基于离散质量分布的均值漂移形状编队控制

蔡一辰，高远，李鹏鹏，王伟，*IEEE*高级会员，孙贵斌，以及吕金虎，*IEEE*会士

arXiv:2602.00980v1 [cs.RO] 1 Feb 2026

摘要—**密度分布方法因其对群体规模变化的适应性，近年来已成为一种颇具前景的范式。然而，现有研究在实现复杂形状表示和分散式实现方面面临实际挑战。这促使我们提出一种完全分散式的基于分布的控制策略，使其兼具形成复杂形状和适应群体规模变化的双重能力。具体而言，我们首先提出一种定义在一组采样点上的离散质量分布函数，用以对群体编队进行建模。与连续密度分布方法不同，本模型无需定义连续密度函数——而对于复杂形状而言，这一任务十分困难。其次，我们设计了一种分散式均值漂移控制律，通过反馈质量估计值来协调群体的全局分布，使其拟合采样点分布。所有采样点的质量估计值由机器人通过所设计的质量估计器以分布式方式获得。研究表明，采样点的质量估计值能够渐近收敛到真实的全局值。为验证所提出的策略，我们开展了全面的仿真与真实实验，以评估复杂形状编队的效率以及对群体规模变化的适应性。**

索引词—**形状编队、均值漂移控制、离散质量分布、机器人群体。**

I. 引言

SHAPE 队形在过去二十年中受到了广泛关注，这得益于其在多机器人系统中的广泛应用，包括物体运输 [1], [2], 区域监测 [3],和数字绘画 [4]。形状编队的目标是协调一组机器人，使其能够从任意初始配置自主形成期望的几何形状。为实现这一目标，研究者开发了多种控制策略，例如基于图的方法 [5], [6] 和基于分配的方法[7], [8] 。然而，这些方法在大规模群体中面临维数灾难，且难以适应群体规模变化，因为其形状表示从根本上与机器人数量相耦合。

本研究部分得到了国家多栖车辆驾驶系统重点实验室项目（项目编号：QDXT-NZ-202407-01）的资助。（通讯作者：孙贵斌。）蔡一辰和李鹏鹏就职于中国北京100191的北京航空航天大学人工智能学院（电子邮箱：caiyichen@buaa.edu.cn；pengpengli@buaa.edu.cn）。高远、王伟、孙贵斌和吕金虎就职于中国北京100191的北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院（电子邮箱：gy_sasee@buaa.edu.cn；w.wang@buaa.edu.cn；sunguibinx@buaa.edu.cn；jhlu@iss.ac.cn）。

为实现适应群体规模变化的大规模群体形状编队，基于密度分布的方法已成为一种颇具前景的范式 [9]–[10]。在这一范式中，编队形状被建模为定义在某个连通区域上的连续密度函数。因此，形状编队问题被转化为控制当前群体密度以跟踪期望密度的任务，并基于全局密度传输策略生成单个机器人的控制指令。这种框架具有很强的大规模群体适用性，并且能够适应群体规模变化，因为密度分布的定义独立于机器人数量。该框架下的一类典型方法基于平均场理论 [9], [11]。这类方法利用平均场偏微分方程，根据密度传输推导全局速度场，进而驱动机器人。随后，[12], [13]中的研究进一步采用最优传输理论，求解平均场密度控制问题的最优解。另一类方法基于图像矩 [14]。这种方法根据图像矩将编队形状建模为密度分布，并提出分布式控制策略以实现期望的图像矩。

尽管现有密度分布方法在形状编队方面颇为有效，但在实际应用中仍面临挑战。

首要挑战是如何利用密度分布函数准确表示复杂形状。在编队问题中，形状表示是决定控制策略的重要因素。现有的大多数密度分布方法都需要设计连续密度函数来表示编队形状 [9], [13]。然而，在实践中，要构建严谨的数学函数来准确描述复杂形状（如鱼骨形状）并不容易。为解决这一问题，近期的研究 [14] 引入了图像矩的概念来描述编队形状。然而，对于复杂形状，其表示精度仍面临实际挑战（见第五节）。因此，有必要设计一种新的表示方法，以消除基于分布的形状编队对定义连续密度函数的要求。

第二个挑战是实现密度分布方法的分布式部署。与集中式方法相比，分布式方法在实践中更具适应性。然而，大多数密度分布方法仅适用于集中式场景 [9], [15]。其主要原因在于，密度分布的定义本身依赖于所有机器人的集中式全局定位数据。这些

定位数据难以由单个机器人在本地获取。尽管分布式密度估计可以重建全局密度分布，但现有方法仅适用于静态场景 [16], [17]。近期， [14], [18] 中的研究为时变场景提供了分布式密度估计器，在这些场景中，机器人运动会动态影响编队分布。然而，估计误差的存在给实现高控制精度带来了挑战。因此，亟需开发一种基于分布的分布式控制律，以实现大规模机器人群的精确形状编队。

受这些尚未解决的挑战所启发，本文旨在开发一种基于离散质量分布的完全分布式形状编队策略。具体而言，本文的贡献与创新总结如下。

1）为准确表示高度复杂的编队形状，我们将编队形状建模为定义在一组采样点上的离散质量分布函数。该模型与机器人数量相互独立，因此能够天然适应群体规模变化。与使用连续密度分布函数的方法相比， [9], [14], 我们的离散模型无需定义连续密度函数，从而减少了表示高度复杂形状时的失真。该模型还具有较高的计算效率，这是由于其定义在有限维离散域上，不同于连续密度函数所处的无限维连续体。

2）针对基于分布的分布式形状编队，我们设计了一种分布相似性误差度量，用于评估群体分布与采样点分布之间的偏差。随后，我们提出一种分布式的基于均值漂移的控制律， [19]通过反馈所有采样点的质量值来最小化该误差度量，即驱动群体分布拟合采样点分布。各机器人依据自身位置和局部交互，通过改进的质量估计器以分布式共识的方式估计质量值。我们证明，所有采样点的质量估计值均能渐近收敛至全局真实值。

3) 我们对所提出的均值漂移控制律进行了稳定性分析。这是一项有价值的贡献，因为基于行为的队形方法的稳定性分析一向非常困难，尤其是在整合碰撞规避时 [9], [20], [21]。尽管本文从理论上证明了凸情形下的收敛性，但这一结果仍具有意义，因为现有研究只能保证矩形形状的收敛性 [22]。仿真和实验结果进一步验证了所提出的控制策略在高度非凸形状中的有效性。

本文其余部分组织如下。第二节介绍问题表述和系统概述。第三节介绍离散质量分布模型的定义、针对该模型的控制目标，以及分布相似性误差度量的设计。第四节详细阐述分布式均值漂移控制策略及其收敛性分析。第五节给出仿真和实验结果。最后，第六节总结全文。

