}\frac{1}{(d-1)^{\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(j,i)/2}}. \tag{3.15}$$

我们将从 o 到 i 的路径记作 $\mathcal{P}$，则 $|\{j\in\mathbb{H}:\mathsf{dist}_{\mathcal{H}}(j,\mathcal{P})=r\}|\leqslant\ell(d-1)^{r}$，且对于 $\mathsf{dist}_{\mathcal{H}}(j,\mathcal{P})=r$，有

$$\frac{1}{(d-1)^{\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(o,j)/2}}\frac{1}{(d-1)^{\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(j,i)/2}}\lesssim\frac{1}{(d-1)^{r}}\frac{1}{(d-1)^{\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(o,i)/2}}.$$

这样，我们可以根据到 j （3.15）的距离，重新整理关于 $\mathcal{P}$ 的求和，

$$\begin{aligned}
\left(|P|^{k}\right)_{oi}&=\sum_{r=0}^{\ell}\sum_{j\in\mathbb{H}:\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(j,\mathcal{P})=r}\frac{(C\ell)^{2k-4}}{(d-1)^{\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(o,j)/2}}\frac{1}{(d-1)^{\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(j,i)/2}}\\
&\lesssim\sum_{r=0}^{\ell}|\{j:\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(j,\mathcal{P})=r\}|\frac{(C\ell)^{2k-4}}{(d-1)^{r}}\frac{1}{(d-1)^{\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(o,i)/2}}\lesssim\frac{(C\ell)^{2k-2}}{(d-1)^{\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(o,i)/2}},
\end{aligned}$$

这表明（3.14）。断言（3.13）是（3.14）的推论

$$(|P|^k)_{oo} = \sum_{i\in\mathbb{H}} (|P|^{k-1})_{oi}|P|_{io} \lesssim \sum_{i\in\mathbb{H}} \frac{(C\ell)^{2k-4}}{(d-1)^{\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(o,i)/2}} \frac{1}{(d-1)^{\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(i,o)/2}} \lesssim (C\ell)^{2k-3}.$$

断言（3.7　　）可通过将（3.11）、（3.12）和（3.13）代入（3.10），并使用 $\ell^2|\Delta - m_{\mathrm{sc}}| \ll 1$:

$$\begin{aligned} Y_\ell(\Delta, z) - m_{\mathrm{sc}}(z) &= \sum_{k\geqslant 1} (\Delta - m_{\mathrm{sc}})^k (P(\mathbb{I}^\partial P)^k)_{oo} \\ &= m_{\mathrm{sc}}^{2\ell+2}(z) m_d(z) \left(\frac{1 - m_{\mathrm{sc}}^{2\ell+2}(z)}{d-1} + \frac{d-2}{d-1} \frac{1 - m_{\mathrm{sc}}^{2\ell+2}(z)}{1 - m_{\mathrm{sc}}^2(z)} \right) (\Delta - m_{\mathrm{sc}}(z))^2 \\ &+ m_{\mathrm{sc}}^{2\ell+2}(z)(\Delta - m_{\mathrm{sc}}(z)) + \sum_{k\geqslant 3} |\Delta - m_{\mathrm{sc}}(z)|^k (|P|^{k+1})_{oo}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

断言（3.9）可通过对导数取界得出

$$|\partial_1 Y_\ell(\Delta, z)| \lesssim \ell. \tag{3.17}$$

断言（3.17）可通过对（ Δ ）两边关于 3.16 求导，并代入（3.11）和（3.13）得出

$$|\partial_1 Y_\ell(\Delta, z)| \lesssim |(P\mathbb{I}^\partial P)_{oo}| + \sum_{k\geqslant 1} |\Delta - m_{\mathrm{sc}}|^k (|P|^{k+2})_{oo} \lesssim 1 + C\ell \sum_{k\geqslant 1} (C\ell^2|\Delta - m_{\mathrm{sc}}|)^k \lesssim \ell.$$

□

3.3 H的局部定律

为陈述 H的局部定律，我们引入一个量 Q（z），它最早定义于 [3, 17], ，并在局部定律的证明中起着关键作用。该量是对所有相邻顶点 $G_{jj}^{(i)}$ （z）配对取平均：$i \sim j$:

$$Q(z) := \frac{1}{Nd} \sum_{i\sim j} G_{jj}^{(i)}(z). \tag{3.18}$$

对于任意顶点集 $\mathbb{X} \subset [\![N]\!]$和整数 $r \geqslant 1$，我们记 $\mathcal{B}_r(\mathbb{X}, \mathcal{G}) = \{i \in [\![N]\!] : \mathrm{dist}_{\mathcal{G}}(i, \mathbb{X}) \leqslant r\}$为集合 $\mathcal{G}$中以顶点 $\mathbb{X}$为中心、半径为 r 的球。 H 的弱局部定律已在 [17, 定理 4.2], 中证明，下面回顾该定理（取 $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{r}) = (12, 300, \mathfrak{c}, \mathfrak{c}/32)$）。

定理 3.6 （[17, 定理 4.2]）。任取充分小的 $0 < \mathfrak{b} \ll \mathfrak{c} < 1$, $\mathfrak{N} = (\mathfrak{c}/4) \log_{d-1}(N)$ 以及任意$z \in \mathbb{C}^+$，定义 η（z）$=$虚部$[z]$, κ（z）$=$最小值$\{|$实部$[z] - 2|, |$实部$[z] + 2|\}$，以及误差参数

$$\varepsilon'(z) := (\log N)^{100} \left(N^{-10\mathfrak{b}} + \sqrt{\frac{\mathrm{Im}[m_d(z)]}{N\eta(z)}} + \frac{1}{(N\eta(z))^{2/3}} \right), \quad \varepsilon(z) := \frac{\varepsilon'(z)}{\sqrt{\kappa(z) + \eta(z) + \varepsilon'(z)}}. \tag{3.19}$$

对于任意 $\mathfrak{C} \geqslant 1$ 且 N 充分大时，相对于 Ω 上的均匀测度，以至少 $1 - \mathrm{O}(N^{-\mathfrak{C}})$ 的概率，

$$|G_{ij}(z) - P_{ij}(\mathcal{B}_{\mathfrak{N}/100}(\{i,j\}, \mathcal{G}), z, m_{\mathrm{sc}}(z))|, \quad |Q(z) - m_{\mathrm{sc}}(z)|, \quad |m_N(z) - m_d(z)| \lesssim \varepsilon(z) \tag{3.20}$$

对所有 i、$j \in [\![N]\!]$以及任意满足 $\mathrm{Im}[z] \geqslant (\log N)^{300}/N$ 的 $z \in \mathbb{C}^+$，均一致成立。

定义 3.7。我们用 $\Omega \subset \Omega$ 表示 d-正则图的集合，其中 (3.20) 成立　　s.

由定理 3.6 可得以下结论。

断言3.8。 对任意 i、$j \in [\![N]\!]$ 以及满足 $|z| \leqslant 1/\mathfrak{g}$ 的任意 $z \in \mathbb{C}^+$，均一致地有 $\operatorname{Im}[z] \geqslant N^{-1+\mathfrak{g}}$，并且有以下各界：

$$\begin{aligned} &|G_{ij}(z) - P_{ij}(\mathcal{B}_{\mathfrak{R}/100}(\{i,j\},\mathcal{G}), z, m_{\mathrm{sc}}(z)| \lesssim N^{-2\mathfrak{b}}, \\ &|Q(z) - m_{\mathrm{sc}}(z)|, \quad |m_N(z) - m_d(z)| \lesssim N^{-2\mathfrak{b}}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

以及任意 i、$j \in [\![N]\!]$

$$\operatorname{Im}[G_{ij}(z)] \lesssim N^{\mathfrak{o}/2} \operatorname{Im}[m_N(z)] \tag{3.22}$$

证明。对于 $\operatorname{Im}[z] \geqslant N^{-1+\mathfrak{g}}$，由（3.19），

$$\varepsilon(z) \leqslant \sqrt{\varepsilon'(z)} \leqslant N^{-4\mathfrak{b}}. \tag{3.23}$$

因此，断言（3.21）由（3.20）可得。

记 H 的特征向量为 $\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$、$\cdots$、$\boldsymbol{u}_N$。注意到（3.20）中的第一个结论意味着，对于 $\operatorname{Im}[z] \geqslant (\log N)^{300}/N$，$\operatorname{Im}[G_{ii}(z)] \lesssim 1$。由此可知，特征向量是离域的

$$\|\boldsymbol{u}_\alpha\|_\infty^2 \lesssim \max_{1\leqslant i\leqslant N}((\log N)^{300}/N)\operatorname{Im}[G_{ii}(\lambda_\alpha + \mathrm{i}(\log N)^{300}/N)] \lesssim (\log N)^{300}/N \ll N^{\mathfrak{o}/2-1}.$$

因此（3.22）得证

$$|\operatorname{Im}[G_{xy}(z)]| = \left|\sum_{\alpha=1}^N \frac{\eta(\boldsymbol{u}_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha^\top)_{xy}}{|\lambda_\alpha - z|^2}\right| \leqslant N^{\mathfrak{o}/2-1}\sum_{\alpha=1}^N \frac{\eta}{|\lambda_\alpha - z|^2} = N^{\mathfrak{o}/2}\operatorname{Im}[m_N(z)]. \tag{3.24}$$

□

下面的引理指出，移除 $\mathcal{G}$ 中的一些顶点后，局部定律（3.21）仍然成立（但误差可能更大）。

引理3.9. 设 $z \in \mathbb{C}^+$ 满足 $|z| \leqslant 1/\mathfrak{g}$，并令 $\eta := \operatorname{Im} z \geqslant N^{-1+\mathfrak{g}}$。固定一个 d-正则图 $\mathcal{G} \in \Omega$（回顾定理3.7）以及 $\mathcal{G}$ 中的顶点 $\{i, o\}$，并令 $\mathcal{T} = \mathcal{B}_\ell(o, \mathcal{G})$ 的顶点集为 $\mathbb{T}$。对于任意 $0 \leqslant \mu \lesssim (d-1)^\ell$，取一族有向边 $\{(b_\alpha, c_\alpha)\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}$，令 $\mathbb{W} = \{b_\alpha\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}$，并在以下事件发生的条件下进行讨论：

$$A_{io}\prod_{\alpha\in[\![\mu]\!]} A_{b_\alpha c_\alpha} \prod_{x\neq y\in\{o,c_1,c_2,\ldots,c_\mu\}} \mathbf{1}\big(\mathcal{B}_{\mathfrak{R}/2}(x,\mathcal{G}) \text{ is a tree}\big)\mathbf{1}\big(\mathrm{dist}_{\mathcal{G}}(x,y) \geqslant \mathfrak{R}/2\big) = 1. \tag{3.25}$$

那么，对于任意形如 $\mathbb{X} \in \{\mathbb{W}, \mathbb{T}\cup\mathbb{W}\}$ 的 $\mathbb{X}$ 以及任意 $x, y \notin \mathbb{X}$，我们有

$$\big|G_{xy}^{(\mathbb{X})}(z) - P_{xy}^{(\mathbb{X})}\big(\mathcal{B}_{\mathfrak{R}/100}(\{x,y\}\cup\mathbb{X},\mathcal{G}), z, m_{\mathrm{sc}}(z)\big)\big| \lesssim N^{-\mathfrak{b}}, \qquad \big|\operatorname{Im} G_{xy}^{(\mathbb{X})}(z)\big| \lesssim N^{\mathfrak{o}}\operatorname{Im}[m_N(z)], \tag{3.26}$$

并且对于任意 $x \notin \mathbb{X}$，

$$\frac{1}{N}\sum_{b\sim c\notin\mathbb{X}}\big|G_{cx}^{(\mathbb{X})}(z)\big|^2 \lesssim \frac{N^{\mathfrak{o}}\operatorname{Im} m_N(z)}{N\eta}, \qquad \frac{1}{Nd}\sum_{b\sim c\notin\mathbb{X}}\big|G_{cx}^{(b\mathbb{X})}(z)\big|^2 \lesssim \frac{N^{\mathfrak{o}}\operatorname{Im}[m_N(z)]}{N\eta}, \tag{3.27}$$

其中，求和遍历 $\mathcal{G}$ 的有向边 (b, c)，以及 $b, c \notin \mathbb{X}$。

证明。我们只证明 $\mathbb{X} = \mathbb{T}$ 这一情形，其他情形可用相同的方法证明，因此略去。由舒尔补公式（2.4），可得

$$G^{(\mathbb{T})} = G - G(G|_{\mathbb{T}})^{-1}G. \tag{3.28}$$

我们记 $\mathcal{T}=\mathcal{B}_\ell(o,\mathcal{G})$ 和 $P=P(\mathcal{B}_{\mathfrak{R}/100}(\mathbb{T}\cup\{x,y\},\mathcal{G})\ z,m_{\mathrm{sc}}(z))$。回顾一下，根据 (3.25)，顶点 o 的半径为 $\mathfrak{R}/2$ 的树邻域。o 在 $\mathcal{B}_{\mathfrak{R}/100}(\mathbb{T}\cup\{x,y\},\mathcal{G})$ 中的连通分量是一个截断的 d 正则树。因此，将其限制在 o 在 $\mathcal{B}_{\mathfrak{R}/100}(\mathbb{T}\cup\{x,y\},\mathcal{G})$ 中的连通分支上时，P 是 d 正则树的格林函数。

于是（3.4）给出（$P|_{\mathbb{T}}$）$^{-1}=H|_{\mathbb{T}}-z-m_{\mathrm{sc}}$（$z$）$\mathbb{I}^{\partial}$，其中对角矩阵 $\mathbb{I}^{\partial}_{ij}=\mathbf{1}(\mathrm{dist}_{\mathcal{T}}$（$o$，$i$）$=\ell)\ \delta_{ij}$对$i$，$j\in\mathbb{T}$成立。对于任意 $i\in\mathbb{T}$，

$$\sum_{j\in\mathbb{T}}|(P|_{\mathbb{T}})^{-1}_{ij}|\lesssim\sum_{j\in\mathbb{T}}|H_{ij}-z\delta_{ij}-\mathbb{I}^{\partial}_{ij}|\lesssim 1. \tag{3.29}$$

此外 ver, 若 x 属于 o 在 $\mathcal{B}_{\mathfrak{R}/100}$（$\mathbb{T}\cup\{x,y\}$，$\mathcal{G}$）中的连通分支，则（3.21）意味着

$$|G_{ij}-P_{ij}|,\quad |G_{xj}-P_{xj}|\leqslant N^{-2\mathfrak{b}},\qquad i,j\in\mathbb{T}. \tag{3.30}$$

若 x 不属于 o 在 $\mathcal{B}_{\mathfrak{R}/100}$（$\mathbb{T}\cup\{x,y\}$，$\mathcal{G}$）中的连通分支，则对任意 ς（x，j）$>\mathfrak{R}/50$ 成立。对于任意 $j\in\mathbb{T}$，在此情形下 $P_{xj}=0$，由（3.21）可得 $|G_{xj}|\leqslant N^{-2\mathfrak{b}}$。在此情形下，我们还有

$$|G_{ij}-P_{ij}|,\quad |G_{xj}-P_{xj}|\leqslant N^{-2\mathfrak{b}},\qquad i,j\in\mathbb{T}. \tag{3.31}$$

我们可以根据（2.1）进行预解式展开，并将（$G|_{\mathbb{T}}$）$^{-1}_{ij}$ 改写为：对于某个足够大的$\mathfrak{p}\geqslant 1$

$$\begin{aligned}(G|_{\mathbb{T}})^{-1}_{ij}-(P|_{\mathbb{T}})^{-1}_{ij}&=\left(\sum_{k=1}^{\mathfrak{p}}(P|_{\mathbb{T}})^{-1}\left((P|_{\mathbb{T}}-G|_{\mathbb{T}})(P|_{\mathbb{T}})^{-1}\right)^k\right)_{ij}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{N}\right)\\&\lesssim\sum_{l\in\mathbb{T}}|((P|_{\mathbb{T}})^{-1})_{il}|N^{-2\mathfrak{b}}\sum_{l\in\mathbb{T}}|((P|_{\mathbb{T}})^{-1})_{lj}|+\mathrm{O}\left(\frac{1}{N}\right)\lesssim N^{-2\mathfrak{b}},\end{aligned} \tag{3.32}$$

其中 在第二个陈述中，我们使用了（3.29）和（3.31）。由上述表达式可得

$$\sum_{j\in\mathbb{T}}|(G|_{\mathbb{T}})^{-1}_{ij}|\lesssim\sum_{j\in\mathbb{T}}|(P|_{\mathbb{T}})^{-1}_{ij}|+\mathrm{O}(|\mathbb{T}|N^{-2\mathfrak{b}})\lesssim 1. \tag{3.33}$$

再次，由于顶点 o 具有半径为 $\mathfrak{R}/2$ 的树邻域，对于任意 $0\leqslant r\leqslant\ell$，$|\{j\in\mathbb{T}:\ \mathrm{dist}_{\mathcal{G}}(x,j)\ =r\}|\lesssim($ $d-1)^r$。因此，对于任意 $i\in\mathbb{T}$，（3.31）和（3.1）合起来可推出

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{T}}|P_{xj}|&\lesssim\sum_{j\in\mathbb{T}}\left(\frac{|m_{\mathrm{sc}}|}{\sqrt{d-1}}\right)^{\mathrm{dist}_{\mathcal{T}}(x,j)}\lesssim\sum_{0\leqslant r\leqslant 2\ell}\frac{|\{j\in\mathbb{T}:\mathrm{dist}(x,j)=r\}|}{(d-1)^{r/2}}\lesssim\ell,\\\sum_{j\in\mathbb{T}}|G_{xj}|&\lesssim\sum_{j\in\mathbb{T}}|P_{xj}|+\mathrm{O}(|\mathbb{T}|N^{-2\mathfrak{b}})\lesssim\ell.\end{aligned} \tag{3.34}$$

对于 P，舒尔补公式（2.4）给出 $P^{(\mathbb{T})}=P-P$（$P|_{\mathbb{T}}$）^{-1}P。将其与（3.28）作差，可得

$$\begin{aligned}&|G^{(\mathbb{T})}_{xy}-P^{(\mathbb{T})}_{xy}|\lesssim|G_{xy}-P_{xy}|+\sum_{i,j\in\mathbb{T}}|G_{xi}-P_{xi}||(G|_{\mathbb{T}})^{-1}_{ij}||G_{jy}|\\&+\sum_{i,j\in\mathbb{T}}|P_{xi}||(G|_{\mathbb{T}})^{-1}_{ij}-(P|_{\mathbb{T}})^{-1}_{ij}||G_{jy}|+\sum_{i,j\in\mathbb{T}}|P_{xi}||(P|_{\mathbb{T}})^{-1}_{ij}||G_{jy}-P_{jy}|\\&\lesssim|G_{xy}-P_{xy}|+N^{-2\mathfrak{b}}\sum_{i,j\in\mathbb{T}}\left(|(G)^{-1}_{ij}||G_{jy}|+|P_{xi}||G_{jy}|+|P_{xi}||(P|_{\mathbb{T}})^{-1}_{ij}|\right)\\&\lesssim\ell^2N^{2\mathfrak{b}}\lesssim N^{-\mathfrak{b}}.\end{aligned} \tag{3.35}$$

其中，在第二个不等式中，我们使用了（3.31）和（3.32）；在第三个不等式中，我们使用了（3.29）、（3.34）和（3.33）。这就完成了（3.26）中第一个结论的证明。

对等式 (3.28) 两边取虚部，得到

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}[G^{(\mathbb{T})}_{xy}] = \operatorname{Im}[G_{xy}] - \operatorname{Im}[(G(G|_{\mathbb{T}})^{-1}G)_{xy}] \lesssim \operatorname{Im}[G_{xy}] + \sum_{j\in\mathbb{T}} \operatorname{Im}[G_{xj}]|(G|_{\mathbb{T}})^{-1}G)_{jy}| \\ + \sum_{j\in\mathbb{T}} |(G(G|_{\mathbb{T}})^{-1})_{xj}||\operatorname{Im}[G_{jy}]| + \sum_{j,k\in\mathbb{T}} |G_{xj}|\operatorname{Im}[(G|_{\mathbb{T}})^{-1}_{jk}]|G_{ky}|.\end{aligned} \tag{3.36}$$

下面给出以下估计

$$\sum_{j\in\mathbb{T}}(|G_{xj}| + |(G(G|_{\mathbb{T}})^{-1})_{xj}| + |G_{jy}| + |(G(G|_{\mathbb{T}})^{-1})_{jy}|) \lesssim \ell, \quad \max_{j,k\in\mathbb{T}} \operatorname{Im}[(G|_{\mathbb{T}})^{-1}_{jk}] \lesssim \ell^2 N^{\mathfrak{o}/2} \operatorname{Im}[m_N]. \tag{3.37}$$

将 (3.24) 和 (3.37) 代入 (3.36)，即可得到 (3.26) 中的第二个结论。

我们先证明 (3.37) 中的第一个结论。由估计式 (3.33) 和 (3.34)，可得 (3.37) 中的第一个结论

$$\sum_{j\in\mathbb{T}}(|G_{xj}| + |(G(G|_{\mathbb{T}})^{-1})_{xj}|) \lesssim \sum_{j\in\mathbb{T}} |G_{xj}| \left(1 + \sum_{i\in\mathbb{T}} |(G|_{\mathbb{T}})^{-1}_{ji}|\right) \lesssim \ell.$$

接下来证明 (3.37) 中的第二个结论。对于对称矩阵的虚部，有如下恒等式

$$\operatorname{Im}[A^{-1}] = -A^{-1}\operatorname{Im}[A]\overline{A^{-1}}.$$

Thus

$$\operatorname{Im}[(G|_{\mathbb{T}})^{-1}_{xy}] = -((G|_{\mathbb{T}})^{-1}\operatorname{Im}[G|_{\mathbb{T}}]\overline{(G|_{\mathbb{T}})^{-1}})_{xy}. \tag{3.38}$$

将 (3.24) 和 (3.33) 代入 (3.38)，即可得到 (3.37) 中的第二个结论。

第一个陈述　式中的陈述（3.27）由 Ward 恒等式（2.6）以及（3.26）中的第二个陈述推出：

$$\frac{1}{N}\sum_{c\notin\mathbb{T}} |G^{(\mathbb{T})}_{cx}|^2 = \frac{\operatorname{Im}[G^{(\mathbb{T})}_{xx}]}{N\eta} \lesssim \frac{N^{\mathfrak{o}}\operatorname{Im}[m_N]}{N\eta}.$$

对于（3.27）中的第二个陈述，由于舒尔补公式（2.5），

$$|G^{(b\mathbb{T})}_{cx}| = \left|G^{(\mathbb{T})}_{cx} - \frac{G^{(\mathbb{T})}_{cb}G^{(\mathbb{T})}_{bx}}{G^{(\mathbb{T})}_{bb}}\right| \lesssim |G^{(\mathbb{T})}_{cx}| + |G^{(\mathbb{T})}_{bx}|, \tag{3.39}$$

其中，在第二个陈述中，我们利用（3.26）对 $|G^{(\mathbb{T})}_{cb}| \lesssim 1$，$|G^{(\mathbb{T})}_{bb}| \gtrsim 1$ 取界。对（3.39）取平均可得

$$\frac{1}{Nd}\sum_{b\sim c\notin\mathbb{T}} |G^{(b\mathbb{T})}_{cx}|^2 \lesssim \frac{1}{Nd}\sum_{b\sim c\notin\mathbb{T}} |G^{(\mathbb{T})}_{cx}|^2 + |G^{(\mathbb{T})}_{bx}|^2 \lesssim \frac{N^{\mathfrak{o}}\operatorname{Im}[m_N]}{N\eta},$$

其中第二个陈述由3.27中的第一个陈述推出。

□

4 边缘普适性。

现在我们概述证明随机 d-正则图的边缘普适性定理1.1背后的思路。边缘普适性遵循标准的三步方案 [12]。关键的不同之处出现在步骤 (i) 和 (iii) 中：

（i）在稀疏情形下，特征值位置的最优集中性并非像 Wigner情形那样相对于半圆律而言。因此，相关 Stieltjes 变换的自洽方程更加复杂。我们引入了新的技术——局部重采样，以更有效地利用随机性——来推导这些方程并建立集中性；详情请参见第 4.1 节。

（iii）对于随机 d-正则图（其中 d 为固定值），标准的 Wigner 型比较方法会失效。一种基于圈方程的不同机制发挥着核心作用；详情请参见第 4.2 节。

4.1 三步策略。

本节回顾证明 Wigner矩阵的边缘普适性的三步策略（例如参见 [12]），并着重说明在随机 d-正则图情形下出现的关键差异。令 H 表示一个 Wigner矩阵或随机 d-正则图的归一化邻接矩阵。将其特征值按降序记为 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_N$。

步骤 (i)：局部定律与刚性。第一步是证明直至谱边缘的最优特征值刚性（达到 $N^{-2/3}$ 尺度），从而精确控制极端特征值。这通过为斯蒂尔切斯变换 $m_N(z)$（或相关谱观测量）推导自洽方程来实现，

$$m_N(z) := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\lambda_i - z}.$$

对于 Wigner矩阵，自洽方程具有如下形式：以高概率

$$1 + zm_N(z) + m_N^2(z) \approx 0, \tag{4.1}$$

其唯一解是半圆律的斯蒂尔切斯变换。通过仔细估计高阶矩 $\mathbb{E}[|1 + zm_N(z) + m_N^2(z)|^{2p}]$，可以证明该自洽方程。

对于一个随机 d-正则图 $\mathcal{G}$，其顶点数为 N 且度固定为 d，要为斯蒂尔切斯变换得到一个封闭方程，需要更精细的观测量。我们回顾式（3.18）中的量

$$Q(z) = \frac{1}{Nd}\sum_{i\sim j} G_{jj}^{(i)}(z), \tag{4.2}$$

以及函数 Y_ℓ（Q（z） z）和 X_ℓ（Q（z） z），它们出自式（3.6），分别是截断的$d-1$元树和深度为 d的截断正则图树根处的格林函数，其中边界权为 $\ell \asymp \log_{d-1} NQ$（$z$）。事实证明，量 Q（z）和斯蒂尔切斯变换 m_N（z）满足两个自洽方程：

$$Q(z) - Y_\ell(Q(z), z) \approx 0, \quad m_N(z) - X_\ell(Q(z), z) \approx 0. \tag{4.3}$$

的主要结果之一 [15] 致力于通过利用局部重采样的迭代方案证明自洽方程（4.3）。本文旨在解释这些自洽方程的推导过程，方法是证明其期望很小。

步骤（ii）：Dyson布朗运动的强遍历性。接下来，我们研究经过小幅 GOE 矩阵扰动的归一化邻接矩阵

$$H(t) := H + \sqrt{t}\,Z, \tag{4.4}$$

其中，对于 Wigner矩阵， Z 是 GOE 矩阵；对于随机 d-正则图， Z 是限制在行列和为零的矩阵子空间上的 GOE（因此平凡特征向量 $\boldsymbol{e}=(1,\ldots,1)^{\top}$ 得以保持）。

假设以下矩阵的特征值 H 相对于某个极限密度满足最优边缘刚性 ϱ ，且该极限密度呈现平方根边缘行为，这是步骤 (i) 的结果。特别地，对于 Wigner矩阵 ϱ 是半圆律（1.5）；对于随机 d-正则图 ϱ 是 Kesten–McKay律 ϱ_d （见1.3）。随后，根据 [1,20],经过一段时间 $t\geqslant N^{-1/3+\mathfrak{c}}$ （对于任意小的 $\mathfrak{c}>0$）后， H（t的边缘统计具有普适性：极端特征值收敛到 Airy_1 点过程（GOE 的边缘标度极限）。

矩阵 $H(t)=H+\sqrt{t}Z$ 的渐近经验特征值分布可由自由概率理论 [5]中的自由加性卷积描述。我们将方差为t 的半圆分布记为 $t^{-1/2}\rho_{\mathrm{sc}}(t^{-1/2}x)$。给定 $\mathbb{R}$上的概率测度 ϱ ，我们将其与方差为 t 的半圆分布的自由卷积记为 $\varrho_t:=\varrho\boxplus t^{-1/2}\rho_{\mathrm{sc}}(t^{-1/2}x)$。将 ϱ 和 ϱ_t 的 Stieltjes变换写为

$$m(z)=m(z;0)=\int(x-z)^{-1}\varrho(x)\mathrm{d}x,\quad m(z;t)=\int(x-z)^{-1}\varrho_t(x)\mathrm{d}x,\quad z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}.$$

斯蒂尔切斯变换 $m(z;t)$ 满足复Burgers方程

$$\partial_t m(z,t)=\partial_z m(z,t)m(z,t)=\frac{1}{2}\partial_z(m(z,t)^2). \tag{4.5}$$

将自由卷积密度 ϱ_t 的右边缘记为 E_t，则其演化满足以下方程

$$\partial_t E_t=m(E_t,t). \tag{4.6}$$

步骤（iii）：格林函数比较。 最后一步去除（4.4）中的高斯成分，并通过比较论证，将边缘普适性从高斯可除模型传递到原始系综。特别地，它表明边缘处的 k点关联函数沿流（4.4）保持不变，其中 t 被解释为时间。这是通过以下关于边缘处多点关联函数的比较定理实现的（等价地说，即在微观尺度上比较斯蒂尔切斯变换的乘积）。关于该定理如何导出边缘普适性的详细说明，请参见 [12, 第 17]节。

命题 4.1。 固定一个小的 $\mathfrak{c}>0$。我们引入微观窗口：

$$\mathbf{M}:=\{w\in\mathbb{C}:N^{-2/3-\mathfrak{c}}\leqslant|\mathrm{Im}[w]|\leqslant N^{-2/3+\mathfrak{c}},-N^{-2/3+\mathfrak{c}}\leqslant\mathrm{Re}[w]\leqslant N^{-2/3+\mathfrak{c}}\}. \tag{4.7}$$

那么对于任意 $p\geqslant 1$，以及 w_1、w_2、$\cdots$、$w_p\in\mathbf{M}$， $z_j(t)=E_t+w_j$对于 $1\leqslant j\leqslant p$，以下结论成立

$$\mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{p}N^{1/3}(m_N(z_j(t);t)-m(z_j(t);t))\right]\Bigg|_{t=0}^{t=N^{-1/3+\mathfrak{c}}}=\mathrm{O}\left(N^{-\mathfrak{c}}\right), \tag{4.8}$$

前提是 N 足够大。

对于 Wigner矩阵以及度呈多项式增长的随机图，定理4.1 可通过高斯分部积分消去高斯正交系综扰动 Z ，再通过累积量展开展开 H的随机性，并证明主导贡献相互抵消，从而得到。对于随机 d-正则图，若其度固定为 d，这一论证便不再适用。在定理 1.1的证明中，一个关键观察是，斯蒂尔切斯变换的多点关联函数的时间导数由微观环方程所支配。下一节将陈述这些环方程，并说明它们如何导出固定度 d-正则图的格林函数比较。

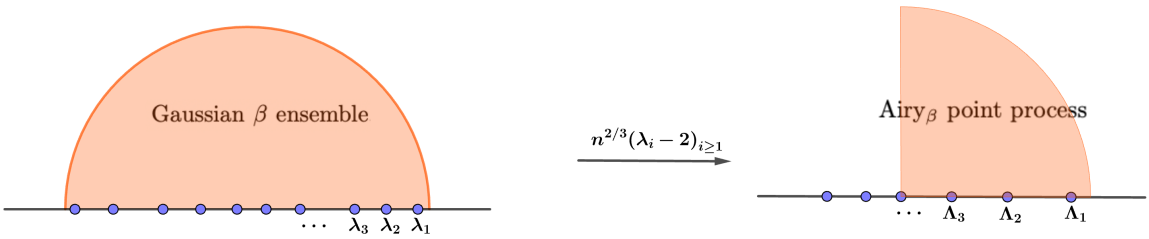

图 2：高斯 β 系综的极端特征值收敛到 Airy$_\beta$ 点过程。

4.2 环方程与格林函数比较

环方程（或 Dyson–Schwinger 方程）最早见于理论物理文献（例如 Migdal [22]的工作），后来由 Johansson [18] 引入数学界，用以推导随机矩阵特征值的一般 β-系综的宏观中心极限定理，另请参见 [6,7,25] 以及著作 [13]。对于高斯 β-系综，环方程（或 Dyson–Schwinger 方程）描述了特征值的斯蒂尔切斯变换（关联函数）所满足的递归结构。第一环方程如下：对于 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[m_N(z)^2 + z m_N(z) + 1 + \frac{2-\beta}{\beta}\frac{\partial_z m_N(z)}{N}\right] = 0, \quad m_N(z) := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\lambda_i - z}. \tag{4.9}$$

更一般地，对于任意 $p \geqslant 1$，秩为 p 时的环方程为：对于 z， z_1， z_2， $\cdots$， $z_{p-1} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left(m_N(z)^2 + z m_N(z) + 1 + \frac{2-\beta}{\beta}\frac{\partial_z m_N(z)}{N}\right)\prod_{j=1}^{p-1} m_N(z_j)\right] \\ &+ \frac{2}{\beta N^2}\sum_{j=1}^{p-1}\mathbb{E}\left[\partial_{z_j}\frac{m_N(z) - m_N(z_j)}{z - z_j}\prod_{i\neq j} m_N(z_i)\right] = 0.\end{aligned} \tag{4.10}$$

这些环方程（4.9）和（4.10）源于特征值积分在变量的无穷小重参数化下的不变性；它们既可以通过分部积分推导，也可以等价地通过无穷小变量替换推导。

更一般地，可以推导具有一般势 V 的 β 系综的环方程

$$P(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N) = \frac{1}{Z_N^{\beta,V}}\prod_{i<j}|\lambda_i - \lambda_j|^\beta \prod_{i=1}^{N} e^{-\beta N V(\lambda_i)}.$$

环方程（或 Dyson-Schwinger 方程）在证明β-系综（具有一般势 [4,8–10,26]）的特征值刚性和普适性方面发挥着至关重要的作用。

一般而言，圈方程取决于模型。对于 β系综，它们取决于势 V。然而，当放大观察谱边缘附近时，圈方程的微观版本变得普适。为了介绍圈方程的微观版本，我们回顾一下，高斯正交系综的极端特征值收敛到 Airy$_1$ 点过程 $\Lambda_1 \geqslant \Lambda_2 \geqslant \Lambda_3 \geqslant \cdots$；见图2。我们可以引入以下归一化的 Airy$_1$ 点过程的斯蒂尔切斯变换:

$$S(w) = \sum_{i\geqslant 1}\left(\frac{1}{\Lambda_i - w} - \frac{1}{\mathfrak{a}_i}\right) - \frac{\mathrm{Ai}'(0)}{\mathrm{Ai}(0)}, \quad w \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R},$$

其中， $\mathfrak{a}_1 > \mathfrak{a}_2 > \mathfrak{a}_3 > \cdots$是艾里函数 Ai($w$) 的零点。在上述归一化下， $S(w)$ 呈现平方根行为： $S(w) \sim \sqrt{w}$ 当 $w \to \infty$ 时。 $S(w)$ 可视为一个随机亚纯函数，其极点由艾里$_1$ 点过程给出。

形式上，对圈方程（4.9）和（4.10）取软边标度极限，可得到关于艾里 $S(w)$点过程的斯蒂尔切斯变换 $_1$。秩p 圈方程如下：对任意 w， w_1，……， $w_{p-1} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\left((S(w)-\sqrt{w})^2+2\sqrt{w}(S(w)-\sqrt{w})+\partial_w S(w)\right)\prod_{i=1}^{p-1} S(w_i)\right] \\ &+2\sum_{1\leqslant i\leqslant p-1}\mathbb{E}\left[\partial_{w_i}\left(\frac{S(w)-S(w_i)}{w-w_i}\right)\prod_{j:j\neq i} S(w_j)\right]=0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

这些环方程（4.11）为边缘统计收敛到 Airy点过程提供了必要条件。

证明定理 [15] 的一个关键中间步骤是1.1 关于经小幅高斯正交系综扰动的随机 d-正则图的归一化邻接矩阵的以下微观圈方程。其证明构成了 [15] 的主要部分，并与自洽方程（4.3）的推导类似。为了使误差项足够小，我们需要多次迭代局部重抽样过程，并仔细追踪累积误差。

命题*4.2*。取一个小的 $\mathfrak{c}>0$。令 $\Delta_t(z) := m_N(z;\, t) - m(z;\, t)$，并回忆微观窗口 M 的定义见式（*4.7*）。固定 $p \geq 1$ 和 $w, w_1, \ldots, w_{p-1} \in M$，并令 $z(t) := E_t + w$ 且 $z_j(t) := E_t + w_j$，其中$1 \leq j \leq p-1$。那么，当 N 充分大时，

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\left(\Delta_t(z(t))^2+2\mathcal{A}\sqrt{z(t)-E_t}\,\Delta_t(z(t))+\frac{\partial_z m_N(z(t);t)}{N}\right)\prod_{i=1}^{p-1}\Delta_t(z_i(t))\right] \\ &+\frac{2}{N^2}\sum_{1\leq i\leq p-1}\mathbb{E}\left[\partial_z\left(\frac{m_N(z;t)-m_N(z;t)}{z-z_i(t)}\right)\Bigg|_{z=z_i(t)}\prod_{j:1\leqslant j\neq i\leqslant p-1}\Delta_t(z_j(t))\right]=\mathrm{O}\left(N^{-(p+1)/3-10\mathfrak{c}}\right). \end{aligned} \tag{4.12}$$

标度极限 $N^{1/3}\Delta_t(E_t+w/(\mathcal{A}N)^{2/3})/\mathcal{A}^{2/3}$收敛到 $S(w)-\sqrt{w}$在圈方程的微观版本（4.11）中。右端的误差界见于（4.12），其经过精确校准，使得在将 Δ_t 的每个因子按 $N^{1/3}$缩放之后，总误差仍随 $N\to\infty$趋于零。

下文中，我们证明微观环方程（4.12）蕴含定理 4.1中的格林函数比较，从而完成三步策略的最后一步。为清晰起见，我们证明（4.8）仅限于情形 $p=1$，并记 $z(t)=E_t+w$，其中 $w\in\mathbf{M}$。我们参阅 [15, 第3节。3] 以了解一般情形。在此情形下，（4.8）可由将下述陈述从0积分到 $t=N^{-1/3+\mathfrak{c}}$

$$|\partial_t\mathbb{E}\left[m_N(z(t);t)-m(z(t);t)\right]|\leqslant N^{-2\mathfrak{c}}. \tag{4.13}$$

第一环方程对应于 $p=1$ 式（4.12）

$$\mathbb{E}\left[(\Delta_t(z(t))^2+2\mathcal{A}\sqrt{z(t)-2}\Delta_t(z(t))+\frac{\partial_z m_N(z(t);t)}{N}\right]=\mathrm{O}\left(N^{-2/3-10\mathfrak{c}}\right), \tag{4.14}$$

其中 $z(t)=E_t+w$，且 $w\in\mathbf{M}$。接下来我们证明（4.14）蕴含（4.13）。根据高斯分部积分，

$$\partial_t\,\mathbb{E}\big[m_N(z;t)\big]=\frac{1}{N}\,\partial_t\,\mathbb{E}\Big[\mathrm{Tr}\,(H+\sqrt{t}\,Z-z)^{-1}\Big]=\frac{1}{2}\,\mathbb{E}\left[\partial_z\left(m_N^2(z;t)+\frac{\partial_z m_N(z;t)}{N}\right)\right]. \tag{4.15}$$

将复Burgers方程（4.5）中关于 $s(z;\,t)$ 的方程从（4.15）中相减，得到

$$\partial_t\,\mathbb{E}\big[m_N(z;t)-m(z;t)\big]=\frac{1}{2}\,\mathbb{E}\left[\partial_z\left(m_N^2(z;t)-m^2(z;t)+\frac{\partial_z m_N(z;t)}{N}\right)\right]. \tag{4.16}$$

将 $z(t) = E_t + w$ 代入 $w \in \mathbf{M}$ 到（4.16）中，得到

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbb{E}\big[m_N(z(t);t) - m(z(t);t)\big] &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\big[\partial_z F_t\big(z(t)\big)\big], \\ F_t(z) &:= \Delta_t(z)^2 + 2\big(m(z;t) - m(E_t;t)\big)\Delta_t(z) + \frac{\partial_z m_N(z;t)}{N}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

对于 z 谱边缘附近，在 $z - E_t \in \mathbf{M}$，并利用 ϱ_t的平方根行为，可得 $m(z;\ t) - m(E_t;\ t) \approx \mathcal{A}\sqrt{z - E_t}$。因此，忽略替换误差后，第一环方程（4.14）推出

$$\mathbb{E}\big[F_t(z)\big] = \mathrm{O}\left(N^{-2/3-10\mathfrak{c}}\right). \tag{4.18}$$

由于 F_t 在 $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$上解析，在以 $z(t)$ 为中心、半径为 $\operatorname{Im} z(t)/2 \geqslant N^{-2/3-\mathfrak{c}}/2$ 的圆上应用柯西积分公式，得到

$$\mathbb{E}\big[\partial_z F_t(z)|_{z=z(t)}\big] = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\omega} \frac{\mathbb{E}\big[F_t(w)\big]}{(w - z(t))^2} \mathrm{d}w = \mathrm{O}\left(N^{-8\mathfrak{c}}\right). \tag{4.19}$$

结合（4.17）与（4.19）可证得（4.13），从而得到格林函数比较定理4.1。

4.3 自洽方程与第一环方程

为阐释主要思想，本文给出以下定理4.5的证明，该定理导出自洽方程以及谱边缘处圈方程的第一个微观版本。关于边缘普适性的完整证明，请参阅[15] 。

我们回顾函数 Y_ℓ、X_ℓ 以及量 $Q(z)$（见（3.6）和（3.18））。为简化记号，我们记

$$Y(z) = Y_\ell(Q(z), z), \quad X(z) = X_\ell(Q(z), z). \tag{4.20}$$

我们还回顾定理3.1 和定理3.中的 d-正则图集合 Ω 和 Ω 6.

