arXiv:2602.00976v1 [math.GT] 1 Feb 2026

具有大特征簇的结

PHILIP CHOI、JOAN PORTI 和 SEOKBEOM YOON

ABSTRACT. 我们研究其 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-特征簇包含维数大于一的分支的纽结。我们称这类纽结为 $\mathcal{X}$-大结，并介绍两种图示构造方法，用以构造 $\mathcal{X}$-大结。第一种构造利用分裂链环图和有理缠结替换，从拓扑学角度解释了结表中观察到的大多数 $\mathcal{X}$-大结。第二种构造基于辫子和反向定向对合，其灵感来自对纽结 10_{123}，（也称土耳其头结 $Th(3,5)$）的详细分析。特别是，这种方法适用于土耳其头结 $Th(p,q)$，其中 p 和 q 为奇数，因此我们猜想所有这类纽结都是 $\mathcal{X}$-大结。除此之外，我们还给出了瑟斯顿定理的不可定向类比，为不可定向三维流形的特征簇维数提供了一个下界。

CONTENTS

1. 引言 1
2. 有理缠结替换 3
2.1. 玩具示例：纽结 10_{98} 3
2.2. 一般构造 4
3. 辫子与反向定向对合 6
3.1. 玩具示例：纽结 10_{123} 6
3.2. 一般构造 9
4. 瑟斯顿式维数估计 11
4.1. 克莱因瓶 12
4.2. 维数估计 12
4.3. 定理 3.5 的证明 14
附录 A. 抛物表示 14
致谢 15
参考文献 16

1. INTRODUCTION

设 K 是 S^3中的一个纽结。在本文中，我们始终区分纽结与链环：纽结只有一个分支，而链环有多个分支。我们用 $\mathcal{G}(K) := \pi_1(S^3 \setminus K)$表示 K的结群，用 $\mathcal{X}(K)$表示$\mathcal{G}(K)$的 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 特征标簇，

$$\mathcal{X}(K) := \mathrm{Hom}(\mathcal{G}(K), \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))//_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}.$$

日期：2026年2月3日。关键词与短语。特征簇， $\mathcal{X}$-大纽结，缠结替换，反向定向对合，瑟斯顿维数定理，土耳其头结，强正两手性纽结。

纽结群的特征簇在文献中已有广泛研究。然而，现有的大多数结果都集中于 $\mathcal{X}(K)$的维数为一的情形。这在一定程度上是因为，当 K 是双曲的，几何表示位于 $\mathcal{X}(K)$的一个一维分支上；同时，许多纽结（尤其是交叉较少的纽结）似乎都只有一维特征簇。

本文研究满足 K for dim $\mathcal{X}(K) > 1$ 的纽结。这里，dim 表示最大维数分支的（复）维数。我们称此类纽结为 $\mathcal{X}$-large。众所周知，如果 K 是 $\mathcal{X}$-large，那么 K 是 large，这意味着其补空间含有一个 [CCG+94] 闭本质曲面。然而，反之并不成立：存在一些 large 纽结并非 $\mathcal{X}$-large，例如 8_{16} 和 8_{17} [LM26]。根据第一作者与 Seonhwa Kim 合作开展的关于抛物表示的工作中所获得的计算数据 [KC26], ，在 Rolfsen纽结表中，至多具有 10 个交叉且可能是 $\mathcal{X}$-large 的候选者只有三个： $10_{98}, 10_{99},$ 和 10_{123}（详情见附录 A）。本文的一个动机是确定这些纽结是否确实是 $\mathcal{X}$-large；如果是，则为这一现象提供一种拓扑学解释，而不是依赖于对特征簇的蛮力计算。据作者所知，现有的相关结果（例如，[CL96、PP13、Che25]）并不适用于这些纽结。

本文的一个主要目标是介绍两种新的图示构造，用于生成$\mathcal{X}$-大纽结。

第一种构造使用分裂链环图和 2-缠结替换。我们在第 2.2 节（定理2.1）中明确阐述了这一构造，此前我们在第 10_{98} 节中以纽结 2.1为示例解释了其核心思想。这一构造简单却十分强大：它能从一个固定的链环图生成无穷多个 $\mathcal{X}$-大纽结。事实上，我们计算中观察到的大多数 $\mathcal{X}$-大纽结都源于这一构造。例如，它以图示方式解释了为何 10_{98} 和 10_{99} 是 $\mathcal{X}$-大的。遗憾的是，目前我们还不知道如何以类似方式解释 10_{123}；不过，我们的第二种构造适用于10_{123}。

第二种构造使用辫和反向定向对合。其动机来自这样一个观察：纽结 10_{123} 具有一种辫表示，可分解为两个部分，其中一个部分在反向定向对合下与另一个部分共轭（见图 6）。我们在第 10_{123} 节详细分析了 3.1 ，随后在第 3.2 节（定理 3.5）中推广了这一构造。特别地，这一构造适用于土耳其头结 $Th(p, q)$ ，其中 p和 q为奇数；这促使我们猜想，所有这类土耳其头结都是 $\mathcal{X}$-大的（猜想 3.6）。我们还给出了定理 3.5的一个变体，适用于强正两手性纽结（定理 3.7）。

定理 3.5 的证明需要瑟斯顿定理的一个不可定向类比，该定理给出了特征簇维数的下界 [Thu22，定理 5。6]粗略地说，瑟斯顿定理断言，在温和的假设下，具有 k 边界环面的（连通）可定向三维流形，其特征簇的维数至少为 k。对于定理 3.5，我们需要关于具有克莱因瓶边界的不可定向三维流形的相应论断。据作者所知，文献中其他地方尚未出现这样的不可定向版本。因此，我们将定理 3.5的证明推迟到第 4节，在那里我们将在不可定向情形下阐述并证明维数估计（定理 4.4）。

利用我们的构造，我们能够解释在计算中观察到的所有 $\mathcal{X}$-大纽结。特别是，如上文所述，我们确认 10_{98}, 10_{99}, 和 10_{123} 是$\mathcal{X}$-大的。因此，我们得到以下结论：

交叉数不超过 10 时，唯一的 $\mathcal{X}$-large 纽结是 10_{98}, 10_{99}, 和 10_{123}。

这自然引出了一个问题：我们的构造是否涵盖了交叉数不超过某个值的所有 $\mathcal{X}$-large 纽结。然而，本文不试图回答这个问题，因为确定 $\mathcal{X}$-large 纽结的列表需要计算完整的特征簇及其维数，即使对于有 11 个交叉的纽结而言，这也极其困难。

2. 有理缠结替换

本节将介绍能够产生 $\mathcal{X}$-large 纽结的有理缠结替换。我们先以纽结 10_{98} 为一个简单示例，然后说明一般情形下的构造。

2.1. **简单示例：纽结** 10_{98}。 令 L 为由纽结 3_1 和平凡结组成的分裂链环。这里，分裂是指存在一个 2-球面，将平凡结与 3_1分隔开。我们固定 L的一个图，其中有一个交叉 c 和两个 Wirtinger生成元 g 与 h 位于 c周围，如图 1（左）所示。注意，平凡结分支以红色标出。