II. 问题表述与概述

A. 机器人模型

考虑由 n 个机器人组成的群体在 $\mathbb{R}^d$中运行，其中 $n \geq 2$ 和 $d \in \{1, 2, 3\}$。机器人 i 的位置表示为 $p_i \in \mathbb{R}^d$，其中 $i \in \{1, \ldots, n\}$。每个机器人遵循动力学 $\dot{p}_i = v_i$，其中速度控制输入 v_i 满足 $\|v_i\| \leq v_{\max}$，且 $v_{\max} > 0$。如果机器人 i 与 j 之间的欧氏距离 $\|p_i - p_j\|$ 小于感知范围 $r_{\text{sense}} > 0$，它们便可通过无线通信交换信息。交互网络建模为时变无向图 $\mathcal{G}(t) = (\mathcal{V}, \mathcal{E}(t))$，其中 $t \geq t_0$，且 $\mathcal{V} = \{1, \ldots, n\}$ 和$\mathcal{E}(t) = \{(i, j) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} : \|p_i(t) - p_j(t)\| \leq r_{\text{sense}}, i \neq j\}$。机器人 i 的邻居集合定义为 $\mathcal{N}_i(t) = \{j \in \mathcal{V} : (i, j) \in \mathcal{E}(t)\}$。为便于阅读，本文使用的主要符号列于表 I 中。

表 I 本文使用的主要符号列表

符号	说明
p_i	机器人 i的位置
v_i	机器人 i的控制输入
v_i^{ms}	机器人 i的均值漂移控制指令
v_i^{cv}	机器人 i的避碰控制指令
q_k	采样点 k的位置
P_k	采样点 k的质量
$\hat{P}_{k,i}$	机器人 i对采样点 k的质量估计
$q_{o,i}$	机器人 i解读的期望形状位置
$\theta_{o,i}$	机器人 i解读的期望形状方向
$\|\cdot\|$	欧几里得范数
β	高斯核函数的带宽
r_{sense}	机器人的感知范围
r_{avoid}	机器人的避碰范围
$v_{\max}$	机器人的最大速度
$\mathcal{N}_i$	机器人 i的邻近机器人集合
$\mathcal{N}_i'$	机器人 i避让范围内的邻居集合
$\mathcal{G}$	机器人群的通信图

B. 系统概述

群体的目标是从任意初始配置出发，仅通过局部通信实现形状编队。一组离散采样点定义了期望形状，目标是协调群体的空间分布，使其与采样点分布相匹配。为此，采用质量分布表示对群体的空间分布进行建模（见图 1(a)）。图 1 展示了所提出策略的概览。

第一步是为形状参数设计分布式协商协议（见图 1(b)）。期望形状的位置和方向并非预先设定，而是由机器人自主确定。最初，每个机器人根据自身的局部视角独立确定这些参数，这可能导致相互冲突的解释。通过所提出的一致性协议，机器人借助局部交互消除这些分歧。最终，所有机器人在有限时间内就形状解释达成一致。第二步是设计分布式质量估计器（见图 1(c)）。由于质量分布计算依赖于所有机器人的位置，因此采用分布式估计器，由每个机器人通过局部交互估计全局质量分布。所提出的估计器

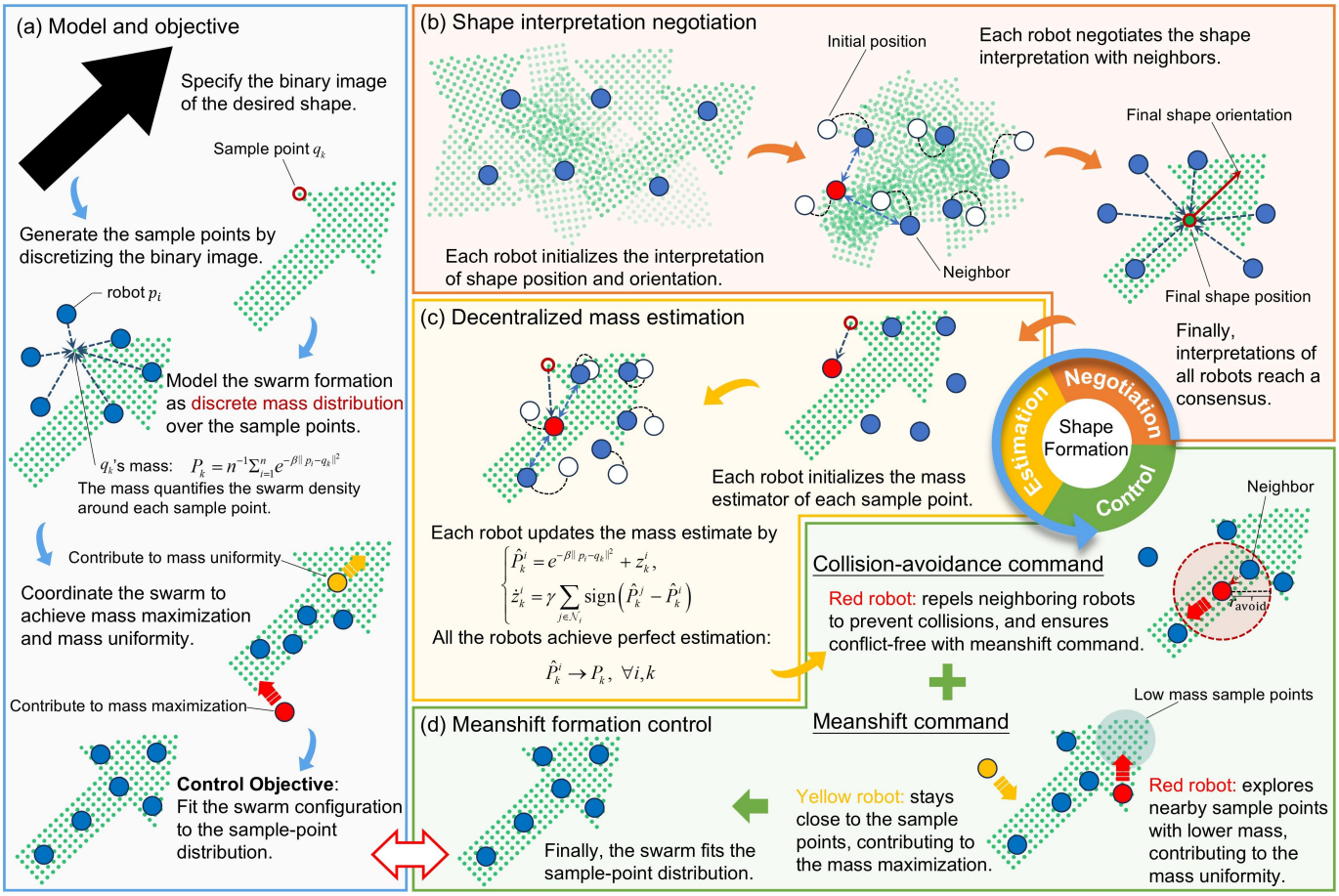

图 1. 系统概览。(a) 所提出的模型和控制目标示意图。(b) 形状解释协商过程的直观说明。(c) 分布式质量估计的直观说明。(d) 均值漂移控制策略的直观说明。