接下来，我们引入一些其他误差项。我们强调，它们依赖于图 $\mathcal{G}$，因此是随机量。

定义 4.3。对于 任意位于上半平面的 $z \in \mathbb{C}^+$，且满足 $\eta = \operatorname{Im} z$，我们引入控制参数 *er*

$$\Phi(z) := \frac{\operatorname{Im}[m_N(z)]}{N\eta} + \frac{1}{N^{1-2\mathfrak{c}}}, \quad \Psi(z) := \mathbf{1}(\mathcal{G} \in \Omega)\left(\Phi(z) + \frac{|Q(z) - Y(z)|}{N^{\mathfrak{b}/8}}\right). \tag{4.21}$$

注4.4。量 $\Phi(z)$ 是随机矩阵理论中的标准控制参数。我们将通过 $\Psi(z)$ 控制 $Q(z) - Y(z)$ 的期望，见 (4.22)。尽管 $\Psi(z)$ 本身包含 $|Q(z) - Y(z)|$（但多了一个因子 $N^{-\mathfrak{b}/8}$），我们可以将该项（暂且忽略绝对值）移到左边，并得出 $Q(z) - Y(z)$ 的期望受 $\Phi(z)$ 控制。

以下结果表明，自洽方程的期望可以忽略不计，并给出了定理 $t = 0$，$p = 1$ 中对应于情形 4.2 的第一环方程。定理 4.5 的证明将在本文余下部分给出。

定理 4.5。固定一个谱参数 $z \in \mathbf{D}$ *(回顾 (1.8))*，并回顾控制参数 $\Psi(z)$，它来自(4.21)。则

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}(\mathcal{G} \in \Omega)\big(Q(z) - Y(z)\big)\right] \lesssim (d-1)^{2\ell}\mathbb{E}[\Psi(z)], \tag{4.22}$$

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}(\mathcal{G} \in \Omega)\big(m_N(z) - X(z)\big)\right] \lesssim (d-1)^{2\ell}\mathbb{E}[\Psi(z)]. \tag{4.23}$$

此外，如果 w 还假设 $|z-2| \leqslant N^{-\mathfrak{g}}$，那么我们对 $Q(z) - Y(z)$ 有一个精细估计 ：

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}(\mathcal{G} \in \Omega)\left(\frac{\mathcal{A}^2}{\ell+1}(Q(z)-Y(z)) + \frac{\partial_z m_N(z)}{N}\right)\right] = \mathrm{O}\left(\frac{N^{\mathfrak{o}}\mathbb{E}[\Psi(z)]}{(d-1)^{\ell/2}}\right), \tag{4.24}$$

其中常数 $\mathcal{A} = d(d-1)/(d-2)^2$ 与 (1.4) 中相同。如果 $|z+2| \leqslant N^{-\mathfrak{g}}$，则在将 (4.24) 中的第一项乘以 -1 后，可得到类似的结论。

靠近右谱边缘时，即对于 $|z-2| \lesssim N^{-2/3+\mathrm{o}(1)}$ 且 $\mathrm{Im}\ z \gtrsim N^{-2/3+}{}_{\mathrm{o}(1)}$，有

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{sc}}(z) &= -1 + \mathrm{O}(\sqrt{|z-2|}), \quad 1 - m_{\mathrm{sc}}^2(z) = 2\sqrt{z-2} + \mathrm{O}(|z-2|), \\ m_d(z) &= -\frac{d-1}{d-2} + \mathrm{O}(\sqrt{|z-2|}), \end{aligned} \tag{4.25}$$

而误差项的实际量级为

$$\mathrm{Im}[m_N(z)] \lesssim \frac{N^{\mathrm{o}(1)}}{N^{1/3}}, \quad \Phi(z), \Psi(z) \lesssim \frac{N^{\mathrm{o}(1)}}{N^{2/3}}. \tag{4.26}$$

特征值在 [15] 中的最优边缘刚性，可通过建立类似于（4.22）和（4.23）的高阶矩估计得出，这些估计实质上导出

$$|Q(z) - Y(z)| \lesssim \frac{N^{\mathrm{o}(1)}}{N^{2/3}}, \quad |m_N(z) - X(z)| \lesssim \frac{N^{\mathrm{o}(1)}}{N^{1/2}}. \tag{4.27}$$

我们指出，出于技术原因，对 $|m_N(z) - X(z)|$ 的估计较弱。尽管如此，这些估计足以导出 $Q(z) - m_{\mathrm{sc}}(z)$ 和 $m_N(z) - m_d(z)$ 的最优界，详见下文。

.....的集中性 $Q(z)$ 和 $m_N(z)$ 可由（4.27）推得。我们还回顾一下由（3.7）（取 $\Delta = Q(z)$）得到的$Y(z) = Y_\ell(Q(z))$ 的展开:

$$\begin{aligned} Q - Y &= (Q - m_{\mathrm{sc}}(z)) - (Y - m_{\mathrm{sc}}(z)) = (1 - m_{\mathrm{sc}}^{2(\ell+1)}(z))(Q - m_{\mathrm{sc}}(z)) \\ &\quad - m_{\mathrm{sc}}^{2\ell+2}(z) m_d(z)\left(\frac{1 - m_{\mathrm{sc}}^{2\ell+2}(z)}{d-1} + \frac{d-2}{d-1}\frac{1 - m_{\mathrm{sc}}^{2\ell+2}(z)}{1 - m_{\mathrm{sc}}^2(z)}\right)(Q - m_{\mathrm{sc}}(z))^2 + \mathrm{O}\big(\ell^5 |Q - m_{\mathrm{sc}}(z)|^3\big) \\ &= (1 - m_{\mathrm{sc}}^2(z))(\ell+1)(Q - m_{\mathrm{sc}}(z)) + (\ell+1)(Q - m_{\mathrm{sc}}(z))^2 \\ &\quad + \mathrm{O}\Big(\ell\big(|z-2||Q - m_{\mathrm{sc}}(z)| + \sqrt{|z-2|}|Q - m_{\mathrm{sc}}(z)|^2\big) + \ell^5 |Q - m_{\mathrm{sc}}(z)|^3\Big) \\ &= (\ell+1)\Big(2\sqrt{z-2}\,(Q - m_{\mathrm{sc}}(z)) + (Q - m_{\mathrm{sc}}(z))^2\Big) \\ &\quad + \mathrm{O}\Big(\ell\big(|z-2||Q - m_{\mathrm{sc}}(z)| + \sqrt{|z-2|}|Q - m_{\mathrm{sc}}(z)|^2\big) + \ell^5 |Q - m_{\mathrm{sc}}(z)|^3\Big), \end{aligned} \tag{4.28}$$

其中我们利用（4.25）分别将 $m_{\mathrm{sc}}(z)$ $m_d(z)$ $1 - m_{\mathrm{sc}}^2(z)$ 替换为 -1、$-(d-1)/(d-2)2\sqrt{z-2}$。鉴于 $Q - Y$如（4.27）中那样很小，我们可以将（4.28）视为关于 $Q - m_{\mathrm{sc}}(z)$ 的二次方程，误差很小。这类二次方程在随机矩阵理论中无处不在，例如 Wigner矩阵的情形。利用（4.27），标准论证表明，对于 $|z-2| \lesssim N^{-2/3+\mathrm{o}(1)}$，以高概率有

$$|Q - m_{\mathrm{sc}}(z)| \lesssim \frac{N^{\mathrm{o}(1)}}{N^{1/3}}, \tag{4.29}$$

利用（4.29）可简化（4.28）中的误差，得到

$$Q - Y = (\ell+1)\Big(2\sqrt{z-2}\,(Q - m_{\mathrm{sc}}(z)) + (Q - m_{\mathrm{sc}}(z))^2\Big) + \mathrm{O}(N^{-1+\mathrm{o}(1)}), \tag{4.30}$$

利用 $X(z) = X_\ell(Q(z))$ 在 (3.8) 中的展开（其中 $\Delta = Q(z)$），我们有

$$\begin{aligned} X - m_d(z) &= \frac{d}{d-1} m_d^2(z)\, m_{\mathrm{sc}}^{2\ell}(z)\,(Q - m_{\mathrm{sc}}(z)) + \mathrm{O}\big(|Q - m_{\mathrm{sc}}(z)|^2\big) \\ &= \mathcal{A}(Q - m_{\mathrm{sc}}(z)) + \mathrm{O}\big(\ell\sqrt{|z-2|}\,|Q - m_{\mathrm{sc}}(z)| + |Q - m_{\mathrm{sc}}(z)|^2\big), \end{aligned}$$

其中我们再次利用 (4.25) 将 $m_{\mathrm{sc}}(z)$ $m_d(z)$ 替换为 $-1, -(d-1)/(d-2)$。由此，经重新整理可得

$$\begin{aligned} m_N(z) - m_d(z) &= m_N(z) - X + X - m_d(z) \\ &= \mathcal{A}(Q - m_{\mathrm{sc}}(z)) + \mathrm{O}\big(|m_N(z) - X| + \ell\sqrt{|z-2|}|Q - m_{\mathrm{sc}}(z)| + |Q - m_{\mathrm{sc}}(z)|^2\big). \end{aligned} \tag{4.31}$$

结合式（4. 27）、（4.29）和（4.31），我们得出，对于 $|z-2| \lesssim N^{-2/3+\mathrm{o}(1)}$，以高概率成立

$$m_N(z) - m_d(z) = \mathcal{A}(Q - m_{\mathrm{sc}}(z)) + \mathrm{O}\left(\frac{N^{\mathrm{o}(1)}}{N^{1/2}}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{N^{\mathrm{o}(1)}}{N^{1/3}}\right). \tag{4.32}$$

我们指出，（4.24）与环方程（4.12）（其中 $t=0$ 和 $p=1$）略有不同：

$$\mathbb{E}\left[(m_N(z) - m_d(z))^2 + 2\mathcal{A}\sqrt{z-2}\,(m_N(z) - m_d(z)) + \frac{\partial_z m_N(z)}{N}\right] = \mathrm{O}\left(N^{-2/3-10\mathfrak{c}}\right). \tag{4.33}$$

将（4.32）代入（4.30），我们得出，对于 $|z-2| \lesssim N^{-2/3+\mathrm{o}(1)}$，以高概率成立

$$\frac{\mathcal{A}^2(Q-Y)}{\ell+1} = (m_N(z) - m_d(z))^2 + 2\mathcal{A}\sqrt{z-2}\,(m_N(z) - m_d(z)) + \mathrm{O}\left(\frac{N^{\mathrm{o}(1)}}{N^{5/6}}\right). \tag{4.34}$$

将（4.34）代入（4.24）即可得到断言（4.33），而误差项来自

$$\frac{N^{\mathfrak{o}}\mathbb{E}[\Psi(z)]}{(d-1)^{\ell/2}} \lesssim \frac{N^{\mathfrak{o}+\mathrm{o}(1)}}{(d-1)^{\ell/2}N^{2/3}} \lesssim N^{-2/3-10\mathfrak{c}},$$

这里我们用到了式（4.26）。

5 局部重采样

本节回顾局部重采样及其性质。这为我们提供了一个框架，使我们能够讨论如何从随机正则图分布中进行重采样，以改进对格林函数的估计。

对于任意图 $\mathcal{G}$，我们将无向边的集合记为 $E(\mathcal{G})$，将有向边的集合记为$\vec{E}(\mathcal{G}) := \{(u,v),\ (v,u) : \{u,v\} \in E(\mathcal{G})\}$。对于子集 $\vec{S} \subset \vec{E}(\mathcal{G})$，我们用 S 表示相应的无向边集合。对于边的子集 $S \subset E(\mathcal{G})$，我们用 $[S] \subset [\![N]\!]$ 表示与 S中的任意边相接的顶点集合。此外，对于顶点的子集 $\mathbb{V} \subset [\![N]\!]$，我们定义 $E(\mathcal{G})|_{\mathbb{V}}$ 为由 $\mathbb{V}$诱导的 $\mathcal{G}$ 子图。

定义 5.1。一个（简单）切换由两条有向边 $\vec{S} = \{(v_1,v_2)、(v_3,v_4)\} \subset \vec{E}$编码。我们假设这两条边不相交，即 $|\{v_1,v_2,v_3,v_4\}| = 4$。随后，该切换将边 $\{v_1,v_2\}$、$\{v_3,v_4\}$ 替换为边 $\{v_1,v_4\}$、$\{v_2,v_3\}$。我们将切换后的图 $\vec{S}$记为$T_{\vec{S}}(\mathcal{G})$，并将新边 $\vec{S}' = \{(v_1,v_4)、(v_2,v_3)\}$ 记为 $T(\vec{S}) = \vec{S}'$。

局部重采样涉及一个固定的中心顶点，我们现在假设它是顶点 o，以及一个半径ℓ。给定一个 d-正则图 $\mathcal{G}$，我们用 $\mathcal{T} := \mathcal{B}_\ell(o,\mathcal{G})$表示 o 的半径为ℓ 的邻域（它不一定是树），并用 $\mathbb{T}$ 表示其顶点集。 $\partial_E\mathcal{T}$ 的边界边集由 $\mathcal{G}$ 中一端顶点属于 $\mathbb{T}$、另一端顶点属于 $[\![N]\!] \setminus \mathbb{T}$的边组成。我们将 $\partial_E\mathcal{T}$的边编号为 $\partial_E\mathcal{T} = \{e_1, e_2, \ldots, e_\mu\}$，其中 $e_\alpha = \{l_\alpha, a_\alpha\}$ 满足 $l_\alpha \in \mathbb{T}$和 $a_\alpha \in [\![N]\!] \setminus \mathbb{T}$。我们通过定义 $\vec{e}_\alpha = (l_\alpha, a_\alpha)$来确定边 e_α的方向。注意， μ 以及边 e_1、 e_2、……、 e_μ 取决于 $\mathcal{G}$。边 e_α 互不相同，但顶点 a_α 不一定互不相同，顶点 l_α也不一定互不相同。如果切换可行（见下文），我们的局部重采样就会将 $\mathcal{T}$的边界边集与 $\mathcal{G}^{(\mathbb{T})}$ 中随机选取的边进行切换；否则则保持原样。进行局部重采样时（见图 3），我们选取(b_1,c_1)……、(b_μ,c_μ)

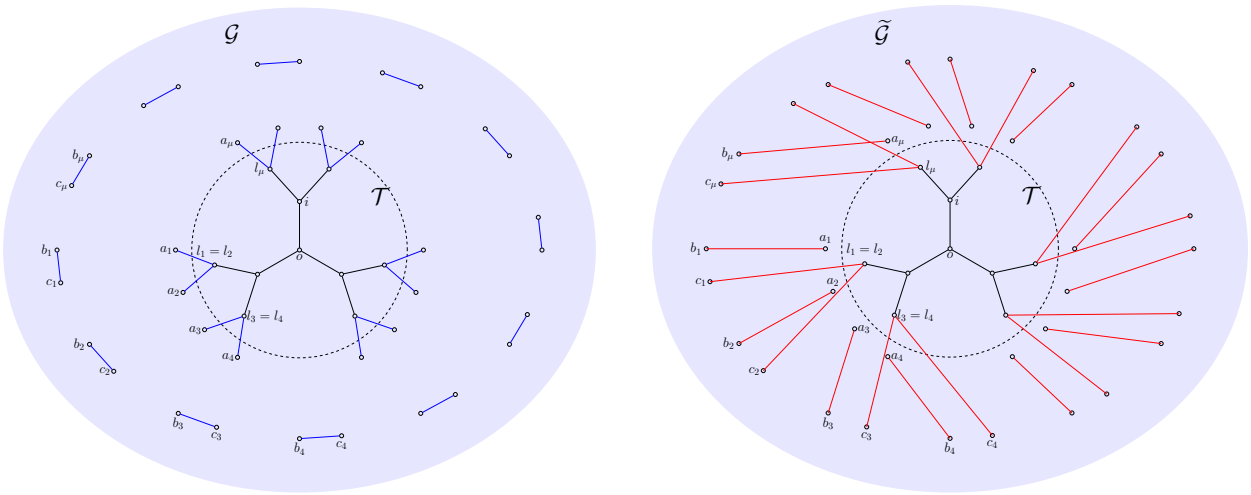

图 3：在图上进行局部重采样的示例如下。我们将位于顶点 o 的半径为 ℓ 邻域边界上的蓝色边，替换为从图中随机选取的边。这些边共同构成重采样数据，记为 $\mathbf{S}$。此操作会生成新的红色边，并形成新的边界。

作为从图 $\mathcal{G}^{(\mathbb{T})}$中独立、均匀选取的有向边，即 $\mathcal{G}$ 中不与 $\mathbb{T}$关联的有向边，并定义

$$\vec{S}_\alpha = \{\vec{e}_\alpha, (b_\alpha, c_\alpha)\}, \qquad \mathbf{S} = (\vec{S}_1, \vec{S}_2, \ldots, \vec{S}_\mu). \tag{5.1}$$

集合 $\mathbf{S}$ 将称为 $\mathcal{G}$ 的重采样数据 。我们指出，数据中允许出现重复项 $(b_1,\ c_1)$，$(b_2,\ c_2)\ \cdots,\ (b_\mu,\ c_\mu)$ 。我们定义一个对切换的定义至关重要的指示函数。

定义 5.2。 对于 $\alpha \in [\![\mu]\!]$，我们定义指示函数 $I_\alpha \equiv I_\alpha(\mathcal{G},\mathbf{S}) = 1$ *i* *f*

1. 添加边 $\{a_\alpha, b_\alpha\}$ 后，子图 $\mathcal{B}_{\mathfrak{R}/4}(\{a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha\}, \mathcal{G}^{(\mathbb{T})})$ 是一棵树；
2. 且 $\mathrm{dist}^{\mathcal{G}^{(\mathbb{T})}}(\{a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha\}, \{a_\beta, b_\beta, c_\beta\}) > \mathfrak{R}/4$ 对所有 $\beta \in [\![\mu]\!] \setminus \{\alpha\}$。

指示函数 I_α 施加两个条件。第一个是“树”条件，它确保a_α 与 $\{b_\alpha, c_\alpha\}$ 彼此相距较远，且它们的邻域都是树。第二个施加“隔离”条件，确保仅当切换对远离其他切换对时，我们才执行简单切换。这样，我们无需追踪不同简单切换之间的相互作用。

我们定义可容许函数集

$$\mathsf{W}_{\mathbf{S}} := \{\alpha \in [\![\mu]\!] : I_\alpha(\mathcal{G}, \mathbf{S})\}. \tag{5.2}$$

我们称指标 $\alpha \in [\![\mu]\!]$ 是可切换的，如果 $\alpha \in \mathsf{W}_{\mathbf{S}}$。我们将集合记为 $\mathbb{W}_{\mathbf{S}} = \{b_\alpha :\ \alpha \in \mathsf{W}_{\mathbf{S}}\}$。设$\nu := |\mathsf{W}_{\mathbf{S}}|$ 为可容许切换的数目，且 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ldots,\ \alpha_\nu$ 为 $\mathsf{W}_{\mathbf{S}}$ 的任意一个枚举。然后我们按如下方式定义切换后的图

$$T_{\mathbf{S}}(\mathcal{G}) := \left(T_{\vec{S}_{\alpha_1}} \circ \cdots \circ T_{\vec{S}_{\alpha_\nu}}\right)(\mathcal{G}), \tag{5.3}$$

以及重采样数据

$$T(\mathbf{S}) := (T_1(\vec{S}_1), \ldots, T_\mu(\vec{S}_\mu)), \quad T_\alpha(\vec{S}_\alpha) := \begin{cases} T(\vec{S}_\alpha) & (\alpha \in \mathsf{W}_{\mathbf{S}}), \\ \vec{S}_\alpha & (\alpha \notin \mathsf{W}_{\mathbf{S}}). \end{cases} \tag{5.4}$$

为使结构更加清晰，我们引入一个扩展的概率空间。与上述定义等价，集合 $\vec{S}_\alpha$ 如（5.1）中所定义，在

$$\mathsf{S}_\alpha(\mathcal{G}) = \{\vec{S} \subset \vec{E} : \vec{S} = \{\vec{e}_\alpha, \vec{e}\}, \vec{e} \text{ is not incident to } \mathcal{T}\},$$

也就是说， $\vec{E}$中包含 $\vec{e}_\alpha$ 以及 $\mathcal{G}^{(\mathbb{T})}$中另一条有向边的有向边配对集合。因此， $\mathbf{S} = (\vec{S}_1, \vec{S}_2, \dots, \vec{S}_\mu)$ 在集合 $\mathsf{S}(\mathcal{G}) = \mathsf{S}_1(\mathcal{G}) \times \cdots \times \mathsf{S}_\mu(\mathcal{G})$ 上服从均匀分布。

我们引入以下记号，用于表示关于$\mathbf{S} \in \mathsf{S}(\mathcal{G})$随机性的概率与期望。

定义 5.3。 给定任意 d-正则图 $\mathcal{G}$，记 $\mathbb{P}_{\mathbf{S}}(\cdot)$ 为$\mathsf{S}(\mathcal{G})$上的均匀概率测度；并记 $\mathbb{E}_{\mathbf{S}}[\cdot]$ 为按照 $\mathbb{P}_{\mathbf{S}}$选择$\mathbf{S}$ 时的期望。

以下断言出自 [17, 引理 7。3] 它指出，该切换在随机正则图分布下保持不变。

引理 5.4 ([17,引理 7。3])。 固定 $d \geqslant 3$。回顾 $T_{\mathbf{S}}$ 中定义的算子(5.3)。设 $\mathcal{G}$ 为一个随机d-正则图，且$\mathbf{S}$ 在 $\mathsf{S}(\mathcal{G})$上服从均匀分布，则图配对 $(\mathcal{G}, T_{\mathbf{S}}(\mathcal{G}))$ 构成一个可交换对：

$$(\mathcal{G}, T_{\mathbf{S}}(\mathcal{G})) \overset{law}{=} (T_{\mathbf{S}}(\mathcal{G}), \mathcal{G}).$$

5.1 重采样图的格林函数

固定一条边 $\{i, o\} \subset \mathcal{G}$，回顾**重采样数据** $\widetilde{\ } = \{(l_\alpha, a_\alpha), (b_\alpha, c_\alpha)\}_{\alpha \in [\![\mu]\!]}$ 在 o 周围，并记第 5 节中的 $\widetilde{\ }$为 $\mathcal{G} = T_{\mathbf{S}}\mathcal{G}$。在本文余下部分，我们用 H 表示 $\mathcal{G}$的归一化邻接矩阵。于是

$$\widetilde{H} - H = -\sum_{\alpha \in [\![\mu]\!]} \xi_\alpha, \quad \xi_\alpha := \frac{1}{\sqrt{d-1}} \left(\Delta_{l_\alpha a_\alpha} + \Delta_{b_\alpha c_\alpha} - \Delta_{l_\alpha c_\alpha} - \Delta_{a_\alpha b_\alpha}\right). \tag{5.5}$$

其格林函数和经验特征值分布的斯蒂尔切斯变换分别记为：

$$\widetilde{G}(z) = (\widetilde{H} - z)^{-1}, \quad \widetilde{m}_N(z) = \frac{1}{N} \operatorname{Tr} \widetilde{G}(z). \tag{5.6}$$

$\widetilde{\ }$本节余下部分将汇总关于 $G(z$的格林函数的一些基本估计。其证明可通过利用预解式恒等式公式（2.1）分析格林函数得到。

引理*5.5.* 设 $z \in \mathbb{C}^+$ 满足 $|z| \leqslant 1/\mathfrak{g}$，并令 $\eta := Im\ z \geqslant N^{-1+\mathfrak{g}}$。固定一个 d-正则图 $\mathcal{G} \in \Omega$（回顾定理*3.7*），并取 $\mathcal{G}$中的顶点 $\{i, o\}$，令 $\mathcal{T} = \mathcal{B}_\ell(o, \mathcal{G})$的顶点集为 $\mathbb{T}$。我们将围绕 o 的重采样$\widetilde{\ }$数据记为 $S = \{(l_\alpha, a_\alpha), (b_\alpha, c_\alpha)\}_{\alpha \in [\![\mu]\!]}$（回顾第 *5* 节中的定义），并且 $\mathcal{G} = T_{\mathbf{S}}\mathcal{G}$。此外，我们还假设$\widetilde{\ }$满足 $\mathcal{G} \in \Omega$。

那么，对于任意形如 $\mathbb{X} \in \{\emptyset, \mathbb{T}\}$ 的 $\mathbb{X}$，以及任意 x、$y \notin \mathbb{X}$，有

$$\left|\widetilde{G}^{(\mathbb{X})}_{xy}(z) - P^{(\mathbb{X})}_{xy}\left(\mathcal{B}_{\mathfrak{R}/100}(\{x, y\} \cup \mathbb{X}, \widetilde{\mathcal{G}}), z, m_{\mathrm{sc}}(z)\right)\right| \lesssim N^{-\mathfrak{b}}. \tag{5.7}$$

此外，以下结论成立

$$|\widetilde{m}_N(z) - m_N(z)| \lesssim \frac{(d-1)^\ell N^{\mathfrak{o}} \operatorname{Im}[m_N(z)]}{N\eta}, \tag{5.8}$$

证明。该 $\widetilde{\ }$第一个陈述（5.7）由我们的假设得出，即 $\mathcal{G} \in \Omega$ 和（3.26）（其中 $\mathbb{X} = \mathbb{T}$） .

对于第二个陈述，我们回顾一下（5.5）中的记号

$$
\begin{aligned}
&|\widetilde{m}_N(z)-m_N(z)| = \frac{1}{N}\operatorname{Tr}(\widetilde{H}-z)^{-1} - \frac{1}{N}\operatorname{Tr}(H-z)^{-1} = \frac{1}{N}\operatorname{Tr}(\widetilde{H}-z)^{-1}(H-\widetilde{H})(H-z)^{-1} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{\alpha\in[\![\mu]\!]}\operatorname{Tr}(\widetilde{H}-z)^{-1}\xi_\alpha(H-z)^{-1} \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{d-1}N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha\in[\![\mu]\!]}(|\widetilde{G}_{il_\alpha}|+|\widetilde{G}_{ia_\alpha}|+|\widetilde{G}_{ib_\alpha}|+|\widetilde{G}_{ic_\alpha}|)(|G_{a_\alpha i}|+|G_{b_\alpha i}|+|G_{c_\alpha i}|+|G_{l_\alpha i}|) \\
&\lesssim \frac{1}{\sqrt{d-1}N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha\in[\![\mu]\!]}(|\widetilde{G}_{il_\alpha}|^2+|\widetilde{G}_{ia_\alpha}|^2+|\widetilde{G}_{ib_\alpha}|^2+|\widetilde{G}_{ic_\alpha}|^2+|G_{a_\alpha i}|^2+|G_{b_\alpha i}|^2+|G_{c_\alpha i}|^2+|G_{l_\alpha i}|^2) \\
&\lesssim \frac{(d-1)^\ell N^\mathfrak{o}\operatorname{Im}[\widetilde{m}_N(z)]}{N\eta} + \frac{(d-1)^\ell N^\mathfrak{o}\operatorname{Im}[m_N(z)]}{N\eta}
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

其中，前两个陈述来自预解式恒等式（2.1）；第三和第四个陈述由（5.5）得出；第五个陈述由柯西-施瓦茨不等式得出；第六个陈述由 Ward 恒等式（2.6）、（3.22）以及 $\mu=\mathrm{O}((d-1)^\ell)$ 得出。由于 $N\eta\geqslant N^\mathfrak{y}\gg(d-1)^\ell N^\mathfrak{o}$，通过重排（5.9）即可得到断言（5.8）。

□

6 利用可交换对证明集中性

本节将介绍利用可交换对证明集中性的基本思想，并讨论如何将这种方法应用于随机 d-正则图。

6.1 独立伯努利随机变量之和

设 X_1，X_2，……，X_n 为独立的伯努利(p_i)随机变量，并定义

$$W=\sum_{i=1}^{n}X_i,\qquad \mu=\mathbb{E}W=\sum_{i=1}^{n}p_i.$$

本节将说明如何利用可交换对证明 W 具有集中性。

取与所有变量独立的 $I\sim\mathrm{Unif}\{1,\dots,n\}$，并令 $X_I,X_I'\sim\mathrm{Bernoulli}(p_I)$ 为相互独立的副本。令

$$W'=W-X_I+X_I'.$$

则 (W,W') 是一个可交换对，并满足 $|W'-W|\leq 1$。此外，

$$\mathbb{E}[W'-W\mid X_1,\dots,X_n]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(p_i-X_i)=-\frac{1}{n}(W-\mu)=:-f(W). \tag{6.1}$$

对于任意光滑的 g，

$$\mathbb{E}[f(W)g(W)]=\mathbb{E}[(W-W')g(W)]=\frac{1}{2}\mathbb{E}\big[(W-W')(g(W)-g(W'))\big].$$

取 $g(w)=f^{2p-1}(w)$，其中 $f(w)=(w-\mu)/n$ 来自式（6.1）。那么

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[f^{2p}(W)] &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\big[(W-W')(f^{2p-1}(W)-f^{2p-1}(W'))\big] \\
&\leqslant \frac{2p-1}{4}\mathbb{E}\big[(W-W')(f(W)-f(W')(f^{2p-2}(W)+f^{2p-2}(W'))\big] \\
&= \frac{2p-1}{2n}\mathbb{E}\big[(W-W')^2f^{2p-2}(W)\big] = \frac{2p-1}{2n}\mathbb{E}[\mathbb{E}\big[(W-W')^2|W\big]f^{2p-2}(W)\big].
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

于是，我们可以将内部期望界定为

$$\mathbb{E}[(W-W')^2 \mid W] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[(X_i - X_i')^2 \mid W] \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[(X_i + X_i') \mid W] = \frac{W+\mu}{n}. \tag{6.3}$$

将（6.3）代入（6.2，即可得到以下矩界

$$\mathbb{E}[f^{2p}(W)] \leqslant \frac{2p-1}{2n^2}\mathbb{E}[(W+\mu)f^{2p-2}(W)] = \frac{2p-1}{2n}\mathbb{E}[f^{2p-1}(W)] + \frac{(2p-1)\mu}{n^2}\mathbb{E}[f^{2p-2}(W)]. \tag{6.4}$$

利用 H¨older 不等式，我们可以用偶数阶矩给奇数阶矩一个上界。然后递归地，可以得到 $2p$ 阶矩的界：

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{\sum_i (X_i - p_i)}{n}\right)^{2p}\right] = \mathbb{E}[f^{2p}(W)] \leqslant \frac{C_p \mu^p}{n^{2p}}$$

6.2 随机 d-正则图

在我们的设定中，我们独立于其他所有因素，均匀随机地选取一条有向边（i，o），~并令 $\mathcal{G}$ 表示通过对顶点 o 的邻域进行局部重采样得到的图。于是（$\mathcal{G}$，$\mathcal{G}$）构成一个可交换对。在下一节中，我们将证明

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{G}_{oo}^{(i)} \,\middle|\, \mathcal{G}\right] = \mathbb{E}_{\mathbf{S}}\left[\widetilde{G}_{oo}^{(i)}\right] = Y + \mathcal{E}_{(i,o)}(\mathcal{G}),$$

这里回顾一下 Y 在（4.20）中的定义，并且 $\mathcal{E}_{(i,o)}(\mathcal{G})$ 很小（此处 $\mathbb{E}_{\mathbf{S}}$ 表示对重采样随机性取期望）。这意味着

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{Q} - Q \,\middle|\, \mathcal{G}\right] = \frac{1}{Nd}\sum_{i\sim o}\mathbb{E}_{\mathbf{S}}\left[\widetilde{G}_{oo}^{(i)}\right] - Q = Y - Q + \mathcal{E}(\mathcal{G}), \qquad \mathcal{E}(\mathcal{G}) := \frac{1}{Nd}\sum_{i\sim o}\mathcal{E}_{(i,o)}(\mathcal{G}).$$

类似于利用可交换对证明伯努利随机~~变量之和集中性的论证，可以得到 $Q-Q$的高阶矩界，从而得到 $Q-Q$的集中性。尽管单个误差 $\mathcal{E}_{(i,o)}(\mathcal{G})$ 很小——由（3.21）和定理 3.9 可得到 $\mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}})$ 阶的界——但这不足以得到最优的特征值集中性。例如，在定理 4.5中，靠近谱边缘 $|z \pm 2| = N^{-2/3+\mathrm{o}(1)}$处，最优误差为 $N^{-2/3+\mathrm{o}(1)}$。为达到这一最优速率，我们执行额外的局部重采样步骤，以更精确地捕捉并控制误差项的涨落 $\mathcal{E}_{(i,o)}(\mathcal{G})$。第 8节和第 11节将对此作出说明。

7 Q（z）的期望。

在本节中，我们首先计算 $Q(z) - Y(z)$ 的期望。

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)(Q-Y)\right] = \frac{1}{Nd}\sum_{o,i}\mathbb{E}\left[A_{oi}\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)(G_{oo}^{(i)} - Y)\right]. \tag{7.1}$$

对于 $\mathcal{G}$ ∈来自定理 3.1的 Ω，不具有半径 $\mathfrak{R}$ 树邻域的顶点数至多为 $N^{\mathfrak{c}}$。我们可以将（7.1）右侧的求和限制为遍历顶点 o，其具有半径为 $\mathfrak{R}$ 的树邻域：

$$\frac{1}{Nd}\sum_{o,i}\mathbb{E}\left[A_{oi}\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)(G_{oo}^{(i)} - Y)\right] = \frac{1}{Nd}\sum_{o,i}\mathbb{E}\left[I(\{o,i\},\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)(G_{oo}^{(i)} - Y)\right] + \mathrm{O}\left(\frac{1}{N^{1-\mathfrak{c}}}\right), \tag{7.2}$$

其中

$$I(\{o,i\},\mathcal{G}) = A_{oi}\mathbf{1}(\mathcal{B}_{\mathfrak{R}}(o,\mathcal{G}) \text{ is a tree}). \tag{7.3}$$

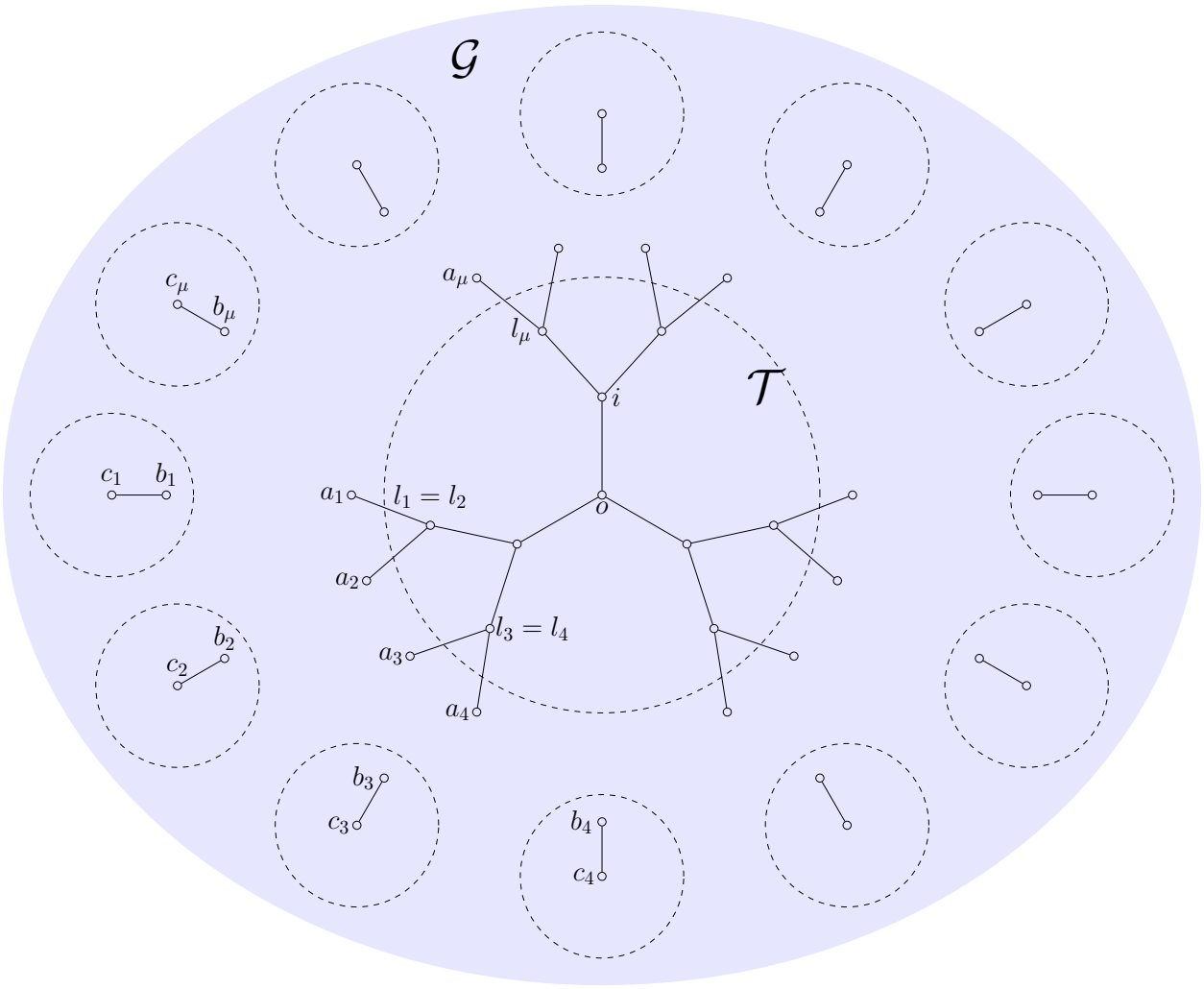

图 4：我们将 $\mathcal{F}$ （对应于实线边）视为 $\mathcal{G}$ 的一个嵌入子图，其中包含所有切换边。指示函数 $I(\mathcal{F},\ \mathcal{G})$ 表示 $o,\ c_1,\ c_2,\ \ldots\ldots,\ c_\mu$ 具有树邻域且彼此充分分离。