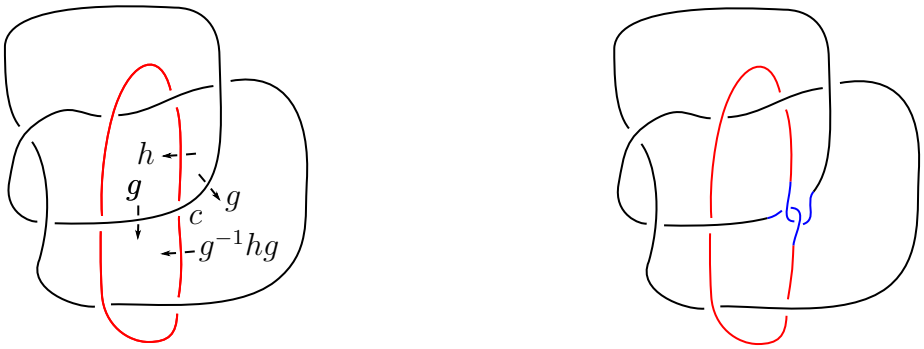


FIGURE 1. 分裂链环 $3_1 \sqcup O$ 和纽结 10_{98}。

设 ρ 是 $\mathcal{G}(L) = \pi_1(S^3 \setminus L)$ 的一个表示，其在 $\mathcal{G}(3_1)$ 上的限制不可约，且 $G = \rho(g)$ 和 $H = \rho(h)$ 具有如下形式

$$G = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & m^{-1} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} m & 0 \\ u & m^{-1} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

对任意非零复数 m 和 u，这样的 ρ 都存在，因为 h 是分裂链环 L 的平凡分支的一个子午线，而 g 是另一个非平凡分支的一个子午线。

我们假设 (u, m) 是 3_1 ([Ril84] 的 Riley 多项式的一个解):

$$u + m^2 - 1 + m^{-2} = 0. \tag{2}$$

这意味着矩阵 G 和 H 对应于 3_1的非阿贝尔表示。更准确地说， 3_1 的结群有两个生成元 x 和 y ，以及一个关系子 $xyx = yxy$；若满足方程（2），则赋值 $x \mapsto G$ 和 $y \mapsto H$ 定义了一个表示。换句话说，方程（2）蕴含 $GHG = HGH$。

另一方面，交叉 c周围的一个小圆与 L 的图相交于四个点，对应四个 Wirtinger生成元（其中两个重合）。在表示 ρ下，这些生成元分别映射到 G、H、G和 $G^{-1}HG$，如图2（左）所示。由于矩阵 G 和 H 满足 $GHG = HGH$，因此 $HGH^{-1} = G^{-1}HG$ 和 $HGHG^{-1}H^{-1} = G$。于是，可以用图2（右）所示的有理二缠结替换交叉 c，同时保持圆外部分不变。此操作得到纽结 10_{98} （见图1），并表明 $\mathcal{G}$（L）的表示 ρ 诱导出 $\mathcal{G}$（10_{98}）的一个表示。

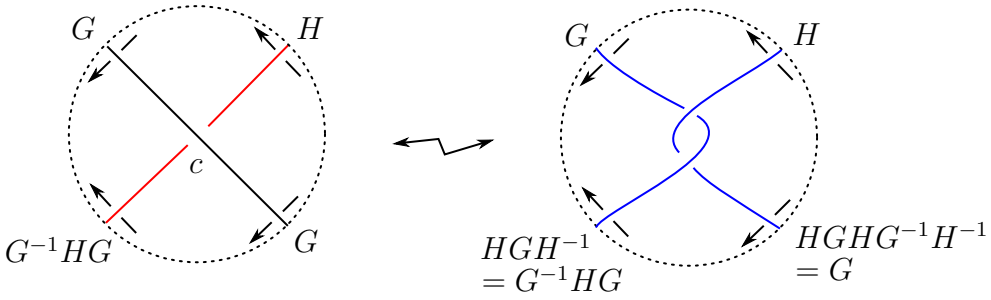


FIGURE 2. 用一个 2-弦图替换一个交叉。

现在考虑满足其共轭作用固定矩阵 G 的矩阵 A，即 $AGA^{-1} = G$。具体而言，对于非零复数 t，有

$$A = \begin{pmatrix} t & \frac{t-t^{-1}}{m-m^{-1}} \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \text{ if } m^2 \neq 1, \quad \text{and} \quad A = \begin{pmatrix} m & t \\ 0 & m^{-1} \end{pmatrix} \text{ if } m^2 = 1\,. \tag{3}$$

令 $H^A := AHA^{-1}$，则有 $GH^AG = H^AGH^A$。用矩阵 H^A 替代 H，上述缠结替换会产生 $\mathcal{G}(L)$ 的表示，每个表示又诱导出 $\mathcal{G}(10_{98})$ 的一个表示。通过改变 m 和 t，我们得到 $\mathcal{G}(10_{98})$ 的一个二维表示族，并且很容易验证这些表示的共轭类各不相同。这说明 10_{98} 的特征簇有一个维数大于 1 的分支。也就是说，纽结 10_{98} 是 $\mathcal{X}$-大纽结。

2.2. **一般构造**。 本节中，我们将上一节讨论的缠结替换推广为使用任意有理二缠结图，而非图 2 中所示的特定图。

给定一个结或链环的图，将一个交叉 c 替换为一个 2-弦图图示 R，是指移除一个包含 c 的小圆盘，并将 R 放入其中，同时保持圆盘外部不变；见图3。圆盘的边界与图相交于四个点。如果其中两点由 c的上穿（分别为下穿）连接，我们将它们标记为 o （分别为 u）。接着，我们定义 R 的 c-闭包：将 R中两个 o点和两个 u点分别连接起来，从而在圆盘外形成一个交叉，其中 o点（分别为 u点）由上穿（分别为下穿）连接；见图4。例如，图2（右）中的 2-弦图图示的 c-闭包为 3_1。

定理2.1。 设 L 是由一个非平凡结 T 和一个平凡结构成的分裂链环。固定 L 的一个图，使得存在一个交叉 c，在该处 T 与平凡结相交。假设

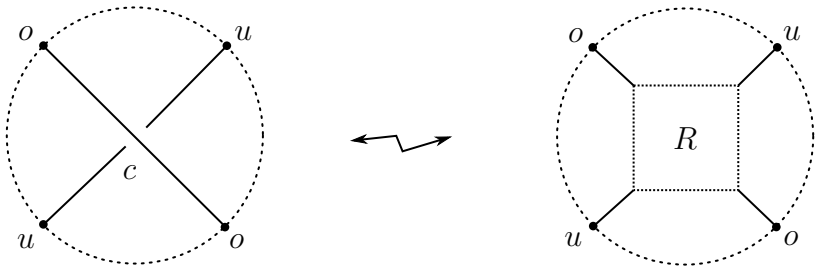


FIGURE 3. 用一个2-弦图替换一个交叉。

- 通过将交叉 c 替换为有理二缠结图R得到一个纽结 K ，并且
- R 的 c-闭包是一个非平凡（二桥）纽结。

那么， K 是 $\mathcal{X}$-大的。

证明。设 R_c 为通过 R的 c-闭包得到的二桥纽结。Ril84]在 [中证明，存在一个二元多项式 P ，使得迹相同的两个矩阵 G 和 H 在满足 $P(\text{tr } G, \text{tr } HG) = 0$时，对应于 R_c的一个非阿贝尔表示。具体而言，如图4所示，将位于弦图 R 上方的两个Wirtinger生成元分别映射到 G 和 H，若 $P(\text{tr } G, \text{tr } HG) = 0$，则该映射定义了 $\mathcal{G}(R_c)$的一个非阿贝尔表示。注意，表示将位于 R 下方的两个Wirtinger生成元分别映射到 $G^{-1}HG$ 和 G ，因此可以用图3（左）中的交叉替换 R 。