在理论上能够确保估计误差收敛至零。最后一步是设计队形控制器，以实现形状编队（见图 1(d)）。均值漂移控制器由两种指令组成：一种是引导机器人前往附近低质量采样点的均值漂移指令，另一种是用于排斥相邻机器人的避碰指令。这些指令协同工作以协调群体，使其能够拟合采样点分布并形成期望形状。此外，第四节 C 部分给出了收敛性分析，从数学上评估系统的可行性和稳定性。

III. 形状编队的分布描述

本节首先提出一种基于采样点的离散质量分布模型，用于描述队形目标，并探讨其优势。随后，提出一种分布相似性误差度量，用于评估队形目标的完成情况。最后，提出分布式参数协商协议，使机器人能够自主确定期望形状的位置和方向。

A. 基于质量分布的队形定义

本文使用定义在有限采样点集合上的离散质量分布来描述群体编队，如图 2(a) 所示。采样点由对期望形状进行均匀离散化后确定。每个采样点由一个欧几里得参数 $q_k \in \mathbb{R}^d$ 描述，即采样点 $k \in \{1, ..., m\}$ 的空间位置。所有采样点在空间排列和统计特性方面均与期望形状一致，因此能够表征期望形状的几何构型。使用采样点表示期望形状有诸多优点，例如几何灵活性、群体可扩展性和计算效率，这些优点将在本小节后文讨论。

确定期望形状的采样点集合后，控制目标便是协调机器人群的空间分布，使其与采样点分布相匹配。群体的空间分布通过一个质量函数描述，该函数为每个采样点分配一个非负质量值，以表示其周围的机器人密度。具体而言，第 k个采样点的质量定义为

$$P_k(\mathbf{p}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{-\beta\|q_k - p_i\|^2}, \quad k \in \{1, ..., m\} \tag{1}$$

其中$\mathbf{p} = [p_1^\top, ..., p_n^\top]^\top \in \mathbb{R}^{dn}$ 表示机器人群的构型，常数 $\beta > 0$ 为核带宽。回顾可知，p_i 是机器人 i的位置，而 q_k 是采样

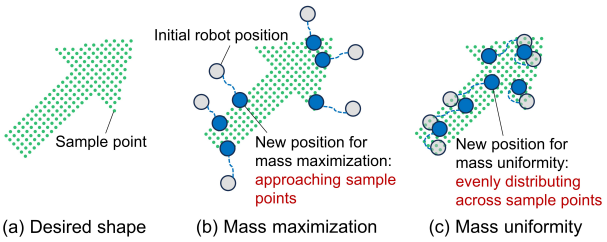

图 2. 控制目标的直观解释。(a) 由采样点表征的期望形状。(b) 质量最大化目标的直观解释。(c) 质量均匀性目标的直观解释。

点 k的位置。这里，我们采用核密度估计的思想来估计群体编队的空间分布，这是一种在缺乏先验分布信息 [23]的情况下，根据离散样本估计空间分布的非参数方法。可以看出， P_k 越高， q_k周围的机器人密度就越大。这样，机器人群的整体离散质量分布（或简称为质量分布）可表示为$\mathbf{P(p)} = [P_1(\mathbf{p}) \ldots, P_m(\mathbf{p})]^\top \in \mathbb{R}^m$。

总而言之，我们的任务是设计一种分布式控制策略，使机器人群从任意初始配置出发，最终符合给定期望形状的采样点分布。为此，控制策略的目标是基于质量分布模型实现以下两个目标：

- 质量最大化：对于任意 $k \in \{1, ..., m\}$， P_k 都应尽可能大。
- 质量均匀性：对于任意 k， $l \in \{1, ..., m\}$ 和 $k \neq l$， P_k和 P_l 都应尽可能一致。

接下来，我们用两个例子解释质量均匀性和质量最大化的概念，如图 2(b–c) 所示。质量最大化旨在使每个采样点周围的群体密度最大，从而确保机器人密集聚集在期望形状附近，如图 2(b) 所示。另一方面，质量均匀性旨在使所有采样点处的机器人密度保持一致，促使群体在期望形状上实现均匀的空间分布，如图 2(c) 所示。通过平衡这两个目标，群体可以符合采样点分布。

基于采样点的离散质量分布模型有以下几点重要说明。

- 几何灵活性：将形状表示为一组采样点，可大大简化复杂几何形状的设计。与通过数学方程或不等式约束来定义形状相比，这种方法更加灵活；对于复杂形态，后者可能会变得极其繁琐。 [24],
- 群体可扩展性：采样点的分布与机器人数量无关，因为这些点不会分配给特定个体。这一特性使群体能够自然适应规模变化，并具备自我修复能力。

此外，与最先进的基于分布的方法相比， [9], [14], 我们的模型具有以下优-势。

- 边界清晰度：与仅因密度函数的平滑性而只能模糊刻画形状边界的方法 [9], [14]相比，质量分布模型中使用的离散采样点能够更好地表示形状边界，从而确保期望队形保持在期望形状边界之内。
- 计算效率：与将形状建模为定义在无限连续体上的连续密度函数的模型相比，我们的离散模型定义在有限点集上。因此，它采用有限维向量表示，在计算和通信方面的效率显著更高。 [9],

B. 形状编队的分布相似度误差度量

为评估群体的空间分布与采样点分布之间的偏差，我们提出如下分布相似性误差度量：

$$F(\mathbf{p}) = F_{\max}(\mathbf{p}) + F_{\text{uni}}(\mathbf{p}) \tag{2}$$

其中， $F_{\max}$ 和 F_{uni} 分别表示质量最大化度量和质量均匀性度量。这两个度量的数学表达式定义如下。

度量 $F_{\max}$ 用于量化质量最大化目标的实现程度，其定义为

$$F_{\max}(\mathbf{p}) = -\ln\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{m} P_k^2}\right) \tag{3}$$

其中， m 为采样点的数量。如式（3）所示，总质量越大，度量 $F_{\max}$越小。当机器人向采样点靠近时，质量的增加将导致 $F_{\max}$ 减小。

度量 F_{uni} 用于评估质量均匀性目标的实现程度，其定义为

$$F_{\text{uni}}(\mathbf{p}) = -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \ln\left(\sqrt{\frac{mP_k^2}{\sum_{l=1}^{m} P_l^2}}\right) \tag{4}$$