为计算 (7.1) 的右端，在 $I(\{o,i\},\mathcal{G}) = 1$ 上取条件，我们在 $(i,o) \in \mathcal{F}$附近使用重采样数据 $\mathsf{S} = \{(l_\alpha, a_\alpha), (b_\alpha, c_\alpha)\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}$ 进行局部重采样，其中 $\mu := d(d-1)^\ell$ 是~边界边的数目，这些边界边来自 d-正则树在深度 $\ell+1$ 处的截断。我们将新图记为 $\mathcal{G} = T_{\mathsf{S}}(\mathcal{G})$，并以~为其对应的格林函数 G。

我们引入 $\mathcal{G}$ 的以下子图

$$\mathcal{F} = B_\ell(o,\mathcal{G}) \cup \{(l_\alpha, a_\alpha), (b_\alpha, c_\alpha)\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]} = B_{\ell+1}(o,\mathcal{G}) \cup \{(b_\alpha, c_\alpha)\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]} = (\mathbf{i}, E), \tag{7.4}$$

其中包含所有切换边，见图 4。为确保切换边彼此充分分离，且位于较大的树邻域中，我们使用以下指示函数。

$$I(\mathcal{F},\mathcal{G}) := \prod_{\{x,y\}\in E} A_{xy} \prod_{c\in\{o,c_1,\cdots,c_\mu\}} \prod_{x\in\mathcal{B}_\ell(c;\mathcal{G})} \mathbf{1}\big(\mathcal{B}_{\mathfrak{R}}(x;\mathcal{G}) \text{ is a tree}\big) \prod_{c\neq c'\in\{o,c_1,\cdots,c_\mu\}} \mathbf{1}\big(\operatorname{dist}_{\mathcal{G}}(c,c') \geq 3\mathfrak{R}\big). \tag{7.5}$$

条件于 $I(\mathcal{F},\ \mathcal{G}) = 1$。忽略顶点标签后，图 $\mathcal{F}$ 就是一个由截断至深度 $\ell+1$ 的 d 正则树以及 μ 条不相交边构成的森林。因此，对边 $(i,\ o)$ 的平均

（7.1），再加上重采样数据中的随机性 $\{(b_\alpha,\ c_\alpha)\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}$，可以看作是对 $\mathcal{F}$ 嵌入到 $\mathcal{G}$中的平均。

为使其形式化，令 $\mathcal{F}=(V,\ E)$ 表示如下模板：其顶点 V是形式符号，由截断的 d-正则树（深度为 $\ell+1$ ）以及 μ 条不相交边组成。只有在选定嵌入后，这些顶点才会成为 $\mathcal{G}$的具体顶点。嵌入由一个赋值$\mathbf{i}\in[\![N]\!]^{|V|}$指定；不同的$\mathbf{i}$ 选择会产生不同的嵌入。一旦嵌入$\mathbf{i}$ 固定，我们记为 $\mathcal{F}=(\mathbf{i}\ E)$，于是（$I$（$\mathcal{F}$，$\mathcal{G}$）中的指示函数（7.5）定义良好。

断言7.1。 *We* ~在顶点 o周围进行局部重采样，并将重采样图记为 $\mathcal{G}$，则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)(Q-Y)\right]&=\frac{1}{Nd}\sum_{o,i}\mathbb{E}\left[A_{oi}\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)(G_{oo}^{(i)}-Y)\right]\\&=\frac{1}{Z_{\mathcal{F}}}\sum_{\mathbf{i}}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F},\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G},\widetilde{\mathcal{G}}\in\Omega)(\widetilde{G}_{oo}^{(i)}-Y)\right]+\mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}/2}\mathbb{E}[\Psi]),\end{aligned}\tag{7.6}$$

其中归一化常数 $Z_{\mathcal{F}}$ 不是随机的，并且对于任意 $\mathcal{G}\in\Omega$，它满足

$$\sum_{\mathbf{i}}I(\mathcal{F},\mathcal{G})=Z_{\mathcal{F}}\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{N^{1-2\mathfrak{c}}}\right)\right).\tag{7.7}$$

关系式（7.7）源于以下事实： $\mathcal{G}$ 的大多数顶点具有较大的树邻域，因此 $\mathcal{F}$ 到 $\mathcal{G}$ 的“良好”嵌入数量会集中。

如果暂时忽略指示函数和对嵌入取平均，断言便简化为简单的对称性

$$\mathbb{E}\left[A_{oi}\,(G_{oo}^{(i)}-Y)\right]=\mathbb{E}\left[A_{oi}\,(\widetilde{G}_{oo}^{(i)}-Y)\right],$$

~这可由以下事实推出：在局部重采样下，$(\mathcal{G},\mathcal{G})$同分布。指示函数 $I(\mathcal{F},\mathcal{G})$仅将注意范围限制在“良好”的放置上，在这些位置我们对格林函数有良好的估计。定理7.1的证明从略。

在下面的命题中，我们说明，期望（7.6）可分解为若干同形式项的权重为O(1)的加权和，具体如下。

定义7.2。 我们称 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{R}$ 中元素的一个 $\mathcal{O}(1)$-加权和，若存在有限多个项R_1、 $\cdots$、 $R_m\in\mathcal{R}$ （其中 m 可能依赖于 N）以及系数 $\mathfrak{c}_1$、 $\cdots$、 $\mathfrak{c}_m$，使得

$$\mathcal{U}=\sum_{j=1}^{m}\mathfrak{c}_j\,R_j,\qquad and\qquad \sum_{j=1}^{m}|\mathfrak{c}_j|=\mathcal{O}(1).$$

命题7.3。 回顾 $\mathcal{F}=(\mathbf{i}\ E)$ 中的定义(7.4)，并将其视为嵌入在 $\mathcal{G}$ 中，顶点由$\mathbf{i}$给出。于是

$$\frac{1}{Z_{\mathcal{F}}}\sum_{\mathbf{i}}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F},\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G},\widetilde{\mathcal{G}}\in\Omega)(\widetilde{G}_{oo}^{(i)}-Y)\right]=I_1+I_2+\mathcal{E},\tag{7.8}$$

其中 $|\mathcal{E}|=\mathrm{O}((d-1)^{2\ell}\mathbb{E}[\Psi])$，并且

1. I_1 是以下形式各项的 $\mathrm{O}(1)$ 加权和

$$\frac{1}{(d-1)^{\mathfrak{q}\ell/2}Z_{\mathcal{F}}}\sum_{\mathbf{i}}\mathbb{E}[\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)I(\mathcal{F},\mathcal{G})(G_{c_\alpha c_\alpha}^{(b_\alpha)}-Y)(G_{c_\alpha c_\alpha}^{(b_\alpha)}-Q)],\tag{7.9}$$

其中 $\mathfrak{q}\geqslant 0$;

2. I_2 是以下形式各项的 $\mathrm{O}(1)$ 加权和

$$\frac{(d-1)^{3r\ell}}{(d-1)^{\mathfrak{q}\ell/2}Z_{\mathcal{F}}}\sum_{\mathbf{i}}\mathbb{E}[\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)I(\mathcal{F},\mathcal{G})(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha}-Y)R_{\mathbf{i}}]. \tag{7.10}$$

其中，$\mathfrak{q}\geqslant 0$ 和 $r\geqslant 2$，而函数 $R_{\mathbf{i}}$ 包含 r 个如下形式的因子

$$\{(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha}-Q)\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]},\quad \{G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta},G_{b_\alpha b_\beta}\}_{\alpha\neq\beta\in[\![\mu]\!]},\quad (Q-m_{\mathrm{sc}}(z)). \tag{7.11}$$

7.1 利用舒尔补公式进行切换

为证明定理 7.3，我们需要将 $\widetilde{G}^{(i)}_{oo}-Y$ （它依赖于切换后的图 $\widetilde{}$的格林函数） $\mathcal{G}$用原图 $\mathcal{G}$的格林函数表示，见图3。具体如下。

$\widetilde{}$**引理 7.4**。假设 $\mathcal{G}$，$\mathcal{G}\in\Omega$ 和 $I(\mathcal{F},\ \mathcal{G})=1$ 来自 (7.5)，并定义指标集 $\mathsf{A}_i:=\{\alpha\in[\![\mu]\!]:\ \mathrm{dist}_{\mathcal{T}}(i,\ l_\alpha)=\ell+1\}$，见图 5。以下结论成立：$\widetilde{G}^{(i)}_{oo}-Y$可以改写为一个加权和

$$\widetilde{G}^{(i)}_{oo}-Y=\frac{m_{\mathrm{sc}}(z)^{2\ell+2}}{(d-1)^{\ell+1}}\sum_{\alpha\in\mathsf{A}_i}(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha}-Q)+\frac{m_{\mathrm{sc}}(z)^{2\ell+2}}{(d-1)^{\ell+1}}\sum_{\alpha\neq\beta\in\mathsf{A}_i}G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}+\mathcal{U}+\mathcal{E}. \tag{7.12}$$

其中 $\mathcal{U}$ 是一个由 $\mathrm{O}(1)$ 加权的、形如 $(d-1)^{3(r-1)\ell}R_r$ 的项之和，其中 $r\geqslant 2$，而 R_r 包含 r个如下形式的因子

$$(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha}-Q),\quad G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta},\quad Q-m_{\mathrm{sc}}(z),\quad \alpha\neq\beta\in[\![\mu]\!], \tag{7.13}$$

并且其中至少一个是 $G^{(b_\alpha)_{c_\alpha c_\alpha}}-Q$ 或 $G^{(b_\alpha b_\beta)_{c_\alpha c_\beta}}$；且误差 $\mathcal{E}$ 由下式给出

$$\begin{aligned}\mathcal{E}&=\frac{m_{\mathrm{sc}}^{2(\ell+1)}(z)}{(d-1)^{\ell+1}}\sum_{\alpha,\beta\in\mathsf{A}_i}(\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta}-G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta})+\mathrm{O}\left(\frac{1}{N^{\mathfrak{b}/2}}\sum_{\alpha,\beta\in[\![\mu]\!]}|\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta}-G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}|+\frac{1}{N^2}\right)\\&=\mathrm{O}\left(\sum_{\alpha,\beta\in[\![\mu]\!]}|\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta}-G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}|+\frac{1}{N^2}\right).\end{aligned} \tag{7.14}$$

注 7.5. 展开 (7.12) 将 $\widetilde{G}^{(i)}_{oo}-Y$ 分解为两项主导贡献和一个高阶余项 $\mathcal{U}$，它们共同构成由其中因子构造之项的加权和，这些因子来自 (7.13)。由定理 3.9，每个因子在 (7.13) 中以 $N^{-\mathfrak{b}}$ 为界，且以高概率成立。因此，任意乘积 R_r （由r 个此类因子组成）满足 $|R_r|\lesssim N^{-\mathfrak{b}r}$，且以高概率成立。项 $\mathcal{U}$ 汇集了一个 $\mathrm{O}(1)$加权和，其贡献形如 $(d-1)^{3(r-1)\ell}R_r$，其中 $r\geqslant 2$，从而

$$(d-1)^{3(r-1)\ell}|R_r|\lesssim(d-1)^{3(r-1)\ell}N^{-\mathfrak{b}r}.$$

因此，对 $\mathcal{U}$ 的每一项贡献都是高阶的（至少多出一个额外因子 $N^{-\mathfrak{b}}$），相较于 (7.12)中的两个主导求和。

注 7.6. 更明确地说，项 $\mathcal{U}$ 在 (7.12) 由下式给出

$$\begin{aligned}\mathcal{U}=&\frac{m_{\mathrm{sc}}^{2(\ell+1)}(z)}{(d-1)^{\ell+2}}\sum_{\alpha\in\mathsf{A}_i}L^{(i)}_{l_\alpha l_\alpha}(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha}-Q)^2+\frac{m_{\mathrm{sc}}^{2(\ell+1)}(z)}{(d-1)^{\ell+2}}\sum_{\substack{\alpha\in\mathsf{A}_i,\beta\in[\![\mu]\!]\\ \alpha\neq\beta}}(L^{(i)}_{l_\beta l_\beta}+L^{(i)}_{l_\alpha l_\beta})(G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta})^2\\&+\sum_{\alpha\neq\beta\in[\![\mu]\!]}\mathfrak{c}_1(\alpha,\beta)(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha}-Q)(G^{(b_\beta)}_{c_\beta c_\beta}-Q)+\sum_{\substack{\alpha\in[\![\mu]\!]\\ \alpha'\neq\beta'\in[\![\mu]\!]}}\mathfrak{c}_2(\alpha,\alpha',\beta')(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha}-Q)G^{(b_{\alpha'}b_{\beta'})}_{c_{\alpha'}c_{\beta'}}\\&+\sum_{\substack{\alpha\neq\beta\in[\![\mu]\!],\alpha'\neq\beta'\in[\![\mu]\!]\\ \{\alpha,\beta\}\neq\{\alpha',\beta'\}}}\mathfrak{c}_3(\alpha,\beta,\alpha',\beta')G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}G^{(b_{\alpha'}b_{\beta'})}_{c_{\alpha'}c_{\beta'}}+\sum_{\alpha\in[\![\mu]\!]}\mathfrak{c}_4(\alpha)(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha}-Q)(Q-m_{\mathrm{sc}}(z))\\&+\sum_{\alpha\neq\beta\in[\![\mu]\!]}\mathfrak{c}_5(\alpha,\beta)G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}(Q-m_{\mathrm{sc}}(z))+\text{terms of the form }\{(d-1)^{3(r-1)\ell}R_r\}_{r\geqslant 3},\end{aligned} \tag{7.15}$$

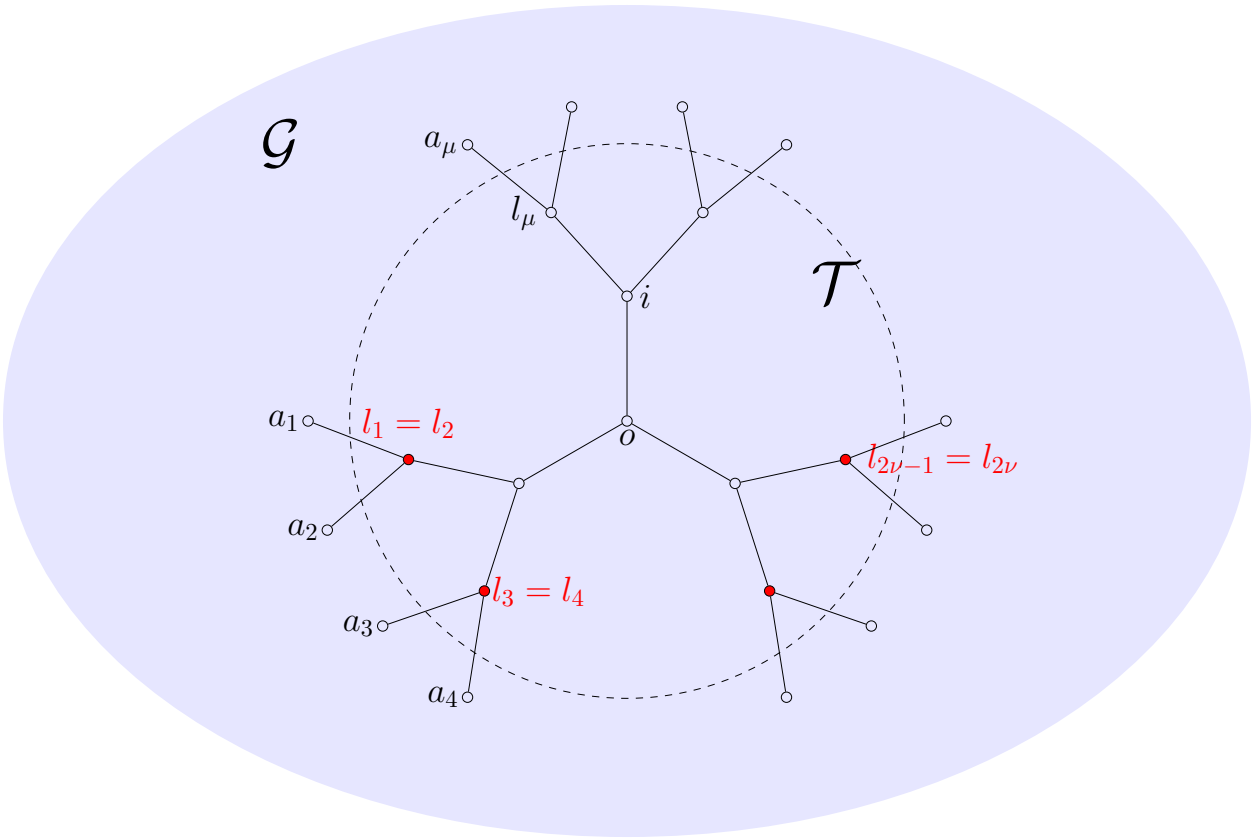

图 5：指标集 $\mathsf{A}_i := \{\alpha \in [\![\mu]\!] : \mathsf{dist}_{\mathcal{T}}(i, l_\alpha) = \ell + 1\}$ 由 $\{1, 2, \cdots, 2\nu\}$ 给出，对应于这些红色节点。

其中，系数 $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_5$ 的总和由 $\mathrm{O}(1)$ 界定，并且

$$L^{(i)} = P^{(i)}(\mathcal{T}, z, m_{\mathrm{sc}}(z)) = \frac{1}{H^{(i)}_{\mathbb{T}} - z - m_{\mathrm{sc}}(z)\mathbb{I}^{\partial}}, \quad \mathbb{I}^{\partial}_{xy} = \mathbf{1}(\mathrm{dist}_{\mathcal{T}}(x, o) = \ell)\delta_{xy}, \ \textit{for } x, y \in \mathbb{T}, \tag{7.16}$$

这是 $(d-1)$-叉树的格林函数。

在余下部分我们证明定理7.4。我们从舒尔补公式开始，这些公式将用于~证明定理 7.4。设 B 为有向边 $\{(c_\alpha, l_\alpha)\}_{\alpha \in [\![\mu]\!]}$的归一化邻接矩阵。则邻接矩阵 $\widetilde{H}^{(i)}$ 具有分块形式

$$\widetilde{H}^{(i)} = \begin{bmatrix} H^{(i)}_{\mathbb{T}} & \widetilde{B}^{\top} \\ \widetilde{B} & \widetilde{H}_{\mathbb{T}^{\mathfrak{C}}} \end{bmatrix}.$$

我们还将 $\mathcal{G}^{(\mathbb{T})}$ 和 $\widetilde{\mathcal{G}}^{(\mathbb{T})}$ 的格林函数分别记为 $G^{(\mathbb{T})}$ 和 $\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}$ 。

下面汇总一些估计，供后文使用。回顾定理 3.3，对于 $x, y \in \mathbb{T} \setminus \{i\}$，$|L^{(i)}_{xy}| \lesssim (d-1)^{-\mathrm{dist}_{\mathcal{T}}(x,y)/2}$。由此可得

$$\begin{aligned} &\sum_{x \in \mathbb{T}\setminus\{i\}} |L^{(i)}_{ox}| \lesssim \sum_{r=0}^{\ell} (d-1)^{r/2} \lesssim (d-1)^{\ell/2}, \\ &\sum_{x,y \in \mathbb{T}\setminus\{i\}} |L^{(i)}_{xy}| \lesssim \sum_{r=0}^{\ell} (d-1)^{\ell - r} \left(\sum_{r'=0}^{r} (d-1)^{r'/2} + \sum_{r'=r+1}^{2\ell - r} (d-1)^{r/2} \right) \lesssim \ell (d-1)^{\ell}, \end{aligned} \tag{7.17}$$

对于第一个求和，我们用到了 $|\{x \in \mathbb{T} : \mathrm{dist}_{\mathcal{T}}(o,x) = r\}| = \mathrm{O}((d-1)^r)$，其中 $0 \leqslant r \leqslant \ell$。对于第二个求和，我们考虑 $\{x \in \mathbb{T} : \mathrm{dist}_{\mathcal{T}}(o,x) = \ell - r\}$。注意，这样的顶点有 $\mathrm{O}((d-1)^{\ell-r})$ 个。给定这样的 x，对于任意 $y \in \mathbb{T}$, $0 \leqslant \mathrm{dist}_{\mathcal{T}}(x,y) \leqslant 2\ell - r$。根据 $\mathrm{dist}_{\mathcal{T}}(x,y) = r'$，分为两种情况。若 $0 \leqslant r' \leqslant r$，则有 $|\{y \in \mathbb{T} : \mathrm{dist}_{\mathcal{T}}(x,y) = r'\}| = \mathrm{O}((d-1)^{r'})$；若 $r+1 \leqslant r' \leqslant 2\ell - r$，则有 $|\{y \in \mathbb{T} : \mathrm{dist}_{\mathcal{T}}(x,y) = r'\}| = \mathrm{O}((d-1)^{(r+r')/2})$。对 r, r' 求和并利用 $|L^{(i)}_{xy}| \lesssim (d-1)^{-r'/2}$，即可得到 (7.17) 中的第二个结论。

定理 7.4 的证明。感谢舒尔补公式（2.4），我们得到

$$\widetilde{G}^{(i)}_{oo} = \left(\frac{1}{H^{(i)}_{\mathbb{T}} - z - \widetilde{B}^\top \widetilde{G}^{(\mathbb{T})} \widetilde{B}} \right)_{oo}.$$

由于 o 具有半径为 $\mathfrak{R}$ 的树邻域，$H^{(i)}_{\mathbb{T}}$ 是一个截断的（$d-1$）叉树的归一化邻接矩阵，并且 $L^{(i)}$ 由（7.16）给出，与（$d-1$）叉树的格林函数一致（见（3.3））,

$$m_{\mathrm{sc}}(z) = L^{(i)}_{oo} = P^{(i)}_{oo}(\mathcal{T}, z, m_{\mathrm{sc}}(z)) = \left(\frac{1}{H^{(i)}_{\mathbb{T}} - z - m_{\mathrm{sc}}(z)\mathbb{I}^{\partial}} \right)_{oo} = \left(\frac{1}{H^{(i)}_{\mathbb{T}} - z - \widetilde{B}^\top m_{\mathrm{sc}}(z) \widetilde{B}} \right)_{oo},$$

将上述两个表达式相减，我们得到

$$\widetilde{G}^{(i)}_{oo} - m_{\mathrm{sc}}(z) = \left(\frac{1}{H^{(i)}_{\mathbb{T}} - z - \widetilde{B}^\top m_{\mathrm{sc}}(z) \widetilde{B} - \mathcal{D}} - \frac{1}{H^{(i)}_{\mathbb{T}} - z - \widetilde{B}^\top m_{\mathrm{sc}}(z) \widetilde{B}} \right)_{oo},$$

其中

$$\mathcal{D} = \widetilde{B}^\top (Q - m_{\mathrm{sc}}(z)) \widetilde{B} + \mathcal{D}_1, \quad \mathcal{D}_1 = \widetilde{B}^\top (\widetilde{G}^{(\mathbb{T})} - Q) \widetilde{B}, \tag{7.18}$$

是以（$\mathbb{T} \setminus \{i\}$）$\times$（$\mathbb{T} \setminus \{i\}$）为指标的矩阵。

~根据我们的假设 $\mathcal{G}$，$\mathcal{G} \in \Omega$。感谢（3.21）和定理 3.9，我们得到

$$|(\mathcal{D}_1)_{xy}|, |\mathcal{D}_{xy}| \leqslant N^{-\mathfrak{b}}, \text{ for } x, y \in \mathbb{T} \setminus \{i\}.$$

因此，对于某个充分大的常数 $\mathfrak{p}$，我们有

$$\begin{aligned} \widetilde{G}^{(i)}_{oo} - m_{\mathrm{sc}}(z) &= \left(\frac{1}{H^{(i)}_{\mathbb{T}} - z - \widetilde{B}^\top m_{\mathrm{sc}}(z) \widetilde{B} - \mathcal{D}} - \frac{1}{H^{(i)}_{\mathbb{T}} - z - \widetilde{B}^\top m_{\mathrm{sc}}(z) \widetilde{B}} \right)_{oo} \\ &= \left(L^{(i)} \sum_{k=1}^{\mathfrak{p}} \left(\mathcal{D} L^{(i)} \right)^k \right)_{oo} + \mathrm{O}(N^{-2}). \end{aligned} \tag{7.19}$$

回顾 $Y = Y_\ell(Q, z)$（见（3.6）和（4.20））：

$$Y = \left(\frac{1}{H^{(i)}_{\mathbb{T}} - z - \widetilde{B}^\top Q \widetilde{B}} \right)_{oo}.$$

通过与（7.19）中相同的论证，我们还可得

$$Y - m_{\mathrm{sc}}(z) = \left(L^{(i)} \sum_{k=1}^{\mathfrak{p}} \left(\widetilde{B}^\top (Q - m_{\mathrm{sc}}(z)) \widetilde{B} L^{(i)} \right)^k \right)_{oo} + \mathrm{O}(N^{-2}). \tag{7.20}$$

对（7.19）与（7.20）作差，忽略误差 $\mathrm{O}(N^{-2}$后，可得差值 $\widetilde{G}^{(i)}_{oo} - Y$ 为

$$\begin{aligned} &(L^{(i)} \mathcal{D}_1 L^{(i)})_{oo} + \left(L^{(i)} \sum_{k=2}^{\mathfrak{p}} \left(\mathcal{D} L^{(i)} \right)^k \right)_{oo} \\ &\quad - \left(L^{(i)} \sum_{k=2}^{\mathfrak{p}} \left((\widetilde{B}^\top (Q - m_{\mathrm{sc}}(z)) \widetilde{B} L^{(i)} \right)^k \right)_{oo}. \end{aligned} \tag{7.21}$$

若 $\alpha \in \mathsf{A}_i$，则 $\mathsf{dist}_{\mathcal{T}}(i, l_\alpha) = \ell + 1$，由定理 3.3 可得

$$L^{(i)}_{ol_\alpha} = m_{\mathrm{sc}}(z)\left(-\frac{m_{\mathrm{sc}}(z)}{\sqrt{d-1}}\right)^{\mathrm{dist}_{\mathcal{T}}(o,l_\alpha)}, \quad |L^{(i)}_{ol_\alpha}| \lesssim (d-1)^{-\mathrm{dist}_{\mathcal{T}}(o,l_\alpha)/2} = (d-1)^{-\ell/2}. \tag{7.22}$$

否则，若 $\alpha \in [\![\mu]\!] \setminus \mathsf{A}_i$，则 o，l_α 属于 $\mathcal{T}^{(i)}$ 的不同连通分支，且 $|L^{(i)}_{ol_\alpha}| = 0$。因此，(7.21) 中的第一项可计算为：

$$(L^{(i)}\mathcal{D}_1 L^{(i)})_{oo} = \frac{m_{\mathrm{sc}}(z)^{2\ell+2}}{(d-1)^{\ell+1}} \sum_{\alpha \in \mathsf{A}_i} (\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\alpha} - Q) + \frac{m_{\mathrm{sc}}(z)^{2\ell+2}}{(d-1)^{\ell+1}} \sum_{\alpha \neq \beta \in \mathsf{A}_i} \widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta}, \tag{7.23}$$

将 (7.12) 中的 $\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\alpha} - Q$，$\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta}$ 替换为 $G^{(b_\alpha)_{c_\alpha c_\alpha}}$，$G^{(b_\alpha b_\beta)_{c_\alpha c_\beta}}$ 后，我们得到 (中的前两项。我们将差值归入误差项 $\mathcal{E}$ （如 (7.14) 中所示）。

对于项 $k \geqslant 2$，一般而言，对于定义在 $(\mathbb{T} \setminus \{i\}) \times (\mathbb{T} \setminus \{i\})$ 上的任意矩阵 V，$L^{(i)}(VL^{(i)})^k$ 可表示为以下形式各项之和

$$\sum_{x_1, x_2, \cdots, x_{2k} \in \mathbb{T} \setminus \{i\}} L^{(i)}_{ox_1} V_{x_1 x_2} L^{(i)}_{x_2 x_3} V_{x_3 x_4} L^{(i)}_{x_4 x_5} \cdots V_{x_{2k-1} x_{2k}} L^{(i)}_{x_{2k} o}. \tag{7.24}$$

我们可以按以下方式重新整理 (7.24)

$$\begin{aligned} &\sum_{x_1, x_2, \cdots, x_{2k} \in \mathbb{T} \setminus \{i\}} L^{(i)}_{ox_1} L^{(i)}_{x_2 x_3} \cdots L^{(i)}_{x_{2k} o} V_{x_1 x_2} V_{x_3 x_4} \cdots V_{x_{2k-1} x_{2k}}. \\ &= (d-1)^{3(k-1)\ell} \sum_{x_1, x_2, \cdots, x_{2k} \in \mathbb{T} \setminus \{i\}} (d-1)^{-3(k-1)\ell} L^{(i)}_{ox_1} L^{(i)}_{x_2 x_3} \cdots L^{(i)}_{x_{2k} o} V_{x_1 x_2} V_{x_3 x_4} \cdots V_{x_{2k-1} x_{2k}} \\ &=: (d-1)^{3(k-1)\ell} \sum_{x_1, x_2, \cdots, x_{2k} \in \mathbb{T} \setminus \{i\}} \mathfrak{c}_{\boldsymbol{x}} V_{x_1 x_2} V_{x_3 x_4} \cdots V_{x_{2k-1} x_{2k}}, \end{aligned} \tag{7.25}$$

其中权重 $\mathfrak{c}_{\boldsymbol{x}} = (d-1)^{-3(k-1)\ell} L^{(i)}_{ox_1} \cdots L^{(i)}_{x_{2k} o}$，且权重总和满足以下界

$$\begin{aligned} \sum_{x_1, x_2, \cdots, x_{2k} \in \mathbb{T} \setminus \{i\}} |\mathfrak{c}_{\boldsymbol{x}}| &= (d-1)^{-3(k-1)\ell} \sum_{x_1 \in \mathbb{T} \setminus \{i\}} |L^{(i)}_{ox_1}| \sum_{x_2, x_3 \in \mathbb{T} \setminus \{i\}} |L^{(i)}_{x_2 x_3}| \cdots \sum_{x_{2k} \in \mathbb{T} \setminus \{i\}} |L^{(i)}_{x_{2k} o}| \\ &\lesssim (d-1)^{-3(k-1)\ell} \ell^{k-1} (d-1)^{k\ell} = (d-1)^{-(2k-3)\ell} \ell^{k-1} \lesssim 1, \end{aligned}$$

为得到第二行，我们使用了（7.17）；在最后一个不等式中，我们用到了 $k \geqslant 2$。

为计算（$k \geqslant 2$）中的差值（7.21），我们考虑 V的两种可能形式：$V = \widetilde{B}^\top (Q - m_{\mathrm{sc}}(z)) \widetilde{B}$或 $V = \widetilde{B}^\top (Q - m_{\mathrm{sc}}(z)) \widetilde{B} + \mathcal{D}_1$。如上所述（见（7.25）），（7.21）中满足 $k \geqslant 2$ 的项可分解为 O(1) 加权和，其各项的形式为 $(d-1)^{3(k-1)\ell} \widetilde{R}_k$。这里 $\widetilde{R}_k$ 是 k 个因子的乘积，每个因子取以下形式之一：

$$(\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\alpha} - Q), \quad \widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta}, \quad (Q - m_{\mathrm{sc}}(z)), \quad \alpha \neq \beta \in [\![\mu]\!].$$

此外，$\widetilde{R}_k$至少包含一个形如 $\{\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\alpha} - Q, \widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta}\}_{\alpha \neq \beta \in [\![\mu]\!]}$的因子（由 $\mathcal{D}_1$产生）。否则，（7.21）中差值产生的项会相互抵消。

对于每个 $\widetilde{R}_k$ 项，我们得到 R_k，分别通过将 $\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\alpha} - Q$，$\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta}$ 替换为 $G^{(b_\alpha)_{c_\alpha c_\alpha}} - Q$，$G^{(b_\alpha b_\beta)_{c_\alpha c_\beta}}$。由于$k \geqslant 2$ 以及 R_k，$\widetilde{R}_k$ 的每个因子以 $N^{-\mathfrak{b}}$ 为界（由定理 3.9 以及假设 $\mathcal{G}$，$\widetilde{\mathcal{G}} \in \Omega$），替换误差的界为

$$|\widetilde{R}_k - R_k| \lesssim \frac{1}{N^{\mathfrak{b}/2}} \sum_{\alpha, \beta \in [\![\mu]\!]} |\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta} - G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}|.$$

我们将上述误差收集在 $\mathcal{E}$ 中（如（7.14））。

我们将形如 $(d-1)^{3(k-1)\ell} R_k$ 的项的 O(1) 加权和记为 $\mathcal{U}$。定理 7.4的证明至此完成。

□

7.2 定理 7.3 的证明

将（7.12）代入（7.8），我们得到以下四项

$$\frac{m_{\mathrm{sc}}^{2(\ell+1)}(z)}{(d-1)^{\ell+1}}\sum_{\alpha\in\mathsf{A}_i}\sum_{\mathbf{i}}\frac{1}{Z_{\mathcal{F}}}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F},\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha}-Q)\right], \tag{7.26}$$

$$\frac{m_{\mathrm{sc}}^{2(\ell+1)}(z)}{(d-1)^{\ell+1}}\sum_{\alpha\neq\beta\in\mathsf{A}_i}\sum_{\mathbf{i}}\frac{1}{Z_{\mathcal{F}}}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F},\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}\right], \tag{7.27}$$

$$\frac{1}{Z_{\mathcal{F}}}\sum_{\mathbf{i}}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F},\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)\mathcal{U}\right], \tag{7.28}$$

$$\frac{1}{Z_{\mathcal{F}}}\sum_{\mathbf{i}}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F},\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)\mathcal{E}\right]. \tag{7.29}$$

第一项 (7.26)。 第一项 (7.26) 可忽略

$$\frac{\mathrm{O}(1)}{(d-1)^{\ell}}\sum_{\alpha\in\mathsf{A}_i}\sum_{\mathbf{i}}\frac{1}{Z_{\mathcal{F}}}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F},\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha}-Q)\right]=\mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}/2}\mathbb{E}[\Psi]). \tag{7.30}$$

若暂时忽略指示函数与对嵌入取平均，则断言 (7.30) 便归结为 Q 的定义

$$\frac{1}{Nd}\sum_{b_\alpha,c_\alpha\in[\![N]\!]}A_{c_\alpha b_\alpha}(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha}-Q)=0. \tag{7.31}$$

~这是因为 $(\mathcal{G},\mathcal{G})$ 在局部重采样下同分布。在 (7.30) 中，就对嵌入取平均而言，我们可以先对指标 b_α, c_α 利用 (7.31) 求和，然后再对其余指标 $\mathbf{i}\setminus\{b_\alpha,c_\alpha\}$取平均。

第二项 (7.27)。 假设第二项 (7.27) 有如下估计

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{O}(1)}{(d-1)^{\ell}}\sum_{\alpha\neq\beta\in\mathsf{A}_i}\sum_{\mathbf{i}}\frac{1}{Z_{\mathcal{F}}}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F},\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}\right]\\&=\frac{\mathrm{O}(1)}{(d-1)^{\ell}}\sum_{\alpha\neq\beta\in\mathsf{A}_i}\sum_{\mathbf{i}}\frac{1}{Z_{\mathcal{F}}}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F},\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)G_{b_\alpha b_\beta}(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha}-Q)(G^{(b_\beta)}_{c_\beta c_\beta}-Q)\right]+\mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}/4}\mathbb{E}[\Psi]).\end{aligned} \tag{7.32}$$

然后我们可以进一步把 (7.32) 中的 $(G^{(b_\alpha)}{}_{c_\alpha c_\alpha}-Q)$ 改为 $(G^{(b_\alpha)}{}_{c_\alpha c_\alpha}-Y)$，从而得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{O}(1)}{(d-1)^{\ell}}\sum_{\alpha\neq\beta\in\mathsf{A}_i}\sum_{\mathbf{i}}\frac{1}{Z_{\mathcal{F}}}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F},\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha}-Y)\times(G_{b_\alpha b_\beta}(G^{(b_\beta)}_{c_\beta c_\beta}-Q))\right]\\&+\frac{\mathrm{O}(1)}{(d-1)^{\ell}}\sum_{\alpha\neq\beta\in\mathsf{A}_i}\sum_{\mathbf{i}}\frac{1}{Z_{\mathcal{F}}}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F},\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)|Y-Q||G_{b_\alpha b_\beta}(G^{(b_\beta)}_{c_\beta c_\beta}-Q)|\right].\end{aligned} \tag{7.33}$$

(7.33) 右侧的第一项具有 (7.10) 的形式。(7.33) 右侧的第二项可以进一步估计为

$$\frac{\mathrm{O}(1)}{(d-1)^{\ell}}\sum_{\alpha\neq\beta\in\mathsf{A}_i}\sum_{\mathbf{i}}\frac{1}{Z_{\mathcal{F}}}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F},\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)|Y-Q|N^{-2\mathfrak{b}}\right]=\mathrm{O}\left(N^{-\mathfrak{b}/4}\mathbb{E}[\Psi]\right).$$

接下来我们概述 (7.32) 的证明。若暂时忽略指示函数和对嵌入取平均，断言 (7.32) 就归结为计算以下量

$$\frac{1}{(Nd)^2}\sum_{b_\alpha,c_\alpha,b_\beta,c_\beta\in[\![N]\!]} A_{c_\alpha b_\alpha}A_{b_\beta c_\beta}G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}. \tag{7.34}$$

对于随机 d-正则图，邻接矩阵具有平凡特征向量 $(1,1,\cdots,1)^\top$。因此，格林函数的行和与列和很小：

$$\sum_{i\in[\![N]\!]} G_{ij} = \sum_{j\in[\![N]\!]} G_{ij} = 1/(d/\sqrt{d-1}-z) = \mathrm{O}(1). \tag{7.35}$$