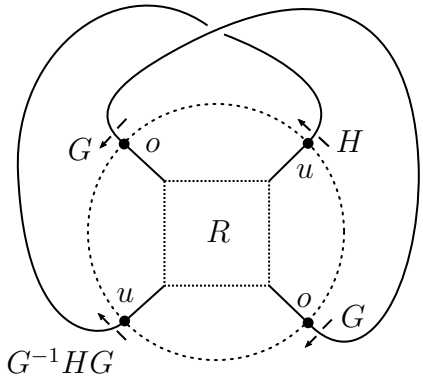


FIGURE 4. 有理二缠结的 c闭包 R_c。

现在考虑给定的分裂链环图 L。设 g 和 h 是位于交叉 c 上方的 Wirtinger 生成元，分别对应于 c的上穿和下穿。我们可以假设 h是 L中平凡结分支的子午线，而 g 是另一个分支 T的子午线；否则，我们将 L的图翻转。

由于 L 是一个分裂链环，且 h 是平凡结分支的子午线，$\mathcal{G}(L)$ 的一个表示由 $\mathcal{G}(T)$ 的一个表示以及赋予 h的单个矩阵决定，该矩阵可以自由选取。因此，存在 ρ of $\mathcal{G}(L)$ 的一个表示，其对 $\mathcal{G}(T)$ 的限制是不可约的，并且 $G = \rho(g)$ 与 $H = \rho(h)$ 满足 tr $G =$ tr H

以及 $P(\mathrm{tr}\ G,\ \mathrm{tr}\ HG) = 0$。如前所述，这样的 ρ 通过将交叉 c 替换为 2-弦图 R，诱导出 $\mathcal{G}(K)$ 的一个表示。

另一方面，对于固定的 G，存在一个由满足 $AGA^{-1} = G$ 的矩阵 A 构成的一维族。因此，可以在保持 G 不变的同时，将 H 变形为 $H^A = AHA^{-1}$。用矩阵 H^A 代替 H，我们得到 $\mathcal{G}(L)$ 的一个一维表示族，其中每个表示都会诱导出 $\mathcal{G}(K)$ 的一个表示。由于 ρ 对 $\mathcal{G}(T)$ 的限制是不可约的，存在一个元素 $g' \in \mathcal{G}(T)$，使得 $G' = \rho(g')$ 的不变子空间与 G 的不变子空间不同。由于改变 A 会改变 $G'H^A$ 的迹，$\mathcal{G}(K)$ 的这些诱导表示具有不同的共轭类。

前面的论证为 $\mathcal{X}(K)$ 中迹 G的每个取值都给出一条曲线。由于 A-多项式非平凡（[DG04、Bod14、BZ05]），我们在 $\mathcal{X}(K)$ 中得到任意多条曲线。代数簇只有有限个不可约分支，因此$\mathcal{X}(K)$ 的某个分支维数大于 1。□

上述定理可有效构造 $\mathcal{X}$-大的纽结。例如，取 T 为纽结 3_1,，便可推得 10_{99}、$11a_{132}$、$11a_{157}$和 $12a_{923}$ 都是 $\mathcal{X}$-大的；见图5。

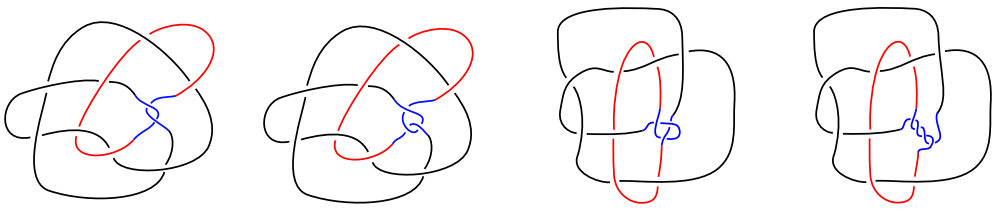


FIGURE 5. $\mathcal{X}$-大纽结示例。

3. BRAIDS AND ORIENTATION-REVERSING INVOLUTIONS

本节中，我们利用辫子和反转定向的对合构造 $\mathcal{X}$-大纽结。首先，我们以纽结 10_{123} 为简单示例，说明其构造方法。

3.1. **简单示例：纽结** 10_{123}。令 B_3 为具有标准生成元 $\sigma_1^{\pm 1}$和 $\sigma_2^{\pm 1}$的 3 股辫群。令 $b = \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1$ 和 $b^* = \sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}$。那么复合 bb^* 的闭包就是纽结 10_{123}。见图6；我们从左向右绘制辫子，因此复合是水平方向的。辫 b 与 b^* 在对应关系

$$\sigma_1^{\pm 1} \longmapsto \sigma_2^{\mp 1} \quad \text{and} \quad \sigma_2^{\pm 1} \longmapsto \sigma_1^{\mp 1}. \tag{4}$$

通过同构将辫子视为相对于边界的带 punctures 的圆盘的映射类

$$B_3 \cong \mathrm{MCG}(D^2 \setminus \{p_1, p_2, p_3\},\ \partial D^2),$$

我们有 $b^* = \tau b \tau$，其中 τ 是固定 p_2 并交换 p_1 和 p_3 的反射。

设 g_i 为辫 b 左侧的 Wirtinger生成元，h_i 为右侧的生成元，其中 $i = 1$、2、3。若给每个 g_i 赋予一个 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-矩阵 G_i，那么沿着辫 b，这一赋值会确定对应于 h_i的矩阵 H_i。将三元组 $(G_1$、G_2、$G_3)$ 与

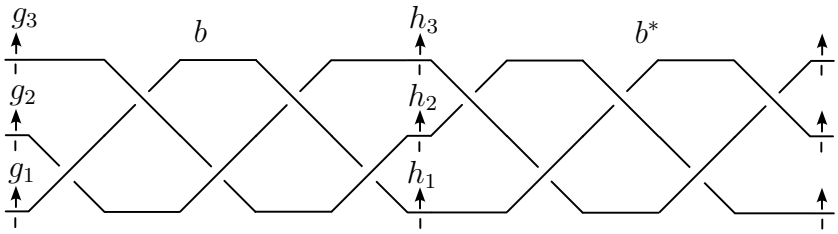


FIGURE 6. 纽结 10_{123}的辫表示。

(H_1、 H_2、 H_3) 视为秩为 3 的自由群 F_3 的表示，则将 (G_1、 G_2、 G_3) 映射到 (H_1、 H_2、 H_3) 的映射定义了 F_3表示簇的一个自同构。将注意力限制在 (G_1、 G_2、 G_3) 不可约的情形，此映射便通过将 $[G_1, G_2, G_3]$ 映射到 $[H_1, H_2, H_3]$，诱导出 F_3的$\mathcal{X}_{\text{不可约}}$自同构。这里，$\mathcal{X}^{\text{irr}}(F_3)$ 表示 F_3的不可约表示的特征簇，方括号表示共轭类。

引理3.1。 存在一个子簇 $U \subset \mathcal{X}^{\text{irr}}(F_3)$，其维数至少为2，且其中每一点 $[G_1, G_2, G_3] \in U$ 都满足

$$\operatorname{tr} G_1 = \operatorname{tr} G_2 = \operatorname{tr} G_3, \quad \operatorname{tr} G_1G_2G_3 \neq \pm 2, \quad \text{and} \quad [H_1, H_2, H_3] = [G_3^{-1}, G_2^{-1}, G_1^{-1}]. \tag{5}$$