其中， P_k， P_l 分别表示采样点 k 和 l的质量。如式（4）所示， P_k 和 P_l 越接近，度量 F_{uni} 越小。特别地，当 $P_k = P_l$时，度量F_{uni} 为零。此外， F_{uni} 是非负函数，当且仅当对所有 k， $l \in \{1, ..., m\}$均有 $P_k = P_l$时，其取零值，具体证明见引理 1。

引理 1。对于所有 $\mathbf{p}$，度量 $F_{\text{uni}}(\mathbf{p}) \geq 0$，且当且仅当 $P_k(\mathbf{p}) = P_l(\mathbf{p}) = 0$ 对于所有 k、$l \in \{1, \ldots, m\}$。

证明。证明见附录。 □

所提出的度量 F 关于任意机器人 i的位置 p_i 连续可微。根据定义 (2)， F 关于 p_i 的梯度可计算为 $\nabla_{p_i} F(\mathbf{p}) = \frac{2\beta}{mn}\sum_{k=1}^{m} P_k^{-1} e^{-\beta\|p_i - q_k\|^2}(p_i - q_k)$，其中 ∇ 表示梯度算子。回顾一下， β 是核带宽。这样， F 关于 p 的梯度可表示为 $\nabla_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}) = \left[\nabla_{p_1} F^\top(\mathbf{p}) \ldots, \nabla_{p_n} F^\top(\mathbf{p})\right]^\top$。

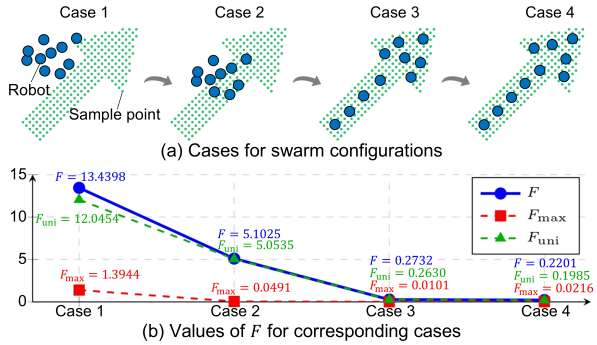

图 3. 度量 F 的直观解释。(a) 针对箭头形状的 4 种不同群体构型。(b) 与 (a) 所示情况对应的 F、$F_{\max}$ 和 F_{uni} 的取值。

F 的具体可微性结论由引理 2 给出，后续将在第四节中用于控制律的设计与分析。

引理 2. 度量 $F(\mathbf{p})$ 是光滑的，即关于 $\mathbb{R}^{dn}$ 上的 $\mathbf{p}$ 具有无限阶可微性。

证明. 证明见附录。 □

最后，我们通过一个直观示例来解释所提出的指标。图 3(a) 展示了针对同一期望形状的不同群体构型 $\mathbf{p}$，而图 3(b) 绘出了相应的 F、$F_{\max}$ 和 F_{uni} 的取值。在情况2中，机器人比情况1更接近采样点，因此 $F_{\max}$ 的值更低。此外，随着群体分布从情况2到情况4变得更加均匀，F_{uni} 会降低。因此，群体空间分布与采样点空间分布之间的相似性从情况1到情况4逐渐增大，而 F 则相应降低。这表明 F 能够有效度量分布相似性，因此控制目标可表述为最小化 F。

C. 编队形状的位置与方向

位置和方向是形状编队的两个基本参数。为了确定每个采样点的绝对坐标q_k，群体必须就形状的位置和方向达成一致。本文中，这些参数由机器人以分布式方式协商确定，而非直接提供给所有机器人。具体而言，每个机器人最初从自身的局部视角解读这两个参数，这可能与其他机器人的解读相冲突。随后，机器人通过局部协商解决这些冲突，并就编队形状的最终位置和方向达成一致。

形状的位置定义为距离形状中心最近的采样点的位置。将$q_{o,i}$ 记为机器人 i所理解的期望队形形状的位置，其中 $i \in \{1, \dots, n\}$。不同机器人对 q_o 的理解可通过以下分布式协议达成一致性：

$$\dot{q}_{o,i} = -c_1 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \operatorname{sign}\left(q_{o,i} - q_{o,j}\right) |q_{o,i} - q_{o,j}|^{\alpha} \qquad (5)$$

其中，$c_1 > 0$ 和 $0 < \alpha < 1$ 是两个常数。算子 sign(·) 和 $|\cdot|$ 分别表示按分量定义的符号函数和绝对值函数。回顾一下，$\mathcal{N}_i$ 是机器人 i的邻居集合。最初，每个机器人都将自身的位置视为形状的位置，即 $q_{o,i}(t_0) = p_i(t_0)$。由式 (5) 可见，求和项中的内容是机器人 i 与其邻居机器人对 $q_{o,i}$ 的理解之间的差异，其目的是驱动$q_{o,i} \to q_{o,j}$。此外，由于 $0 < \alpha < 1$，协商一致性可在有限时间内达成。协议 (5) 的收敛性分析见定理 1。

形状的方向是预定义方向向量与正 x轴之间的夹角，其中方向向量从形状中心出发，其方向可以任意选定。令 $\theta_{o,\,i}$ 表示机器人 i所解读的期望编队形状的方向角。$\theta_{o,\,i}$ 的分布式解读可由以下协商协议控制：

$$\dot{\theta}_{o,i} = -c_2 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \operatorname{sign}\left(\theta_{o,i} - \theta_{o,j}\right) |\theta_{o,i} - \theta_{o,j}|^{\alpha} \qquad (6)$$

其中 c_2 为正数常量。$\theta_{o,\,i}$ 的初始值可以随机设定，或根据任务方向要求设定。与协议（5）类似，（6）中的求和项也是机器人 i与其邻居对 θ_o 的解读之间的偏差，它驱动 $\theta_{o,\,i} \to \theta_{o,\,j}$。在位置和方向协商过程中，每个机器人通过无线通信利用邻居的解读，就最终编队形状达成一致。

接下来，我们将对协议 (5) 和 (6) 进行收敛性分析。为此，我们首先作出如下假设。

假设 1. $\mathcal{G}(t)$ 对所有 $t \geq t_0$ 均连通。

假设 1 是形状编队控制中的常见假设 [22],[25]。作为替代方案，关于网络连通性保持的最先进方法能够严格保证假设 1 成立 [26], [27]。现在，我们可以在定理 1 中给出协议 (5) 和 (6) 的收敛性分析。

定理 1 $\bar{q}_o = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_{o\,i}\ t_0 \qquad \bar{\theta}_o = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \theta_{o\,i}\ t_0 \quad \mathcal{G}\ t \geq t_0$

</style>**假设**,() 且 ,()。若() 对所有 均连通，则在协议 (5) 和(6)下，存在有限时间 $t^* \geq t_0$ 使得 $q_{o,i}(t) = \bar{q}_o$ 且 $\theta_{o,i}(t) = \theta_o$ 对所有 $t \geq t^*$ 均成立。