因此，如果 $G^{(b_\alpha b_\beta)c_\alpha c_\beta}$ 在（7.34）中被替换为 $G_{c_\alpha c_\beta}$（而不移除顶点 b_α, b_β），则平均值非常小，为 $\mathrm{O}(1/N)$。为了计算（7.34），我们需要利用舒尔补公式，将 $G^{(b_\alpha b_\beta)c_\alpha c_\beta}$ 重新表示回 $G^{(b_\alpha)}$、$G^{(b_\beta)}$、G，并通过小心地把顶点 b_α, b_β 加回去。结果表明，我们有一个很好的首项，而所有其他项均可忽略。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(Nd)^2}\sum_{b_\alpha,c_\alpha,b_\beta,c_\beta\in[\![N]\!]} A_{c_\alpha b_\alpha}A_{b_\beta c_\beta}G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}\\ =\ &\frac{1}{(Nd)^2}\sum_{b_\alpha,c_\alpha,b_\beta,c_\beta\in[\![N]\!]} A_{c_\alpha b_\alpha}A_{b_\beta c_\beta}\frac{G_{b_\alpha b_\beta}}{d-1}(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha}-Q)(G^{(b_\beta)}_{c_\beta c_\beta}-Q)+\text{“negligible error”}.\end{aligned} \tag{7.36}$$

断言（7.32）可通过先对指标 $b_\alpha, c_\alpha, b_\beta, c_\beta$ 求和得到，并利用（7.36），然后再对 $\mathbf{i}\setminus\{b_\alpha,c_\alpha,b_\beta,c_\beta\}$中的其余指标取平均。

证明 (7.36)。为简化记号，我们将 b_α、c_α、b_β、c_β分别记为 b、c、b'、c'。首先注意到，利用 (7.35)，仅删除一个顶点的格林函数的平均值也很小。更准确地说，舒尔补公式 (2.5) 给出

$$\frac{1}{Nd}\sum_{b\sim c}G^{(b')}_{cc'} = \frac{1}{Nd}\sum_{c\sim b}\left(G_{cc'}-\frac{G_{cb'}G_{b'c'}}{G_{b'b'}}\right)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{N}\right),\quad \frac{1}{Nd}\sum_{b\sim c}G^{(b')}_{bc'}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{N}\right), \tag{7.37}$$

其中，在第一个陈述中，我们对自由指标 c 取平均；在第二个陈述中，我们对自由指标 b 取平均。

为证明 (7.36)，利用舒尔补公式 (2.5)，我们有

$$\begin{aligned}G^{(bb')}_{cc'} &= G^{(b')}_{cc'}+(G^{(bb')}H)_{cb}G^{(b')}_{bc'} = G^{(b')}_{cc'}+\frac{G^{(b')}_{bc'}}{\sqrt{d-1}}\sum_{x\sim b}G^{(bb')}_{cx}\\ &= G^{(b')}_{cc'}+\frac{G^{(b')}_{bc'}}{\sqrt{d-1}}\sum_{x\sim b}\left(G^{(b)}_{cx}-\frac{G^{(b)}_{cb'}G^{(b)}_{b'x}}{G^{(b)}_{b'b'}}\right)=G^{(b')}_{cc'}+\frac{G^{(b')}_{bc'}}{\sqrt{d-1}}\sum_{x\sim b}G^{(b)}_{cx}-\sum_{x\sim b}\frac{G^{(b')}_{bc'}G^{(b)}_{cb'}G^{(b)}_{b'x}}{\sqrt{d-1}G^{(b)}_{b'b'}}.\end{aligned} \tag{7.38}$$

若对边（b，c）取平均，则由（7.38）右侧的第一项根据（7.37）可知很小；对于第二项，按照相同的推理，我们可以将 $\sum_{x\sim b}G^{(b)}_{cx}$替换为 $\sum_{x\sim b}(G^{(b)}_{cx}-Q)$；对于最后一项，可由 Ward 恒等式给出其界：

$$\begin{aligned}\frac{A_{b'c'}}{Nd}\sum_{b\sim c}\sum_{x\sim b}\left|\frac{G^{(b')}_{bc'}G^{(b)}_{cb'}G^{(b)}_{b'x}}{G^{(b)}_{b'b'}}\right| &\lesssim \frac{A_{b'c'}N^{-\mathfrak{b}}}{N}\sum_{b\sim c}|G^{(b')}_{bc'}G^{(b)}_{cb'}|\\ &\lesssim \frac{A_{b'c'}N^{-\mathfrak{b}}}{N}\sum_{b\sim c}(|G^{(b')}_{bc'}|^2+|G^{(b)}_{cb'}|^2)\lesssim N^{-\mathfrak{b}/2}A_{b'c'}\Phi,\end{aligned} \tag{7.39}$$

其中，在第一个等式中，我们利用了由（3.26）可得，对于 $b \sim x$，有 $|G^{(b)}_{b'x}| \lesssim N^{-\mathfrak{b}}$；在第二个等式中，我们使用了柯西–施瓦茨不等式；在最后一个等式中，我们使用了（3.26）。

因此，对边（b，c）在（7.38）中取平均，我们得到

$$\frac{A_{b'c'}}{Nd}\sum_{b\sim c} G^{(bb')}_{cc'} = \frac{A_{b'c'}}{Nd}\sum_{b\sim c}\left(\frac{G^{(b')}_{bc'}}{\sqrt{d-1}}\left(\sum_{x\sim b} G^{(b)}_{cx} - Q\right)\right) + \mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}/2}\Phi)\Big). \tag{7.40}$$

我们再对（，）中的边（$b'c'$）取平均。与（7.38）类似，我们可以先将 $G^{(b')}{}_{bc'}$ 替换为

$$G^{(b')}_{bc'} = G_{bc'} + G_{bb'}(HG^{(b')})_{b'c'} = G_{bc'} + \frac{G_{bb'}}{\sqrt{d-1}}\sum_{x\sim b'} G^{(b')}_{c'x}, \tag{7.41}$$

并得出结论

$$\begin{aligned}\frac{1}{(Nd)^2}\sum_{\substack{b\sim c\\ b'\sim c'}} G^{(bb')}_{cc'} &= \frac{1}{(Nd)^2}\sum_{\substack{b\sim c\\ b'\sim c'}}\frac{G_{bb'}}{d-1}\left(\sum_{x\sim b} G^{(b)}_{cx} - Q\right)\left(\sum_{x\sim b'} G^{(b')}_{c'x} - Q\right) + \mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}/2}\Phi)\\ &= \frac{1}{(Nd)^2}\sum_{\substack{b\sim c\\ b'\sim c'}}\frac{G_{bb'}}{d-1}(G^{(b)}_{cc} - Q)(G^{(b')}_{c'c'} - Q)\\ &\quad + \frac{N^{-\mathfrak{b}/2}}{(Nd)^2}\sum_{\substack{b\sim c\\ b'\sim c'}}\mathrm{O}\left(|G_{bb'}|\left(\sum_{x\sim b, x\neq c}|G^{(b)}_{cx}| + \sum_{x\sim b', x\neq c'}|G^{(b')}_{c'x}|\right) + \Phi\right),\end{aligned}$$

其中，在最后一个等号处，我们利用（$|G^{(b)}_{cx} - \delta_{cx}Q| \lesssim N^{-\mathfrak{b}}$ 对于 $x \sim b$，以及 $|G^{(b')}{}_{c'x} - \delta_{c'x}Q| \lesssim N^{-\mathfrak{b}}$ 对于 $x \sim b'$，结合（3.26）和（3.21）给出了界。这便得到（7.36）。 □

第三项（7.28）。我们回顾一下（$\mathcal{U}$）中（7.15）的前几项。对于（7.28）中的第三项，我们有如下分解：

$$\frac{1}{Z_{\mathcal{F}}}\sum_{\mathbf{i}}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F},\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)\mathcal{U}\right] = J_1 + J_2 + J_3, \tag{7.42}$$

其中

$$J_1 = \sum_{\alpha\in\mathsf{A}_i}\sum_{\mathbf{i}}\frac{m_{\mathrm{sc}}^{2(\ell+1)}(z)L^{(i)}_{l_\alpha l_\alpha}}{(d-1)^{\ell+2}Z_{\mathcal{F}}}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F},\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha} - Q)^2\right], \tag{7.43}$$

$$J_2 = \sum_{\substack{\alpha\in\mathsf{A}_i,\beta\in[\![\mu]\!]\\ \alpha\neq\beta}}\sum_{\mathbf{i}^+}\frac{m_{\mathrm{sc}}^{2(\ell+1)}(z)(L^{(i)}_{l_\beta l_\beta} + L^{(i)}_{l_\alpha l_\beta})}{(d-1)^{\ell+2}Z_{\mathcal{F}}}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F},\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)(G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta})^2\right]. \tag{7.44}$$

而 J_3 是如下形式各项的 O(1) 加权和

$$\sum_{\mathbf{i}}\frac{(d-1)^{3(h-1)}}{Z_{\mathcal{F}}}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F},\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)R_h\right], \quad h\geqslant 2, \tag{7.45}$$

其中，R_h 是由以下形式的 h 项的乘积：（7.11），其中包含 $G^{(b_\alpha)}{}_{c_\alpha c_\alpha} - Q$ 或 $G^{(b_\alpha b_\beta)}{}_{c_\alpha c_\beta}$。此外，要么 $h\geqslant 3$，要么 $h = 2$ 且 R_h（回顾（7.15））是以下项之一

$$\begin{aligned}&(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha} - Q)(G^{(b_\beta)}_{c_\beta c_\beta} - Q), \quad (G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha} - Q)G^{(b_{\alpha'}b_{\beta'})}_{c_{\alpha'}c_{\beta'}}, \quad G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}G^{(b_{\alpha'}b_{\beta'})}_{c_{\alpha'}c_{\beta'}},\\ &\{G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha} - Q, G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}\}\times(Q - m_{\mathrm{sc}}(z)),\end{aligned} \tag{7.46}$$

其中 $\alpha \neq \beta \in [\![\mu]\!]$，$\alpha' \neq \beta' \in [\![\mu]\!]$ 和 $\{\alpha, \beta\} \neq \{\alpha', \beta'\}$。

下面我们逐一讨论这三个项 J_1、J_2、J_3。对于 J_1，由与 (7.33) 相同的论证，我们可以将 $(G^{(b_\alpha)}{}_{c_\alpha c_\alpha} - Q)$ 中的一份替换为 $(G^{(b_\alpha)}{}_{c_\alpha c_\alpha} - Y)$，误差由 $\mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}/2}\mathbb{E}[\Psi])$ 控制。经过这样的替换，我们得到

$$\sum_{\alpha \in \mathsf{A}_i} \sum_{\mathbf{i}} \frac{m_{\mathrm{sc}}^{2(\ell+1)}(z) L^{(i)}_{l_\alpha l_\alpha}}{(d-1)^{\ell+2} Z_{\mathcal{F}}} \mathbb{E}\left[I(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \mathbf{1}(\mathcal{G} \in \Omega) (G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha} - Y)(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha} - Q) \right], \tag{7.47}$$

这是形如 (7.9) 且满足 $\mathfrak{q} = 0$ 的项的 $\mathrm{O}(1)$ 加权和。

对于 J_2，如 (7.44) 所示，我们断言以下估计成立

$$|J_2| \lesssim \sum_{\alpha \neq \beta} \frac{1}{(d-1)^{\ell} Z_{\mathcal{F}}} \sum_{\mathbf{i}} \mathbb{E}\left[I(\mathcal{F}, \mathcal{G})\, \mathbf{1}(\mathcal{G} \in \Omega) \left| G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta} \right|^2 \right] \lesssim (d-1)^{2\ell}\, \mathbb{E}[\Psi], \tag{7.48}$$

因此，这部分贡献可以吸收到 ($\mathcal{E}$ （7.8）中的误差项中。

如果暂时忽略指示函数和对嵌入取平均，断言 (7.48) 就归结为计算以下量

$$\frac{1}{(Nd)^2} \sum_{b_\alpha, c_\alpha, b_\beta, c_\beta \in [\![N]\!]} A_{c_\alpha b_\alpha} A_{b_\beta c_\beta} |G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}|^2 \lesssim \Phi. \tag{7.49}$$

（7.49）的证明。类似 (7.49) 的平均值可以用经典的 Ward 恒等式 (2.6) 来界定，由此得到

$$\frac{1}{N^2} \sum_{i,j} |G_{ij}(z)|^2 = \frac{\operatorname{Im} m_N(z)}{N \operatorname{Im}[z]} \lesssim \Phi(z). \tag{7.50}$$

然而，$G^{(b_\alpha b_\beta)_{c_\alpha c_\beta}}$（删去行/列 b_α, b_β 后的格林函数）取决于这些边的选择，但我们可以通过舒尔补公式将其表示为完整格林函数 G的形式，并利用 Ward 恒等式对其平均值进行界定。为简化记号，我们将 $b_\alpha, c_\alpha, b_\beta, c_\beta$ 记作 b, c, b', c'。

我们从舒尔补公式（2.4）开始

$$G^{(bb')}_{cc'} = G_{cc'} - (G(G|_{\{bb'\}})^{-1} G)_{cc'}, \quad (G|_{\{bb'\}})^{-1} = \frac{1}{G_{bb} G_{b'b'} - G_{bb'}^2} \begin{bmatrix} G_{b'b'} & -G_{bb'} \\ -G_{bb'} & G_{bb} \end{bmatrix}. \tag{7.51}$$

由（3.21）可知，格林函数项有界；当 b, b' 彼此相距较远时，（7.51）中的分母远离 0，因此我们可以得到

$$|G^{(bb')}_{cc'}| \lesssim |G_{bb'}| + |G_{bc'}| + |G_{b'c}| + |G_{cc'}|. \tag{7.52}$$

于是，Ward 恒等式界（7.50）给出

$$\frac{1}{(Nd)^2} \sum_{\substack{c \sim b \\ c' \sim b'}} |G^{(bb')}_{cc'}|^2 \lesssim \frac{1}{(Nd)^2} \sum_{\substack{c \sim b \\ c' \sim b'}} (|G_{bb'}|^2 + |G_{bc'}|^2 + |G_{b'c}|^2 + |G_{cc'}|^2) \lesssim \Phi. \tag{7.53}$$

□

最后，对于 J_3，如果 $h = 2$, R_h 由（7.46）给出。分两种情况

1. R_h 包含一个因子 $G^{(b_\alpha)_{c_\alpha c_\alpha}} - Q$，那么我们可以先像（$b_\alpha$，$c_\alpha$）中那样对边（7.31）取平均。在这种情况下，我们可以像处理（7.45）那样对（7.30）取界，并且它有界于 $\mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}/2}\mathbb{E}[\Psi])$

2. R_h 包含一个因子 $G^{(b_\alpha b_\beta)c_\alpha c_\beta}$，那么我们可以先像（$b_\alpha$，$c_\alpha$），（$b_\beta$，$c_\beta$）中那样对边取平均，如（7.34）所示。在这种情况下，我们可以像处理（7.45）那样估计（7.32），得到

$$\frac{1}{(d-1)}\frac{(d-1)^{3(h+1)\ell}}{(d-1)^{\mathfrak{q}\ell/2}Z_{\mathcal{F}}}\sum_{\mathbf{i}}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F},\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)(G^{(b_\beta)}_{c_\alpha c_\alpha}-Y)R'_{h+1}\right]+\mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}/4}\mathbb{E}[\Psi]), \tag{7.54}$$

其中 R'_{h+1} 由 R_h 通过将 $G^{(b_\alpha b_\beta)c_\alpha c_\beta}$ 替换为 $G_{b_\alpha b_\beta}(G^{(b_\beta)}{}_{c_\beta c_\beta}-Q)$ 得到，并且它包含 $h+1$ 个形如 (7.11) 的因子；且 $\mathfrak{q}=12$。由此得到 (7.10)。

若 $h\geqslant 3$，回想一下，R_h 包含 $G^{(b_\alpha)}{}_{c_\alpha c_\alpha}-Q$ 或 $G^{(b_\alpha b_\beta)c_\alpha c_\beta}$。分为三种情形

1. 若 R_h 包含因子 $G^{(b_\alpha)}{}_{c_\alpha c_\alpha}-Q$，我们可以将其改为 $(G^{(b_\alpha)}{}_{c_\alpha c_\alpha}-Y)$，误差的界为 $\mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}/2}\mathbb{E}[\Psi])$。

2. 若 R_h 包含两个形如 $G^{(b_\alpha b_\beta)c_\alpha c_\beta}$ 的因子，根据柯西-施瓦茨不等式，并仿照 (7.49)，可将其界定为

$$\sum_{\mathbf{i}}\frac{(d-1)^{3(h-1)}}{Z_{\mathcal{F}}}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F},\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)N^{-(h-2)\mathfrak{b}}|G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}|^2\right]=\mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}/2}\mathbb{E}[\Psi]).$$

3. 若 R_h 不包含任何形如 $G^{(b_\alpha)}{}_{c_\alpha c_\alpha}-Q$的因子，且恰好包含一个形如 $G^{(b_\alpha b_\beta)c_\alpha c_\beta}$的因子，而所有其他因子均为 $Q-m_{\mathrm{sc}}(z)$，那么按照与 (7.54) 相同的推理，在可忽略误差范围内，我们可以将 $G^{(b_\alpha b_\beta)c_\alpha c_\beta}$ 替换为 $(G^{(b_\beta)}{}_{c_\alpha c_\alpha}-Y)\times(G_{b_\alpha b_\beta}(G^{(b_\beta)}{}_{c_\beta c_\beta}-Q))$。

上述三种情况都导出（7.10）。

第四项 (7.29)。回忆一下 $\mathcal{E}$ 由（7.14），最后一项（7.29）可表示为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{Z_{\mathcal{F}}}\sum_{\mathbf{i}}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F},\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G},\widetilde{\mathcal{G}}\in\Omega)\mathcal{E}\right]\\
&=\frac{1}{Z_{\mathcal{F}}}\sum_{\mathbf{i}}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F},\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G},\widetilde{\mathcal{G}}\in\Omega)\left(\frac{m_{\mathrm{sc}}^{2(\ell+1)}(z)}{(d-1)^{\ell+1}}\sum_{\alpha,\beta\in\mathsf{A}_i}(\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta}-G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta})\right)\right]\\
&+\mathrm{O}\left(\frac{1}{Z_{\mathcal{F}}}\sum_{\mathbf{i}}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F},\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G},\widetilde{\mathcal{G}}\in\Omega)\left(\frac{1}{N^{\mathfrak{b}/2}}\sum_{\alpha,\beta\in[\![\mu]\!]}|\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta}-G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}|+\frac{1}{N^2}\right)\right]\right).
\end{aligned} \tag{7.55}$$

我们可以利用舒尔补公式，将 $\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta}$ 表示为原图的格林函数 G的形式。在定理 13.3 中，我们证明

$$\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta}=G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}+\mathcal{E}_{\alpha\beta}, \tag{7.56}$$

其中

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}_{\alpha\beta}|\lesssim&\sum_{\gamma\in[\![\mu]\!],x\in\mathcal{N}_\gamma}(|G^{(\mathbb{T}\mathbb{W})}_{c_\alpha x}|^2+|G^{(\mathbb{T}\mathbb{W})}_{c_\beta x}|^2)+\sum_{\gamma\in[\![\mu]\!]\setminus\{\alpha,\beta\}}(|G^{(\mathbb{T}b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha b_\gamma}|^2+|G^{(\mathbb{T}b_\alpha b_\beta)}_{c_\beta b_\gamma}|^2)\\
&+\sum_{x\in\mathbb{T}}(|G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha x}|^2+|G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\beta x}|^2)+N^{-\mathfrak{b}}\Phi,
\end{aligned} \tag{7.57}$$

且 $N_\gamma=\{x\neq c_\gamma:\ x\sim b_\gamma\}\cup\{a_\gamma\}$。

对 $\mathcal{F}$ 的嵌入取平均（即对i取平均）后，(7.57) 中的大多数求和项都可由 (7.50) 控制。例如，对 (b_α,c_α) 和 (b_γ,c_γ) 取平均，可通过 Ward 恒等式得到 $\mathbb{E}\big[|G^{(\mathbb{T}b_\alpha b_\beta)}{}_{c_\alpha b_\gamma}|^2\big]$ 的界。

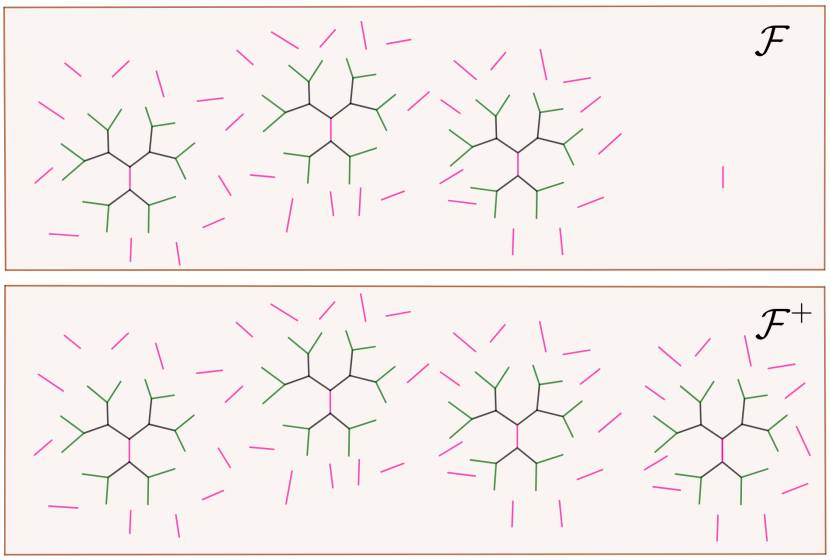

图6：上图：在森林 $\mathcal{F}$中，红色边表示核心边 $\mathcal{C}$。已使用的核心边属于半径为$(\ell+1)$的球，而每条未使用的核心边 $\mathcal{C}^\circ$ 各自构成一个连通分支。红色边与绿色边共同构成切换边 $\mathcal{K}$。下图：我们通过选取一条未使用的核心边（最右侧的红色边），将其扩展为半径为$(\ell+1)$的球，并添加 μ 条新的切换边，从而由 $\mathcal{F}$ 构造 $\mathcal{F}^+$ 。

棘手的情况是诸如 $|G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha x}|^2$ 与 $x\in\mathcal{N}_\alpha$ 这样的项，其中 x 和 c_α 是同一顶点的图邻点，而嵌入平均无法将它们的指标解耦。为处理这些项，我们引入一种新的 Ward型估计，称为穿孔顶点 *Ward* 界：若 i, j 是顶点 o 的两个邻点（因此 $o\sim i$ 和 $o\sim j$），则

$$\mathbb{E}\Big[\,\big|G^{(o)}_{ij}(z)\big|^2\,\Big]\;\leqslant\; N^{\mathfrak{o}}\,\frac{\mathbb{E}[\operatorname{Im} m_N(z)]}{N\eta}, \tag{7.58}$$

已在引理13.1中得到证明。其思想是在 o处进行局部重采样，并利用不变性 $\mathbb{E}[|G^{(o)}_{ij}|^2]=\mathbb{E}[|\widetilde{G}^{(o)}_{ij}|^2]$。然后我们展开 $\widetilde{G}^{(o)}_{ij}\ (z)$，并使用舒尔补公式。关键在于，我们可以将 $\mathbb{E}[|\widetilde{G}^{(o)}_{ij}\ (z)|^2]$界定为$\mathbb{E}[|G^{(o)}_{ij}\ (z)|^2]$ 乘以一个小因子，再加上如(7.50)中的误差，从而得到由(7.58)的右端给出的所需界。

结合（7.56）、（7.57）与 Ward恒等式（7.50）以及界（7.58），我们得到

$$\frac{1}{Z_{\mathcal{F}}}\sum_{\mathbf{i}}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F},\mathcal{G})\,\mathbf{1}(\mathcal{G},\widetilde{\mathcal{G}}\in\Omega)\sum_{\alpha,\beta\in\mathsf{A}_i}\big(\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta}-G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}\big)\right]=\mathrm{O}\left((d-1)^{2\ell}\,\mathbb{E}[\Psi]\right),$$

而（7.55）中的第二行是 $\mathrm{O}\big(N^{-\mathfrak{b}/4}\,\mathbb{E}[\Psi]\big)$。完整的表述和证明见第 13 节。

8 切换边、森林与可行函数

我们回顾定理 7.3 ，除可忽略误差外，

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)(Q-Y)]$$

分解为若干形如.....的项的 O(1) 加权和

$$\mathbb{E}\big[I(\mathcal{F},\mathcal{G})\,\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)\,(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha}-Y)\,R_{\mathbf{i}}\big], \tag{8.1}$$

其中 $\mathcal{F}$ 来自（7.4）包含所有切换边，且 R_{i} 是形如（7.11）的因子的乘积。为估计（8.1），我们在边（b_α, c_α）周围进行局部重采样，并重复第 7 节中的步骤，这自然导出一个迭代方案。

在每次迭代中，我们对图进行局部重采样，并如第7节那样，用原始图的格林函数来表示切换后的图的格林函数。由于 $\mathcal{G}$ 中几乎所有邻域都是无环的，这些重抽样所涉及的边以高概率具有较大的树邻域，并且通常相距甚远。因此，我们可以将它们整体视为构成一个森林。在本节中，我们用森林序列（见图6）来形式化这一迭代过程，该序列编码了局部重抽样中涉及的所有边。

固定 $\mu := d(d-1)^\ell$，即在深度 $\ell+1$处截断的 d–正则树的边界边数目。我们从一个二顶点模板 （一个无标号图）开始:

$$\mathcal{F}_0 := (V_0, E_0), \qquad V_0 = \{\mathsf{i}_0, \mathsf{o}_0\}, \quad E_0 = \{(\mathsf{i}_0, \mathsf{o}_0)\}.$$

这里，i_0 与o_0 是形式符号（被特别标出的模板顶点），仅当指定了 $\mathcal{F}$ 到 $\mathcal{G}$ 的嵌入后，它们才成为 $\mathcal{G}$ 的具体顶点。

初始化。 按如下方式由 $\mathcal{F}_0$ 构造 $\mathcal{F}_1$ ：

- 将有向边(i_0,o_0)扩展为截断的 d–正则树 $\mathcal{T}_\ell(\mathsf{o}_0)$，该树以$\mathsf{o}_0$为根;
- 添加 μ 边界边 $\mathcal{M}_1' = \{e_\alpha'\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}$ 至 $\mathcal{T}_\ell(\mathsf{o}_0)$，得到 $\mathcal{T}_{\ell+1}(\mathsf{o}_0)$;
- 引入 μ 新的有向边 $\mathcal{M}_1 = \{e_\alpha\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}$。

因此,

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{T}_{\ell+1}(\mathsf{o}_0) \cup \mathcal{M}_1, \qquad \mathcal{T}_\ell(\mathsf{o}_0) \cup \mathcal{M}_1' = \mathcal{T}_{\ell+1}(\mathsf{o}_0). \tag{8.2}$$

子图 $\mathcal{F}$ 在 (7.4) 中可视为从 $\mathcal{F}_1$ 到 $\mathcal{G}$的嵌入。

一般步骤。 给定 $\mathcal{F}_s = (V_s, E_s)$ 以及前几步构造的集合 $\mathcal{M}_s', \mathcal{M}_s$，通过以下方式构造 $\mathcal{F}_{s+1}$

- 选择一条（先前构造的）核心边 $e = (\mathsf{i}_s,\mathsf{o}_s) \in \mathcal{M}_s$ 并将其延伸至 $\mathcal{T}_\ell(\mathsf{o}_s)$;
- 添加 μ 边界边$\mathcal{M}_{s+1}' = \{e_\alpha'\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}$ 以得到 $\mathcal{T}_{\ell+1}(\mathsf{o}_s)$;
- 添加 μ 新的有向边 $\mathcal{M}_{s+1} = \{e_\alpha\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}$。

具体而言,

$$\mathcal{F}_{s+1} = \mathcal{F}_s \cup \mathcal{T}_{\ell+1}(\mathsf{o}_s) \cup \mathcal{M}_{s+1}, \quad \mathcal{T}_\ell(\mathsf{o}_s) \cup \mathcal{M}_{s+1}' = \mathcal{T}_{\ell+1}(\mathsf{o}_s). \tag{8.3}$$

我们参考图 6 ， 了解 $\mathcal{F}_{s+1} = \mathcal{F}^+$ 从 $\mathcal{F}_s = \mathcal{F}$的构造。

嵌入到 $\mathcal{G}$。局部重采样（第 5 节）给出 $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_{s+1}$到$\mathcal{G}$的一个嵌入。在一个嵌入下，我们记 $\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_{\mathsf{i}_s}$ ， 其顶点元组为 $\mathsf{i}_s \in [\![N]\!]^{|V_s|}$; $\mathsf{i}_s \mapsto i_s$ 与 $\mathsf{o}_s \mapsto o_s$。 邻域 $\mathcal{T}_\ell(\mathsf{o}_s)$映射到球 $B_\ell(o_s;\mathcal{G})$; 边界边 e_α'、e_α 映射到$\mathcal{G}$中的(ℓ_α, a_α)与(b_α, c_α)。

核与切换边。设

$$\mathcal{K}_s := \{(\mathsf{i}_0, \mathsf{o}_0)\} \cup \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_1' \cup \cdots \cup \mathcal{M}_s \cup \mathcal{M}_s'$$

是切换边的集合，并且

$$\mathcal{C}_s := \{(\mathsf{i}_0, \mathsf{o}_0)\} \cup \mathcal{M}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{M}_s$$

核心边（ $\mathcal{F}_s$ 的每个连通分量恰好包含一条核心边）。将已使用的核心边记为$\{(\mathsf{i}_0, \mathsf{o}_0) \ldots, (\mathsf{i}_{s-1}, \mathsf{o}_{s-1})\}$，将未使用的核心边记为$\mathcal{C}_s^\circ := \mathcal{C}_s \setminus \{(\mathsf{i}_0, \mathsf{o}_0) \ldots, (\mathsf{i}_{s-1}, \mathsf{o}_{s-1})\}$。

在大多数论证中，我们固定一个步骤，并简写为

$$\mathcal{F}=\mathcal{F}_s,\quad \mathcal{K}=\mathcal{K}_s,\quad \mathcal{C}=\mathcal{C}_s,\quad \mathcal{C}^\circ=\mathcal{C}_s^\circ,\qquad \mathcal{F}^+=\mathcal{F}_{s+1},\ \mathcal{K}^+=\mathcal{K}_{s+1},\ \mathcal{C}^+=\mathcal{C}_{s+1},\ (\mathcal{C}^\circ)^+=\mathcal{C}_{s+1}^\circ.$$

一般来说，

$$\mathcal{F}=\bigcup_{e\in\mathcal{C}^\circ}\{e\}\ \cup\ \bigcup_{(\mathsf{i}',\mathsf{o}')\in\mathcal{C}\setminus\mathcal{C}^\circ}\mathcal{T}_{\ell+1}(\mathsf{o}'),\qquad \mathcal{K}=\mathcal{C}\ \cup\ \bigcup_{(\mathsf{i}',\mathsf{o}')\in\mathcal{C}\setminus\mathcal{C}^\circ}\big(\mathcal{T}_{\ell+1}(\mathsf{o}')\setminus\mathcal{T}_\ell(\mathsf{o}')\big).\tag{8.4}$$

如果我们将一条未使用的核心边 $(\mathsf{i},\mathsf{o})\in\mathcal{C}^\circ$ 按 $\mathcal{T}_{\ell+1}(\mathsf{o})=\mathcal{T}_\ell(\mathsf{o})\cup\mathcal{M}'$ 展开，其中 $\mathcal{M}'=\{e'_\alpha\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}$，并添加 $\mathcal{M}=\{e_\alpha\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}$，那么

$$\mathcal{C}^+=\mathcal{C}\cup\mathcal{M},\qquad (\mathcal{C}^\circ)^+=\mathcal{C}^\circ\cup\mathcal{M}\setminus\{(\mathsf{i},\mathsf{o})\},\qquad \mathcal{F}^+=\mathcal{F}\cup\mathcal{T}_{\ell+1}(\mathsf{o})\cup\mathcal{M},\qquad \mathcal{K}^+=\mathcal{K}\cup\mathcal{M}\cup\mathcal{M}'.\tag{8.5}$$

参见图 6 中的 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}^+$。

“良好”嵌入的指示函数。 在本文的大部分内容中，我们将 $\mathcal{F}=(V,E)$ 视为模板在 $\mathcal{G}$ 中的一个嵌入（带标号）副本；这相当于选择一个顶点赋值 $\mathbf{i}\in[\![N]\!]^{|V|}$。$\mathbf{i}$ 的不同选择会产生不同的嵌入。按照这一约定，$\mathcal{K}$、$\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}^\circ$ 也被视为 $\mathcal{G}$ 的嵌入子图。稍微滥用一下记号，我们写作 $\mathcal{F}=(\mathbf{i}\ E)$，以强调我们已固定了 $\mathcal{F}$ 到 $\mathcal{G}$ 的一个嵌入。如上所述，一次局部重采样步骤会生成一个新的嵌入森林 $\mathcal{F}^+=\mathcal{F}^+(\mathbf{i}^+,E^+)\subset\mathcal{G}$，其顶点元组为 $\mathbf{i}^+$。

森林 $\mathcal{F}$ 记录了此前所有局部重抽样中涉及的边。为确保这些边彼此充分分离，且位于较大的树邻域中，我们使用以下指示函数。

定义 *8.1.* 设 $\mathcal{F}=(\mathbf{i}\ E)$（如 *(8.4)* 所示）是一个具有核心边 $\mathcal{C}$ 的子图，它是 d-正则图 $\mathcal{G}$的子图，邻接矩阵为 A。定义 $I(\mathcal{F},\mathcal{G})=1$ 当且仅当满足以下条件：*(i)* $\mathcal{F}$嵌入在 $\mathcal{G}$中；*(ii)* 对每个 $(b,c)\in\mathcal{C}$ 以及每个 $x\in\mathcal{B}_\ell(c;\mathcal{G})$，球 $\mathcal{B}_{\mathfrak{R}}(x;\mathcal{G})$ 都是一棵树；*(iii)* 不同的核心边之间的两两距离至少为 $3\mathfrak{R}$。等价地，

$$I(\mathcal{F},\mathcal{G}):=\prod_{\{x,y\}\in E}A_{xy}\prod_{(b,c)\in\mathcal{C}}\prod_{x\in\mathcal{B}_\ell(c;\mathcal{G})}\mathbf{1}\big(\mathcal{B}_{\mathfrak{R}}(x;\mathcal{G})\ \textit{is a tree}\big)\prod_{\substack{(b,c),(b',c')\in\mathcal{C}\\(b,c)\neq(b',c')}}\mathbf{1}\big(\operatorname{dist}_{\mathcal{G}}(c,c')\geq 3\mathfrak{R}\big).\tag{8.6}$$

固定将 $\mathcal{F}=(\mathbf{i}\ E)$ 良好嵌入到 $\mathcal{G}\in\Omega$ 中，且满足 $I(\mathcal{F},\mathcal{G})=1$。接着，我们在一条尚未使用的核心边 (i,o) 周围进行局部重采样。在下面的引理中，我们将证明，相对于 $\mathbf{S}$ 的随机性，以高概率随机选出的边 (b_α,c_α) 彼此相距较远，并且具有较大的~~树~~邻域——特别地 $\mathcal{G}=T_{\mathbf{S}}\mathcal{G}\in\Omega$。

引理 *8.2*。固定一个 d-正则图 $\mathcal{G}\in\Omega$，以及一个森林 $\mathcal{F}=(\mathbf{i}\ E)$（如 *(8.4)* 中所示），并将其视为 $\mathcal{G}$ 的子图。假设 $I(\mathcal{F},\mathcal{G})=1$ 且 $|\mathbf{i}|\leqslant N^{\mathfrak{c}/2}$。我们考虑在一条未使用的核心边 $(i,o)\in\mathcal{C}^\circ$ 附近进行局部重采样，其重采样数据为 $\{(l_\alpha,a_\alpha),(b_\alpha,c_\alpha)\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}$。我们将重采样数据集合记为 $\mathsf{F}(\mathcal{G})\subset S(\mathcal{G})$（回顾第 5 节），使其满足以下条件

1. *for any* $\alpha\neq\beta\in[\![\mu]\!]$, $\operatorname{dist}_{\mathcal{G}}(\{b_\alpha,c_\alpha\}\cup\mathbf{i},\{b_\beta,c_\beta\})\geqslant 3\mathfrak{R}$;
2. 对任意 $v\in\mathcal{B}_\ell(\{b_\alpha,c_\alpha\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]},\mathcal{G})$，$v$ 的半径 $\mathfrak{R}$ 邻域是一棵树。

那么 $\mathbb{P}_{\mathbf{S}}(\mathsf{F}(\mathcal{G}))\geqslant 1-N^{-1+2\mathfrak{c}}$（其中 $\mathbb{P}_{\mathbf{S}}(\cdot)$ 是关于 $\mathbf{S}$ 的随机性的概率，如定理 5.3中所述）。此外，对于 $\mathbf{S}\in\mathsf{F}(\mathcal{G})$ 以下结论成立

1. $\mu=d(d-1)^\ell$，$\mathsf{W}_{\mathbf{S}}=[\![\mu]\!]$ *(*回顾(5.2)*)*，以及 $\widetilde{\mathcal{G}}=T_{\mathbf{S}}(\mathcal{G})\in\Omega$；
2. $I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})=1$和 $I(\mathcal{F},\mathcal{G})=1$.