证明。 的特征簇 F_3 是6维的，因此（5）中的第一个条件定义了一个4维子簇 V。具体而言，其坐标环$\mathbb{C}[V]$ 由$\mathbb{C}[x, y, z, b, c]/P$给出，其中

$$P = xyz + x^2 + y^2 + z^2 - b(x + y + z) - c.$$

这里，变量 x、 y、 z、 b和 c与 G_1、 G_2、 G_3的关系如下:

$$(x, y, z) = (\operatorname{tr} G_1G_2,\ \operatorname{tr} G_1G_3,\ \operatorname{tr} G_2G_3),$$
$$b = \operatorname{tr} G_1(\operatorname{tr} G_1 + \operatorname{tr} G_1G_2G_3), \quad c = 4 - 3(\operatorname{tr} G_1)^2 - (\operatorname{tr} G_1G_2G_3)^2 - (\operatorname{tr} G_1)^3 \operatorname{tr} G_1G_2G_3.$$

例如，详情请参见 [Gol09]。此外，直接计算可知，辫群 B_3 在$\mathbb{C}[V]$ 上的作用如下:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 \cdot (x, y, z, b, c) &= (x,\ z,\ b - y - xz,\ b,\ c);\\
\sigma_1^{-1} \cdot (x, y, z, b, c) &= (x,\ b - z - xy,\ y,\ b,\ c);\\
\sigma_2 \cdot (x, y, z, b, c) &= (y,\ b - x - yz,\ z,\ b,\ c);\\
\sigma_2^{-1} \cdot (x, y, z, b, c) &= (b - y - xz,\ x,\ z,\ b,\ c).
\end{aligned}$$

令(X、 Y、 Z、 b、 c) := $b \cdot$(x、 y、 z、 b、 c)，使得(X、 Y、 Z) =(tr H_1H_2， tr H_1H_3， tr H_2H_3)。

我们首先断言

$$Y - b + y + xz \notin (X - z,\ Z - x) \tag{6}$$

其中，右侧是在$\mathbb{C}[V]$ 中由 $X - z$ 和 $Z - x$生成的理想。为证明这一点，我们将$\mathbb{C}[V]$ 对(b, x^2, y^2, z^2)取商。直接计算可得，在商环中，$P = xyz - c$ 且(X, Y, Z) =(y, $-x - yz$, z)。因此， $X - z = 0$和 $Z - x = 0$ 推出 $x = y = z$。然而， $Y - y = -x - y - yz = -2x \neq 0$, 这就证明了该断言。

现在考虑由 $x = Z$ 和 $z = X$定义的 V 的子簇 V_0 。由于 V 的维数为4， V_0 的每个分支的维数至少为2。由于 $\sigma_1^{\pm 1}$和 $\sigma_2^{\pm 1}$的作用保持多项式 P不变，我们有

$$xyz + x^2 + y^2 + z^2 - b(x + y + z) - c = XYZ + X^2 + Y^2 + Z^2 - b(X + Y + Z) - c$$

因此，$(Y - y)(Y - b + y + xz) = 0$ 在 V_0上成立。由 (6) 可知，V_0 上存在一点，使得 $Y - b + y + xz \neq 0$。在该点的一个小邻域 $U \subset V_0$ 内，同一不等式也成立，这迫使 $Y = y$。由此可得，$(X, Y, Z) = (z, y, x)$ 在 U中成立。此外，我们可以假设 $G_1G_2G_3 \neq \pm 2$ 在 U中的迹，因为我们尚未指定 c，它可以改变迹 $G_1G_2G_3$。综上，以下方程在 U中成立：

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} G_1 &= \operatorname{tr} G_2 = \operatorname{tr} G_3, \\
\operatorname{tr} H_1H_2 &= \operatorname{tr} G_2G_3 = \operatorname{tr} G_3^{-1}G_2^{-1}, \\
\operatorname{tr} H_1H_3 &= \operatorname{tr} G_1G_3 = \operatorname{tr} G_3^{-1}G_1^{-1}, \\
\operatorname{tr} H_2H_3 &= \operatorname{tr} G_1G_2 = \operatorname{tr} G_2^{-1}G_1^{-1},
\end{aligned}$$

以及 $\operatorname{tr} G_1G_2G_3 \neq \pm 2$。

等式 $\operatorname{tr} G_1 = \operatorname{tr} G_2 = \operatorname{tr} G_3$ 意味着，对于任意 i， j，都有 $\operatorname{tr} H_i = \operatorname{tr} G_j = \operatorname{tr} G_j^{-1}$；而事实 $G_1G_2G_3 = H_1H_2H_3$ 意味着

$$\operatorname{tr} H_1H_2H_3 = \operatorname{tr} G_1G_2G_3 = \operatorname{tr} G_3^{-1}G_2^{-1}G_1^{-1}.$$

由此可知，两个不可约表示 (H_1, H_2, H_3) 和 $(G_3^{-1}, G_2^{-1}, G_1^{-1})$ 具有相同的特征标。由于不可约表示由其特征标唯一确定，我们得出 $[H_1, H_2, H_3] = [G_3^{-1}, G_2^{-1}, G_1^{-1}]$ 在 U中成立。证明至此完成。□

(5) 中的最后一个等式意味着

$$H_1 = AG_3^{-1}A^{-1}, \quad H_2 = AG_2^{-1}A^{-1}, \quad H_3 = AG_1^{-1}A^{-1} \tag{7}$$

对于某个 $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$。我们将它们简写为

$$(H_1, H_2, H_3) = A(G_3^{-1}, G_2^{-1}, G_1^{-1})A^{-1}. \tag{8}$$

引理 3.2. 若 $G_1G_2G_3 \neq \pm I$，则 A 在 (8) 中的矩阵满足 $A^2 = -I$。

证明。 若用矩阵 B对每个 G_i 进行共轭，那么每个 H_i 也会被同一个矩阵 B共轭。由于等式 (8) 表明，对于 $i = 1$、2、3，

$$BH_iB^{-1} = (BAB^{-1})\,(BG_{4-i}^{-1}B^{-1})\,(BA^{-1}B^{-1}), \tag{9}$$

因此 A 也被 B共轭。特别地， A 的迹保持不变。另一方面，由于关系 $G_1G_2G_3 = H_1H_2H_3$ 成立，可得

$$H_1H_2H_3 = A(G_1G_2G_3)^{-1}A^{-1} = A(H_1H_2H_3)^{-1}A^{-1}\,. \tag{10}$$

相差一个 c 经共轭变换，我们可以假设 $H_1H_2H_3$ 是上三角矩阵：它要么是

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m^{-1} \end{pmatrix} \text{ for } m^2 \neq 1 \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} \pm 1 & \alpha \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \text{ for } \alpha \neq 0\,.$$

无论哪种情况，直接计算都表明，方程（10），结合以下事实 $G_1G_2G_3 = H_1H_2H_3 \neq \pm I$，迫使 A 的迹为 0，由此根据 $A^2 = -I$凯莱-哈密顿公式，我们推得 □

回忆一下，$b^* = \tau b \tau$ 与 b 在对应关系（4）下相关。由此可知，如果 b 将（G_1，G_2，G_3）映射到（H_1，H_2，H_3），那么 b^* 将（G_3^{-1}，G_2^{-1}，G_1^{-1}）映射到（H_3^{-1}，H_2^{-1}，H_1^{-1}）。因此，沿着复合映射 bb^*，我们有

$$(G_1, G_2, G_3) \overset{b}{\longmapsto} A(G_3^{-1}, G_2^{-1}, G_1^{-1})A^{-1} \overset{b^*}{\longmapsto} A^2(G_1, G_2, G_3)A^{-2} = (G_1, G_2, G_3)$$