证明。证明见附录。 □

IV. 用于形状编队的均值漂移策略

为了实现离散质量分布模型所规定的编队目标，我们现提出一种分布式均值漂移策略。具体而言，我们首先提出一种分布式质量估计器，使每个机器人都能通过局部交互估计所有采样点的质量。然后，我们设计一种分布式质量反馈控制器，协调机器人群的空间分布，使其与采样点分布相匹配。最后，我们对所提出的策略进行收敛性分析。

A. 分布式质量估计

给定由采样点指定的期望形状，第一步是获取每个采样点当前的质量。

随着机器人群移动，每个采样点的质量会动态变化。一种直接的方法是将质量分布广播给所有机器人。其局限在于，需要一个集中式节点来计算整个质量分布，从而造成单点故障。相反，我们的方法是让机器人以分布式方式估算质量。

质量值 P_k 表示所有机器人ˆ在采样点 k周围的密度，如式 (1) 所定义。假设 $P_{k,\ i}$表示机器人 i从其局部视角对 P_k 的估计。ˆ每个机器人的质量估计 $P_{k,\ i}$ 可通过以下分布式估计器收敛至 P_k ：

$$\begin{aligned}\hat{P}_{k,i} &= e^{-\beta\|p_i-q_k\|^2} + z_{k,i}\\ \dot{z}_{k,i} &= \gamma \sum_{j\in\mathcal{N}_i} \operatorname{sign}\left(\hat{P}_{k,j} - \hat{P}_{k,i}\right)\end{aligned} \tag{7}$$

其中， $\gamma > 0$是常数增益，$z_{k,\ i} \in \mathbb{R}$ 是一个初始化为$z_{k,\ i}(t_0) = 0$ 的内部状态。回顾一下， $\beta > 0$ 表示核带宽。如式 (7) 所示，求和符号中的项表示机器人 i的质量估计与ˆ其邻居机器人的质量估计之间的偏差，其旨在驱动 $P_{k,\ i} \to$ ˆ$P_{k,\ j}$。此外，项 $e^{-\beta\|p_i-q_k\|^2}$ 是一个参考信号，ˆ用于确保 $P_{k,\ i}$ 收敛至所有机器人参考信号的平均值，即 ˆ$P_{k,\ i} \to \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{-\beta\|p_j-q_k\|^2}$。接下来，我们将在定理 2 中对所提出的估计器 (7) 进行收敛性分析。

定理 2。 假设每个机器人位置的初始值任意，且其速度受最大速度$v_{\max} > 0$限制。在假设 *1* 下，若参数 γ 满足 $\gamma > (n-1)\sqrt{2\beta/e}v_{\max}$，则对于每个 $i \in \{1,\dots,n\}$ 和 $k \in \{1,\dots,m\}$，在 (7) 中定义的质量估计器 ˆ$P_{k,i}$ 渐近收敛于在(1)中定义的真实质量 P_k 。

证明。 证明见附录。 □

注意，每个机器人的速度都受饱和函数限制，该函数将在第 IV-B 节中介绍。

B. 基于质量反馈的均值漂移控制器 *k*

为使群体的分布拟合给定的采样点，我们设计如下分散式控制器:

$$v_i = \operatorname{sat}\left(v_i^{\mathrm{ms}} + v_i^{\mathrm{cv}}\right) \tag{8}$$

其中， v_i^{ms}为均值漂移速度指令， v_i^{cv}为避碰速度指令。这里，饱和函数 sat(·) 定义为

$$\operatorname{sat}(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{\|z\|}v_{\max}, & \|z\| > v_{\max} \\ z, & \text{otherwise} \end{cases}, \forall z \in \mathbb{R}^d \tag{9}$$

其中， $v_{\max} > 0$ 是机器人的最大速度。两种速度指令的作用如下所示。

1）均值漂移速度指令：(8) 中的均值漂移指令v_i^{ms}旨在通过降低分布相似度误差度量 F，使机器人群拟合采样点分布。为此， v_i^{ms}被设计为

$$v_i^{\mathrm{ms}} = -\kappa_1 \nabla_{p_i} F(\mathbf{p}) \tag{10}$$

其中 $\kappa_1 = \sigma_1 n/[2\beta\sum_{k=1}^{m}(P_k)^{-1}\omega(\|q_k - p_i\|)]$,为正增益， σ_1 为正数常量。回想一下， P_k 是采样点 k 的质量值， q_k 是第 k个采样点的位置。这里，权重函数 $\omega(z)$: $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{>0}$ 定义为 $\omega(z) = e^{-\beta z^2}$ ，其中 $\beta > 0$ 表示核带宽。该函数单调递减。因此，当机器人 i 与采样点 k 之间的距离较小时，权重 $\omega(\|q_k - p_i\|)$较大。可以看出，n、P_k和 $F(\mathbf{p})$是三个全局量，因此式（10）中 v_i^{ms}的定义是全局的。接下来，我们从单个机器人的角度将定义（10）局部化。

ˆ取 F的梯度，并将 P_k 替换为 $P_{k,i}$，从机器人 i的角度来看， v_i^{ms}的去中心化形式为

$$v_i^{\mathrm{ms}} = \frac{\frac{\sigma_1}{m}\sum_{k=1}^{m}(\hat{P}_{k,i})^{-1}\omega\left(\|q_k - p_i\|\right)(q_k - p_i)}{\sum_{k=1}^{m}(\hat{P}_{k,i})^{-1}\omega\left(\|q_k - p_i\|\right)}. \tag{11}$$

如式（11）所示， v_i^{ms}遵循改进的均值漂移算法ˆ，具体将在后文说明。令

$$\psi\ P_{k\,i}\ \|q_k - (\ ,\ )$$
$$p_i\| \ = \ P_{k\,i}\ ^{-1}\omega\ \|q_k - p_i\|$$

(ˆ,)( )为采样点 k的权重函数。该函数受点 k 周围的机器人密度以及机器人 i 与点k之间的距离共同影响。具体而言，机器人 i距离点 k越近，$\omega(\|q_k - p_i\|)$就越大。同时，点 k周围的其他机器人越少，(ˆ$P_{k,\ i})^{-1}$ 就越大。因此，距离机器人i 较近且周围机器人较少的采样点会获得更大的权重。这会促使机器人尽可能靠近采样点，同时确保每个采样点周围的机器人密度尽可能一致。因此， v_i^{ms}能够降低分布相似性误差度量 F，这一点将在后文的定理3中得到证明。

均值漂移算法是一种用于模态搜索和密度估计的非参数迭代技术，最初发展于机器学习和计算机视觉领域。其核心原理是在每次迭代中将聚类中心移向邻近点的加权平均。在多机器人系统中，它被用于设计控制律 [19], [22], , 使机器人移向参考位置的加权平均中心，表示为 $v_i =$ ($\sum_k w_k q_k$)/($\sum_k w_k$)，其中$w_k > 0$ 表示点 q_k的权重。我们的方法通过整合质量分布模型来增强该框架，其中质量和机器人与点之间的距离会影响权重。