定理的证明 *8.2*。我们依次从 b_α、c_α 中均匀随机选取。对于任意固定的 $\mathcal{G}^{(\mathbb{T})}$，我们考虑所有会破坏引理要求的边。对于第一项要求，我们有 α

$$\mathbb{P}_{\mathbf{S}}(\operatorname{dist}_{\mathcal{G}}(\mathbf{i}\cup_{1\leqslant\beta\leqslant\alpha-1}\{b_\beta,c_\beta\},\{b_\alpha,c_\alpha\})\leqslant 3\mathfrak{R})\lesssim N^{-1}(|\mathbf{i}|+2\mu)d(d-1)^{3\mathfrak{R}}\leqslant N^{-1+3\mathfrak{c}/2}.\tag{8.7}$$

对于第二项要求，我们回顾一下，$\mathcal{G} \in \Omega$ 中除 $N^{\mathfrak{c}}$ 个顶点外，其余顶点的半径 $\mathfrak{R}$ 邻域都是树。因此

$$\mathbb{P}_{\mathbf{S}}(\mathcal{B}_{\mathfrak{R}}(v,\mathcal{G}) \text{ is not a tree for some } v \in \mathcal{B}_{\ell}(\{b_\alpha, c_\alpha\}, \mathcal{G})) \leqslant N^{-1}N^{\mathfrak{c}}d(d-1)^{\ell} \leqslant N^{-1+3\mathfrak{c}/2}. \tag{8.8}$$

断言 $\mathbb{P}_{\mathbf{S}}(\mathsf{F}(\mathcal{G})) \geqslant 1 - N^{-1+2\mathfrak{c}}$ 可通过对所有 α 使用（8.7）和（8.8）进行并集界得到。

在假设 $I(\mathcal{F},\mathcal{G}) = 1$ 的条件下，o 的半径为 $\mathfrak{R}$ 的邻域是一棵树。因此 $\mu = d(d-1)^{\ell}$。此外，对于 $\alpha \in [\![\mu]\!]$，邻域 $\mathcal{B}_{3\mathfrak{R}/2}(o,\mathcal{G})$ 和 $\mathcal{B}_{\mathfrak{R}}(\{b_\alpha, c_\alpha\}, \mathcal{G})$ 不相交。由此可知，对于所有 $\alpha \neq \beta \in [\![\mu]\!]$，$\mathrm{dist}_{\mathcal{G}^{(\mathbb{T})}}(\{a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha\}, \{a_\beta, b_\beta, c_\beta\}) > \mathfrak{R}/4$；并且添加边 $\{a_\alpha, b_\alpha\}$ 后，子图 $\mathcal{B}_{\mathfrak{R}/4}(\{a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha\}, \mathcal{G}^{(\mathbb{T})})$ 对所有 $\alpha \in [\![\mu]\!]$ 都是一棵树。我们得出 $\mathsf{W}_{\mathbf{S}} = [\![\mu]\!]$。

接下来我们证明，对于任意顶点 $v \in [\![N]\!]$，$\mathcal{B}_{\mathfrak{R}}(v,\mathcal{G})$ 的超额不大于 $\mathcal{B}_{\mathfrak{R}}(v,\mathcal{G})$ 的超额。由此可得 $\mathcal{G} \in \Omega$。若 $\mathrm{dist}(v, \{a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha\}_{\alpha \in [\![\mu]\!]}) \geqslant \mathfrak{R}$，则 $\mathcal{B}_{\mathfrak{R}}(v,\mathcal{G}) = \mathcal{B}_{\mathfrak{R}}(v,\mathcal{G})$，结论即得。否则，对于某个 $\alpha \in [\![\mu]\!]$，要么 $v \in \mathcal{B}_{\mathfrak{R}}(\{a_\alpha\}_{\alpha \in [\![\mu]\!]}, \mathcal{G}) \subset \mathcal{B}_{3\mathfrak{R}/2}(o,\mathcal{G})$，要么 $v \in \mathcal{B}_{\mathfrak{R}}(\{b_\alpha, c_\alpha\}, \mathcal{G})$。下面讨论第一种情况。第二种情况可用相同方法证明，因此略去证明。若 $v \in \mathcal{B}_{\ell}(o,\mathcal{G})$，我们记 $r := \min^{\alpha \in [\![\mu]\!]} \mathrm{dist}_{\mathcal{G}}(v, \{l_\alpha\}) \leqslant \mathfrak{R}$。那么，移除 $\{(b_\alpha, c_\alpha)\}_{\alpha \in [\![\mu]\!]}$ 并添加 $\{(l_\alpha, c_\alpha)\}_{\alpha \in [\![\mu]\!]}$ 后，$\mathcal{B}_{\mathfrak{R}}(v,\mathcal{G})$ 是 $\mathcal{B}_{\mathfrak{R}}(v,\mathcal{G}) \cup_{\alpha \in [\![\mu]\!]} \mathcal{B}_{\mathfrak{R}-r-1}(c_\alpha,\mathcal{G})$ 的子图。根据我们对 $\mathsf{F}(\mathcal{G})$ 的构造，$\mathcal{B}_{\mathfrak{R}-r-1}(c_\alpha,\mathcal{G})$ 是不相交的树。由此我们得出 $\mathcal{B}_{\mathfrak{R}}(v,\mathcal{G})$ 是一棵树。若 $v \notin \mathcal{B}_{\ell}(o,\mathcal{G})$，我们记 $r := \min^{\alpha \in [\![\mu]\!]} \mathrm{dist}_{\mathcal{G}}(v, a_\alpha) \leqslant \mathfrak{R}$，那么，移除 $\{(b_\alpha, c_\alpha)\}_{\alpha \in [\![\mu]\!]}$ 并添加$\{(a_\alpha, b_\alpha)\}_{\alpha \in [\![\mu]\!]}$后，$\mathcal{B}_{\mathfrak{R}}(v,\mathcal{G})$ 是 $\mathcal{B}_{\mathfrak{R}}(v,\mathcal{G}) \cup_{\alpha \in [\![\mu]\!]} \mathcal{B}_{\mathfrak{R}-r-1}(c_\alpha,\mathcal{G})$ 的子图。同样根据我们对 $\mathsf{F}(\mathcal{G})$ 的构造，$\mathcal{B}_{\mathfrak{R}-r-1}(c_\alpha,\mathcal{G})$ 是不相交的树，因此我们得出 $\mathcal{B}_{\mathfrak{R}}(v,\mathcal{G})$ 的超额至多为 $\mathcal{B}_{\mathfrak{R}}(v,\mathcal{G})$ 的超额。

断言 $I(\mathcal{F}^{+},\mathcal{G}) = 1$ 由 $\mathsf{F}(\mathcal{G})$ 的构造可得。由上述讨论还可知，$\mathcal{B}_{\mathfrak{R}}(v,\mathcal{G})$ 对任意 $v \in \mathcal{B}_{\ell}(o,\mathcal{G})$ 都是一棵树。接着可以验证 $I(\mathcal{F},\mathcal{G}) = 1$。至此，定理8.2中第二个结论的证明完成。

□

“良好”嵌入的数量。 由（8.4）可知，$\mathcal{F}$ 的每个连通分量要么是一条未使用的核心边，要么是一个半径为 $(\ell+1)$ 的球，对应于一条已使用的核心边。以下命题说明，满足 $I(\mathcal{F},\mathcal{G}) = 1$ 的嵌入总数，近似等于独立选择每个连通分量所得的数量。

命题 8.3。 给定一个模板 $\mathcal{F} = (V, E)$，其核心边为 $\mathcal{C}$，未使用的核心边为 $\mathcal{C}^{\circ}$，如 (8.4)所示；再给定一个 d-正则图 $\mathcal{G} \in \Omega$，则有

$$\sum_{\mathbf{i}} I(\mathcal{F},\mathcal{G}) = Z_{\mathcal{F}} \left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{N^{1-2\mathfrak{c}}}\right)\right),$$

其中

$$Z_{\mathcal{F}} := (Nd)^{|\mathcal{C}|} \left([(d-1)!]^{1+d+d(d-1)+\cdots+d(d-1)^{\ell-1}}\right)^{|\mathcal{C}\setminus\mathcal{C}^{\circ}|}. \tag{8.9}$$

这里，$|\mathcal{C}|$ 是核心边的数量；$|\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}^{\circ}|$ 是已使用核心边的数量。我们指出，$Z_{\mathcal{F}}$仅取决于模板 $\mathcal{F}$，而不取决于 $\mathcal{G}$。

Re标记 8.4. 在本文余下部分中，我们会遇到许多如下形式的表达式

$$\frac{1}{Z_{\mathcal{F}}} \sum_{\mathbf{i}} \mathbb{E}[I(\mathcal{F},\mathcal{G}) \times (\cdots)]. \tag{8.10}$$

得益于定理8.3，上述表达式可以看作是对模板 $\mathcal{F}$ 嵌入到 $\mathcal{G}$中的所有可能嵌入取平均。

证明。 我们注意到，$|\mathcal{C}|$ 也是 $\mathcal{F}$的连通分支数，而 $|\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}^{\circ}|$ 是 $\mathcal{F}$中半径为 $\ell+1$的球所对应的连通分支数。

我们可以通过对连通分支数进行归纳来证明（8.9）。若 $\mathcal{F}$ 由一条边组成$\mathcal{F}=\{b,c\}$，且这条边是尚未使用的核心边，则

$$\sum_{\mathbf{i}} I(\mathcal{F},\mathcal{G})=\sum_{b,c} A_{bc} \prod_{v\in\mathcal{B}_\ell(c,\mathcal{G})} \mathbf{1}(\mathcal{B}_{\mathfrak{R}}(v,\mathcal{G}) \text{ is a tree}) = Nd\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{N^{1-3\mathfrak{c}/2}}\right)\right), \tag{8.11}$$

其中我们用到了定理 3.1 中 Ω 的定义。如果 $\mathcal{F}$由一个半径为（$\ell+1$）的球组成，且对应于一个已使用的核心边，那么我们也可以先对其核心边求和。其选择数与（8.11）相同。然后我们对其余顶点求和。半径为（$\ell+1$）的球中的每个内部顶点都会贡献一个因子（$d-1$）!，因为嵌入其子顶点有（$d-1$）! 种方式。于是得到

$$\sum_{\mathbf{i}} I(\mathcal{F},\mathcal{G})=Nd[(d-1)!]^{1+d+d(d-1)+\cdots+d(d-1)^{\ell-1}}\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{N^{1-3\mathfrak{c}/2}}\right)\right). \tag{8.12}$$

如果该结论对 $\mathcal{F}$ 个具有 θ 个连通分量的情形成立，接下来我们证明它对 $\mathcal{F}$ 个具有 $\theta+1$ 个连通分量的情形也成立。我们可以先对对应于一个连通分量的指标求和，同时固定其他指标。如果它是一条边，我们得到一个类似于（8.11）的因子；如果它是一个半径为（$\ell+1$）的球，我们得到一个类似于（8.12）的因子。接下来，我们可以对 θ 中剩余的 $\mathcal{F}$ 个连通分量求和，得到（8.9）。

□

8.1 可容许函数

稍后，我们将反复把格林函数局域化到嵌入森林 $\mathcal{F}\subset\mathcal{G}$ 上，并将类树结构的主项与涨落分离开来。具体而言，对于顶点 w、$w'\in\mathbf{i}$，我们用确定性局部核 $L_{ww'}(z,\ \mathcal{F},\ \mathcal{G})$近似全局格林函数的矩阵元 $G_{ww'}(z)$；当 $\mathcal{F}$的邻域无环时，该核与若干份 d-正则树上的格林函数一致。误差 $G^\circ:=G-L$ 将以微扰方式处理。为整理由此得到的表达式，我们引入一类可容许函数，即与核心边和切换边相关联的预解式因子的乘积。

定义 8.5（局域格林函数）。给定嵌入于 $\mathcal{G}$中的森林 $\mathcal{F}=$（$\mathbf{i}$ E），我们定义局域格林函数 L（z，$\mathcal{F}$，$\mathcal{G}$）：对于 w，$w'\in\mathbf{i}$，

$$L_{ww'}(z,\mathcal{F},\mathcal{G})=P_{ww'}(\mathcal{F},z,m_{\mathrm{sc}}(z)). \tag{8.13}$$

给定事件 I（$\mathcal{F}$，$\mathcal{G}$）$=1$，$L_{ww'}$ 就是若干份 d-正则树上的格林函数（回顾定理 3.3）：$L_{ww'}=0$ 若 w，w' 在 $\mathcal{F}$中不连通，否则，

$$L_{ww'}=m_d(z)\left(-\frac{m_{\mathrm{sc}}(z)}{\sqrt{d-1}}\right)^{\mathrm{dist}_{\mathcal{F}}(w,w')}.$$

我们还将格林函数的中心化版本记作

$$G^\circ_{ww'}(z)=G_{ww'}(z)-L_{ww'}(z,\mathcal{F},\mathcal{G}). \tag{8.14}$$

当上下文清楚时，为简洁起见，我们将简单地写作 $G^\circ(z)$ $L(z,\mathcal{F},\mathcal{G})$ *as* G°,L y.

注 8.6. 每一步中，我们通过纳入局部重采样数据（$\mathcal{F}\subset\mathcal{F}^+$ 是 $\mathcal{G}$ 的嵌入子图），将森林 $\mathcal{F}=(\mathbf{i}\ E)$ 扩展为新的森林 $\mathcal{F}^+=(\mathbf{i}^+,E^+)$。给定事件 $I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})=1$，局部格林函数彼此相容（两者均由若干个 d-正则树的格林函数给出）

$$L_{ww'}(z,\mathcal{F},\mathcal{G})=L_{ww'}(z,\mathcal{F}^+,\mathcal{G}),\quad w,w'\in\mathbf{i}.$$

接下来，我们需要一个移除一个顶点后的局域格林函数：令 $(i,\ o)\in\mathcal{C}\setminus\mathcal{C}^\circ$，并回顾 $P^{(i)}$ 自(3.5)，

$$L^{(i)}_{ww'}:=L^{(i)}_{ww'}(z,\mathcal{F},\mathcal{G}):=P^{(i)}_{ww'}(\mathcal{F},z,m_{\mathrm{sc}}(z)). \tag{8.15}$$

定义 *8.7*（可容许函数）。考虑 *(8.4)* 中定义的森林 $\mathcal{F} = (\mathcal{i}\ E)$，其切换边为$\mathcal{K}$，核心边为 $\mathcal{C}$，未使用的核心边为 $\mathcal{C}^\circ$。对于任意非负整数 $r \geqslant 0$，我们将可容许函数的集合记为 $\mathcal{Adm}(r, \mathcal{F}, \mathcal{G})$，其中函数 $R_{\mathfrak{i}} \in \mathcal{Adm}(r, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ 包含 r 个如下形式的因子

$$\{(G^{(b)}_{cc} - Q)\}_{(b,c)\in\mathcal{C}^\circ}, \quad \{G^{(bb')}_{cc'}, G^{(b')}_{bc'}, G_{bb'}\}_{(b,c)\neq(b',c')\in\mathcal{C}^\circ}, \quad \{G^\circ_{ss'}\}_{s,s'\in\mathcal{K}}, \quad (Q - m_{\mathrm{sc}}(z)). \tag{8.16}$$

注记 8.8。在每一步中，我们通过纳入局部重抽样数据，将森林 $\mathcal{F}$ 扩展为新的森林 $\mathcal{F}^+$。这一变化也会影响可容许函数集，该函数集现在扩展如下：

$$\mathrm{Adm}(r, \mathcal{F}, \mathcal{G}) \subset \mathrm{Adm}(r, \mathcal{F}^+, \mathcal{G}).$$

现在我们给出界定可容许函数中所涉及各项的一般方法（回顾定理 8.7）。

命题 8.9。取 $z \in \mathbf{D}$ （回顾 (1.8)）。则有以下结论：

1. 对于 B 中的任意因子 (8.16)，有

$$\mathbf{1}(\mathcal{G} \in \Omega) I(\mathcal{F}, \mathcal{G}) |B| \lesssim N^{-\mathfrak{b}}. \tag{8.17}$$

2. 令 $R_{\mathfrak{i}} \in \mathrm{Adm}(r, \boldsymbol{r}, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ 如定理 *8.7* 中所定义。若 $R_{\mathfrak{i}}$ 包含两个形如 $\{G^{(bb')}_{cc'}$、$G^{(b')}{}_{bc'}, G_{bb'}\}$的项，其中 $(c, b) \neq (c', b') \in \mathcal{C}^\circ$，则

$$\frac{(d-1)^{3\ell r}}{Z_{\mathcal{F}}} \sum_{\mathfrak{i}} \mathbf{1}(\mathcal{G} \in \Omega) I(\mathcal{F}, \mathcal{G}) R_{\mathfrak{i}} = \mathrm{O}\left(\frac{(d-1)^{3\ell r} N^{\mathfrak{o}}}{N^{(r-2)\mathfrak{b}}} \Phi \right). \tag{8.18}$$

If 进一步假设 $r \geqslant 3$，则 (8.18) 的期望可由 $\mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}/2} \mathbb{E}[\Psi_p])$界定；

定理 *8.9* 的证明。断言 (8.17) 由集合 Ω 的定义 (3.21) 得出，证明方式与定理 3.9 相同。因此，我们省略其证明。对于 (8.18)，我们证明 $R_{\mathfrak{i}}$ 包含 $(G^{(bb')}{}_{cc'})^2$ 的情形。其他情形的证明方式类似，故略去。首先，我们可以利用 ($R_{\mathfrak{i}}$ 式 (8.17)，给 $N^{-(r-2)\mathfrak{b}}$ 一个界。于是 (8.18) 化为

$$\frac{(d-1)^{3\ell r}}{Z_{\mathcal{F}}} \sum_{\mathfrak{i}} \mathbf{1}(\mathcal{G} \in \Omega) I(\mathcal{F}, \mathcal{G}) |R_{\mathfrak{i}}| \lesssim \frac{(d-1)^{3\ell r}}{N^{(r-2)\mathfrak{b}} Z_{\mathcal{F}}} \sum_{\mathfrak{i}} \mathbf{1}(\mathcal{G} \in \Omega) I(\mathcal{F}, \mathcal{G}) |G^{(bb')}_{cc'}|^2 \lesssim \frac{(d-1)^{3\ell r} \Phi}{N^{(r-2)\mathfrak{b}} Z_{\mathcal{F}}}, \tag{8.19}$$

这可由与 (7.49) 相同的论证得到。 □

9 使用舒尔补公式进行切换

本节将使用舒尔补公式研究局部重采样后的格林函数。我们回顾第 5 节中的局部重采样及相关记号，并引入以下 S-乘积项。

定义 9.1 (S-乘积项)。固定 $r \geqslant 0$，定义 R_r 为一个阶数为 r 的 S-乘积项（其中“S”表示这些项来自使用舒尔补公式进行的展开），若它是由 r 个以下形式的因子相乘得到的：

$$(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha} - Q), \quad G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}, \quad (Q - m_{\mathrm{sc}}(z)), \quad \alpha \neq \beta \in [\![\mu]\!].$$

在下面的命题中，我们推导出一种展开，适用于至多有一个指标位于 $\{i, o\}$ 中的格林函数元素因子。证明方法与定理 7.4 完全相同，都是使用舒尔补公式，因此省略证明。

~命题 9.2。假设 $\mathcal{G}, \mathcal{G} \in \Omega$ 且 $I(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}) = 1$（回忆式 (8.6)），并定义指标集 $A_i := \{\alpha \in [\![\mu]\!] : \mathrm{dist}_{\mathcal{T}}(i, l_\alpha) = \ell + 1\}$（见图 5）。那么，对于任意未使用的核心边 $(b, c) \neq (b', c') \in \mathcal{C}^\circ \setminus \{(i, o)\}$，以下结论成立：

1. $\widetilde{G}^{(ib)}_{oc}$ 和 $\widetilde{G}^{(b)}_{ic}$ 可以改写为一个加权和

$$\frac{1}{(d-1)^{\ell/2}} \sum_{\alpha \in [\![\mu]\!]} \mathfrak{c}_1(\mathbf{1}(\alpha \in \mathsf{A}_i)) G^{(b_\alpha b)}_{c_\alpha c} + \mathcal{U} + \mathcal{E}, \tag{9.1}$$

其中 $|\mathfrak{c}_1(\cdot)| \lesssim 1$；$\mathcal{U}$ 是一个 O(1)加权的形如 $(d-1)^{3r\ell} R_r G^{(b_\alpha b)_{c_\alpha c}}$ 的项之和，其中 R_r 为一个S-乘积项（见定理 9.1），且 $r \geqslant 1$，且误差 $\mathcal{E}$ 的界为

$$|\mathcal{E}| \lesssim \sum_{\alpha \in [\![\mu]\!]} |\widetilde{G}^{(\mathbb{T}b)}_{c_\alpha c} - G^{(b_\alpha b)}_{c_\alpha c}| + \sum_{\alpha, \beta \in [\![\mu]\!]} |\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta} - G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}| + N^{-2}. \tag{9.2}$$

2. $\widetilde{G}_{ib}$ 和 $\widetilde{G}^{(i)}_{ob}$ 可以改写为一个加权和

$$\frac{1}{(d-1)^{\ell/2}} \sum_{\alpha \in [\![\mu]\!]} \mathfrak{c}_1(\mathbf{1}(\alpha \in \mathsf{A}_i)) G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha b} + \mathcal{U} + \mathcal{E},$$

其中 $|\mathfrak{c}_1(\cdot)| \lesssim 1$；$\mathcal{U}$ 是一个 O(1)加权的形如 $(d-1)^{3r\ell} R_r G^{(b_\alpha)_{\,c_\alpha b}}$ 的项之和，其中 R_r 为一个S-乘积项（见定理 9.1），且 $r \geqslant 1$；且误差 $\mathcal{E}$ 的界为

$$|\mathcal{E}| \lesssim \sum_{\alpha \in [\![\mu]\!]} |\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha b} - G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha b}| + \sum_{\alpha, \beta \in [\![\mu]\!]} |\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta} - G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}| + N^{-2}.$$

3. $\widetilde{G}^{(b)}_{cc}, \widetilde{G}^{(bb')}_{\;\;cc'}, \widetilde{G}^{(b')}_{\;\;bc'}$ 和 $\widetilde{G}_{bb'}$ 可以改写为

$$\begin{aligned}
\widetilde{G}^{(b)}_{cc} &= G^{(b)}_{cc} + \mathcal{E}, \quad |\mathcal{E}| \lesssim |\widetilde{G}^{(\mathbb{T}b)}_{cc} - G^{(b)}_{cc}| + (d-1)^{\ell} \sum_{\alpha \in [\![\mu]\!]} |\widetilde{G}^{(\mathbb{T}b)}_{c_\alpha c}|^2, \\
\widetilde{G}^{(bb')}_{cc'} &= G^{(bb')}_{cc'} + \mathcal{E}, \quad |\mathcal{E}| \lesssim |\widetilde{G}^{(\mathbb{T}bb')}_{cc'} - G^{(bb')}_{cc'}| + (d-1)^{\ell} \sum_{\alpha \in [\![\mu]\!]} (|\widetilde{G}^{(\mathbb{T}bb')}_{c_\alpha c}|^2 + |\widetilde{G}^{(\mathbb{T}bb')}_{c' c_\alpha}|^2), \\
\widetilde{G}^{(b')}_{bc'} &= G^{(b')}_{bc'} + \mathcal{E}, \quad |\mathcal{E}| \lesssim |\widetilde{G}^{(\mathbb{T}b')}_{bc'} - G^{(b')}_{bc'}| + (d-1)^{\ell} \sum_{\alpha \in [\![\mu]\!]} (|\widetilde{G}^{(\mathbb{T}b')}_{bc_\alpha}|^2 + |\widetilde{G}^{(\mathbb{T}b')}_{c' c_\alpha}|^2), \\
\widetilde{G}_{bb'} &= G_{bb'} + \mathcal{E}, \quad |\mathcal{E}| \lesssim |\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{bb'} - G_{bb'}| + (d-1)^{\ell} \sum_{\alpha \in [\![\mu]\!]} (|\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{bc_\alpha}|^2 + |\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{b' c_\alpha}|^2).
\end{aligned}$$

10 使用伍德伯里公式进行切换

本节中，我们介绍一种基于伍德伯里公式（2.2）的新展开。在本节余下部分，我们假设 $I(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}) = 1$（回顾（8.6））。那么，切换边 $(b_\alpha, c_\alpha)^{\alpha \in [\![\mu]\!]}$ 彼此相距甚远，且具有较大的树邻域。根据定理 8.2, $I(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}) = 1$ 以高概率成立，前提是 $I(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 1$。

~我们将切换后的图的归一化邻接矩阵与原图的归一化邻接矩阵进行比较， $H - H$。我们回顾（5.5）

$$\widetilde{H} - H = -\sum_{\alpha \in [\![\mu]\!]} \xi_\alpha, \quad \xi_\alpha := \frac{1}{\sqrt{d-1}} \left(\Delta_{l_\alpha a_\alpha} + \Delta_{b_\alpha c_\alpha} - \Delta_{l_\alpha c_\alpha} - \Delta_{a_\alpha b_\alpha} \right).$$

我们将此差的秩记为 $r = \mathsf{O}((d-1)^\ell)$，并改写

$$\widetilde{H} - H = UV^\top,$$

其中 U，V是 $N\times r$矩阵，且它们的非零行对应于顶点 $\{l_\alpha,a_\alpha,b_\alpha,c_\alpha\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}$。然后，伍德伯里公式（2.2）给出

$$\widetilde{G}-G=(H-z+UV^\top)^{-1}-(H-z)^{-1}=-GU(\mathbb{I}+V^\top GU)^{-1}V^\top G. \tag{10.1}$$

~我们回顾 $\mathcal{F}^+$ 如（8.3）中所示，并将 $\mathcal{F}^+$ 记为它切换后的版本

$$\mathcal{F}^+:=\mathcal{F}\cup\mathcal{B}_\ell(o,\mathcal{G})\cup\bigcup_{\alpha=1}^{\mu}\{(l_\alpha,a_\alpha),(b_\alpha,c_\alpha)\},\quad \widetilde{\mathcal{F}}^+:=\mathcal{F}\cup\mathcal{B}_\ell(o,\mathcal{G})\cup\bigcup_{\alpha=1}^{\mu}\{(l_\alpha,c_\alpha),(a_\alpha,b_\alpha)\}.$$

~ ~我们将 $\mathcal{F}^+$、$\mathcal{F}^+$ 分别视为 $\mathcal{G}$的子图 $\mathcal{G}$。我们将使用局部格林函数分析（10.1）

$$L:=P(\mathcal{F}^+,z,m_{\mathrm{sc}}(z)),\quad \widetilde{L}:=P(\widetilde{\mathcal{F}}^+,z,m_{\mathrm{sc}}(z)), \tag{10.2}$$

~如定理3.4中所定义。我们指出，关于 $I(\mathcal{F}^+,\ \mathcal{G})\ =1$的条件下，$L$ 和 L 都只是 d-正则树的格林函数。

注意，当限制在 $\mathcal{F}^+$ 的顶点集上时（其中包含顶点 $\{l_\alpha,a_\alpha,b_\alpha,c_\alpha\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}$），

$$\widetilde{L}^{-1}-L^{-1}=\widetilde{H}-H=-\sum_{\alpha\in[\![\mu]\!]}\xi_\alpha=UV^\top. \tag{10.3}$$

~我们也可以对 L应用伍德伯里公式 L，得到

$$\widetilde{L}-L=-LU(\mathbb{I}+V^\top LU)^{-1}V^\top L. \tag{10.4}$$

一个关键观察是，$-U(\mathbb{I}+V^\top LU)^{-1}V^\top$ 在（10.1）和（10.4）中的形式都非常简单。

引理 10.1。我们引入如下矩阵 F，它在顶点集 $\{l_\alpha,a_\alpha,b_\alpha,c_\alpha\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}$ 上非零，

$$F:=\sum_{\alpha\in[\![\mu]\!]}\xi_\alpha+\sum_{\alpha,\beta\in[\![\mu]\!]}\xi_\alpha\widetilde{L}\xi_\beta. \tag{10.5}$$

Then

$$F=-U(\mathbb{I}+V^\top LU)^{-1}V^\top. \tag{10.6}$$

定理 *10.1* 的证明。矩阵 U、V的非零行由 $\{l_\alpha,a_\alpha,b_\alpha,c_\alpha\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}$参数化。通过重新整理上述表达式（10.4）（我们将所有矩阵视为限制在顶点集 $\mathcal{F}^+$上的矩阵），可得

$$L^{-1}\widetilde{L}L^{-1}-L^{-1}=-U(\mathbb{I}+V^\top LU)^{-1}V^\top. \tag{10.7}$$

我们可以将（10.7）重新整理为

$$\begin{aligned}&-U(\mathbb{I}+V^\top LU)^{-1}V^\top=L^{-1}\widetilde{L}L^{-1}-L^{-1}=L^{-1}\widetilde{L}\widetilde{L}^{-1}+L^{-1}\widetilde{L}(L^{-1}-\widetilde{L}^{-1})-L^{-1}\\&=L^{-1}\widetilde{L}(L^{-1}-\widetilde{L}^{-1})=(L^{-1}-\widetilde{L}^{-1})\widetilde{L}(L^{-1}-\widetilde{L}^{-1})+\widetilde{L}^{-1}\widetilde{L}(L^{-1}-\widetilde{L}^{-1})\\&=(L^{-1}-\widetilde{L}^{-1})+(L^{-1}-\widetilde{L}^{-1})\widetilde{L}(L^{-1}-\widetilde{L}^{-1})=\sum_{\alpha\in[\![\mu]\!]}\xi_\alpha+\sum_{\alpha,\beta\in[\![\mu]\!]}\xi_\alpha\widetilde{L}\xi_\beta=F,\end{aligned} \tag{10.8}$$

其中在最后一个等式中我们使用了（10.3）。 □

~ ~下一个引理尝试用 $L-L$ 表示并展开 $G-G$。

引理 10.2。 假设 $\mathcal{G}$，$\mathcal{G}\in\Omega$ 以及 $I(\mathcal{F}^+,\ \mathcal{G})=1$（回顾 (8.6)），并回顾 $G^\circ=(G-L)$。那么我们有：

$$\widetilde{G}-G=\sum_{k\geqslant 0}GF(G^\circ F)^kG, \tag{10.9}$$

证明。由（3.21）可知，对 $x,\ y\in\{l_\alpha,a_\alpha,b_\alpha,c_\alpha\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}$，均有一致成立的结论。于是，我们可以利用预解式恒等式（2.1）和（10.6）展开（10.1），从而得到

$$\begin{aligned}\widetilde{G}-G&=-GU(\mathbb{I}+V^\top GU)^{-1}V^\top G=-GU(\mathbb{I}+V^\top LU+V^\top G^\circ U)^{-1}V^\top G\\&=-GU\left((\mathbb{I}+V^\top LU)^{-1}\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k(V^\top G^\circ U(\mathbb{I}+V^\top LU)^{-1})^k\right)V^\top G\\&=\sum_{k\geqslant 0}(-1)^{k+1}GU(\mathbb{I}+V^\top LU)^{-1}(V^\top G^\circ U(\mathbb{I}+V^\top LU)^{-1})^kV^\top G\\&=\sum_{k\geqslant 0}GF(G^\circ F)^kG.\end{aligned}$$

由此得到（10.9）。 □

命题 10.3。 假设 $\mathcal{G}$，$\mathcal{G}\in\Omega$ 且 $I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})=1$（回忆（(8.6)）。那么对 $w,\ w'\in[\![N]\!]$，有

$$|(\widetilde{G}-G)_{ww'}|\leqslant(d-1)^\ell\sum_{x\in\{l_\alpha,a_\alpha,b_\alpha,c_\alpha\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}}(|G_{wx}|^2+|G_{w'x}|^2). \tag{10.10}$$

因此，我们得到以下界

$$|\widetilde{Q}-Q|,|\widetilde{m}-m|\lesssim(d-1)^{3\ell}N^{\mathfrak{o}}\Phi. \tag{10.11}$$

我们先给出以下估计，稍后将用它们来证明定理 10.3。

断言 10.4。 矩阵 F（来自 (10.5)）仅在顶点 $\{l_\alpha,a_\alpha,b_\alpha,c_\alpha\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}$上有非零元素，且

$$\sum_{s,s'\in\{l_\alpha,a_\alpha,b_\alpha,c_\alpha\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}}|F_{ss'}|\lesssim\ell(d-1)^\ell. \tag{10.12}$$

定理的证明 *10.4*。从表达式（10.5）很容易看出，F 只有在顶点 $\{l_\alpha,a_\alpha,b_\alpha,c_\alpha\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}$处才有非零元素。我们指出，关于 $I(\mathcal{F}^+,\ \mathcal{G})=1$的条件下，$L$和 L都只是 d-正则树副本的格林函数。因此，估计（3.1）给出

$$|\widetilde{L}_{\mathsf{J}_\alpha\mathsf{J}'_{\alpha'}}|\lesssim(d-1)^{-\operatorname{dist}_\mathcal{T}(l_\alpha,l_{\alpha'})/2},\ \text{for}\ \mathsf{J},\mathsf{J}'\in\{l,a,b,c\},\quad\alpha,\alpha'\in[\![\mu]\!]. \tag{10.13}$$

将（10.13）代入（10.5），得到

$$\begin{aligned}&|F_{\mathsf{J}_\alpha\mathsf{J}'_{\alpha'}}|\lesssim(d-1)^{-\operatorname{dist}_\mathcal{T}(l_\alpha,l_{\alpha'})/2},\ \text{for}\ \mathsf{J},\mathsf{J}'\in\{l,a,b,c\},\quad\alpha,\alpha'\in[\![\mu]\!],\\&\sum_{s,s'\in\{l_\alpha,a_\alpha,b_\alpha,c_\alpha\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}}|F_{ss'}|\lesssim\sum_{\alpha,\alpha'\in[\![\mu]\!]}(d-1)^{-\operatorname{dist}_\mathcal{T}(l_\alpha,l_{\alpha'})/2}\lesssim\ell(d-1)^\ell,\end{aligned}$$

其中，在最后一个不等式中，我们用到了对 $0\leqslant r\leqslant\ell$ 有 $\{\alpha'\in[\![\mu]\!]:\operatorname{dist}_\mathcal{T}(l_\alpha,\ l_{\alpha'})=2r\}=\mathsf{O}((d-1)^r)$。 □

定理的证明 *10.3*。对于任意 $x,\ y\in\{l_\alpha,a_\alpha,b_\alpha,c_\alpha\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}$，我们有

$$|(F(G^\circ F)^k)_{xy}|\leqslant N^{-k\mathfrak{b}}\sum_{s_1,s_2}|F_{s_1s_2}|\sum_{s_3,s_4}|F_{s_3s_4}|\cdots\sum_{s_{2k-1},s_{2k}}|F_{s_{2k-1}s_{2k}}|\leqslant N^{-k\mathfrak{b}}\ell^k(d-1)^{k\ell} \tag{10.14}$$

其中在第一个结论中，我们使用了 $|G^{\circ}_{xy}| \leqslant N^{-\mathfrak{b}}$ 对 x、$y \in \{l_\alpha, a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}$ 一致成立，这由（3.21）得到；在第二个结论中，我们使用了（10.12）。

断言（10.10）由（10.9）得出，

$$\begin{aligned}|(\widetilde{G}-G)_{ww'}| = \left|\sum_{k\geqslant 0}(GF(G^{\circ}F)^kG)_{ww'}\right| &\leqslant \sum_{x,y\in\{l_\alpha,a_\alpha,b_\alpha,c_\alpha\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}}\ \sum_{k\geqslant 0}(\ell N^{-\mathfrak{b}}(d-1)^{\ell})^k|G_{wx}||G_{yw'}| \\ &\leqslant \sum_{x,y\in\{l_\alpha,a_\alpha,b_\alpha,c_\alpha\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}}|G_{wx}||G_{yw'}| \\ &\leqslant (d-1)^{\ell}\sum_{x\in\{l_\alpha,a_\alpha,b_\alpha,c_\alpha\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}}(|G_{wx}|^2+|G_{w'x}|^2).\end{aligned} \tag{10.15}$$

其中，在第一个陈述中我们使用了（10.9）；在第二个陈述中我们使用了（10.14）；在第三个陈述中我们对几何级数求和；在最后一个陈述中我们使用了柯西-施瓦茨不等式。

接下来我们证明（10.11）对 $|\widetilde{Q}-Q|$ 成立，$|\widetilde{m}-m|$ 的陈述由（5.8）得出。差 $\widetilde{Q}-Q$ 可以改写为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{Nd}\sum_{\{u,v\}\notin\{\{l_\alpha,a_\alpha\},\{b_\alpha,c_\alpha\}\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}}A_{uv}(\widetilde{G}^{(u)}_{vv}-G^{(u)}_{vv})+\frac{1}{Nd}\sum_{\{u,v\}\in\{\{l_\alpha,c_\alpha\},\{a_\alpha,b_\alpha\}\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}}(\widetilde{G}^{(u)}_{vv}-G^{(u)}_{vv}) \\ &+\frac{1}{Nd}\sum_{\{u,v\}\in\{\{l_\alpha,c_\alpha\},\{a_\alpha,b_\alpha\}\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}}G^{(u)}_{vv}-\frac{1}{Nd}\sum_{\{u,v\}\in\{\{l_\alpha,a_\alpha\},\{b_\alpha,c_\alpha\}\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}}G^{(u)}_{vv}.\end{aligned} \tag{10.16}$$

对于 $G^{(u)}_{vv}$，$\widetilde{G}^{(u)}_{vv}$ 在（10.16）中，我们可以利用舒尔补公式（2.5）将它们改写，

$$G^{(u)}_{vv}=G_{vv}-\frac{G^2_{uv}}{G_{uu}},\quad \widetilde{G}^{(u)}_{vv}=\widetilde{G}_{vv}-\frac{\widetilde{G}^2_{uv}}{\widetilde{G}_{uu}}. \tag{10.17}$$

对于差 $\widetilde{G}^{(u)}_{vv}-G^{(u)}_{vv}$，利用（10.17）和（3.21），我们可以给出其界为

$$|\widetilde{G}^{(u)}_{vv}-G^{(u)}_{vv}|\leqslant|\widetilde{G}_{vv}-G_{vv}|+|\widetilde{G}_{uv}-G_{uv}|+|\widetilde{G}_{uu}-G_{uu}|. \tag{10.18}$$

将（10.18）代入（10.16），我们得出

$$\begin{aligned}|\widetilde{Q}-Q|&\lesssim\sum_{u\sim v}(|\widetilde{G}_{vv}-G_{vv}|+|\widetilde{G}_{uv}-G_{uv}|+|\widetilde{G}_{uu}-G_{uu}|)+\frac{(d-1)^{\ell}}{N} \\ &\lesssim(d-1)^{\ell}\sum_{u\sim v}\sum_{x\in\{l_\alpha,a_\alpha,b_\alpha,c_\alpha\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}}|(G_{ux}|^2+|G_{vx}|^2)+\frac{(d-1)^{\ell}}{N}\lesssim(d-1)^{3\ell}N^{\mathfrak{o}}\Phi,\end{aligned}$$

其中在第二个陈述中，我们使用了（10.10）；在最后一个不等式中，我们使用了 Ward 恒等式界。 □

11 自洽方程的证明

本节证明定理 4.5 中的 (4.22)。如第 8 节所述，在每次迭代中，我们通过在 (i,o) 附近进行局部重采样来估计 (8.1)。我们将证明，该期望可分解为 O(1) 加权和，其中各项具有相同的形式。我们从 (8.1) 的加权版本开始，如下述命题中 (11.1) 左边所示。这里，额外的因子 $(d-1)^{3r\ell}$ 取决于可容许函数 $R_{\mathfrak{i}\mathfrak{o}}$。读者可以这样理解：$R_r$ 中的每一项（由 r 个形如 (8.16) 的因子相乘而成）都附带一个因子 $(d-1)^{3\ell}$。由 (8.17) 可知，即使带有这些因子，各项的大小仍然很小，即有界于 $(d-1)^{3r\ell}N^{-\mathfrak{b}r}\ll 1$。引入这些因子是为了确保本节中的所有展开都是由各项构成的 O(1) 加权和，正如定理 7.2 中的定义。具体而言，组合因子被吸收到 $(d-1)^{3r\ell}$ 中。

下面的命题将图 $\mathcal{G}$ 的格林函数期望表示为局部重采样后新图 $\mathcal{G}$ 的 $\widetilde{\ }$ 量。

命题 *11.1*。考虑一个森林 $\mathcal{F}=(i\ E)$，如 *(8.4)* 中所示，以及一个函数 $(G_{oo}^{(i)}-Y)R_{\mathfrak{i}}$，满足 $R_{\mathfrak{i}}\in \mathit{Adm}(r,\mathcal{G},\mathcal{F})$ 和 $r\geqslant 1$。我们使用重采样数据 $\widetilde{S}=\{(l_\alpha,a_\alpha),(b_\alpha,c_\alpha)\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}$，对 $(i,o)\in\mathcal{F}$ 周围进行局部重采样，并将新图记为 $\mathcal{G}=T_{\mathbf{S}}(\mathcal{G})$，其对应的格林函数记为 $\widetilde{G}$。那么

$$\begin{aligned}&\frac{(d-1)^{3r\ell}}{Z_{\mathcal{F}}}\sum_{\mathfrak{i}}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F},\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)(G_{oo}^{(i)}-Y)R_{\mathfrak{i}}\right]\\&=\frac{(d-1)^{3r\ell}}{Z_{\mathcal{F}^+}}\sum_{\mathfrak{i}^+}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G},\widetilde{\mathcal{G}}\in\Omega)(\widetilde{G}_{oo}^{(i)}-Y)\widetilde{R}_{\mathfrak{i}}\right]+\mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}/2}\mathbb{E}[\Psi]).\end{aligned}\tag{11.1}$$