对于 $[G_1, G_2, G_3] \in U$。注意，最后一个等式由引理3.2得出。这证明了 U 中的每一点都诱导出 bb^*的闭包的一个表示，该闭包就是纽结 10_{123}。由于 U的维数至少为 2，我们得出 10_{123} 是 $\mathcal{X}$-large。

注 3.3。本节中的论证适用于满足不等式（ $b \in B_3$ 6）的任意辫子 $b \in B_3$ 。例如，若取 $b = \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_1$，则 $b^* = \sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1}$，而 bb^* 的闭包是纽结 10_{99}（如第 $\mathcal{X}$2节所示，它是 $\mathcal{X}$-large）。不过请注意，不等式（6）并不总是成立。例如，它对 $b = \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1$不成立。

3.2. **一般构造**。上一节关于纽结 10_{123} 的论证引出了以下问题。

令 B_n 表示具有 n股的辫群。我们通过同构将辫子视为相对于边界的带 punctures 的圆盘的映射类

$$B_n \cong \mathrm{MCG}(D^2 \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}, \partial D^2).$$

映射类群 MCG($D^2 \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$)（不相对于边界）通过共轭作用于 B_n。我们关注反向定向对合的作用，也就是说，关注使定向反转且满足 $\tau^2 =$Id 的类 $\tau \in$MCG($D^2 \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$)。

问题。设 K是由辫子 bb^*闭包得到的纽结，其中 $b \in B_n$和 $b^* = \tau b \tau$，且 $\tau \in$MCG($D^2 \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$) 是一个反向定向对合。那么 K $\mathcal{X}$是否是 large?

我们首先给出 K 为纽结的一个充要条件。

引理 3.4。设 b 与 $b^* = \tau b \tau$ 如上。则 bb^* 的闭包是纽结，当且仅当 n 为奇数且 $\pi(b\tau)$是一个 n-轮换，其中 $\pi\colon B_n \to S_n$ 是从辫群到对称群的典范投影。

证明。由于 $bb^* = (b\tau)^2$, 它在 π 下的像是 S_n 中的一个平方，因而具有偶符号。因此当 n为偶数时，它不可能是一个 n-轮换。当 n为奇数时，容易看出 $\pi((b\tau)^2)$是一个 n-轮换，当且仅当 $\pi(b\tau)$是一个 n-轮换。□

定理 3.5下文在温和假设下回答了上述问题。其证明基于瑟斯顿在其笔记 [Thu22 的定理 5 中所证明的表示簇维数估计的一个不可定向版本。6]。更精确地说，其证明依赖于映射环面 $M_{b\tau}$（由 $b\tau$ 给出）的表示簇的维数估计：

$$M_{b\tau} = (D^2 \times [0,1] \setminus b)/_\sim$$

其中商空间通过以下方式识别 $D^2 \times \{0\}$与 $D^2 \times \{1\}$： τ。注意， $M_{b\tau}$是一个不可定向三维流形，其边界由两个克莱因瓶组成，这由引理 3.4可知。就作者所知，

这一不可定向版本未曾见于其他文献。因此，我们将定理 3.5 的证明推迟至第 4节，在该节中，我们将阐述并证明不可定向情形下的维数估计。

定理 3.5。设 K 是一个纽结，由辫 bb^* 的闭包得到，其中有 $b \in B_n$ 和$b^* = \tau b \tau$，且 $\tau \in \mathrm{MCG}(D^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\})$ 是一个反向定向对合。假设 $b\tau$ 的映射环面 $M_{b\tau}$ 存在一个到$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 中的表示 ρ，使得

(a) ρ 在 $M_{b\tau}$ 的每个边界克莱因瓶上的限制均不可约，且 d
(b) ρ 在 $M_{b\tau}$ 的可定向双覆盖上的限制不可约。

那么 K 是 $\mathcal{X}$-大的。

反向定向对合 $\tau \in \mathrm{MCG}(D^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\})$的一个典型例子是交换 p_i 和 p_{n+1-i} 的反射，其中 $1 \le i \le n$。在这种情况下，$b^* = \tau b \tau$ 与 b 在以下对应关系下相关

$$\sigma_i^{\pm 1} \longmapsto \sigma_{n-i}^{\mp 1}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

这里，$\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ 是辫群 B_n 的标准生成元。具有 bb^* 形式的辫表示的纽结中，有一些有趣的例子是土耳其头结 $Th(p, q)$，其中p 且 q 为奇数。$Th(p, q)$ 的标准辫表示为

$$\left(\sigma_1 \, \sigma_2^{-1} \cdots \sigma_{p-2} \, \sigma_{p-1}^{-1}\right)^q \in B_p.$$

定义

$$O = \sigma_1 \sigma_3 \cdots \sigma_{p-2}, \quad E = \sigma_2^{-1} \sigma_4^{-1} \cdots \sigma_{p-1}^{-1}, \quad b = (OE)^{\frac{q-1}{2}} O.$$

由于 σ_i 与 σ_j 在 $|i-j| > 1$时可交换，因此有 $O^* = E, E^* = O$，且 $b^* = (EO)^{\frac{q-1}{2}} E$。由此可得，$bb^*$的闭包为 $Th(p, q)$；图 7展示了这一分解。受此观察启发，并得到计算实验的支持，我们提出如下猜想。

猜想 3.6. 土耳其头结 $Th(p, q)$，其中 p 且 q 为奇数，是 $\mathcal{X}$-大结。

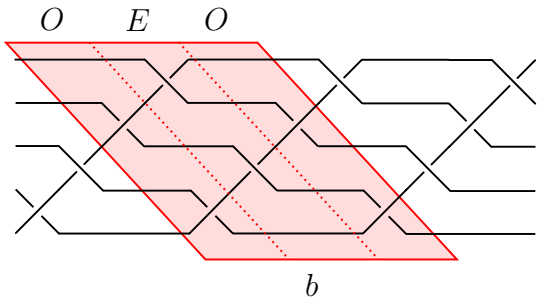


FIGURE 7. $Th(5, 3)$ 的标准辫表示及 b 的选择。

另一个反向定向对合 $\tau \in$映射类群$(D^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\})$ 的例子是这样一种反射：它固定每个 p_i，并反转围绕 p_i 的小环的定向。在这种情况下，$b^* = \tau b \tau$ 与 b 在如下对应关系下相关联：

$$\sigma_i^{\pm 1} \longmapsto \sigma_i^{\mp 1}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

也就是说， b^* 是 b 的镜像。这自然引出了强正两手性纽结，即存在一种图，经 π 保持 [Lam23] 方向的旋转后映射为其镜像的纽结。根据定义，强正两手性纽结是由一个有向缠结及其镜像粘合而成的。