2）避碰速度指令：避碰指令 v_i^{cv}可防止与邻近机器人发生碰撞，同时与形状编队指令v_i^{ms}保持无冲突。其具体定义为

$$v_i^{\mathrm{cv}} = \kappa_2 \tilde{v}_i^{\mathrm{cv}} \tag{12}$$

其中

$$\tilde{v}_i^{\mathrm{cv}} = \sigma_2 \sum_{j\in\mathcal{N}_i'} \frac{r_{\mathrm{avoid}} - \|p_i - p_j\|}{\|p_i - p_j\| + \varepsilon}(p_i - p_j)$$

是一个排斥项，自调节增益 κ_2 定义为

$$\kappa_2 = \begin{cases} \varphi, & (v_i^{\mathrm{ms}})^\top \tilde{v}_i^{\mathrm{cv}} \geq 0 \\ \varphi \cdot \min\left\{-\dfrac{(1-\varepsilon)\|v_i^{\mathrm{ms}}\|^2}{(v_i^{\mathrm{ms}})^\top \tilde{v}_i^{\mathrm{cv}}}, 1\right\}, & (v_i^{\mathrm{ms}})^\top \tilde{v}_i^{\mathrm{cv}} < 0. \end{cases}$$

其中， $\sigma_2 > 0$ 和 $0 < \varepsilon < 1$ 是常数， $r_{\mathrm{avoid}} > 0$ 是避碰范围，且 $\mathcal{N}_i' = \{j \in \mathcal{N}_i : \|p_i - p_j\| \leq r_{\mathrm{avoid}}\}$ 其中 $r_{\mathrm{avoid}} \in (0, r_{\mathrm{sense}})$是避碰范围。系数 $\varphi = \min\{\|v_i^{\mathrm{ms}}\|^2/\varepsilon, 1\}$ 确保 κ_2 在 $v_i^{\mathrm{ms}} = 0$处局部利普希茨。排斥项 $\tilde{v}_i^{\mathrm{cv}}$随机器人间距离增大而减小，并在距离超过 r_{avoid}时变为零。

增益 κ_2 旨在防止 v_i^{cv}与 v_i^{ms}相冲突。第一种情况，当 $(v_i^{\mathrm{ms}})^\top \tilde{v}_i^{\mathrm{cv}} \geq 0$时，两个指令方向一致，因此 $\kappa_2 = \varphi$，无需调整。第二种情况，当 $(v_i^{\mathrm{ms}})^\top \tilde{v}_i^{\mathrm{cv}} < 0$时，两个指令方向相反，此时将$\kappa_2$ 减小，以满足无冲突条件：

$$(v_i^{\mathrm{ms}} + v_i^{\mathrm{cv}})^\top v_i^{\mathrm{ms}} \geq \varepsilon \|v_i^{\mathrm{ms}}\|^2. \tag{13}$$

引理3证明了该条件成立，这将在定理3的收敛性分析中用到。

引理3. 不等式(13) 始终成立。

证明. 证明见附录。 □

每个机器人的控制策略计算复杂度与群体总规模 n无关。具体而言，每个机器人在每个控制周期的计算开销为 $O(m + |\mathcal{N}_i'|)$，主要由以下三项操作构成：1）分布式质量估计：每个机器人与邻居交换并更新所有 m采样点的质量估计值。2）均值漂移指令计算：机器人计算所有 m 采样点的贡献，以确定其移动方向。3）避碰指令：机器人计算所有邻近机器人的相对位置$j \in \mathcal{N}_i'$。因此，随着群体规模的扩大，该算法仍能高效运行。

C. 收敛性分析

本节分析所提出的控制器（8）的收敛性。为此，我们对质量估计和期望形状作出如下假设。

假设2。 假设每个机器人都能完美ˆ估计质量分布，即 $P_{k,\ i} = P_k$ 对所有 $i \in\{1, \ldots, n\}$ 和 $k \in \{1, \ldots, m\}$均成立。

ˆ 若每个机器人的局部质量估计 $P_{k,\ i}$ 达成一致性并收敛到真实质量值 P_k，则假设2成立。所提出的质量估计器 (7) 可以满足这一假设，这已在定理 2 中得到证明。

假设3. 假设期望形状为凸形状。

假设3确保所有采样点的凸包与期望形状重合。若不满足这一假设，收敛分析仍然有效，但只能保证所有机器人达到稳定状态（如定理3所示），并收敛到采样点的凸包。事实上，要分析诸如 (8) [21], [28] 这样的基于行为的编队方法的收敛性并不容易。我们此前的研究已证明，机器人能够收敛并形成矩形形状 [22]。下文将在定理 4 中把这一收敛结果推广到任意凸形状。

现在，我们准备在定理3中给出本文的主要结果。证明思路是利用 LaSalle不变性原理（见引理8），证明群体构型 $\mathbf{p}$ 可以收敛到$F(\mathbf{p})$的临界点集合，记为 $\mathcal{D} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{dn} : \nabla_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}) = 0\}$。

为应用 LaSalle不变性原理，我们首先证明群体轨迹 $\mathbf{p}(t)$ 有界，如引理4所述。

引理4。 在假设*2*下，受控制器(8)作用时，群体的轨迹$\mathbf{p}(t)$ 从任意初始状态$\mathbf{p}(t_0) \in \mathbb{R}^{dn}$ 出发，对所有 $t \geq t_0$均有界。

证明。 证明见附录。 □

接下来，根据引理 7，我们证明 v_i 关于$\mathbf{p}$ 局部利普希茨。为此，我们首先根据引理5和引理6证明 sat(·)、 v_i^{ms}和 v_i^{cv}均为局部利普希茨。

引理 5。 在假设*2*下，对于所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$，式(10) 中定义的指令 v_i^{ms}关于$\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{dn}$ 局部利普希茨。

证明。 证明见附录。 □

引理 6。 对于所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$，式(12) 中定义的避碰指令 v_i^{cv}关于$\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{dn}$ 局部利普希茨。

证明。 证明见附录。 □

引理 7。 在假设*2*下，对于所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$，由(8) 定义的指令 v_i 关于$\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{dn}$ 局部利普希茨连续。

证明。 证明见附录。 □

经过上述准备，下面的定理将分析去中心化控制器(8)的收敛性。

定理3。 在假设*2*下，在(8)的作用下，从任意初始状态$\mathbf{p}(t_0)$ $\in \mathbb{R}^{dn}$出发，$\mathbf{p}(t)$在 $t \to \infty$ 时收敛到 $\mathcal{D}$ 。

证明。 定义

$$\Gamma(u) = \begin{cases} \dfrac{v_{\max}}{u}, & u \geq v_{\max} \\ 1, & 0 \leq u < v_{\max} \end{cases}$$