这里，$\widetilde{R}_{\mathfrak{i}}$ 是通过计算图 $\widetilde{\mathcal{G}}$ 的 $R_{\mathfrak{i}}$ 得到的。

如果我们暂时忽略指示函数和对嵌入取平均，上述命题就化为对称性

$$\mathbb{E}\Big[(G_{oo}^{(i)}-Y)R_{\mathfrak{i}}\Big]=\mathbb{E}\Big[(\widetilde{G}_{oo}^{(i)}-\widetilde{Y})\widetilde{R}_{\mathfrak{i}}\Big]=\mathbb{E}\Big[(\widetilde{G}_{oo}^{(i)}-Y)\widetilde{R}_{\mathfrak{i}}\Big]-\mathbb{E}\Big[(\widetilde{Y}-Y)\widetilde{R}_{\mathfrak{i}}\Big].\tag{11.2}$$

指示函数 $I(\mathcal{F},\mathcal{G})$ 仅将注意范围限制在我们能够对格林函数作出良好估计的“良好”位置上。在此情形下，我们有 $|\widetilde{R}_{\mathfrak{i}}|\lesssim N^{-\mathfrak{b}}$ 以及

$$|\widetilde{Y}-Y|=|Y_\ell(\widetilde{Q},z)-Y_\ell(Q,z)|\lesssim|\ell(\widetilde{Q}-Q)|\lesssim\ell(d-1)^{3\ell}N^{\mathfrak{o}}\Phi$$

其中我们用到了（3.9）和（10.11）。因此，（11.2）中的最后一项可忽略。定理 11.1的证明从略。

（11.1）的右端涉及切换后的图的格林函数 $\widetilde{\mathcal{G}}$。以下两个命题有助于估计这些格林函数，并将它们表示为仅涉及原图格林函数的 O(1) 加权和 $\mathcal{G}$，其误差可忽略。更重要的是，这些项与（11.1）左端的结构相匹配。

命题 *11.2.* 给定一个森林 $\mathcal{F}=(i\ E)$ 和一个函数 $(G_{oo}^{(i)}-Y)R_{\mathfrak{i}}$，满足 $R_{\mathfrak{i}}\in \mathit{Adm}(r,\mathcal{F},\mathcal{G})$（回顾定理 *8.7*）。通过在 $\widetilde{(i,o)}\in\mathcal{F}$ 周围进行局部重采样，并使用重采样数据 $S=\{(l_\alpha,a_\alpha),(b_\alpha,c_\alpha)\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}$，我们构造 $\mathcal{F}^+=(i^+,E^+)$（如 *(8.5)* 所示），并记为 $\mathcal{G}=T_{\mathbf{S}}(\mathcal{G})$。

1. 令 $r\geqslant 2$，并取 $R_{\mathfrak{i}}\in\mathrm{Adm}(r,\mathcal{F},\mathcal{G})$。那么，除去大小为 $\mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}/4}\mathbb{E}[\Psi])$ 的误差，

$$\frac{(d-1)^{3r\ell}}{(d-1)^{\mathfrak{q}\ell/2}Z_{\mathcal{F}^+}}\sum_{\mathfrak{i}^+}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G},\widetilde{\mathcal{G}}\in\Omega)(\widetilde{G}_{oo}^{(i)}-Y)\widetilde{R}_{\mathfrak{i}}\right]\tag{11.3}$$

可以改写为以下形式各项的 $\mathrm{O}(1)$ 加权和

$$\frac{(d-1)^{3r^+\ell}}{(d-1)^{\mathfrak{q}^+\ell/2}Z_{\mathcal{F}^+}}\sum_{\mathfrak{i}^+}\mathbb{E}[\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})(G_{c_\alpha c_\alpha}^{(b_\alpha)}-Y)R_{\mathfrak{i}^+}],\tag{11.4}$$

其中 $R_{\mathfrak{i}^+}\in\mathrm{Adm}(r^+,\mathcal{F}^+,\mathcal{G})$，且满足以下两种情况之一：$\mathfrak{q}^+\geqslant\mathfrak{q}+1$，$r^+\geqslant r$；或 $\mathfrak{q}^+\geqslant\mathfrak{q}$，$r^+\geqslant r+1$。

2. 令 $R_{\mathfrak{i}}=(G_{oo}^{(i)}-Q)$。那么，除去大小为 $\mathrm{O}((d-1)^{-\mathfrak{q}\ell/2}N^{\mathfrak{o}}\mathbb{E}[\Psi])$ 的误差，

$$\frac{1}{(d-1)^{\mathfrak{q}\ell/2}Z_{\mathcal{F}^+}}\sum_{\mathfrak{i}}\mathbb{E}[I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G},\widetilde{\mathcal{G}}\in\Omega)(\widetilde{G}_{oo}^{(i)}-Y)\widetilde{R}_{\mathfrak{i}}]\tag{11.5}$$

可以改写为一个 $\mathrm{O}(1)$-加权和，其各项的形式为 (11.4) 其中 $R_{\mathfrak{i}^+}\in\mathrm{Adm}(r^+,\mathcal{F}^+,\mathcal{G})$，其中 $r^+\geqslant 2$ 且 $\mathfrak{q}^+\geqslant\mathfrak{q}$，或者具有以下形式

$$\frac{1}{(d-1)^{\mathfrak{q}^+\ell/2}Z_{\mathcal{F}}}\sum_{\mathfrak{i}^+}\mathbb{E}[\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})(G_{c_\alpha c_\alpha}^{(b_\alpha)}-Y)(G_{c_\alpha c_\alpha}^{(b_\alpha)}-Q)],\tag{11.6}$$

其中 $\mathfrak{q}^+\geqslant\mathfrak{q}+1$。

断言 (4.22) 可通过迭代定理 11.1 和定理 11.2得到。

证明 （4.22）。我们回顾第 $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots$ 节中的森林序列 8。它们编码了局部重采样中涉及的所有边。根据定理 7.1 和定理 7.3，除去误差 $(d-1)^{2\ell}\mathbb{E}[\Psi]$，$\mathbb{E}[\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)(Q-Y)]$ 是以下两种形式的项的 O(1) 加权和

$$\frac{1}{(d-1)^{\mathfrak{q}\ell/2}Z_{\mathcal{F}_1}}\sum_{\mathbf{i}}\mathbb{E}[\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)I(\mathcal{F}_1,\mathcal{G})(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha}-Y)(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha}-Q)], \tag{11.7}$$

其中 $\mathfrak{q}\geqslant 0$；或者

$$\frac{(d-1)^{3r\ell}}{(d-1)^{\mathfrak{q}\ell/2}Z_{\mathcal{F}_1}}\sum_{\mathbf{i}}\mathbb{E}[\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)I(\mathcal{F}_1,\mathcal{G})(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha}-Y)R_{\mathbf{i}_1}], \tag{11.8}$$

其中 $\mathfrak{q}\geqslant 0$ 和 $r\geqslant 2$，且函数 $R_{\mathbf{i}_1}\in\mathsf{Adm}(r,\ \mathcal{F}_1,\ \mathcal{G})$。

上述表达式 (11.7) 符合定理 11.1 的形式，因此可以应用定理 11.1 和定理 11.2 进行迭代过程。定理 11.2 的结果基本上表明，进一步展开后，(11.7) 要么保持相同形式并带有一个额外因子 $(d-1)^{-\ell/2}$，要么转化为 (11.8)。同样，展开后，(11.8) 仍保持相同形式，要么带有一个额外的 $(d-1)^{-\ell/2}$因子，要么多出一项 (8.16) 形式的项，其上界为 $N^{-\mathfrak{b}}\ll(d-1)^{-\ell/2}$。因此，经过有限步，即 $\mathsf{O}(4\log_{d-1}(N)/\ell)$ 步后，所有项都以 $\mathsf{O}(N^{-2})=\mathsf{O}(\mathbb{E}[\Psi]/N)$ 为界。同时，定理 11.1 和定理 11.2 中的误差均以 $\mathsf{O}((d-1)^{2\ell}\mathbb{E}[\Psi])$ 为界。由此得到 (4.22)。

□

11.1 定理11.2 的证明

我们将 $R_{\mathbf{i}}\in\mathrm{Adm}(r,\ \mathcal{F},\ \mathcal{G})$记作定理11.2 (如定理8.7中一样），其中包含 r 个形如(8.16)的因子。

下面我们假设11.2 并在此假设下证明定理 $\mathfrak{q}=0$。当 $\mathfrak{q}\geqslant 1$ 时，只需将$(d-1)^{-\mathfrak{q}\ell/2}$相乘即可得到相应情形。为了使用第7节、第9 节和第10节中的各种命题，将$(\widetilde{G}^{(i)}_{oo}-Y)\widetilde{R}_{\mathbf{i}}$ 化简为未切换图 $\mathcal{G}$的相关项，我们需要根据这些因子对$R_{\mathbf{i}}$ 的依赖关系进行分类 i，o。设

$$B_0=(G^{(i)}_{oo}-Y),\quad R_{\mathbf{i}}=\prod_{j=1}^{r}B_j, \tag{11.9}$$

其中 B_j 具有以下形式之一

$$\begin{aligned}&\{G^{(b)}_{cc}-Q\}_{(b,c)\in\mathcal{C}^\circ},\quad \{G^{(ib)}_{oc},G^{(b)}_{ic},G_{ib},G^{(i)}_{ob}\}_{(i,o)\neq(b,c)\in\mathcal{C}^\circ},\\&\{G^{(bb')}_{cc'},G^{(b')}_{bc'},G_{bb'}\}_{(i,o)\neq(b,c),(b',c')\in\mathcal{C}^\circ},\quad (Q-m_{\mathrm{sc}}(z)).\end{aligned} \tag{11.10}$$

我们可以将(11.3)（其中 $\mathfrak{q}=0$）写成

$$\begin{aligned}&\frac{(d-1)^{3r\ell}}{Z_{\mathcal{F}^+}}\sum_{\mathbf{i}^+}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G},\widetilde{\mathcal{G}}\in\Omega)(\widetilde{G}^{(i)}_{oo}-Y)\widetilde{R}_{\mathbf{i}}\right]\\&=\frac{(d-1)^{3r\ell}}{Z_{\mathcal{F}^+}}\sum_{\mathbf{i}^+}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G},\widetilde{\mathcal{G}}\in\Omega)(\widetilde{G}^{(i)}_{oo}-Y)\prod_{j=1}^{r}\widetilde{B}_j\right].\end{aligned} \tag{11.11}$$

下面我们讨论局部重采样后（ B_j 如式（11.9）所示）的各项。在下面的第1项至第5 项中，对于任意 $h\geqslant 0$，我们记 R_h 为 h 个如下形式因子的乘积

$$(G^{(b)}_{cc}-Q),\quad \{G^{(bb')}_{cc'},G^{(b')}_{bc'},G_{bb'}\},\quad (Q-m_{\mathrm{sc}}(z)), \tag{11.12}$$

其中 $(b,\ c)\ \neq\ (b',\ c')\ \in \mathcal{K}^+$。它们是定理7.4 和定理9.2中的各项。图7 展示了示意图。

1. 根据定理 7.4，$\widetilde{G}^{(i)}_{oo} - Y = \widehat{B}_0 + \mathcal{E}_0$，其中 $\widehat{B}_0$ 由下式给出

$$\widehat{B}_0 = \frac{m_{\mathrm{sc}}^{2(\ell+1)}(z)}{(d-1)^{\ell+1}} \sum_{\alpha\in \mathsf{A}_i} (G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha} - Q) + \frac{m_{\mathrm{sc}}^{2(\ell+1)}(z)}{(d-1)^{\ell+1}} \sum_{\alpha\neq\beta\in \mathsf{A}_i} G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta} + \mathcal{U}_0. \tag{11.13}$$

这里，$\mathcal{U}_0$ 是由形如 $(d-1)^{3(h-1)\ell} R_h$ 的项构成的 O(1) 加权和，其中 $h \geqslant 2$，且每一项至少包含一个形如 $(G^{(b_\alpha)_{c_\alpha c_\alpha}} - Q)$ 或 $G^{(b_\alpha b_\beta)_{c_\alpha c_\beta}}$ 的因子；$\mathcal{E}_0$ 是 $\mathcal{E}$ 定理 7.4中的。

2. 对于 $B_j = (G^{(i)}_{oo} - Q)$，我们可以先将 $\widetilde{B}_j$ 改写为

$$\widetilde{B}_j = (\widetilde{G}^{(i)}_{oo} - \widetilde{Q}) = (\widetilde{G}^{(i)}_{oo} - Y) + (Y - \widetilde{Q}),$$

然后根据定理 7.4展开。这说明 $\widetilde{B}_j = \widehat{B}_j + \mathcal{E}_j$，其中

$$\widehat{B}_j = \frac{m_{\mathrm{sc}}^{2(\ell+1)}(z)}{(d-1)^{\ell+1}} \sum_{\alpha\in \mathsf{A}_i} (G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha} - Q) + \frac{m_{\mathrm{sc}}^{2(\ell+1)}(z)}{(d-1)^{\ell+1}} \sum_{\alpha\neq\beta\in \mathsf{A}_i} G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta} + \mathcal{U}_j. \tag{11.14}$$

这里，$\mathcal{U}_j$ 是由形如 $(d-1)^{3(h-1)\ell} R_h$ 的项构成的 O(1) 加权和，其中 $h \geqslant 2$；$\mathcal{E}_j$ 是 $\mathcal{E} + ((Y - Q) + (Q - Q))$，其中 $\mathcal{E}$ 来自定理 7.4。

3. 对于 $B_j \in \{G^{(ib)}_{oc}, G^{(b)}_{ic}\}_{(i,o)\neq(b,c)\in\mathcal{C}^\circ}$，由定理 9.2，我们有 $\widetilde{B}_j = \widehat{B}_j + \mathcal{E}_j$，其中

$$\widehat{B}_j = (d-1)^{-\ell/2} \sum_{\alpha\in[\![\mu]\!]} \mathfrak{c}_1(\mathbf{1}(\alpha\in \mathsf{A}_i)) G^{(b_\alpha b)}_{c_\alpha c} + \mathcal{U}_j. \tag{11.15}$$

这里 $\mathcal{U}_j$ 是各项的 O(1) 加权和，各项形如 $(d-1)^{3h\ell} R_h G^{(b_\alpha b)}_{c_\alpha c)}$，并带有 $h \geqslant 1$；并且 $\mathcal{E}_j$ 是 $\mathcal{E}$，见于定理 9.2的第一个陈述。

对于 $B_j \in \{G_{ib}, G^{(i)}_{ob}\}_{(i,o)\neq(b,c)\in\mathcal{C}^\circ}$，我们有类似的展开 $\widetilde{B}_j = \widehat{B}_j + \mathcal{E}_j$，其中

$$\widehat{B}_j = (d-1)^{-\ell/2} \sum_{\alpha\in[\![\mu]\!]} \mathfrak{c}_1(\mathbf{1}(\alpha\in \mathsf{A}_i)) G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha b} + \mathcal{U}_j. \tag{11.16}$$

这里 $\mathcal{U}_j$ 是各项的 O(1) 加权和，各项形如 $(d-1)^{3h\ell} R_h G^{(b_\alpha)\ c_\alpha b}$，并带有 $h \geqslant 2$；$\mathcal{E}_j$ 是 $\mathcal{E}$，见于定理 9.2的第二个陈述。

4. 对于 $B_j \in \{G^{(b)}_{cc}, G^{(bb')}_{cc'}\ ,\ G^{(b')}{}_{bc'}\ ,\ G_{bb'}\}_{(b,c)\neq(b',c')\ \in\mathcal{C}^\circ}$，根据定理 9.2，我们有 $\widetilde{B}_j = \widehat{B}_j + \mathcal{E}_j$，其中 $\widehat{B}_j = \mathcal{U}_j = B_j$，且 $\mathcal{E}_j$ 是 $\mathcal{E}$ 定理 9.2 第三条陈述中的。

5. 对于 $B_j = Q - m_{\mathrm{sc}}(z)$，根据定理 10.3中的陈述（10.11），$\widetilde{B}_j = \widehat{B}_j + \mathcal{E}_j$，其中 $\widehat{B}_j = \mathcal{U}_j = B_j = Q - m_{\mathrm{sc}}(z)$，以及 $|\mathcal{E}_j| \lesssim (d-1)^{6\ell} N^{\mathfrak{o}} \Phi$。

我们可以将 $(\widetilde{G}^{(i)}_{oo} - Y)\ \prod_{j=1}^r \widetilde{B}_j$ 中的（11.11）替换为 $\prod_{j=0}^r \widehat{B}_j$，该替换所产生的总体误差可以忽略不计。

引理11.3。采用定理中的记号和假设 *11.2*，我们可以将 (11.11)改写为

$$(11.11) = \frac{(d-1)^{3r\ell}}{Z_{\mathcal{F}^+}} \sum_{\mathbf{i}^+} \mathbb{E}\left[I(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}) \mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega) \prod_{j=0}^r \widehat{B}_j \right] + \mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}/2}\mathbb{E}[\Psi]). \tag{11.17}$$

如果暂时忽略指示函数和对嵌入取平均，则总替换误差满足

$$(d-1)^{3r\ell} N^{-r\mathfrak{b}} \sum_{j=0}^r \mathbb{E}[|\mathcal{E}_j|]$$

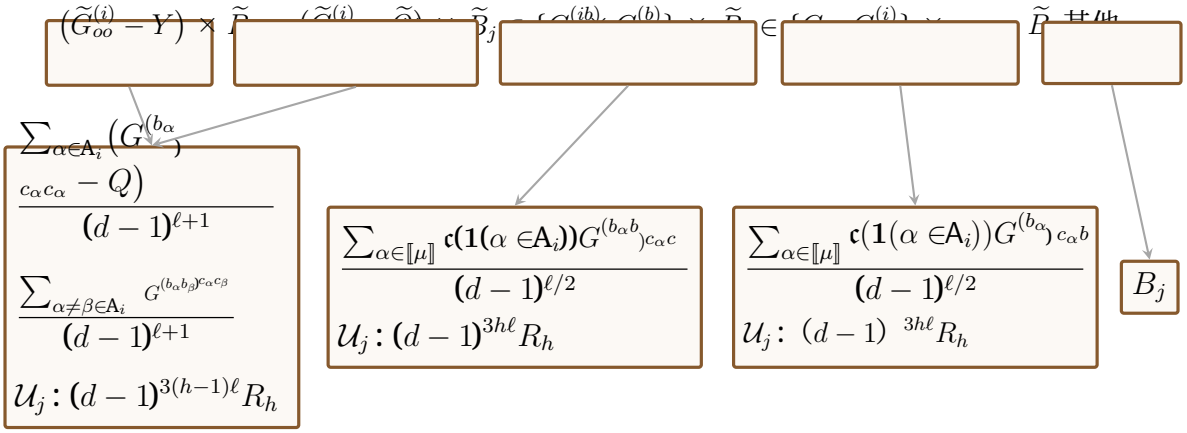

图 7：将表达式示意分解为三种情形及其乘积。

这由界 $|B_j| \leqslant N^{-\mathfrak{b}}$ （8.17）推出。使用与（7.55）中相同的论证，我们得到$\mathbb{E}[|\mathcal{E}_j|] \lesssim (d-1)^{2\ell}\mathbb{E}[\Psi]$ 在上述五种情况下均成立，但第 2 项除外；对于第 2 项，还会产生以下额外误差（忽略指示函数）

$$\mathbb{E}[|Y-Q|+|\widetilde{Q}-Q|] \lesssim N^{\mathfrak{b}/8}\mathbb{E}[\Psi]+\mathbb{E}[(d-1)^{3\ell}N^{\mathfrak{o}}\Phi],$$

其中我们用到了定义（4.21）和估计（10.11）。最后，（11.17）由以下事实可得：$r \geqslant 1$。

我们可以进一步将 $(d-1)^{3r\ell}\prod_{j=0}^{r}\widehat{B}_j$ 分解为（11.17）中的形式。条目 1–条目 5 给出了 $(d-1)^{3r\ell}\prod_{j=0}^{r}\widehat{B}_j$ 作为以下形式各项的 O(1) 加权和的分解：

$$\frac{(d-1)^{3\widehat{h}\ell}}{(d-1)^{(k_1+(k_2+k_3)/2)\ell}}\sum_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}}\prod_{m=1}^{k_1}A_{\alpha_m}\prod_{m=1}^{k_2}B_{\beta_m}\prod_{m=1}^{k_3/2}C_{\gamma_{2m-1}\gamma_{2m}}R_{\widehat{h}+1-k_1-k_2-k_3/2}. \tag{11.18}$$

这里，对 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$的求和遍历以下集合之一中的每个 α_m、β_m、γ_m：集合 $[\![\mu]\!]$、A_i或 $[\![\mu]\!]\setminus\mathsf{A}_i$（回顾一下$\mathsf{A}_i$，见图5）。式（11.18）中的因子定义如下：

$$A_\alpha=(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha}-Q),\quad B_\beta\in\left\{G^{(b_\beta b)}_{c_\beta c},G^{(b_\beta)}_{c_\beta b}\right\}_{(b,c)\in\mathcal{C}^\circ},\quad C_{\gamma\gamma'}=G^{(b_\gamma b_{\gamma'})}_{c_\gamma c_{\gamma'}}. \tag{11.19}$$

这里的 A_α 源自式 (11.13)、(11.14) 中的 $G^{(b_\alpha)}{}_{c_\alpha c_\alpha}-Q$。$B_\beta$ 来自式 (11.15)、(11.16) 中的 $G^{(b_\alpha b)}{}_{c_\alpha c}$、$G^{(b_\alpha)}{}_{c_\alpha b}$。$C_{\gamma\gamma'}$ 来自式 (11.13)、(11.14) 中的 $G^{(b_\alpha b_\beta)}{}_{c_\alpha c_\alpha}$。总共有 $k_1+k_2+k_3/2$ 个这样的项。$R_{\widehat{h}+1-k_1-k_2-k_3/2}$ 汇集了 $\mathcal{U}_j$ 中如条目 1–条目 5 所示的全部 R_h 因子，总数为 $h+1-k_1-k_2-k_3/2$。因此，(11.18) 中的求和项总共由 $h+1$ 个因子组成。

我们注意到，展开后，每个 B_j 至少产生一项，因此 $\widehat{h}+1 \geqslant r+1$。最后，系数 $(d-1)^{3\widehat{h}\ell}$ 源于以下关键观察：在条目 1–条目 5 所述的替换中，每个项 $(d-1)^{3\ell}B_j$ 都会被替换为式 (11.19) 中的项 $(d-1)^{3\ell}A_\alpha$、$(d-1)^{3\ell}A_\beta$、$(d-1)^{3\ell}C_{\gamma\gamma'}$ 之一，或被替换为因子 R_h（如式 (11.12) 中所示），其 $h \geqslant 1$ 的系数至多为 $(d-1)^{3h\ell}$。这就得到以下陈述

断言 11.4。 (11.17) 可以写成以下形式各项的一个 O(1)-加权和：对于 $h \geqslant r$,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(d-1)^{(k_1+(k_2+k_3)/2)\ell}}\sum_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}}\sum_{\mathbf{i}^+}\frac{(d-1)^{3\widehat{h}\ell}}{Z_{\mathcal{F}^+}}\times\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)\widehat{R}_{\mathbf{i}^+}\right],\\&\widehat{R}_{\mathbf{i}^+}=R_{\widehat{h}+1}=\prod_{m=1}^{k_1}A_{\alpha_m}\prod_{m=1}^{k_2}B_{\beta_m}\prod_{m=1}^{k_3/2}C_{\gamma_{2m-1}\gamma_{2m}}E(\boldsymbol{\chi}).\end{aligned} \tag{11.20}$$

这里 $R_{\widehat{h}+1}$ 是式 *(11.18)* 中的求和项。由此 $\widehat{R}_{\mathbf{i}^+} \in Adm(\widehat{h}+1, \mathcal{F}^+, \mathcal{G})$。对于 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 的求和遍历某个集合 $[\![\mu]\!]$、A_i 或 $[\![\mu]\!] \setminus A_i$ 中的每个 $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m$；式 *(11.20)* 中的因子由式 *(11.19)* 给出，而 $E(\boldsymbol{\chi}) = R_{\widehat{h}+1-k_1-k_2-k_3/2}$ 是其余各项的乘积，它依赖于某个$\boldsymbol{\chi} \subset [\![\mu]\!]$的 $\{b_\chi, c_\chi\}_{\chi \in \boldsymbol{\chi}}$。

对 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$ 在（11.20）中的求和会产生形如 $(d-1)^{(k_1+k_2+k_3)\,\ell}$ 的项11.4）。注意，这个数远大于分母中的归一化因子 $(d-1)^{(k_1+\,(k_2+k_3)\,/2)\,\ell}$。不过，正如我们将在定理 11.6中证明的，其中大多数项几乎可以立即看出是可忽略的。抵消机制与（7.31）和（7.36）中的类似。在陈述定理11.6之前，我们先引入一些记号。

我们将 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$、$\boldsymbol{\chi}$ 视为字，它们是 $[\![\mu]\!]$ 中指标序列。特别地，$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ 是一个长度为 $k_1+k_2+k_3$ 的字。给定 $\boldsymbol{\chi}$，我们将字 $\boldsymbol{\omega} \in [\![\mu]\!]^{k_1+k_2+k_3}$ 划分为等价类。若存在 $[\![\mu]\!]$ 上一个保持 $\boldsymbol{\chi}$ 并将 $\boldsymbol{\omega}$ 映射到 $\boldsymbol{\omega}'$ 的双射，则两个字 $\boldsymbol{\omega} \sim \boldsymbol{\omega}'$ 等价。我们注意到，（11.20）中的期望仅取决于 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ 的等价类。

对于任意 $f_0, f_1 \geqslant 0$，令 $\mathsf{W}(f_0, f_1)$ 表示 $[\![\mu]\!]^{k_1+k_2+k_3}$ 的等价类的一组代表元。这里，对于字 $\boldsymbol{\omega} \in \mathsf{W}(f_0, f_1)$，$f_0$ 是不出现在 $\boldsymbol{\chi}$ 中的不同指标（忽略重数）的个数，而 f_1 是这些指标中恰好在 $\boldsymbol{\omega}$ 中出现一次的个数。$\boldsymbol{\omega}$ 的长度为 $k_1+k_2+k_3$，并且这些不同指标中有 $f_0 - f_1$ 个在 $\boldsymbol{\omega}$ 中至少出现两次。由此可得

$$k_1+k_2+k_3 \geqslant f_1 + 2(f_0 - f_1) \Rightarrow k_1+k_2+k_3 \geqslant 2f_0 - f_1. \tag{11.21}$$

例 11.5. 以下是 $R_{\mathbf{i}^+}$的两个可能项：

$$A_1A_2B_2C_{47}C_{37}G_{c_8c}^{b_8b}\big(G_{c_4c_4}^{(b_4)} - Q\big), \quad \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = (1,2),(2),(4,7,3,7), \quad \boldsymbol{\chi} = (8,4),$$
$$A_1A_5B_5C_{49}C_{39}G_{c_8c}^{b_8b}\big(G_{c_4c_4}^{(b_4)} - Q\big), \quad \boldsymbol{\omega}' = (\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\gamma}') = (1,5),(5),(4,9,3,9), \quad \boldsymbol{\chi} = (8,4).$$

在本例中，$\boldsymbol{\omega} \sim \boldsymbol{\omega}'$（通过将 2 映射为 5，并将 7 映射为 9，同时保持 $[\![\mu]\!]$ 中所有其他指标不变）。由顶点的置换不变性，上述两项具有相同的期望。此外，在 $\boldsymbol{\omega}$ 中，指标 1、2、3、7不出现在 $\boldsymbol{\chi}=(8,\,4)$ 中，其中 1和 3仅出现一次，因此 $\boldsymbol{\omega} \in \mathsf{W}(4,\,2)$。

(11.20) 中的期望仅取决于 $(\boldsymbol{\alpha}、\boldsymbol{\beta}、\boldsymbol{\gamma})$ 的等价类。此外，对于固定的 f_0 和f_1，对 $(\boldsymbol{\alpha}、\boldsymbol{\beta}、\boldsymbol{\gamma}) \sim \boldsymbol{\omega}$求和项的数量为 $\mathsf{O}((d-1)^{f_0\ell})$。因此，在 (11.20) 中对 $(\boldsymbol{\alpha}、\boldsymbol{\beta}、\boldsymbol{\gamma})$ 求和时，我们可以先对等价类求和。回顾一下 (11.20) 中的求和项

$$\sum_{\mathbf{i}^+} \frac{(d-1)^{3\widehat{h}\ell}}{Z_{\mathcal{F}^+}} \mathbb{E}\left[I(\mathcal{F}^+, \mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G} \in \Omega)\widehat{R}_{\mathbf{i}^+}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\chi})\right]. \tag{11.22}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
(11.20) &= \frac{1}{(d-1)^{(k_1+(k_2+k_3)/2)\ell}} \sum_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}} (11.22) \\
&= \frac{1}{(d-1)^{(k_1+(k_2+k_3)/2)\ell}} \sum_{f_0,f_1} \sum_{\boldsymbol{\omega} \in \mathsf{W}(f_0,f_1)} \sum_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \sim \boldsymbol{\omega}} (11.22), \\
&= \sum_{f_0,f_1} \sum_{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \in \mathsf{W}(f_0,f_1)} \frac{\mathsf{O}((d-1)^{f_0\ell})}{(d-1)^{(k_1+(k_2+k_3)/2)\ell}} \times (11.22).
\end{aligned} \tag{11.23}$$

下面的引理指出，对于给定的 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$，(11.23) 最后一项中的求和项要么可以忽略，要么可以化简为如下 (11.25) 所示的项，其中 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$中的每个指标在 $R'_{\mathbf{i}^+}$中至少出现两次。

引理 11.6. 固定 $0 \leqslant f_1 \leqslant f_0$ 满足 (11.21)，以及一个字 $(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma}) \in \mathsf{W}(f_0,\ f_1)$。令 $\mathsf{I}_{\mathrm{single}} \subset [\![\mu]\!]$ 表示在 $(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\gamma})$ 中仅出现一次、且不出现在 $\boldsymbol{\chi}$ 中的指标集合。则 $|\mathsf{I}_{\mathrm{single}}| = f_1$，并且

$$\frac{(d-1)^{f_0\ell}}{(d-1)^{(k_1+(k_2+k_3)/2)\ell}} \sum_{\mathbf{i}^+} \frac{(d-1)^{3\widehat{h}\ell}}{Z_{\mathcal{F}^+}} \times \mathbb{E}\left[I(\mathcal{F}^+, \mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G} \in \Omega)\widehat{R}_{\mathbf{i}^+}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\chi})\right] \tag{11.24}$$

满足

1. 如果存在 $\alpha_m \in \mathsf{I}_{\text{single}}$，则 (11.24) $= \mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}/4}\mathbb{E}[\Psi])$。
2. 否则，

$$(11.24) = \frac{(d-1)^{3(\widehat{h}+f_1)\ell}}{(d-1)^{\mathfrak{q}^+\ell/2}Z_{\mathcal{F}^+}} \sum_{\mathbf{i}^+} \mathbb{E}\left[I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)(d-1)^{-f_1/2}R'_{\mathbf{i}^+}\right] + \mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}/4}\mathbb{E}[\Psi]), \tag{11.25}$$

其中 $\mathfrak{q}^+ = k_1 + (k_1+k_2+k_3-2f_0+6f_1) \geqslant 0$，且 $R'_{\mathbf{i}^+} \in \mathrm{Adm}(\widehat{h}+f_1+1, \mathcal{F}^+, \mathcal{G})$ 由 $R_{\mathbf{i}^+}$ 通过如下替换得到：

$$\begin{aligned}
&G^{(b_{\beta_m}b)}_{c_{\beta_m}c} \Rightarrow G^{(b)}_{b_{\beta_m}c}(G^{(b_{\beta_m})}_{c_{\beta_m}c_{\beta_m}} - Q), \quad G^{(b_{\beta_m})}_{c_{\beta_m}b} \Rightarrow G_{b_{\beta_m}b}(G^{(b_{\beta_m})}_{c_{\beta_m}c_{\beta_m}} - Q), \quad \beta_m \in \mathsf{I}_{\text{single}},\\
&G^{(b_{\gamma_{2m-1}}b_{\gamma_{2m}})}_{c_{\gamma_{2m-1}}c_{\gamma_{2m}}} \Rightarrow G^{(b_{\gamma_{2m}})}_{b_{\gamma_{2m-1}}c_{\gamma_{2m}}}(G^{(b_{\gamma_{2m-1}})}_{c_{\gamma_{2m-1}}c_{\gamma_{2m-1}}} - Q), \quad \gamma_{2m-1} \in \mathsf{I}_{\text{single}}, \quad \gamma_{2m} \notin \mathsf{I}_{\text{single}},\\
&G^{(b_{\gamma_{2m-1}}b_{\gamma_{2m}})}_{c_{\gamma_{2m-1}}c_{\gamma_{2m}}} \Rightarrow G^{(b_{\gamma_{2m-1}})}_{c_{\gamma_{2m-1}}b_{\gamma_{2m}}}(G^{(b_{\gamma_{2m}})}_{c_{\gamma_{2m}}c_{\gamma_{2m}}} - Q), \quad \gamma_{2m-1} \notin \mathsf{I}_{\text{single}}, \quad \gamma_{2m} \in \mathsf{I}_{\text{single}},\\
&G^{(b_{\gamma_{2m-1}}b_{\gamma_{2m}})}_{c_{\gamma_{2m-1}}c_{\gamma_{2m}}} \Rightarrow G_{b_{\gamma_{2m-1}}b_{\gamma_{2m}}}(G^{(b_{\gamma_{2m-1}})}_{c_{\gamma_{2m-1}}c_{\gamma_{2m-1}}} - Q)(G^{(b_{\gamma_{2m}})}_{c_{\gamma_{2m}}c_{\gamma_{2m}}} - Q), \quad \gamma_{2m-1},\gamma_{2m} \in \mathsf{I}_{\text{single}}.
\end{aligned} \tag{11.26}$$

定理 11.6 的第一个陈述推广了 (7.30)，而 (11.26) 中的第四个断言推广了 (7.32)。由于基本思想类似，我们省略证明。(11.26) 中的前三个断言本质上由以下估计得出：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{Nd}\sum_{b_\alpha,c_\alpha\in[\![N]\!]} A_{c_\alpha b_\alpha}A_{bc}G^{(b_\alpha b)}_{c_\alpha c}\\
&= \frac{1}{Nd}\sum_{b_\alpha,c_\alpha\in[\![N]\!]} A_{c_\alpha b_\alpha}A_{bc}\frac{G^{(b)}_{b_\alpha c}}{\sqrt{d-1}}\big(G^{(b)}_{c_\alpha c_\alpha} - Q\big) + \text{“negligible error,”},\\
&\frac{1}{Nd}\sum_{b_\alpha,c_\alpha\in[\![N]\!]} A_{c_\alpha b_\alpha}A_{bc}G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha b}\\
&= \frac{1}{Nd}\sum_{b_\alpha,c_\alpha\in[\![N]\!]} A_{c_\alpha b_\alpha}A_{bc}\frac{G_{b_\alpha b}}{\sqrt{d-1}}\big(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha} - Q\big) + \text{“negligible error,”}
\end{aligned} \tag{11.27}$$

这可以用与 (7.36) 相同的方式证明。我们再次省略证明。对所有 f_1 个 $\mathsf{I}_{\text{single}}$ 中仅在 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ 中出现一次且不出现在 $\boldsymbol{\chi}$ 中的指标，我们可以重复上述替换。每次替换都会贡献一个额外因子，并且在这些替换之后

$$\widehat{R}_{\mathbf{i}^+} \Rightarrow (d-1)^{-f_1/2}R'_{\mathbf{i}^+}, \quad R'_{\mathbf{i}^+} \in \mathrm{Adm}(\widehat{h}+f_1+1, \mathcal{F}^+, \mathcal{G}), \tag{11.28}$$

and

$$\mathfrak{q}^+ = 2k_1+k_2+k_3-2f_0+6f_1 = k_1/2 + (k_1+k_2+k_3-2f_0+6f_1).$$

我们注意到，在（11.25）中，若 $\mathfrak{q}^+ \geqslant 1$，我们会多得到一个因子 $(d-1)^{-\ell/2}$。只有在 $k_1=0$、$f_1=0$ 且（$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$）中的每个指标都恰好出现两次，且不出现在 $\boldsymbol{\chi}$ 中（因此 $k_2+k_3=2f_0$），我们才得不到这个额外因子。

定理 *11.2*第一条的证明。 忽略可忽略误差后，表达式（11.3）可改写为若干形如（11.24）的项的 O(1) 加权和。我们还可参见（11.18）和（11.20）中给出的更明确表达式。若定理 11.6第一条中的假设成立，则无需证明。因此，在证明的其余部分，我们可以专注于第二种情况（11.25）。

根据使用 B_0 的分解（如（11.13））， 我们可以在几种情况下应用（11.25）：使用项 $m_{\mathrm{sc}}^{2(\ell+1)}(z)(d-1)^{-(\ell+1)}\sum_{\alpha\in\mathsf{A}_i}(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha}-Q)$、$m_{\mathrm{sc}}^{2(\ell+1)}(z)(d-1)^{-(\ell+1)}\sum_{\alpha\neq\beta\in\mathsf{A}_i}(G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}-Q)$，或 $\mathcal{U}_0$ 中的某一项。我们分别处理这些情况。

1. 假设 $\widehat{R}_{\mathbf{i}^+}$ 在（11.20）中包含因子 $m_{\mathrm{sc}}^{2(\ell+1)}(z)(d-1)^{-(\ell+1)}\sum_{\alpha\in\mathsf{A}_i}(G^{(b_\alpha)})_{c_\alpha c_\alpha}-Q)$，该因子来自对 $\widehat{B}_0$ 的分解，那么在（11.25）中，$k_1\geqslant 1$ 和 $R'_{\mathbf{i}^+}$ 包含一个因子 $(G^{(b_\alpha)})_{c_\alpha c_\alpha}-Q)$。令 $R'_{\mathbf{i}^+}=(G^{(b_\alpha)})_{c_\alpha c_\alpha}-Q)R_{\mathbf{i}^+}$，则 $R_{\mathbf{i}^+}\in\mathsf{Adm}(\widehat{h}+f_1,\mathcal{F}^+,\mathcal{G})$（回顾（11.25））。我们断言，将 Q 替换为 Y 会产生可忽略误差。为说明这一点，我们写出

$$\begin{aligned}&\frac{(d-1)^{3(\widehat{h}+f_1)\ell}}{(d-1)^{\mathfrak{q}^+\ell/2}Z_{\mathcal{F}^+}}\sum_{\mathbf{i}^+}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha}-Q)R_{\mathbf{i}^+}\right]\\&=\frac{(d-1)^{3(\widehat{h}+f_1)\ell}}{(d-1)^{\mathfrak{q}^+\ell/2}Z_{\mathcal{F}^+}}\sum_{\mathbf{i}^+}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha}-Y)R_{\mathbf{i}^+}\right]\\&+\frac{(d-1)^{3(\widehat{h}+f_1)\ell}}{(d-1)^{\mathfrak{q}^+\ell/2}Z_{\mathcal{F}^+}}\sum_{\mathbf{i}^+}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)(Q-Y)R_{\mathbf{i}^+}\right].\end{aligned}\tag{11.29}$$