更精确地说，令 $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{\pm\}^n$ 为一个由 n 个符号组成的元组，并令 $\mathbf{Mor}(\epsilon, -\epsilon)$ 表示满足以下条件的有向 (n, n)-缠结的集合：在 $p_i \times \{0\}$ （分别为 $p_i \times \{1\}$）处的定向与符号 ϵ_i （分别为 $-\epsilon_i$）一致，且 $1 \le i \le n$。注意， n 股的辫子可视为 $\mathbf{Mor}(+^n, -^n)$ 的元素。对于有向缠结 $t \in \mathbf{Mor}(\epsilon, -\epsilon)$，我们用 t^* 表示它的镜像，即在每个交叉处反转上下关系所得的缠结。显然， b^* 也属于 $\mathbf{Mor}(\epsilon, -\epsilon)$。以保持定向的自然方式粘合 t 和 t^* 的边界，我们得到一个有向结或链环 $K = t \cup t^*$，按定义，它是强正 amphichiral 的。示例见图 8。我们还用 $M_{t\tau}$ 表示 $t\tau$ 的映射环面：

$$M_{t\tau} := (D^2 \times [0,1] \setminus t)/_\sim$$

其中商空间通过反射 $D^2 \times \{0\}$ 将 $D^2 \times \{1\}$ 与 τ识别。它是一个非可定向三维流形；当 K 是纽结时，其边界由两个克莱因瓶组成。然后，将定理 $M_{b\tau}$ 中的 $M_{t\tau}$ 替换为定理 3.5 中的相应内容及其证明，我们得到如下结果。

定理 3.7。 设 $t \in \mathrm{Mor}(\epsilon, -\epsilon)$ 是一个有向缠结，其中 ϵ 是一个符号元组。假设将 t 与其镜像 $t^* \in \mathrm{Mor}(\epsilon, -\epsilon)$ 沿边界粘合后得到纽结 K ，且 $M_{t\tau}$ 存在一个到 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 中的表示 ρ ，使得

(a) ρ 在 $M_{t\tau}$ 的每个边界克莱因瓶上的限制都是不可约的，并且(b) ρ 在 $M_{t\tau}$ 的可定向双覆盖上的限制是不可约的。

Then 纽结 K （按构造是强正反手性纽结）是 $\mathcal{X}$-大的 e.

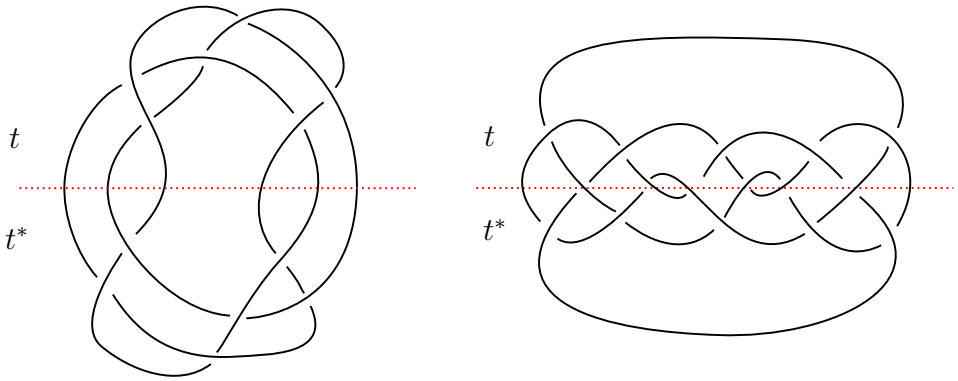


FIGURE 8. 对称图 10_{99} 和 $12a_{1019}$的图。 $12a_{1019}$的图取自 [Lam22]。

4. DIMENSION ESTIMATE `瑟斯顿式

本节给出瑟斯顿定理的一个不可定向类比 [Thu22，定理 5。6] 该定理给出了特征簇维数的下界。

下文中，对于流形 M，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-表示的簇记作$\mathcal{R}(M) = \mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$，而 $\rho \in \mathcal{R}(M)$ 的特征标记作 χ_ρ。

4.1. **克莱因瓶** e. 设 K^2 为克莱因瓶。其基本群的表现为

$$\pi_1(K^2) \cong \langle a, b \mid aba^{-1} = b^{-1} \rangle. \tag{11}$$

引理 4.1. 设 $\rho \in \mathcal{R}(K^2)$。那么在共轭意义下有三种可能：
(1) $\rho(b) = \pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$，且 $\rho(a)$ 任意。(2) $\rho(b) = \pm \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{smallmatrix}\right)$，
其中 $\lambda \neq \pm 1$，且 $\rho(a) = \pm \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$。(3) $\rho(b) = \pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$，
且 $\rho(a) = \pm \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)$。

通过考察 $\rho(b)$ 的可能共轭类并利用关系 $aba^{-1} = b^{-1}$，该引理的证明是直接的。

推论 4.2. 特征簇 $\mathcal{X}(K^2)$ 有三个分支。其中恰有一个包含不可约表示，而该分支的维数为 1。

证明。 引理 4.1 中情形（1）的表示是可约的，并产生$\mathcal{X}(K^2)$的两个分支，其特征为 $\chi(b) = \pm 2$ (以及 $\chi(ab) = \pm\chi(a)$)。情形（3）的表示构成一个单点，位于前述某个分支中。最后，情形（2）的表示不可约，并产生第三个分支，该分支的维数为 1，其特征为$\chi(a) = 0$ (以及 $\chi(ab) = 0$)。□

引理 4.3。 设 $\rho \in \mathcal{R}(K^2)$。若 ρ 不可约，则它是 $\mathcal{R}(K^2)$ 的一个光滑点，且其扎里斯基切空间的维数为 4。

证明。 分支 R_0 属于 $\mathcal{R}(K^2)$，并包含 ρ，其维数为 4，因为相应的 $\mathcal{X}(K^2)$分支的维数为 1，且 ρ 不可约。Por22，命题 4。1]。扎里斯基切空间的维数与 R_0相同， ρ 因此是一个光滑点。 □

4.2. **维数估计**。 回顾一下，任意（连通的）不可定向流形 M 都有 $\widetilde{M} \to M$，且其基本群 $\pi_1(\widetilde{M})$恰由 $\pi_1(M)$中的保向元素组成。

定理 4.4。 设 M 是一个紧致不可定向三维流形，其边界由k克莱因瓶 K_1^2，……， K_k^2组成。设 $\rho \in \mathcal{R}(M)$是一个表示，满足
(a) ρ 在每个 K_i^2 上的限制均不可约，且 (b) ρ 在可定向双覆盖 $\widetilde{M}$ 上的限制不可约。
那么， $\mathcal{X}(M)$ 中包含 χ_ρ的任意分支 X_0 的维数至少为 k；也就是说，

$$\dim(X_0) \geq k.$$

证明。 对于每个边界克莱因瓶 K_i^2，考虑一条嵌入环路 $\gamma_i \subset M$，其基点位于K_i^2，且仅在基点处与 ∂M^3 相交。特别地，$K_i^2 \cup \gamma_i \cong K^2 \vee S^1$。我们固定这样的 γ_i，使其保向，且 ρ 在 $\pi_1(T_i^2 \cup \gamma_i)$上的限制不可约，其中 T_i^2是 K_i^2的可定向双覆盖。我们可以假设嵌入曲线 γ_1、……、 γ_k两两不相交。

考虑紧流形 M'，它由 M 通过从每个 γ_i中挖去一个小邻域得到。于是其边界 $\partial M'$ 由 k 个亏格为 4 的不可定向曲面组成：

$$\partial M' = N_{4,1} \sqcup \cdots \sqcup N_{4,k}.$$

利用带 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$系数的庞加莱对偶，我们计算得出 M' 的欧拉示性数等于 $-k$:

$$\chi(M') = \frac{1}{2}\chi(\partial M') = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\chi(N_{4,i}) = -k.$$