对于 $u \geq 0$。那么，(8) 中定义的 v_i 可重新表述为

$$v_i = \Gamma(\|v_i^{\mathrm{ms}} + v_i^{\mathrm{cv}}\|)(v_i^{\mathrm{ms}} + v_i^{\mathrm{cv}}). \tag{14}$$

回顾一下，根据假设2，每个机器人都知道实际的质量分布，即 ˆ$P_{k,\ i} = P_k$。因此，分布式均值漂移指令 v_i^{ms}可以表示为集中式形式 (10)，即 $v_i^{\mathrm{ms}} = -\kappa_1(p_i, \mathbf{P})\nabla_{p_i} F(\mathbf{p})$，其中 $\kappa_1(p_i, \mathbf{P})$ 是由 p_i 和$\mathbf{P}$确定的正自调节系数。

将 (14) 代入 F 的时间导数，得到

$$\begin{aligned}\dot{F} &= \sum_{i=1}^{n} \nabla_{p_i} F^{\top} \Gamma(\|v_i^{\mathrm{ms}} + v_i^{\mathrm{cv}}\|)\,(v_i^{\mathrm{ms}} + v_i^{\mathrm{cv}}) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \Gamma(\|v_i^{\mathrm{ms}} + v_i^{\mathrm{cv}}\|) \frac{(v_i^{\mathrm{ms}})^{\top}}{\kappa_1\,(p_i, \mathbf{P})} (v_i^{\mathrm{ms}} + v_i^{\mathrm{cv}}) \\ &\le -\sum_{i=1}^{n} \Gamma(\|v_i^{\mathrm{ms}} + v_i^{\mathrm{cv}}\|) \frac{\varepsilon \|v_i^{\mathrm{ms}}\|^2}{\kappa_1\,(p_i, \mathbf{P})} \\ &= -\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Gamma(\|v_i^{\mathrm{ms}} + v_i^{\mathrm{cv}}\|) \kappa_1\,(p_i, \mathbf{P})\, \|\nabla_{p_i} F\|^2\end{aligned} \tag{15}$$

其中，不等式由引理3推导得出。由于 Γ，$\kappa_1 > 0$，(15)意味着

$$\dot{F}(\mathbf{p}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \nabla_{p_i} F(\mathbf{p}) = 0\ \forall i \;\Leftrightarrow\; \nabla F(\mathbf{p}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{p} \in \mathcal{D}.$$

因此，$\mathcal{D} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{dn} :\ \dot{F}(\mathbf{p}) = 0\}$。

接下来，我们将 F 作为李雅普诺夫函数候选，并应用LaSalle不变性原理（引理8）。系统动态为 $\dot{\mathbf{p}} = f(\mathbf{p})$，其中 $f(\mathbf{p}) = [v_1^{\top}, \ldots, v_n^{\top}]^{\top}$ 在 $\mathbf{p}$ 上局部利普希茨，因为根据引理 7，每个 v_i 在 $\mathbf{p}$ 上均局部利普希茨。令 $\Omega = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{dn} :\ \|\mathbf{p}\| \le M\}$ 为紧正向不变集，其中 M 根据引理4 对 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 的群体轨迹$\mathbf{p}$进行界定。根据引理 2，李雅普诺夫函数候选 F 可微，并由 (15) 满足 $\dot{F} \le 0$。因此，根据引理 8，$\mathbf{p}$ 收敛到 $\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{dn}$ 中最大的不变子集：$\dot{F}(\mathbf{p}) = 0\}$，因此 $\mathbf{p} \to \mathcal{D}$。 □

定理 4. 在假设*2*和假设*3*下，通过控制器(8)的作用，所有机器人都将收敛到期望形状。

证明。 定理3表明$\mathbf{p}$收敛到 $\mathcal{D} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{dn} : \nabla_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}) = 0\}$。由式（10），$\nabla_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}) = 0$ 意味着 $v_i^{\mathrm{ms}} = 0$，由此可得

$$p_i = \frac{\sum_{k=1}^{m} \alpha_k q_k}{\sum_{k=1}^{m} \alpha_k} \tag{16}$$

其中 $\alpha_k = (P_k)^{-1} e^{-\beta \|p_i - q_k\|^2} > 0$。式（16）表明，$p_i$ 是采样点的凸组合。注意，所有采样点都位于期望形状内，并且根据假设3，期望形状是凸的。因此，采样点的凸组合必然包含于期望形状内。所以，p_i 包含于期望形状内，这意味着所有机器人都将收敛到期望形状。

□

V. 性能评估

在本节中，我们通过仿真和实验评估所提出策略的性能。首先，介绍所采用的性能指标。然后，给出仿真结果，以分析所提出策略的性能。最后，展示实验结果，以验证所提方法在实际应用中的可行性。

A. 性能指标

第一个指标——质量估计误差，用于评估质量估计器的准确性。该指标定义为 $E_{\mathrm{est}} = \max_{1 \le i \le n,\ 1 \le k \le m} |\hat{P}_{k,\ i} - P_k|$，其中 $\hat{P}_{k,\ i}$ 是质量估计值，P_k 是实际质量。可以看出，$E_{\mathrm{est}} = 0$表示所有机器人在每个采样点都实现了完美的质量估计，即 $\hat{P}_{k,\ i} = P_k$ 对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 和 $k \in \{1, \ldots, m\}$均成立。否则，$E_{\mathrm{est}} > 0$。

第二个度量——分布均匀度，用于量化机器人群的空间均匀性。其定义为 $M_{\mathrm{uni}} = \sum_{i=1}^{n} (r_{\min,\ i} - \bar{r}_{\min})^2$, 其中 $r_{\min,\ i} = \min_{j \in \mathcal{N}_i} \|p_i - p_j\|$ 表示机器人 i 到其邻居的最小距离,_ 而$\bar{r}_{\min} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} r_{\min,\ i}$ 是所有机器人最小距离的平均值。当所有机器人到邻居的最小距离相同时，均匀度达到完美状态，此时 $M_{\mathrm{uni}} = 0$。否则，$M_{\mathrm{uni}} > 0$。

第三个度量——覆盖率，用于评估机器人覆盖的期望形状面积占比。每个机器人的覆盖区域定义为以其位置为圆心、半径为 r_{cover}的圆，其中 r_{cover} 是设为 $r_{\mathrm{cover}} = \sqrt{3 S_{\mathrm{shape}}/(2n\pi)}$ 的覆盖半径。随后，该度量定义为$M_{\mathrm{cover}} = S_{\mathrm{cover}}/S_{\mathrm{shape}} \times 100\%$，其中 S_{shape} 是期望形状的面积，S_{cover} 是期望形状内所有机器人覆盖区域并集所覆盖的面积。完全覆盖时结果为 $M_{\mathrm{cover}} = 100\%$，未覆盖时结果为 $M_{\mathrm{cover}} = 0$。