注意到 $k_1\geqslant 1$，因此 $\mathfrak{q}^+\geqslant 1$，而（11.29）右端的第二项有如下界

$$\begin{aligned}&\frac{(d-1)^{3(\widehat{h}+f_1)\ell}}{(d-1)^{\mathfrak{q}^+\ell/2}Z_{\mathcal{F}^+}}\sum_{\mathbf{i}^+}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)|Q-Y||R_{\mathbf{i}^+}|\right]\\&\lesssim\frac{(d-1)^{3(\widehat{h}+f_1)\ell}N^{-(\widehat{h}+f_1)\mathfrak{b}}}{(d-1)^{\mathfrak{q}^+\ell/2}}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)|Q-Y|\right]\lesssim N^{-\mathfrak{b}/2}\mathbb{E}[\Psi],\end{aligned}$$

其中，第一个不等式用到了（8.17）；第二个不等式用到了（4.21）和 $h\geqslant r\geqslant 2$。（11.29）右端的第一项具有（11.4）的形式，令 $r^+=\widehat{h}+f_1\geqslant\widehat{h}\geqslant r$即可。

2. 如果（11.20）包含因子 $m_{\mathrm{sc}}^{2(\ell+1)}(z)(d-1)^{-(\ell+1)}\sum_{\alpha\neq\beta\in\mathsf{A}_i}G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta})$，该因子来自 $\widehat{B}_0$ 的分解，那么 $k_3\geqslant 2$ 在（11.25）中。因子 $G^{(b_\alpha b_\beta)}{}_{c_\alpha c_\beta}$ 包含在 $\widehat{R}_{\mathbf{i}^+}$ 中时，有几种情况。

如果在 $R_{\mathbf{i}^+}$（由（11.20）得到）$\alpha\in\mathsf{I}^{\mathrm{single}}$，那么 $f_1\geqslant 1$ 在（11.25）中。此外，（11.26）表明 $R'_{\mathbf{i}^+}$ 包含$G^{(b_\alpha)}{}_{c_\alpha c_\alpha}-Q$。按照（11.29）中的相同论证，通过令 $r^+=\widehat{h}+f_1\geqslant r+1$，可得到（11.4）。如果 $\beta\in\mathsf{I}^{\mathrm{single}}$，同样的结论也成立。

在其余情况下 $\alpha,\ \beta\notin\mathsf{I}^{\mathrm{single}}$。这里同样有两种情况：或者 $R_{\mathbf{i}^+}$ 在（11.20）中至少包含两个形如 $\{G^{(bb')}_{cc'}$，$G^{(b)}_{cb'}$，$G_{bb'}\}_{(b,c)\neq(b',c')\in\mathcal{K}^+}$的项，或者 $\widehat{R}_{\mathbf{i}^+}$ 在（11.20）中同时包含两个因子（$G^{(b_\alpha)}{}_{c_\alpha c_\alpha}-Q)$，$(G^{(b_\beta)}{}_{c_\beta c_\beta}-Q)$。

在第一种情形中，若 $\widehat{R}_{\mathbf{i}^+}$ 在 (11.20) 中至少包含两项形如 $\{G^{(bb')}_{cc'}),G^{(b)}_{cb'},G_{bb'}\}_{(b,c)\neq(b',c')\in\mathcal{K}^+}$，的项，则 (11.25) 亦然。根据我们的假设 $r\geqslant 2$，我们有 $h+f_1+1\geqslant h+1\geqslant r+1\geqslant 3$。我们指出，这是论证中唯一需要假设 $r\geqslant 2$ 的地方；证明的所有其他部分对 $r\geqslant 1$仍然成立。于是 (8.18)（其中 r 取值为 $h+f_1+1\geqslant 3$）蕴含 (11.25) 以 $\mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}/2}\mathbb{E}[\Psi])$ 为界。

在第二种情形下，$\widehat{R}_{\mathbf{i}^+}$ 在（11.20）中包含因子（$G^{(b_{\alpha_1})}{}_{c_\alpha c_\alpha}-Q)$，$(G^{(b_{\beta_1})}{}_{c_\beta c_\beta}-Q)$。那么它们要么包含在 $E(\boldsymbol{\chi})$ 中，要么包含在 $k_1\geqslant 1$中。在这两种情形下，$\mathfrak{q}^+\geqslant 1$ 在（11.25）中。同（11.29）中的论证可得（11.4），令 $r^+=h+f_1\geqslant h\geqslant r$。

3. 在剩余情形下，$\widehat{R}_{\mathbf{i}^+}$ 在（11.20）中包含一个因子 $(d-1)^{3(h-1)\ell}R_h$，它来自 $\mathcal{U}_0$ 在 B_0的分解（11.13）中。这里 $h\geqslant 2$，R_h 是一个 S-乘积项（回忆定理 9.1），并且它至少包含一个形如 $(G^{(b_\alpha b_\alpha)}{}_{c_\alpha c_\alpha}-Q)$ 或 $G^{(b_\alpha b_\beta)}{}_{c_\alpha c_\beta}$ 的因子。此外，在这种情形下，因子 R_h 包含在（11.20）中的$\sim E(\boldsymbol{\chi})$ 内，并且 $h\geqslant r+(h-1)\geqslant r+1$。

如果 R_h 至少包含一个形如 $(G^{(b_\alpha)}{}_{c_\alpha c_\alpha}-Q)$ 的项，那么按照 (11.29) 和 (11.25)中的相同论证，可得 (11.4)，其中 $r^+=h+f_1\geqslant h\geqslant r+1$。

在其他情形下， R_h 至少包含一个形如 $G^{(b_\alpha b_\beta)}{}_{c_\alpha c_\beta}$ 的项。按照定理 11.6 第二个结论中的相同论证，如果 $\{b_\alpha, c_\alpha\}$ 没有出现在 $R_{\mathbf{i}+}$ 的其他项中（但 $\{b_\beta, c_\beta\}$ 出现了），我们可以将 $G^{(b_\alpha b_\beta)}{}_{c_\alpha c_\beta}$ 替换为 $G^{(b_\beta)}{}_{b_\alpha c_\beta}(G^{(b_\alpha)}{}_{c_\alpha c_\alpha} - Q)/\sqrt{d-1}$；如果 $\{b_\beta, c_\beta\}$ 没有出现在 $\widehat{R}_{\mathbf{i}+}$ 的其他项中（但 $\{b_\alpha, c_\alpha\}$ 出现了），我们可以将 $G^{(b_\alpha b_\beta)}{}_{c_\alpha c_\beta}$ 替换为 $G^{(b_\alpha)}{}_{b_\beta c_\alpha}(G^{(b_\beta)}{}_{c_\beta c_\beta} - Q)/\sqrt{d-1}$；如果 $\{b_\alpha, c_\alpha, b_\beta, c_\beta\}$ 没有出现在 $\widehat{R}_{\mathbf{i}+}$ 的其他项中，则可以将其替换为 $G_{b_\alpha b_\beta}(G^{(b_\alpha)}{}_{c_\alpha c_\alpha} - Q)(G^{(b_\beta)}{}_{c_\beta c_\beta} - Q)/(d-1)$。此外，此类替换产生的误差有界于 $\mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}/4}\mathbb{E}[\Psi])$。然后，按照条目 2 中的相同论证，或者 (11.25) 有界于 $\mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}/4}\mathbb{E}[\Psi])$，或者由 (11.25) 可得 (11.4)，其中 $r^+ \geqslant \widehat{h} + f_1 \geqslant \widehat{h} \geqslant r+1$。

□

定理 *11.2* 中第二个结论的证明。除可忽略误差外，表达式（11.5）也可以改写为形如（11.24）的项的 O(1) 加权和。我们也回顾一下（11.18）和（11.20）中给出的更明确表达式。如果定理11.6 第一个结论中的假设成立，则无需证明。因此，在证明的其余部分，我们可以专注于第二种情况（11.25）。

我们回顾一下，在（11.5）中，$r=1$ 和 $B_1 = (G^{(i)}_{oo} - Q)$。若 $\widehat{h} + f_1 \geqslant 2$（由（11.25））， 我们可以^完全按照证明（11.3）的方式进行。否则， $h=1$ 且 $f_1 = 0$。我们在以下讨论中假设属于这种情况。

1. 假设 (11.20) 中的 $\widehat{R}_{\mathbf{i}+}$ 包含来自 $\widehat{B}_0$ 的分解 (11.13) 的 $m_{\mathrm{sc}}^{2\ell+2}(z)(d-1)^{-(\ell+1)}\sum_{\alpha\in\mathsf{A}_i}(G^{(b_\alpha)}{}_{c_\alpha c_\alpha} - Q)$。由于 $\widehat{h}=1$、$f_1=0$、$\widehat{R}_{\mathbf{i}+}$ 也包含来自 B_1 的分解中的 $m_{\mathrm{sc}}^{2(\ell+1)}(z)(d-1)^{-(\ell+1)}\sum_{\alpha\in\mathsf{A}_i}(G^{(b_\alpha)}{}_{c_\alpha c_\alpha} - Q)$（我们从 (7.12) 回顾精确的系数），因此 (11.25) 具有如下形式

$$\frac{m_{\mathrm{sc}}^{4(\ell+1)}(z)}{(d-1)^{2(\ell+1)}}\sum_{\alpha\in\mathsf{A}_i}\sum_{\mathbf{i}^+}\frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}}\mathbb{E}[\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha} - Q)^2]. \tag{11.30}$$

将一个$G^{(b_\alpha)}{}_{c_\alpha c_\alpha} - Q)$替换为 $(G^{(b_\alpha)}{}_{c_\alpha c_\alpha} - Y)$ 后，(11.30) 是形如 (11.6) 的项的 O(1) 加权和，其中 $\mathfrak{q}^+ = 2$，且误差由 $\mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}/2}\mathbb{E}[\Psi])$ 界定。

2. 如果（11.20）包含来自 $\widehat{B}_0$ 的分解（11.13）的 $m_{\mathrm{sc}}^{2(\ell+1)}(z)(d-1)^{-(\ell+1)}\sum_{\alpha\neq\beta\in\mathsf{A}_i}G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta})$。由于 $\widehat{h}=1$，$f_1=0$，$\widehat{R}_{\mathbf{i}+}$ 也包含来自 ⌢B_1 的分解的 $m_{\mathrm{sc}}^{2(\ell+1)}(z)(d-1)^{-(\ell+1)}\sum_{\alpha\neq\beta\in\mathsf{A}_i}G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\alpha})$（我们回顾一下（7.12）中的精确系数）。那么（11.25）具有以下形式

$$\frac{2m_{\mathrm{sc}}^{4(\ell+1)}(z)}{(d-1)^{2(\ell+1)}}\sum_{\alpha\neq\beta\in\mathsf{A}_i}\sum_{\mathbf{i}^+}\frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}}\mathbb{E}[\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})(G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta})^2]. \tag{11.31}$$

根据（8.18），结合 $r=2$，（11.31）中的量有界于 $\mathrm{O}\big(N^{\mathfrak{o}}\mathbb{E}[\Psi]\big)$；这里我们还用到了因子 $(d-1)^{-2(\ell+1)}$ 被对 $\alpha\neq\beta$的求和抵消这一点，该求和包含 $\mathrm{O}\big((d-1)^{2(\ell+1)}\big)$ 项。

3. 在剩余的情形中，$\widehat{R}_{\mathbf{i}+}$ 在（11.20）中包含一个因子 $(d-1)^{3(h-1)\ell}R_h$ 其中 $h\geqslant 2$ 来自 $\mathcal{U}_0$ 在 ^ ^分解（11.13）中的 B_0。于是 $h\geqslant r+1\geqslant 2$。

□

12 第一环方程的证明

本节中，我们证明第一环方程（4.24）。我们需要从定理7.3 和定理11.2中识别出主阶误差项。这些精细估计将在以下三个命题中给出。

命题 12.1。 采用定理 7.3中的记号和假设，并定义指标集 $\mathsf{A}_i := \{\alpha \in [\![\mu]\!] : \mathrm{dist}_{\mathcal{T}}(i, l_\alpha) = \ell + 1\}$ （见图 5）。我们回顾一下局部格林函数 L 和 $L^{(i)}$ （移除顶点i 后）（8.13）和（8.15）中的局部格林函数。 I_1 在 （7.8）中的表达式为

$$I_1 = \sum_{\alpha \in \mathsf{A}_i} \sum_{\mathbf{i}^+} \frac{m_{\mathrm{sc}}^{2(\ell+1)}(z) L^{(i)}_{l_\alpha l_\alpha}}{(d-1)^{\ell+2} Z_{\mathcal{F}^+}} \mathbb{E}\left[I(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}) \mathbf{1}(\mathcal{G} \in \Omega)(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha} - Y)(G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha c_\alpha} - Q) \right]. \tag{12.1}$$

我们有误差项的以下精细表达式 $\mathcal{E}$ 见(7.8)

$$\mathcal{E} = (12.3) + (12.4) + \mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}/4}\Psi), \tag{12.2}$$

其中

$$(12.3) = \sum_{\alpha,\beta \in \mathsf{A}_i} \sum_{\mathbf{i}^+} \frac{m_{\mathrm{sc}}^{2(\ell+1)}(z)}{(d-1)^{\ell+1} Z_{\mathcal{F}^+}} \mathbb{E}\left[I(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}) \mathbf{1}(\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{G}} \in \Omega)(\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta} - G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}) \right], \tag{12.3}$$

$$(12.4) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathsf{A}_i, \beta \in [\![\mu]\!] \\ \alpha \neq \beta}} \sum_{\mathbf{i}^+} \frac{m_{\mathrm{sc}}^{2(\ell+1)}(z)(L^{(i)}_{l_\beta l_\beta} + L^{(i)}_{l_\alpha l_\beta})}{(d-1)^{\ell+2} Z_{\mathcal{F}^+}} \mathbb{E}\left[I(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}) \mathbf{1}(\mathcal{G} \in \Omega)(G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta})^2 \right], \tag{12.4}$$

命题 12.2。 采用定理 11.2中的记号和假设。将 I_1（由 (12.1)得到）按照 (11.5) 展开所得的误差为

$$\left(1 - \left(\frac{m_{\mathrm{sc}}(z)}{\sqrt{d-1}}\right)^{2\ell+2}\right) \frac{2m_d(z) m_{\mathrm{sc}}^{6(\ell+1)}(z)}{(d-1)^{2\ell+3}} \sum_{\alpha \neq \beta \in \mathsf{A}_i} \sum_{\mathbf{i}^+} \frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}} \mathbb{E}[\mathbf{1}(\mathcal{G} \in \Omega) I(\mathcal{F}^+, \mathcal{G})(G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta})^2] + \mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}/4}\mathbb{E}[\Psi]). \tag{12.5}$$

对于 z 接近谱边缘 ± 2时，以下命题给出了(12.3)、(12.4)和(12.5)中误差项的精细估计。

命题 12.3。 采用定理7.3中的记号和假设，并回顾 $\mathcal{A}$ 来自 (1.3)。对于$z \in \mathbf{D}$ （回顾 (1.8)）以及 $|z-2| \leqslant N^{-\mathfrak{g}}$，我们对误差 (12.2)中涉及的各项有以下估计：

$$(12.3) = \left(\frac{d(d-1)^\ell}{d-2} - \frac{d}{d-2}\right) \frac{1}{\mathcal{A}^2} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}(\mathcal{G} \in \Omega) \frac{\partial_z m_N(z)}{N} \right] + \mathrm{O}\left(\frac{\mathbb{E}[\Psi]}{(d-1)^\ell} \right), \tag{12.6}$$

$$(12.4) = \left(\frac{d+2}{d-2} - \frac{d(d-1)^\ell}{d-2} - (\ell+1)\right) \frac{1}{\mathcal{A}^2} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}(\mathcal{G} \in \Omega) \frac{\partial_z m_N(z)}{N} \right] + \mathrm{O}\left(\frac{\mathbb{E}[\Psi]}{(d-1)^\ell} \right), \tag{12.7}$$

此外，误差 (12.5) 满足

$$(12.5) = -\frac{2}{d-2} \frac{1}{\mathcal{A}^2} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}(\mathcal{G} \in \Omega) \frac{\partial_z m(z)}{N} \right] + \mathrm{O}\left(\frac{\mathbb{E}[\Psi]}{(d-1)^\ell} \right). \tag{12.8}$$

If $|z+2| \leqslant N^{-\mathfrak{g}}$，将右端乘以 -1 后，类似的陈述仍然成立。

定理的证明 4.5。 我们只对 $|z-2| \leqslant N^{-\mathfrak{g}}$证明（4.24），另一种情况 $|z+2| \leqslant N^{-\mathfrak{g}}$可以用完全相同的方法证明。为了证明（4.24），我们必须更仔细地追踪迭代过程中的误差。这些精细的误差估计见定理 12.1、定理 12.2 和定理 12.2。将（12.6）与（12.7）相加，定理 $\mathcal{E}$ 中的误差 E7.3 为

$$-\left(\ell + 1 - \frac{2}{d-2}\right) \frac{1}{\mathcal{A}^2} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}(\mathcal{G} \in \Omega) \frac{\partial_z m_N(z)}{N} \right] + \mathrm{O}\left(\frac{\mathbb{E}[\Psi]}{(d-1)^\ell} \right). \tag{12.9}$$

由定理 11.2可知，展开（11.3）产生的误差很小，即其界为 $\mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}/4}\mathbb{E}[\Psi]$。展开（11.5）时，$\mathfrak{q}\geqslant 1$ 产生的误差界为 $\mathrm{O}((d-1)^{-\ell/2}N^{\mathfrak{o}}\mathbb{E}[\Psi])$。对于 $\mathfrak{q}=0$，展开（11.5）产生的误差见（12.5）和（12.8）

$$-\frac{2}{d-2}\frac{1}{\mathcal{A}^2}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)\frac{\partial_z m_N(z)}{N}\right]+\mathrm{O}\left(\frac{\mathbb{E}[\Psi]}{(d-1)^{\ell}}\right). \tag{12.10}$$

微观环方程（4.24）中的修正项由对（12.9）和（12.10）中的精细误差求和得到。

□

定理 *12.1* 的证明。第一个结论（12.1）由（7.47）得出。误差 $\mathcal{E}$ 按（12.2）所作的分解来自（7.55）中的第一项以及 J_2 （7.44）中的项。 □

定理 12.2 的证明。回顾（12.1）中的 I_1 。在给定 $I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})=1$ 的条件下，（12.1）中的期望不依赖于 α。此外，$|\mathsf{A}_i|=(d-1)^{\ell+1}$，并且由（3.2）可得，$L^{(i)}_{l_\alpha l_\alpha}=m_d(z)(1-(-m_{\mathrm{sc}}(z)/\sqrt{d-1})^{2\ell+2})$。我们记 (i,o) 为 $\overline{=(}b_\alpha,c_\alpha)$，并记 $(\mathcal{F},\mathbf{i})$ 为 $=(\mathcal{F}^+,\mathbf{i}^+)$，将（12.1）中的 I_1 重写为

$$\left(1-\left(\frac{m_{\mathrm{sc}}(z)}{\sqrt{d-1}}\right)^{2\ell+2}\right)\frac{m_d(z)m_{\mathrm{sc}}^{2(\ell+1)}(z)}{(d-1)Z_{\mathcal{F}}}\sum_{\mathbf{i}}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F},\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)(G^{(i)}_{oo}-Y)(G^{(i)}_{oo}-Q)\right], \tag{12.11}$$

其形式为（11.5），相差一个常数因子。

根据定理 11.2中（11.5）的证明，展开（11.5）产生的误差要么有 $N^{-\mathfrak{b}/4}\mathbb{E}[\Psi]$ 的上界，要么由（11.31）给出。因此，展开（12.11）产生的误差为

$$\left(1-\left(\frac{m_{\mathrm{sc}}(z)}{\sqrt{d-1}}\right)^{2\ell+2}\right)\frac{2m_d(z)m_{\mathrm{sc}}^{6(\ell+1)}(z)}{(d-1)^{2\ell+3}}\sum_{\alpha\neq\beta\in\mathsf{A}_i}\sum_{\mathbf{i}^+}\frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}}\mathbb{E}[\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})(G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta})^2]+\mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}/4}\mathbb{E}[\Psi]).$$

至此，（12.5）的证明完成。

□

定理 *12.3* 的证明。为说明基本思路，我们只证明（12.7）。

首先注意，期望与（α，β）的选取无关。因此，我们可以先对$\alpha\in\mathsf{A}_i$ 求和，其中 $\alpha\neq\beta$，以计算相应的系数。

我们将利用以下关于 $|z\pm 2|\leq N^{-\mathfrak{g}}$ 的结论：

$$\begin{aligned}m_{\mathrm{sc}}(z)&=-1+\mathrm{O}\left(\sqrt{|z-2|}\right)=-1+\mathrm{O}(N^{-\mathfrak{g}/2}),\\ m_d(z)&=-\frac{d-1}{d-2}+\mathrm{O}\left(\sqrt{|z-2|}\right)=-\frac{d-1}{d-2}+\mathrm{O}(N^{-\mathfrak{g}/2}).\end{aligned} \tag{12.12}$$

此外，在事件 $I(\mathcal{F}^+,\ \mathcal{G})=1$ 上，顶点 o 具有半径为 $\mathfrak{R}$ 的树邻域。特别地，

$$\mu=d(d-1)^{\ell},\qquad |\mathsf{A}_i|=(d-1)^{\ell+1},$$

以及 $L^{(i)}_{l_\beta l_\beta}$ 以及 $L^{(i)}_{l_\alpha l_\beta}$ 均由 d-正则树上的格林函数显式给出（见定理 3.3）。直接计算可得以下恒等式，其证明从略：

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathsf{A}_i,\ \beta\in[\![\mu]\!]\\ \alpha\neq\beta}}\frac{m_{\mathrm{sc}}^{2(\ell+1)}(z)\left(L^{(i)}_{l_\beta l_\beta}+L^{(i)}_{l_\alpha l_\beta}\right)}{(d-1)^{\ell+2}}=\left(\frac{d+2}{d-2}-\frac{d(d-1)^{\ell}}{d-2}-(\ell+1)+\mathrm{O}\left((d-1)^{-\ell}\right)\right). \tag{12.13}$$

将（12.13）代入（12.4），得到

$$(12.4)=\left(\frac{d+2}{d-2}-\frac{d(d-1)^{\ell}}{d-2}-(\ell+1)+\mathrm{O}((d-1)^{-\ell})\right)\sum_{\mathbf{i}^+}\frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)(G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta})^2\right] \tag{12.14}$$

接下来我们证明

$$\sum_{\mathbf{i}^+}\frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}}\mathbb{E}\left[I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)(G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta})^2\right]=\frac{1}{\mathcal{A}^2}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)\frac{\partial_z m(z)}{N}\right]+\mathrm{O}\left(N^{-\mathfrak{b}/2}\mathbb{E}[\Psi]\right), \tag{12.15}$$

而（12.7）可由结合（12.14）与（12.15）得出

如果暂时忽略指示函数和对嵌入取平均，并将（b_α，c_α，b_β，c_β）写作（b，c，b'，c'），则上述陈述（12.15）可归结为计算

$$\frac{1}{(Nd)^2}\sum_{\substack{b\sim c\\ b'\sim c'}}(G^{(bb')}_{cc'})^2=\frac{1}{\mathcal{A}^2}\frac{\partial_z m(z)}{N}+\mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}/2}\Phi). \tag{12.16}$$

我们从舒尔补公式（2.4）开始

$$G^{(bb')}_{cc'}=G_{cc'}-(G(G|_{\{bb'\}})^{-1}G)_{cc'},\quad (G|_{\{bb'\}})^{-1}=\frac{1}{G_{bb}G_{b'b'}-G_{bb'}^2}\begin{bmatrix}G_{b'b'}&-G_{bb'}\\-G_{bb'}&G_{bb}\end{bmatrix}.$$

在给定 $I(\mathcal{F}^+,\ \mathcal{G})\ =1$的条件下，由（3.21）和（12.12），各项

$$\begin{aligned}&G_{bc}-\frac{\sqrt{d-1}}{d-2},\quad G_{b'c'}-\frac{\sqrt{d-1}}{d-2},\quad G_{bb'},\quad G_{bc'},\quad G_{cb'},\quad G_{cc'}\\&G_{bb}+\frac{d-1}{d-2},\quad G_{cc}+\frac{d-1}{d-2},\quad G_{b'b'}+\frac{d-1}{d-2},\quad G_{c'c'}+\frac{d-1}{d-2},\end{aligned} \tag{12.17}$$

均以 $\mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}})$ 为界。舒尔补公式（2.5）表明

$$\begin{aligned}G^{(bb')}_{cc'}&=G_{cc'}-\frac{G_{cb}G_{bc'}}{G_{bb}}-\frac{G_{cb'}G_{b'c'}}{G_{b'b'}}+\frac{G_{cb}G_{bb'}G_{b'c'}}{G_{bb}G_{b'b'}}+\mathrm{O}\left(|G_{bb'}|^2+|G_{bc'}|^2+|G_{cb'}|^2+|G_{cc'}|^2\right)\\&=G_{cc'}-\frac{G_{bc'}}{\sqrt{d-1}}-\frac{G_{cb'}}{\sqrt{d-1}}+\frac{G_{bb'}}{d-1}+\mathcal{E},\end{aligned} \tag{12.18}$$

其中 $|\mathcal{E}|\lesssim N^{-\mathfrak{b}}(|G_{bb'}|+|G_{bc'}|+|G_{cb'}|+|G_{cc'}|)$。

将（12.18）代入（12.16）中的第一个陈述，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{(Nd)^2}\sum_{\substack{b\sim c\\ b'\sim c'}}(G^{(bb')}_{cc'})^2&=\frac{1}{(Nd)^2}\sum_{\substack{b\sim c\\ b'\sim c'}}\left(G_{cc'}-\frac{G_{bc'}}{\sqrt{d-1}}-\frac{G_{cb'}}{\sqrt{d-1}}+\frac{G_{bb'}}{d-1}\right)^2+\mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}/2}\Phi)\\&=\frac{1}{\mathcal{A}^2}\frac{\partial_z m(z)}{N}+\mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}/2}\Phi).\end{aligned} \tag{12.19}$$

其中在第一个陈述中，我们使用了 Ward 恒等式（7.50）来控制误差；第二个陈述则由反复使用以下关系得出，此处省略更多细节。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{d-1}}\sum_{x\sim u}G_{xv}=(HG)_{uv}=zG_{uv}+\delta_{uv}=2G_{uv}+\delta_{uv}+\mathrm{O}(N^{-\mathfrak{g}}|G_{uv}|),\\&\frac{1}{N^2}\sum_{x,y}G_{xy}^2=\frac{\mathrm{Tr}[G^2]}{N^2}=\frac{\partial_z m(z)}{N}.\end{aligned} \tag{12.20}$$

□

13 局部重采样产生的误差

本节证明由用于控制（7.29）的局部重采样所产生的误差项的估计。关键步骤是以下去顶点 Ward 界。

命题 13.1。 取 $z \in \mathbf{D}$ （回顾 （1.8）），并回顾指示函数

$$I(\{o,i\},\mathcal{G}) = A_{oi}\mathbf{1}(\mathcal{B}_{\mathfrak{R}}(o,\mathcal{G}) \text{ is a tree}),$$

由 （7.3）。则对于 i、$j \sim o$ 和 $i \neq j$，以下结论成立：

$$\frac{1}{N}\sum_{o\in[\![N]\!]}\mathbb{E}[I(\{i,o\},\mathcal{G})|G^{(o)}_{ij}|^2] \lesssim \mathbb{E}[N^{\mathfrak{o}}\Phi]. \tag{13.1}$$

回顾第 5 节中的重采样数据 $\mathbf{S} = \{(l_\alpha, a_\alpha), (b_\alpha, c_\alpha)\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}$ 在 o 周围，并令

$\mathcal{F} := \{i,o\}$， $\mathcal{F}^+ := B_\ell(o,\mathcal{G}) \cup \{(l_\alpha,a_\alpha)、(b_\alpha,c_\alpha)\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]} = B_{\ell+1}(o,\mathcal{G}) \cup \{(b_\alpha,c_\alpha)\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]} = (\mathfrak{i}^+, E^+)$，其中包含所有切换边，见图 4。我们还回顾（8.6）中的以下指示函数

$$\begin{aligned} I(\mathcal{F},\mathcal{G}) &:= A_{io}\prod_{x\in\mathcal{B}_\ell(o;\mathcal{G})}\mathbf{1}\big(\mathcal{B}_{\mathfrak{R}}(x;\mathcal{G}) \text{ is a tree}\big) \\ I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G}) &:= \prod_{\{x,y\}\in E^+}A_{xy}\prod_{\substack{c\in\{o,c_\alpha,\cdots,c_\mu\}\\ x\in\mathcal{B}_\ell(c;\mathcal{G})}}\mathbf{1}\big(\mathcal{B}_{\mathfrak{R}}(x;\mathcal{G}) \text{ is a tree}\big)\prod_{c\neq c'\in\{o,c_1,\cdots,c_\mu\}}\mathbf{1}\big(\operatorname{dist}_{\mathcal{G}}(c,c')\geq 3\mathfrak{R}\big). \end{aligned} \tag{13.3}$$

作为定理 13.1的推论，以下命题说明，在局部重采样过程中， $\mathcal{E}$ 来自定理 7.4 （取平均后）的误差可以忽略。定理 13.2 由定理 13.1和舒尔补公式（2.4）推出。定理 13.1 和定理 13.2 的证明将在第 13.2 节给出。

命题 13.2。 取 $z \in \mathbf{D}$，并将重采样数据记为 $\mathbf{S} = \{(l_\alpha,a_\alpha)、(b_\alpha,c_\alpha)\}_{\alpha\in[\![\mu]\!]}$，则以下结论成立

$$\frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}}\sum_{\mathfrak{i}^+}\mathbb{E}[I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)|\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta} - G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}|] \lesssim (d-1)^\ell\mathbb{E}[N^{\mathfrak{o}}\Phi]. \tag{13.4}$$

13.1 舒尔补公式的再探讨

采用定理 7.4证明中的记号，并对以下条件进行条件化 $I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G}) = 1$，于是切换边具有树邻域，且彼此相距很远。然后，归一化邻接矩阵 $\widetilde{H}^{(\mathbb{T})}$ 的 $\widetilde{\mathcal{G}}^{(\mathbb{T})}$ 为分块形式

$$\widetilde{H}^{(\mathbb{T})} = \begin{bmatrix} \widetilde{H}^{(\mathbb{T})}_{\mathbb{W}} & \widetilde{B}^\top \\ \widetilde{B} & \widetilde{H}^{(\mathbb{T})}_{\mathbb{W}^{\complement}} \end{bmatrix}.$$

我们还将 $\mathcal{G}^{(\mathbb{T})}$ 和 $\widetilde{\mathcal{G}}^{(\mathbb{T})}$ 的格林函数分别记为 $G^{(\mathbb{T})}$ 和 $\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}$。

在本节中，我们研究将 $\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta}$ 替换为 $G^{(b_\alpha b_\beta)c_\alpha c_\beta}$ 所产生的误差。我们注意到， $G^{(b_\alpha b_\beta)c_\alpha c_\beta}$ 可以通过以下步骤从 $\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta}$ 得到。首先，我们移除 $\mathbb{W} = \{b_1, b_2, \cdots, b_\mu\}$，得到 $G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha c_\beta}$；然后我们将 $\mathbb{W}\setminus\{b_\alpha, b_\beta\}$ 加回去，得到 $G^{(\mathbb{T}b_\alpha b_\beta)c_\alpha c_\beta}$；最后我们将 $\mathbb{T}$ 加回去，得到 $G^{(b_\alpha b_\beta)c_\alpha c_\beta}$。得益于舒尔补公式（2.4），这些替换所产生的误差可以明确表示为：

$$\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta} - G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha c_\beta} = (G^{(\mathbb{TW})}\widetilde{B}\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}|_{\mathbb{W}}\widetilde{B}^\top G^{(\mathbb{TW})})_{c_\alpha c_\beta}, \tag{13.5}$$

$$G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha c_\beta} - G^{(\mathbb{T}b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta} = -(G^{(\mathbb{TW})}(G^{(\mathbb{T}b_\alpha b_\beta)}|_{\mathbb{W}\setminus\{b_\alpha,b_\beta\}})^{-1}G^{(\mathbb{T}b_\alpha b_\beta)})_{c_\alpha c_\beta}, \tag{13.6}$$

$$G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta} - G^{(\mathbb{T}b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta} = (G^{(b_\alpha b_\beta)}(G^{(b_\alpha b_\beta)}|_{\mathbb{T}})^{-1}G^{(b_\alpha b_\beta)})_{c_\alpha c_\beta}. \tag{13.7}$$

以下引理给出了与上述方程（13.5）、（13.6）和（13.7）相关的替换误差的首阶项。

引理 *13.3*。固定 $z\in D$，并回顾 *(13.2)* 中的 $\mathcal{F},\mathcal{F}^+$。我们将顶点集为 $\mathbb{T}$ 的 $\mathcal{T}=\mathcal{B}_\ell(o,\mathcal{G})$ 记作 $\widetilde{\ }$。我们假设 $\mathcal{G},\mathcal{G}\in\Omega$ 且 $I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})=1$。对于任意指标 $\alpha,\beta\in[\![\mu]\!]$，有以下结论：

1. 差值 $\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta}-G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha c_\beta}$，由下式给出

$$\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta}-G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha c_\beta}=\frac{m_d(z)}{d-1}\sum_{\gamma\in[\![\mu]\!]}\left(\sum_{x\in\mathcal{N}_\gamma}G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha x}\right)\left(\sum_{x\in\mathcal{N}_\gamma}G^{(\mathbb{TW})}_{c_\beta x}\right)+\mathcal{E},\tag{13.8}$$

其中 $\mathcal{N}_\gamma=\{x\neq c_\gamma:\ x\sim b_\gamma$ 属于 $\mathcal{G}\}\cup\{a_\gamma\}$，它枚举了 $\mathcal{G}$ 中 b_γ 的相邻顶点，并且

$$|\mathcal{E}|\lesssim N^{-\mathfrak{b}/2}\sum_{\gamma\in[\![\mu]\!]}\sum_{x\in\mathcal{N}_\gamma}(|G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha x}|^2+|G^{(\mathbb{TW})}_{c_\beta x}|^2)+N^{-\mathfrak{b}}\Phi.$$

由 (13.8)可知

$$|\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta}-G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha c_\beta}|\lesssim\sum_{\gamma\in[\![\mu]\!]}\sum_{x\in\mathcal{N}_\gamma}(|G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha x}|^2+|G^{(\mathbb{TW})}_{c_\beta x}|^2)+N^{-\mathfrak{b}}\Phi.\tag{13.9}$$

2. 差值 $G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha c_\beta}-G^{(\mathbb{T}b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}$由下式给出

$$G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha c_\beta}-G^{(\mathbb{T}b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}=-\frac{1}{m_d(z)}\sum_{\gamma\in[\![\mu]\!]\setminus\{\alpha,\beta\}}G^{(\mathbb{T}b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha b_\gamma}G^{(\mathbb{T}b_\alpha b_\beta)}_{b_\gamma c_\beta}+\mathcal{E},\tag{13.10}$$

其中

$$|\mathcal{E}|\lesssim N^{-\mathfrak{b}/2}\sum_{\gamma\in[\![\mu]\!]\setminus\{\alpha,\beta\}}|G^{(\mathbb{T}b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha b_\gamma}|^2+|G^{(\mathbb{T}b_\alpha b_\beta)}_{c_\beta b_\gamma}|^2.$$

由(13.10)可得

$$|G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha c_\beta}-G^{(\mathbb{T}b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}|\lesssim\sum_{\gamma\in[\![\mu]\!]\setminus\{\alpha,\beta\}}(|G^{(\mathbb{T}b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha b_\gamma}|^2+|G^{(\mathbb{T}b_\alpha b_\beta)}_{c_\beta b_\gamma}|^2).\tag{13.11}$$

3. 差值 $G^{(\mathbb{T}b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}-G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}$为

$$G^{(\mathbb{T}b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}-G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}=-\sum_{\substack{\mathrm{dist}(x,o)=\ell\\ x\sim x'\in\mathbb{T}}}\left(\frac{1}{\sqrt{d-1}}G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha x}G^{(b_\alpha b_\beta)}_{x'c_\beta}+\frac{1}{m_{\mathrm{sc}}(z)}G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha x}G^{(b_\alpha b_\beta)}_{xc_\beta}\right)+\mathcal{E},\tag{13.12}$$

其中

$$|\mathcal{E}|\lesssim N^{-\mathfrak{b}/2}\sum_{x\in\mathbb{T}}(|G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha x}|^2+|G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\beta x}|^2).$$

由(13.12)可得

$$|G^{(\mathbb{T}b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}-G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}|\lesssim\sum_{x\in\mathbb{T}}(|G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha x}|^2+|G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\beta x}|^2).\tag{13.13}$$

4. 对于任意 $x\sim b_\beta$ 属于 $\mathcal{G}$，以下结论成立

$$|G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha x}-G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha x}|\lesssim\sum_{\gamma\in[\![\mu]\!]\setminus\{\alpha,\beta\}}(|G^{(\mathbb{T}b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha b_\gamma}|^2+|G^{(\mathbb{T}b_\alpha b_\beta)}_{b_\gamma c_\beta}|^2)+\sum_{y\in\mathbb{T}}(|G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha y}|^2+|G^{(b_\alpha b_\beta)}_{xy}|^2).\tag{13.14}$$

定理的证明 *13.3*。 我们可以将式（13.5）的右端分解为 :

$$I := \frac{1}{d-1} \sum_{\gamma,\gamma' \in [\![\mu]\!]} \sum_{\substack{x \in \mathcal{N}_\gamma \\ y \in \mathcal{N}_{\gamma'}}} G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha x} \widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{b_\gamma b_{\gamma'}} G^{(\mathbb{TW})}_{y c_\beta},$$

其中 $\mathcal{N}_\gamma = \{x \neq c_\gamma : \ x \sim b_\gamma$ 属于 $\mathcal{G}\} \cup \{a_\gamma\}$。