这意味着 M' 具有一个 CW复形的同伦型，该复形有一个顶点、 $k+1+r$条边和 r 个面。因此， $\pi_1(M')$有一个包含 $k+1+r$ 个生成元和 r个关系的表现，由此得到

$$\dim \mathcal{R}(M') \geq 3(k+1+r) - 3r = 3k+3. \tag{12}$$

令 R_0 为 $\mathcal{R}(M)$中包含 ρ 且对应于 $\mathcal{X}(M)$的分支 X_0的分支。将 $\mathcal{R}(M)$视为 $\mathcal{R}(M')$的子簇，我们得到如下交换图（处理好基点之后）：

$$\begin{array}{ccc} R_0 \subset \mathcal{R}(M) & \hookrightarrow & \mathcal{R}(M') \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{res}} \\ \prod_i \mathcal{R}(K_i^2 \cup \gamma_i) & \hookrightarrow & \prod_i \mathcal{R}(N_{4,i}) \end{array} \tag{13}$$

其中 res 表示限制映射，水平箭头表示包含映射。注意

$$\mathcal{R}(M) = \left\{\rho \in \mathcal{R}(M') \mid \mathrm{res}(\rho) \in \prod_i \mathcal{R}(K_i^2 \cup \gamma_i)\right\}.$$

接下来我们需要 [Por22，引理 6。12], 这可视为 [FG17，命题 1]的局部版本。为方便读者，我们在下文重述 [Por22，引理 6。12] 。

引理4.5。设 W 是一个复（解析）簇， $W' \subset W$ 是其复子簇，二者均不可约且光滑。设 X 是一个簇，且 $f\colon X \to W$ 是一个全纯映射。那么， $f^{-1}(W')$的每个不可约分支 $Y \subset X$的余维为

$$\mathrm{codim}(Y, X) \leq \mathrm{codim}(W', W).$$

要应用引理 4.5，需将图 (13) 与下图进行比较:

$$\begin{array}{ccc} Y \subset f^{-1}(W') & \hookrightarrow & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ W' & \hookrightarrow & W \end{array} \tag{14}$$

我们验证引理 4.5 的假设均已满足:

(1) 每个 $\mathcal{R}(N_{4,\,i})$ 都是光滑的，且维数为 9：根据 γ_i, ρ 的选取，限制在 $N_{4的i}$ 可定向双覆盖上是不可约的。于是，根据 [Por22，命题 4.2], 中的每个 $\mathcal{R}(N_{4,\,i})$ 都是光滑的，且维数为 $-3\chi(N_{4,\,i})+3=9$。

(2) $\mathcal{R}(K_i^2 \cup \gamma_i)$ 光滑且维数为 7：该断言由引理 4.3以及同构

$$\mathcal{R}(K_i^2 \cup \gamma_i) = \mathcal{R}(\pi_1(K_i^2) * \mathbb{Z}) \cong \mathcal{R}(K_i^2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}).$$

(3) 映射 $\mathcal{R}(K_i^2 \cup \gamma_i) \hookrightarrow \mathcal{R}(N_{4,i})$ 是一个浸入：该包含的切映射是在上闭链层面诱导的映射

$$Z^1(\pi_1(K_i^2 \cup \gamma_i), \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \to Z^1(\pi_1(N_{4,i}), \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})).$$

此态射是单射，因为它由基本群的一个满射诱导而来 $\pi_1(N_{4,\ i}) \twoheadrightarrow \pi_1(K_i^2 \cup \gamma_i)$。

于是，应用引理4.5，可得

$$\operatorname{codim}(R_0, \mathcal{R}(M')) \leq \sum_i \operatorname{codim}(\mathcal{R}(N_{4,i}),\, \mathcal{R}(K_i^2 \cup \gamma_i)) = 2k.$$

因此，由不等式（12），可得

$$\dim(R_0) \geq \dim(\mathcal{R}(M')) - 2k \geq 3k + 3 - 2k = k + 3.$$

这就证明了该定理，因为 $\dim(X_0) = \dim(R_0) - 3 \geq k$。 □

4.3. **定理 3.5 的证明**。 回顾一下，映射环面 $M_{b\tau} = (D^2 \times [0,1] \setminus b)/_\sim$ 是一个边界为克莱因瓶的不可定向三维流形。引理3.4表明， $M_{b\tau}$ 的边界由两个边界克莱因瓶组成。在定理的假设 (a) 和 (b) 下，将定理 4.4 应用于 $M_{b\tau}$，可知特征簇 $\mathcal{X}(M_{b\tau})$ 有一个维数至少为 2 的分支 X_0 。

固定表示 ρ of $\pi_1(M_{b\tau})$，满足 $\chi_\rho \in X_0$，并令 ρ_i 为 ρ 到 $D^2 \times \{i\}$去掉 $i = 0,1$ 个穿刺后的限制（因此 ρ_i 都是自由群的表示）。那么 ρ_i彼此共轭。具体而言，有

$$\rho_1 = \rho(a)\, \rho_0\, \rho(a)^{-1}$$

其中 a 是由 $[0,1]$的商得到的一个环路。注意， a 是克莱因瓶的生成元之一。引理 4.1 表明 $\rho(a^2) = -I$，因此 ρ 诱导出 $\mathcal{G}(K)$ 的一个表示；回想一下，纽结 K 是 bb^*的闭包。由于这对每个满足 ρ 和 $\chi_\rho \in X_0$ 的表示 X_0 都成立，且 K 的维数至少为 2，因此我们得出结论： $\mathcal{X}$是 -large。

Appendix A. Parabolic representations

在本附录中，我们讨论抛物表示，即将子午线映到迹为 2 的矩阵的表示。更准确地说，我们将注意力限制在子簇

$$\mathcal{X}^{par}(K) = \operatorname{tr}_\mu^{-1}(2) \subset \mathcal{X}(K)$$

其中 $\operatorname{tr}_\mu \colon \mathcal{X}(K) \to \mathbb{C}$ 表示与纽结 K 的子午线相关联的迹函数。如果 K 是 $\mathcal{X}$-大纽结，即 $\dim \mathcal{X}(K) > 1$，那么显然 $\dim \mathcal{X}^{par}(K) > 0$。因此， K 是 $\mathcal{X}$-大纽结的一个必要条件是 $\mathcal{X}^{par}(K)$ 具有正维数。

在 [KC26] 中， $\mathcal{X}^{par}(K)$ 对交叉数不超过 12 的纽结进行了显式计算。以下是K 满足 $\mathcal{X}^{par}(K)$ 具有正维数的纽结。

$$10_{98},\ 10_{99},\ 10_{123},\ 11a_{43},\ 11a_{44},\ 11a_{47},\ 11a_{57},\ \ldots.$$

为从拓扑学解释这一正维数现象，我们对定理2.1 作如下修改。

定理 A.1. 设 T 是一个有两个分支的链环 T_1，且 T_2 和 L是由 T 与一个平凡结 O组成的分裂链环。假设 T_i中至少有一个——不妨设为 T_1——是非平凡的，并且存在一个 L的图，使得

- T_2 与 T_1 仅沿着一条弧 T_1[1]交叉，且
- 存在一个交叉 c_i，在该处 T_i 与平凡结 O 相交，其中 $i = 1, 2$。

假设

- 纽结 K 是通过将交叉 c_i 替换为有理2缠结图 R_i得到的，其中 $i = 1, 2$，并且
- c_i-闭包 R_i 是一个非平凡的（双桥）纽结，其中 $i = 1, 2$。

那么 $\mathcal{X}^{par}(K)$ 具有正维数。

证明。对于 $X \neq \pm I \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$，我们用 $C(X)$ 表示中心化子

$$C(X) = \{A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \mid AX = XA\}.$$