由于 $\widetilde{\mathcal{G}} \in \Omega$ 且 $I(\mathcal{F}^+, \ \mathcal{G}) = 1$, （5.7）表明，对于 $\gamma, \ \gamma' \in [\![\mu]\!]$, $|\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{b_\gamma b_\gamma} - \delta_{\gamma\gamma'} m_d(z)| \lesssim N^{-\mathfrak{b}}$。因此， I 的首阶项对应于配对 $\gamma = \gamma'$，从而得到

$$I = \frac{m_d(z)}{d-1} \sum_{\gamma \in [\![\mu]\!]} \left(\sum_{x \in \mathcal{N}_\gamma} G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha x} \right) \left(\sum_{x \in \mathcal{N}_\gamma} G^{(\mathbb{TW})}_{c_\beta x} \right) + \mathrm{O}\left(N^{-\mathfrak{b}} \sum_{\gamma,\gamma' \in [\![\mu]\!]} \sum_{\substack{x \in \mathcal{N}_\gamma \\ y \in \mathcal{N}_{\gamma'}}} |G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha x}| |G^{(\mathbb{TW})}_{y c_\beta}| \right). \tag{13.15}$$

断言（13.8）可由（13.15）推出。

为证明（13.10），我们从（13.6）出发。考虑

$$\begin{aligned} &(G^{(\mathbb{T} b_\alpha b_\beta)} (G^{(\mathbb{T} b_\alpha b_\beta)}|_{\mathbb{W} \setminus \{b_\alpha, b_\beta\}})^{-1} G^{(\mathbb{T} b_\alpha b_\beta)})_{c_\alpha c_\beta} \\ &= \sum_{\gamma,\gamma' \in [\![\mu]\!] \setminus \{\alpha,\beta\}} G^{(\mathbb{T} b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha b_\gamma} (G^{(\mathbb{T} b_\alpha b_\beta)}|_{\mathbb{W} \setminus \{b_\alpha, b_\beta\}})^{-1}_{b_\gamma b_{\gamma'}} G^{(\mathbb{T} b_\alpha b_\beta)}_{b_{\gamma'} c_\beta}. \end{aligned} \tag{13.16}$$

（13.16）中的首阶项由满足 $\gamma = \gamma'$的项给出，

$$\begin{aligned} (13.16) &= \frac{1}{m_d(z)} \sum_{\gamma \in [\![\mu]\!] \setminus \{\alpha,\beta\}} G^{(\mathbb{T} b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha b_\gamma} G^{(\mathbb{T} b_\alpha b_\beta)}_{b_\gamma c_\beta} + \mathcal{E}, \\ \mathcal{E} &:= \sum_{\gamma,\gamma' \in [\![\mu]\!] \setminus \{\alpha,\beta\}} G^{(\mathbb{T} b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha b_\gamma} ((G^{(\mathbb{T} b_\alpha b_\beta)}|_{\mathbb{W} \setminus \{b_\alpha, b_\beta\}})^{-1}_{b_\gamma b_{\gamma'}} - \delta_{\gamma\gamma'}/m_d(z)) G^{(\mathbb{T} b_\alpha b_\beta)}_{b_{\gamma'} c_\beta}. \end{aligned} \tag{13.17}$$

由（3.26）， $|G^{(\mathbb{T} b_\alpha b_\beta) \ b_\gamma b_{\gamma'}} - m_d(z) \delta_{\gamma\gamma'}| \lesssim N^{-\mathfrak{b}}$。因此 $|(G^{(\mathbb{T} b_\alpha b_\beta)}|_{\mathbb{W} \setminus \{b_\alpha, b_\beta\}})^{-1}_{b_\gamma b_{\gamma'}} - \delta_{\gamma\gamma'}/m_d(z)| \lesssim N^{-3\mathfrak{b}/4}$, 且（ $\mathcal{E}$ 在（13.17）中的误差有如下界

$$|\mathcal{E}| \lesssim N^{-3\mathfrak{b}/4} \sum_{\gamma,\gamma' \in [\![\mu]\!] \setminus \{\alpha,\beta\}} |G^{(\mathbb{T} b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha b_\gamma}| |G^{(\mathbb{T} b_\alpha b_\beta)}_{b_{\gamma'} c_\beta}| \lesssim N^{-\mathfrak{b}/2} \sum_{\gamma \in [\![\mu]\!] \setminus \{\alpha,\beta\}} |G^{(\mathbb{T} b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha b_\gamma}|^2 + |G^{(\mathbb{T} b_\alpha b_\beta)}_{c_\beta b_\gamma}|^2. \tag{13.18}$$

断言（13.10）可由结合（13.17）和（13.18）得到。

为证明（13.12），我们可以将（13.7）的右端显式地改写为

$$-(G^{(b_\alpha b_\beta)} (G^{(b_\alpha b_\beta)}|_{\mathbb{T}})^{-1} G^{(b_\alpha b_\beta)})_{c_\alpha c_\beta} = -\sum_{x,y \in \mathbb{T}} G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha x} (G^{(b_\alpha b_\beta)}|_{\mathbb{T}})^{-1}_{xy} G^{(b_\alpha b_\beta)}_{y c_\beta}. \tag{13.19}$$

由于 $I(\mathcal{F}^+; \mathcal{G}) = 1$, 根据 (3.26), 对于 $x, y \in \mathbb{T}$, $|G^{(b_\alpha b_\beta) xy} - (H_{\mathbb{T}} - z - m_{\mathrm{sc}}(z)\mathbb{I}^\partial)^{-1}_{xy}| \lesssim N^{-\mathfrak{b}}$, 其中 $\mathbb{I}^\partial_{xy} = \mathbf{1}(\mathrm{dist}_{\mathcal{T}}(o, x) = \ell)\delta_{xy}$。因此我们有

$$|(G^{(b_\alpha b_\beta)}|_{\mathbb{T}})^{-1}_{xy} - (H^{(b_\alpha b_\beta)} - z - m_{\mathrm{sc}}(z)\mathbb{I}^\partial)_{xy}| \lesssim N^{-3\mathfrak{b}/4}, \text{ for } x, y \in \mathbb{T},$$

and

$$(13.19) = -\sum_{x,y \in \mathbb{T}} G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha x} (H - z - m_{\mathrm{sc}}(z)\mathbb{I}^\partial)_{xy} G^{(b_\alpha b_\beta)}_{y c_\beta} + \mathrm{O}\left(N^{-3\mathfrak{b}/4} \sum_{x,y \in \mathbb{T}} |G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha x}| |G^{(b_\alpha b_\beta)}_{y c_\beta}| \right). \tag{13.20}$$

对于求和　对 $x, y \in \mathbb{T}$ 在 (13.20) 中，若 $x \in \mathbb{T}$ 但 $\mathrm{dist}_{\mathcal{T}}(x, o) < \ell$，那么 $\mathbb{I}^{\partial}_{xy} = 0$，并且我们有　e

$$\sum_{y\in\mathbb{T}} (H - z - m_{\mathrm{sc}}(z)\mathbb{I}^{\partial})_{xy} G^{(b_\alpha b_\beta)}_{yc_\beta} = \sum_{y\in\mathbb{T}} (H - z)_{xy} G^{(b_\alpha b_\beta)}_{yc_\beta} = 0, \tag{13.21}$$

其中，最后一个等式使用了格林函数的定义。因此，将（13.21）代入（13.20），可得

$$\sum_{\substack{\mathrm{dist}(x,o)<\ell \\ y\in\mathbb{T}}} G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha x} (H - z - m_{\mathrm{sc}}(z)\mathbb{I}^{\partial})_{xy} G^{(b_\alpha b_\beta)}_{yc_\beta} = 0. \tag{13.22}$$

如果 $x \in \mathbb{T}$ 且 $\mathrm{dist}_{\mathcal{T}}(x, o) = \ell$，我们将 x 的父节点记为 x'。根据 m_{sc} 的自洽方程，我们有

$$\begin{aligned} &\sum_{y\in\mathbb{T}} G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha x} (H - z - m_{\mathrm{sc}}(z)\mathbb{I}^{\partial})_{xy} G^{(b_\alpha b_\beta)}_{yc_\beta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{d-1}} G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha x} G^{(b_\alpha b_\beta)}_{x'c_\beta} - (z + m_{\mathrm{sc}}(z)) G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha x} G^{(b_\alpha b_\beta)}_{xc_\beta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{d-1}} G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha x} G^{(b_\alpha b_\beta)}_{x'c_\beta} + \frac{1}{m_{\mathrm{sc}}(z)} G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha x} G^{(b_\alpha b_\beta)}_{xc_\beta}. \end{aligned} \tag{13.23}$$

断言（13.12）可由将（13.22）和（13.23）代入（13.20）得到。

断言　（13.14）可由与（13.10）和（13.12）中相同的论证得到，因此我们省略证明　of. □

13.2 定理 13.1 和定理13.2

定理 *13.1*。我们可以用 I_o 替换指示函数 $I(\mathcal{F}, \mathcal{G})$，论证与定理 7.1 相同

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N} \sum_{o\in[\![N]\!]} \mathbb{E}[|G^{(o)}_{ij}|^2] = \frac{1}{Z_{\mathcal{F}}} \sum_{\mathbf{i}} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}(\mathcal{G} \in \Omega) I(\mathcal{F}, \mathcal{G}) |G^{(o)}_{ij}|^2\right] + \mathrm{O}(N^{-1+\mathfrak{c}}) \\ &\lesssim \frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}} \sum_{\mathbf{i}^+} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}(\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{G}} \in \Omega) I(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}) |\widetilde{G}^{(o)}_{ij}|^2\right] + \mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}} \mathbb{E}[\Phi]). \end{aligned} \tag{13.24}$$

现在我们需要用原图来表示切换后的图的格林函数。令 $\mathcal{T} = B_\ell(o, \mathcal{G})$，且 $L := P(\mathcal{T}, z, m_{\mathrm{sc}}(z))$。这里 L 与 $\mathcal{T}$ 上的局域格林函数（定义见 (8.13)）一致，我们用相同的符号表示它们。注意，由于 i, j 是 o的不同邻点，因此 i, j 属于 $\mathcal{T}(o)$的不同连通分支。于是 $L^{(o)}_{ij} = 0$，且 $\widetilde{G}^{(o)}_{ij} = \widetilde{G}^{(o)}_{ij} - L^{(o)}_{ij}$。我们将~采用定理 7.4 证明中的相同论证。接下来，我们假设 $\mathcal{G}, \mathcal{G} \in \Omega$ 且$I(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}) = 1$。然后，按照 (7.19) 的相同论证，我们得到

$$\widetilde{G}^{(o)}_{ij} = \left(L^{(o)} \sum_{k=1}^{\mathfrak{p}} \left((\widetilde{B}^\top (\widetilde{G}^{(\mathbb{T})} - m_{\mathrm{sc}}(z)) \widetilde{B}) L^{(o)} \right)^k \right)_{ij} + \mathrm{O}(N^{-2}). \tag{13.25}$$

对于任意 $1 \leqslant k \leqslant \mathfrak{p}$，$k$-th 项在（13.25）中是以下形式各项的 O(1) 加权和

$$\sum_{x_1, x_2, \cdots, x_{2k} \in \mathbb{T}} L^{(o)}_{ix_1} V_{x_1x_2} L^{(o)}_{x_2x_3} V_{x_3x_4} L^{(o)}_{x_4x_5} \cdots V_{x_{2k-1}x_{2k}} L^{(o)}_{x_{2k}j}. \tag{13.26}$$

这里 $V = (\widetilde{B}^\top (\widetilde{G}^{(\mathbb{T})} - m_{\mathrm{sc}}(z)) \widetilde{B})$，并且（5.7）表明，对于任意 $|V_{xy}| \lesssim N^{-\mathfrak{b}}$，$x, y \in \mathbb{T}$.

我们回顾一下，i，j 位于 $\mathcal{T}_{(o)}$的不同连通分支中。对于指标序列 $x_0 := i$，x_1，x_2，$\cdots$，x_{2k}，$x_{2k+1} := j$，存在一对相邻列出的顶点，它们位于不同的

连通分支中。 $\mathcal{T}_{(o)}$。如果对于某个 $0 \leqslant m \leqslant k$， x_{2m}， x_{2m+1} 位于 $\mathcal{T}_{(o)}$的不同连通分支中，那么 $L^{(o)}_{x_{2m}x_{2m+1}} = 0$ 和 (13.26) 消失。因此，我们只需考虑这样的情形：对于某个$1 \leqslant m \leqslant k$、 x_{2m-1}， x_{2m} 位于 $\mathcal{T}_{(o)}$的不同连通分支中。在这种情况下，

$$V_{x_{2m-1},x_{2m}} = (\widetilde{B}^\top(\widetilde{G}^{(\mathbb{T})} - m_{\mathrm{sc}}(z))\widetilde{B})_{x_{2m-1},x_{2m}} = \frac{1}{d-1}\sum_{\alpha,\beta:l_\alpha=x_{2m-1},l_\beta=x_{2m}} \widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta}. \tag{13.27}$$

如果 $k=1$，那么 $m=1$，我们可以使用 (13.26) 和 (13.27) 计算得到

$$\frac{1}{d-1}\sum_{\alpha\neq\beta\in[\![\mu]\!]} L^{(o)}_{il_\alpha}\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta}L^{(o)}_{l_\beta j} = \frac{\mathfrak{c}}{(d-1)^\ell}\sum_{\substack{\mathrm{dist}_{\mathcal{T}}(i,l_\alpha)=\ell-1\\ \mathrm{dist}_{\mathcal{T}}(j,l_\beta)=\ell-1}} \widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta}, \tag{13.28}$$

其中我们使用了 (7.17)，并且 $|\mathfrak{c}| = \mathrm{O}(1)$。对于 $k \geqslant 2$，我们可以将 (13.26) 界定为

$$\begin{aligned}(13.26) &\lesssim N^{-(k-1)\mathfrak{b}}\sum_{\alpha\neq\beta}|\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta}| \sum_{\substack{x_1,x_2,\cdots,x_{2m-2}\in\mathbb{T}\\ x_{2m+1},x_{2m+2},\cdots,x_{2k}\in\mathbb{T}}} |L^{(o)}_{ix_1}|\cdots|L^{(o)}_{x_{2m-2}l_\alpha}||L^{(o)}_{l_\beta x_{2m+1}}|\cdots|L^{(o)}_{x_{2k}j}| \\ &\lesssim N^{-(k-1)\mathfrak{b}}\sum_{\alpha\neq\beta}|\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta}|(d-1)^\ell(\ell(d-1)^\ell)^{k-1} \lesssim \frac{1}{(d-1)^{7(k-1)\mathfrak{b}/8}}\sum_{\alpha\neq\beta}|\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta}|,\end{aligned} \tag{13.29}$$

其中，第一个陈述由 (13.27) 和 $|V_{xy}| \lesssim N^{-\mathfrak{b}}$ 得出；第二个陈述由 (7.17) 得出；在第三个陈述中，我们使用了 $N^{\mathfrak{b}} \geqslant (d-1)^{20\ell}$。

估计 (13.28) 和 (13.29) 共同给出了关于 (13.25 的如下估计)

$$(13.25) = \frac{m_{\mathrm{sc}}^{2\ell}(z)}{(d-1)^\ell}\sum_{\substack{\alpha\in\mathsf{A}_i\\ \beta\in\mathsf{A}_j}}\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{N^{7\mathfrak{b}/8}}\sum_{\alpha\neq\beta\in[\![\mu]\!]}|\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta}| + N^{-2}\right), \tag{13.30}$$

将 (13.30) 代回 (13.24) 后，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{Z_{\mathcal{F}}}\sum_{\mathbf{i}}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)I(\mathcal{F},\mathcal{G})|G^{(o)}_{ij}|^2\right] \lesssim J_1 + J_2 + \mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}}\mathbb{E}[\Phi]) \\ &J_1 := \frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}}\sum_{\mathbf{i}^+}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}(\mathcal{G},\widetilde{\mathcal{G}}\in\Omega)I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})\left|\frac{1}{(d-1)^\ell}\sum_{\alpha\neq\beta\in[\![\mu]\!]}\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta}\right|^2\right] \\ &|J_2| \lesssim \frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}}\sum_{\mathbf{i}^+}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}(\mathcal{G},\widetilde{\mathcal{G}}\in\Omega)I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})N^{-3\mathfrak{b}/4}\left(\sum_{\alpha\neq\beta\in[\![\mu]\!]}|\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta}|^2 + \Phi\right)\right].\end{aligned} \tag{13.31}$$

接下来，我们如同（13.31）那样估计 J_1 和 J_2。我们需要用图 $\mathcal{G}$的格林函数来表示 $\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta}$。在此过程中，任何能被$\mathrm{O}(N^{-\mathrm{o}(1)}\Phi)$界定的项均视为可忽略，因为它贡献的误差为 $\mathbb{E}\left[\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)N^{-\mathrm{o}(1)}\Phi\right] = \mathrm{O}(N^{-\mathrm{o}(1)}\mathbb{E}[\Phi])$。

借助定理 13.3（结合（13.9）、（13.11）和（13.13）），我们有

$$\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta} = G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta} + \mathcal{E}_{\alpha\beta}, \tag{13.32}$$

其中

$$\begin{aligned}|\mathcal{E}_{\alpha\beta}| \lesssim &\sum_{\gamma\in[\![\mu]\!],x\in\mathcal{N}_\gamma}(|G^{(\mathbb{T}\mathbb{W})}_{c_\alpha x}|^2 + |G^{(\mathbb{T}\mathbb{W})}_{c_\beta x}|^2) + \sum_{\gamma\in[\![\mu]\!]\setminus\{\alpha,\beta\}}(|G^{(\mathbb{T}b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha b_\gamma}|^2 + |G^{(\mathbb{T}b_\alpha b_\beta)}_{c_\beta b_\gamma}|^2) \\ &+ \sum_{x\in\mathbb{T}}(|G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha x}|^2 + |G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\beta x}|^2) + N^{-\mathfrak{b}}\Phi,\end{aligned} \tag{13.33}$$

以及 $N_\gamma = \{x \neq c_\gamma : \ x \sim b_\gamma\} \cup \{a_\gamma\}$。

接下来我们证明，对于 $\mathcal{G} \in \Omega$，以及 $\alpha \neq \beta$，$\alpha' \neq \beta'$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}} \sum_{\mathbf{i}^+} I(\mathcal{F}^+, \mathcal{G})(|\mathcal{E}_{\alpha\beta}||G^{(b_{\alpha'}b_{\beta'})}_{c_{\alpha'}c_{\beta'}}| + |G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}||\mathcal{E}_{\alpha'\beta'}| + |\mathcal{E}_{\alpha\beta}|^2) \\ &\lesssim N^{-\mathfrak{b}} \sum_{\substack{\gamma \in \{\alpha,\beta,\alpha',\beta'\} \\ x \sim b_\gamma, x \neq c_\gamma}} \frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}} \sum_{\mathbf{i}^+} I(\mathcal{F}^+, \mathcal{G})|G^{(b_\gamma)}_{c_\gamma x}|^2 + \frac{\Phi}{N^{3\mathfrak{b}/4}}, \end{aligned} \tag{13.34}$$

因此

$$\begin{aligned} &\frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}} \sum_{\mathbf{i}^+} I(\mathcal{F}^+, \mathcal{G})(G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta} + \mathcal{E}_{\alpha\beta})(\overline{G}^{(b_{\alpha'}b_{\beta'})}_{c_{\alpha'}c_{\beta'}} + \overline{\mathcal{E}}_{\alpha'\beta'}) \\ &= \frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}} \sum_{\mathbf{i}^+} I(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}) G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta} \overline{G}^{(b_{\alpha'}b_{\beta'})}_{c_{\alpha'}c_{\beta'}} + \mathrm{O}\left(\sum_{\substack{\gamma \in \{\alpha,\beta,\alpha',\beta'\} \\ x \sim b_\gamma, x \neq c_\gamma}} \frac{N^{-\mathfrak{b}}}{Z_{\mathcal{F}^+}} \sum_{\mathbf{i}^+} I(\mathcal{F}^+, \mathcal{G})|G^{(b_\gamma)}_{c_\gamma x}|^2 + \frac{\Phi}{N^{3\mathfrak{b}/4}} \right). \end{aligned} \tag{13.35}$$

为证明（13.34），我们首先将（13.33）中 $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ 的界代入（13.34）的左侧，此后每一项都包含三个格林函数元素作为因子。根据（3.26），其中一个可用 $N^{-\mathfrak{b}}$ 来界定，而其余两个可用形如 $\{|G^{(b_\gamma)}{}_{c_\gamma x}|^2\}$ 的项来界定，其中$\gamma \in \{\alpha, \beta, \alpha', \beta'\}$、$x \sim b_\gamma$、$x \neq c_\gamma$；或者根据（3.27），可用 $N^{\mathfrak{o}}\Phi$ 来界定。接下来我们估计（13.34）中的以下一项，其余各项也可用同样的方法界定，因此不再赘述。

$$\frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}} \sum_{\mathbf{i}^+} I(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}) \sum_{\gamma \in [\![\mu]\!], x \in \mathcal{N}_\gamma} |G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha x}|^2 |G^{(b_{\alpha'}b_{\beta'})}_{c_{\alpha'}c_{\beta'}}| \lesssim \frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}} \sum_{\mathbf{i}^+} I(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}) \sum_{\gamma \in [\![\mu]\!], x \in \mathcal{N}_\gamma} N^{-\mathfrak{b}} |G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha x}|^2, \tag{13.36}$$

其中，我们根据（3.26）将 $|G^{(b_{\alpha'}b_{\beta'})}{}_{c_{\alpha'}c_{\beta'}}| \lesssim N^{-\mathfrak{b}}$ 界定。若 $\gamma \neq \alpha$，由（3.27）可得（忽略指示函数和对嵌入取平均）

$$(13.36) \lesssim \frac{1}{Nd} \sum_{\substack{\gamma \in [\![\mu]\!] \setminus \{\alpha\} \\ x \in \mathcal{N}_\gamma}} N^{-\mathfrak{b}} \sum_{b_\alpha \sim c_\alpha} |G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha x}|^2 \lesssim N^{-\mathfrak{b}} N^{\mathfrak{o}} \Phi \lesssim N^{-3\mathfrak{b}/4} \Phi. \tag{13.37}$$

因此，我们可以将（13.36）化简为以下情形 $\gamma = \alpha$

$$\frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}} \sum_{\mathbf{i}^+} I(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}) N^{-\mathfrak{b}} \left(|G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha a_\alpha}|^2 + \sum_{\substack{x \sim b_\alpha \\ x \neq c_\alpha}} |G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha x}|^2 \right). \tag{13.38}$$

涉及 $|G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha a_\alpha}|^2$ 的项可以按照（13.37）中的相同方法进行界定。接下来，我们证明可以在（13.38）中用 $G^{(b_\alpha)c_\alpha x}$ 替换 $G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha x}$。

$$\begin{aligned} (13.38) &= \frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}} \sum_{\mathbf{i}^+} I(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}) N^{-\mathfrak{b}} \sum_{\substack{x \sim b_\alpha \\ x \neq c_\alpha}} |G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha x}|^2 + \mathcal{E}, \\ |\mathcal{E}| &\lesssim \frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}} \sum_{\mathbf{i}^+} I(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}) N^{-\mathfrak{b}} \sum_{\substack{x \sim b_\alpha \\ x \neq c_\alpha}} |G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha x} - G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha x}| + \mathrm{O}(N^{-3\mathfrak{b}/4}\Phi), \end{aligned} \tag{13.39}$$

其中对于 $\mathcal{E}$的界，我们使用了 $|G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha x}|$，$|G^{(b_\alpha)}{}_{c_\alpha x}| \lesssim 1$ 根据（3.26）。

借助于（13.14），我们可以将差 $|G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha x} - G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha x}|$ 界为

$$\left|G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha x} - G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha x}\right| \leqslant \sum_{\gamma\in[\![\mu]\!]\setminus\{\alpha\}} (|G^{(\mathbb{T}b_\alpha)}_{c_\alpha b_\gamma}|^2 + |G^{(\mathbb{T}b_\alpha)}_{xb_\gamma}|^2) + \sum_{y\in\mathbb{T}} (|G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha y}|^2 + |G^{(b_\alpha)}_{xy}|^2). \tag{13.40}$$

代入 (13.40) 到 (13.39) 中，并采用与 (13.37) 相同的论证，我们可以对 $\mathcal{E}$ 在 (13.39) 中作出界 as

$$\frac{N^{-\mathfrak{b}}}{Z_{\mathcal{F}^+}} \sum_{\mathbf{i}^+} I(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}) \left(\sum_{\gamma\in[\![\mu]\!]\setminus\{\alpha\}} (|G^{(\mathbb{T}b_\alpha)}_{c_\alpha b_\gamma}|^2 + |G^{(\mathbb{T}b_\alpha)}_{xb_\gamma}|^2) + \sum_{y\in\mathbb{T}} (|G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha y}|^2 + |G^{(b_\alpha)}_{xy}|^2) \right) \lesssim N^{-3\mathfrak{b}/4}\Phi. \tag{13.41}$$

断言 (13.34) 可由将 (13.37)、(13.39) 和 (13.41) 代入 (13.36) 得出。

对于 (13.35) 右端的第一项，我们回顾 $\alpha \neq \beta$ 和 $\alpha' \neq \beta'$。于是，要么$\{\alpha, \beta\} = \{\alpha', \beta'\}$，要么某些指标（例如 α, α'）只出现一次（即 $\alpha \neq \alpha'$, β' 和 $\alpha' \neq \alpha$, β）。然后，我们可以分别对 (b_α, c_α) 和 $(b_{\alpha'}, c_{\alpha'})$ 求和（忽略指示函数）

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(Nd)^2} \sum_{c_\alpha\sim b_\alpha} \sum_{c_{\alpha'}\sim b_{\alpha'}} G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta} \overline{G}^{(b_{\alpha'} b_{\beta'})}_{c_{\alpha'} c_{\beta'}} \\ \lesssim\ &\frac{1}{(Nd)^2} \sum_{c_\alpha\sim b_\alpha} \sum_{c_{\alpha'}\sim b_{\alpha'}} N^{-\mathfrak{b}/2}(|G^{(b_\beta)}_{b_\alpha c_\beta}| + \Phi) |N^{-\mathfrak{b}/2}(|G^{(b_{\beta'})}_{b_{\alpha'} c_{\beta'}}| + \Phi)| \\ \lesssim\ &\frac{N^{-\mathfrak{b}}}{(Nd)^2} \sum_{c_\alpha\sim b_\alpha} \sum_{c_{\alpha'}\sim b_{\alpha'}} (|G^{(b_\beta)}_{b_\alpha c_\beta}|^2 + |G^{(b_{\beta'})}_{b_{\alpha'} c_{\beta'}}|^2 + \Phi) \lesssim N^{-\mathfrak{b}}\Phi, \end{aligned} \tag{13.42}$$

其中，第一个等式用到了 (11.27)；第二个等式由柯西-施瓦茨不等式得出；最后一个等式由 Ward 恒等式界 (3.27) 得出。否则，若 $\{\alpha, \beta\} = \{\alpha', \beta'\}$，由 (7.49) 可得

$$\frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}} \sum_{\mathbf{i}^+} I(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}) |G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}|^2 \lesssim N^{\mathfrak{o}}\Phi. \tag{13.43}$$

回顾一下， J_1 在（13.31）中是对（13.35）关于 $\alpha \neq \beta \in [\![\mu]\!]$ 和 $\alpha' \neq \beta' \in [\![\mu]\!]$取平均后得到的。代入（13.35）、（13.42）和（13.43），我们得出：

$$\begin{aligned} J_1 = &\sum_{\alpha\neq\beta\in[\![\mu]\!]} \frac{1}{(d-1)^{2\ell} Z_{\mathcal{F}^+}} \sum_{\mathbf{i}^+} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}(\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{G}} \in \Omega) I(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}) |G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}|^2\right] \\ &+ \frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}} \sum_{\mathbf{i}^+} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}(\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{G}} \in \Omega) I(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}) \left(\frac{(d-1)^{2\ell}}{N^{\mathfrak{b}}} \sum_{\alpha\in[\![\mu]\!]} \sum_{x\sim b_\alpha, x\neq a_\alpha} |G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha x}|^2 + \frac{\Phi}{N^{\mathfrak{b}/2}} \right)\right], \\ \lesssim &\frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}} \sum_{\mathbf{i}^+} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}(\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{G}} \in \Omega) I(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}) \left(\frac{1}{N^{3\mathfrak{b}/4}} \sum_{x\sim b_\alpha, x\neq a_\alpha} |G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha x}|^2 + N^{\mathfrak{o}}\Phi \right)\right]. \end{aligned} \tag{13.44}$$

其中，在最后一个陈述中，我们使用了（13.43）以及顶点的置换不变性，因此期望不依赖于 α。用同样的论证，我们还可以将（13.31）中的 J_2 界定为：

$$J_2 \lesssim \frac{1}{N^{3\mathfrak{b}/4} Z_{\mathcal{F}^+}} \sum_{\mathbf{i}^+} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}(\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{G}} \in \Omega) I(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}) \left(\frac{1}{N^{3\mathfrak{b}/4}} \sum_{x\sim b_\alpha, x\neq a_\alpha} |G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha x}|^2 + (d-1)^{2\ell} N^{\mathfrak{o}}\Phi \right)\right]. \tag{13.45}$$

将（13.44）和（13.45）代入（13.31），我们得到

$$\begin{aligned}(13.31) &\lesssim \frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}}\sum_{\mathbf{i}^+}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}(\mathcal{G},\widetilde{\mathcal{G}}\in\Omega)I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})\left(\frac{1}{N^{3\mathfrak{b}/4}}\sum_{x\sim b_\alpha,x\neq a_\alpha}|G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha x}|^2+N^{\mathfrak{o}}\Phi\right)\right]\\ &\lesssim \frac{1}{N^{3\mathfrak{b}/4}Z_{\mathcal{F}^+}}\sum_{\mathbf{i}^+}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})\sum_{x\sim b_\alpha,x\neq a_\alpha}|G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha x}|^2\right]+\mathbb{E}[N^{\mathfrak{o}}\Phi]\\ &\lesssim \frac{1}{N^{3\mathfrak{b}/4}(Nd)}\sum_{b_\alpha\sim c_\alpha}\mathbb{E}\left[I(\{c_\alpha,b_\alpha\},\mathcal{G})\sum_{x\sim b_\alpha,x\neq a_\alpha}|G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha x}|^2\right]+\mathbb{E}[N^{\mathfrak{o}}\Phi]\\ &\lesssim \frac{1}{N^{1+3\mathfrak{b}/4}}\sum_{o\in[\![N]\!]}\mathbb{E}\left[I(\{i,o\},\mathcal{G})|G^{(o)}_{ij}|^2\right]+\mathbb{E}[N^{\mathfrak{o}}\Phi],\end{aligned}\tag{13.46}$$

其中，在第二个等式中，我们省略了指示函数$\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)$；在第三个等式中，对$\mathbf{i}^+\setminus\{b_\alpha,c_\alpha\}$求和；在最后一个等式中，我们利用了顶点的置换不变性，因此 $G^{(o)}_{ij}$ 和 $G^{(b_\alpha)c_\alpha x}$ 具有相同的分布。

因此，结合 (13.31) 和 (13.46) 可得以下界

$$\frac{1}{N}\sum_{o\in[\![N]\!]}\mathbb{E}[I(\{i,o\},\mathcal{G})|G^{(o)}_{ij}|^2]\lesssim\frac{1}{N^{1+3\mathfrak{b}/4}}\sum_{o\in[\![N]\!]}\mathbb{E}[I(\{i,o\},\mathcal{G})|G^{(o)}_{ij}|^2]+\mathbb{E}[N^{\mathfrak{o}}\Phi],$$

重新整理后即可得到断言 (13.1)。

□

命题 *13.2* 的证明。 由定理 13.3，我们有

$$\widetilde{G}^{(\mathbb{T})}_{c_\alpha c_\beta}=G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha c_\beta}+\mathcal{E}_{\alpha\beta},$$

其中 $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ 如 (13.33) 中所示。只需证明

$$\begin{aligned}&\sum_{\gamma\in[\![\mu]\!]}\sum_{x\in\mathcal{N}_\gamma}\frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}}\sum_{\mathbf{i}^+}\mathbb{E}[I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)|G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha x}|^2]\lesssim(d-1)^\ell\mathbb{E}[N^{\mathfrak{o}}].\\ &\sum_{\gamma\in[\![\mu]\!]\setminus\{\alpha,\beta\}}\frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}}\sum_{\mathbf{i}^+}\mathbb{E}[I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)|G^{(\mathbb{T}b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha b_\gamma}|^2]\lesssim(d-1)^\ell\mathbb{E}[N^{\mathfrak{o}}],\\ &\sum_{x\in\mathbb{T}}\frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}}\sum_{\mathbf{i}^+}\mathbb{E}[I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)|G^{(b_\alpha b_\beta)}_{c_\alpha x}|^2]\lesssim(d-1)^\ell\mathbb{E}[N^{\mathfrak{o}}],\end{aligned}\tag{13.47}$$

其中 $N_\gamma=\{x\neq c_\gamma:\ x\sim b_\gamma\}\cup\{a_\gamma\}$。

下面我们证明（13.47）中的第一个结论，其余结论类似，因此略去证明。若$x\in\mathcal{N}_\gamma$ 满足 $\gamma\neq\alpha$，或 $x=a_\alpha$，我们可以先对 $b_\alpha\sim c_\alpha$求和，而（3.27）给出

$$\frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}}\sum_{\mathbf{i}^+}I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)|G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha x}|^2\lesssim N^{\mathfrak{o}}\Phi.\tag{13.48}$$

否则 $x\sim b_\alpha$，$x\neq c_\alpha$。根据（3.26），我们有 $||G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha x}|^2-|G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha x}|^2|\le N^{-\mathfrak{b}}|G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha x}-G^{(b_\alpha)\ c_\alpha x}|$。回顾（13.40）和（13.41）给出的关于 $|G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha x}-G^{(b_\alpha)\ c_\alpha x}|$ 的上界，然后可得

$$\frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}}\sum_{\mathbf{i}^+}I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)|G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha x}|^2=\frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}}\sum_{\mathbf{i}^+}I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)|G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha x}|^2+\mathrm{O}(N^{-\mathfrak{b}/2}\Phi).\tag{13.49}$$

结合（13.48）和（13.49），我们得出

$$\begin{aligned}&\sum_{\gamma\in[\![\mu]\!]}\sum_{x\in\mathcal{N}_\gamma}\frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}}\sum_{\mathbf{i}^+}\mathbb{E}[I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)|G^{(\mathbb{TW})}_{c_\alpha x}|^2]\\ \lesssim&\sum_{x\sim b_\alpha,x\neq c_\alpha}\frac{1}{Z_{\mathcal{F}^+}}\sum_{\mathbf{i}^+}\mathbb{E}[I(\mathcal{F}^+,\mathcal{G})\mathbf{1}(\mathcal{G}\in\Omega)|G^{(b_\alpha)}_{c_\alpha x}|^2]+(d-1)^\ell\mathbb{E}[N^{\mathfrak{o}}\Phi]\lesssim(d-1)^\ell\mathbb{E}[N^{\mathfrak{o}}\Phi].\end{aligned}\tag{13.50}$$

其中，在最后一行我们使用了（13.1）来界定第一项；（13.47）中的第一个断言可由结合（13.48）和（13.50）得出。 □

参考文献

[1] A. Adhikari 和 J. Huang. 边缘处一般 β 及势的 Dyson布朗运动. 《概率论及相关领域》, 178(3):893–950, 2020.[2] R. Bauerschmidt, J. Huang, A. Knowles 和 H.-T. Yau. 中等度随机正则图的边缘刚性与普适性. 《几何与泛函分析》, 30(3):693–769, 2020.[3] R. Bauerschmidt, J. Huang 和 H.-T. Yau. 随机正则图的局部 Kesten–McKay 定律. 《数学物理通讯》, 369:523–636, 2019.[4] F. Bekerman, A. Figalli 和 A. Guionnet. β-矩阵模型的输运映射与普适性. 《数学物理通讯》, 338(2):589–619, 2015.[5] P. Biane. 关于与半圆分布的自由卷积. 《印第安纳大学数学杂志》, 46(3):705– 718, 1997.[6] G. Borot 和 A. Guionnet. 单切割区域中 β 矩阵模型的渐近展开. 《数学物理通讯》, 317:447–483, 2013.[7] G. Borot 和 A. Guionnet. 多切割区域中矩阵模型的渐近展开. 载于《数学论坛：Sigma》第 12 卷，第 e13 页。剑桥大学出版社，2024.[8] P. Bourgade, L. Erd˝os 和 H.-T. Yau. 具有非凸势的一般 β-系综的体区普适性. 《数学物理学杂志》, 53(9), 2012.[9] P. Bourgade, L. Erd¨os 和 H.-T. Yau. β 系综的边缘普适性. 《数学物理通讯》, 332(1):261–353, 2014.[10] P. Bourgade, L. Erd˝os 和 H.-T. Yau. 一般 β- 系综的普适性 . 《杜克数学杂志》, 163(6):1127 – 1190, 2014.[11] C. Carr. Tracy–Widom （ TW1 ）分布的累积分布函数。 https://www.mathworks.com/matlabcentral/ fileexchange/30983-cdf-for-tracy-widom-tw1-distribution, 2025. MATLAB Central File Exchange。检索于 2025-09-09。[12] L. Erd˝os 和 H.-T. Yau. 随机矩阵理论的动力学方法，第 28 卷。美国数学会，2017.[13] A. Guionnet. 随机矩阵及相关模型的渐近分析：Dyson–Schwinger 方程的应用，第 130 卷。美国数学会，2019.[14] Y. He. 稠密随机正则图的谱隙与边缘普适性. 《数学物理通讯》, 405(8):181, 2024.[15] J. Huang, T. Mckenzie 和 H.-T. Yau. 随机正则图的 Ramanujan 性质与边缘普适性. arXiv 预印本 arXiv:2412.20263, 2024.[16] J. Huang 和 H.-T. Yau. 增长度数随机正则图的边缘普适性. arXiv 预印本 arXiv:2305.01428, 2023.

[17] J. Huang 和 H.-T. Yau. 随机 d-正则图的谱直至边缘. 《纯粹与应用数学通讯》, 77(3):1635–1723, 2024.[18] K. Johansson. 随机厄米矩阵特征值的涨落. 《杜克数学杂志》, 91(1):151 – 204, 1998.[19] H. Kesten. 群上的对称随机游走. 《美国数学会会刊》, 92(2):336–354, 1959.[20] B. Landon 和 H.-T. Yau. Dyson布朗运动的边缘统计. *arXiv* 预印本 *arXiv:1712.03881*, 2017.[21] B. D. McKay. 大型正则图的期望特征值分布. 《线性代数及其应用》, 40:203–216, 1981.[22] A. A. Migdal. 圈方程与 1/n 展开. 《物理报告》, 102(4):199–290, 1983.[23] S. J. Miller, T. Novikoff 和 A. Sabelli. 随机正则图族中最大非平凡特征值的分布. 《实验数学》, 17(2):231–244, 2008.[24] P. C. Sarnak. 什么是 ..... 扩展图? 《美国数学会通报》, 51(7):762–763, 2004.[25] M. Shcherbina. 多切割区域中 β 矩阵模型的线性特征值统计量的涨落。《统计物理学杂志》, 151:1004–1034, 2013.[26] M. Shcherbina. 变量替换作为研究一般 β-模型的方法：体区普适性. 《数学物理学杂志》, 55(4), 2014.