众所周知，$C(X)$ 是一维的，并且若 $\mathrm{tr}(X) = \pm 2$，则 $C(X)$ 中的每个元素的迹也为 ± 2（例如，参见方程（3））。

根据假设，T_2 与 T_1 沿一条弧相交。令 g 为与这条弧对应的 Wirtinger生成元。这样，我们便可将 $\mathcal{G}(T_1)$的任意抛物表示 ρ 扩展为 $\mathcal{G}(T)$的抛物表示，具体做法是将其映射为

$$(\text{every Wirtinger generator on } T_2) \longmapsto A \in C(\rho(g)),$$

其中 $A \in C(\rho(g))$ 满足 $\mathrm{tr}(A) = 2$。此类 A 的选择构成一维族，可由一个变量（例如 t）参数化。将表示进一步扩展到 $\mathcal{G}(L) = \mathcal{G}(T \sqcup O)$ 后，我们可以将任意一个迹为 2 的矩阵赋给平凡结 O 的子午线。这引入了另外两个自由变量，例如 x 和 y；具体而言，这些迹为 2 的矩阵可由 x 和 y 参数化为

$$(x, y) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 + xy & x^2 \\ -y^2 & 1 - xy \end{pmatrix}.$$

现在，我们施加条件，使每个交叉 c_i 都能替换为缠结 R_i，其中 $i = 1, 2$。将 c_1 替换为 R_1，得到一个仅涉及 x 和 y的方程；而将 c_2 替换为 R_2，则得到一个涉及 t、x和 y的方程。因此，这两个方程的解空间维数至少为一。由于每个解都会导出 K的一个抛物表示，我们得出结论：$\mathcal{X}^p(K)$具有正维数。□

图9 展示了几个具有 11 个交叉的例子，它们可以由定理 A.1 得到，其中 T 由三叶结 3_1 和一个与之相连的平凡结组成。自然会问，这些纽结是否是 $\mathcal{X}$-大纽结；这个问题留待未来研究。

致谢。第一作者和第三作者获得了韩国国家研究基金会（NRF）由教育部资助的项目（编号：RS-2024- 00442775）支持。第二作者感谢由 MICIU/AEI/10.13039/501100011033 和欧洲区域发展基金/欧盟资助的项目 PID2021-125625NB-100，以及 Mar´ıa de MaeztuProgram CEX2020-001084-M 的支持。

[1] T_1 的一段弧，是指忽略其他分支 T_2 和 O后得到的 T_1 的图中的一段弧。

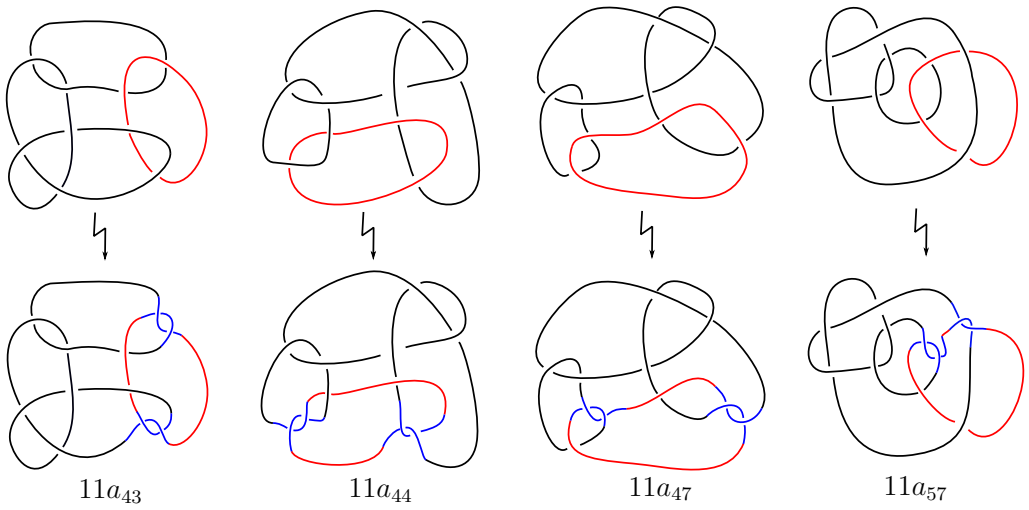


FIGURE 9. 纽结的例子 K，使得 $\mathcal{X}^{par}(K)$具有正维数。

REFERENCES

[Bod14] Hans U Boden. A-多项式的 M-次数非平凡性。《美国数学学会会刊》，第 2173–2177 页，2014 年。[BZ05] Steven Boyer 和 Xingru Zhang. S^3 中的每个非平凡纽结都有非平凡的 A-多项式。《美国数学学会会刊》，133(9):2813–2815，2005 年。[CCG+94] Daryl Cooper、Marc Culler、Henry Gillet、Darren D Long 和 Peter B Shalen. 三维流形特征簇所关联的平面曲线。《数学发明》，118(1):47–84，1994 年。[Che25] Haimiao Chen. 素纽结的 SL(2, $\mathbb{C}$)-特征簇的高维分支。arXiv 预印本，arXiv:2512.13375，2025 年。[CL96] Daryl Cooper 和 D.D. Long. 关于纽结 A-多项式的评论。《纽结理论及其分支杂志》，5(05):609–628，1996 年。[DG04] Nathan M Dunfield 和 Stavros Garoufalidis. S^3中纽结的 A–多项式的非平凡性。《代数与几何拓扑》，4(2):1145–1153，2004 年。[FG17] E. Falbel 和 A. Guilloux. 三维流形特征簇的维数。《美国数学学会会刊》，145(6):2727–2737，2017 年。[Gol09] William M Goldman. 某些简单双曲曲面 Fricke空间上的迹坐标。Teichm ¨uller 理论手册，2:611–684，2009 年。[KC26] Seonhwa Kim 和 Philip Choi. Diagram.site. 网址：knot.diagram.site，2026 年。[Lam22] Christoph Lamm. 所有交叉数不超过 10 的强可逆纽结的对称图。arXiv 预印本 arXiv:2210.13198，2022 年。[Lam23] Christoph Lamm. 具有双重对称图的强正自反纽结。arXiv 预印本 arXiv:2310.05106，2023 年。[LM26] Charles Livingston 和 Allison H. Moore. Knotinfo：纽结不变量表。网址：knotinfo. org，2026 年。[Por22] Joan Porti. 二维和三维轨形的表示簇与特征簇的维数。《代数与几何拓扑》，22(4):1905–1967，2022 年。[PP13] Luisa Paoluzzi 和 Joan Porti. 一族 Montesinos纽结的特征簇的非标准分支。《伦敦数学会会刊》，107(3):655–679，2013 年。[Ril84] Robert Riley. 二桥纽结群的非阿贝尔表示。《数学季刊》，35(2):191–208，1984 年。

[Thu22] 威廉·P. 瑟斯顿。三维流形的几何与拓扑。第 *IV* 卷。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，[2022] ©2022。由史蒂文·P. 克尔克霍夫编辑并撰写前言，J. W. 米尔诺撰写其中一章。

Quantum Computing Research Center, Chonnam National University, Gwangju, SouthKorea电子邮箱：philip94@snu.ac.krDepartament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona and Centre de Re-cerca Matemàtica (CRM), Cerdanyola del Vallès, Spainhttps://mat.uab.cat/~porti/电子邮箱：joan.porti@uab.cat

Department of Mathematics, Chonnam National University, Gwangju, South Koreahttps://sites.google.com/view/seokbeom电子邮箱：sbyoon15@gmail.com