第四个度量——收敛时间，记为 T_{conv}，定义为所有机器人进入期望形状所需的时间。收敛时间越短，表明方法效率越高。

B. 仿真结果

本文通过三个仿真实例评估所提出的方法。仿真参数设置如下。式 (5) 和 (6) 中的形状协商系数设为 $\alpha = 0.8$ 和 $c_1 = c_2 = 1.6$。式 (7) 中的质量估计系数设为 $\gamma = 0.01$，式 (11) 和 (12) 中的均值漂移控制器系数设为 $\sigma_1 = 30$、$\sigma_2 = 1000$ 和$\varepsilon = 10^{-8}$。带宽参数 β 的合适取值可通过附录中的算法 1 确定。具体而言，在以下三个示例中，带宽设为 $\beta = 1.5$。

第一个示例在三种群体规模（$n = 20$，50、100）下评估所提出的策略，每种规模均针对不同的期望形状进行三次试验（见图4）。在此示例中，机器人模型参数设置如下：$r_{\mathrm{sense}} = 5$米、$r_{\mathrm{avoid}} = 1$米和 $v_{\max} = 1$米/秒。在情况1中，群体规模为 $n = 20$ （见图4(a)），机器人群平稳地形成了三种凸形状：三角形、五边形和六边形。如性能指标所示，分布相似性误差度量 F 迅速降低并收敛至最小值，表明其成功拟合了采样点分布。同时，质量估计误差 E_{est} 在10秒内收敛至零，验证了估计器。情况2和3表明，即使对于大规模群体（见图4(b)中的 $n = 50$和图4(c)中的

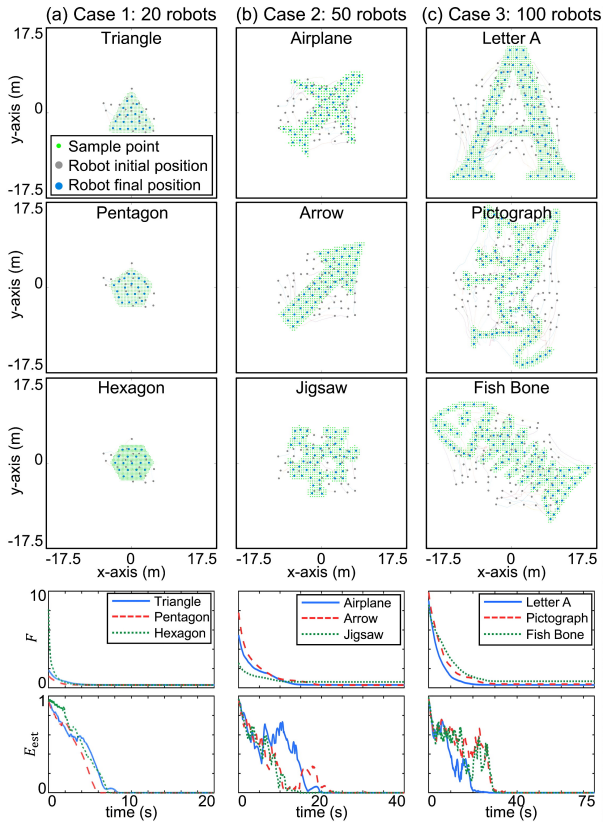

图4. 我们提出的策略在不同形状和群体规模下的仿真。(a) 情况1：由20个机器人形成的三角形、五边形和六边形形状的轨迹和指标。(b) 情况2：由50个机器人形成的飞机、箭头和拼图形状的轨迹和指标。(c) 情况3：由100个机器人形成的字母A、象形图和鱼骨形状的轨迹和指标。

$n = 100$）。相似度指标和估计误差证实了在各种形状和群体规模下的稳定性能。

在第二个示例中，如图5所示，我们将提出的策略与最先进的勒让德矩（LM）方法进行比较[14]（使用8阶和12阶矩）。为确保比较公平，所有群体都需要形成相同的兔头形状，并已知其位置和方向的确定性信息。参数保持一致：感知半径为 $r_{\text{sense}} = 10\text{m}$，最大速度为 $v_{\max} = 1$ m/s；我们方法的其他参数则与第一个示例相同。图5(a–b)展示了采用两种策略的50机器人群的快照和轨迹。尽管两种方法都能从相同的初始条件出发实现预期队形，但我们的策略形成的形状更贴合兔头轮廓，且偏离边界的机器人更少。性能通过三项指标进行评估：覆盖率 M_{cover}、均匀度 M_{uni}和收敛时间 T_{conv}，如图5(c)所示。对于基于LM的方法——其中一些机器人可能永远无法进入形状内部——我们将 T_{conv} 定义为不再有机器人进入后的时间，这一宽松标准有利于LM策略。20次随机试验的统计结果证实，我们的策略在这三项指标上均优于基于LM的方法。这一改进源于我们的质量分布模型，与基于勒让德矩的表示相比，该模型能减少形状失真。

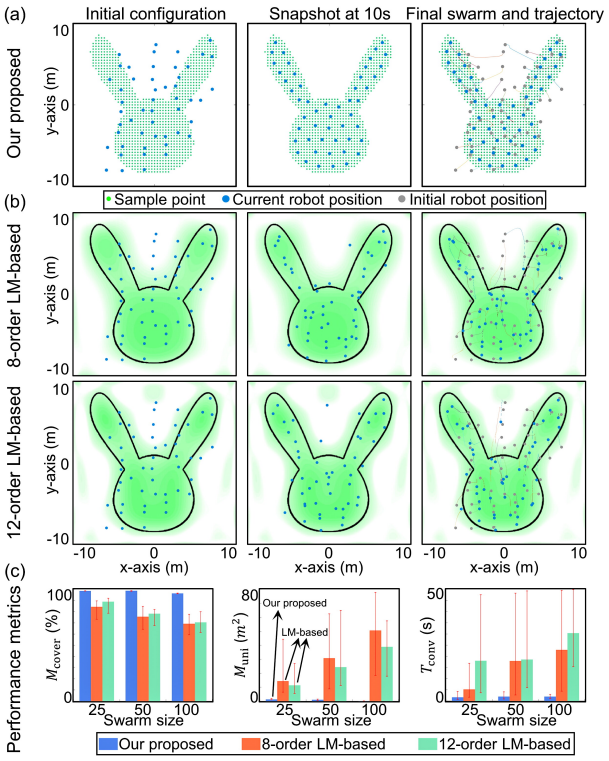

图5. 我们的策略与最先进的 [14], 的对比结果，二者均使用50个机器人实现兔头形状。(a) 我们提出的策略的快照。(b) 策略 [14] 在8阶和12阶矩下的快照。(c) 性能指标的统计结果，对20次随机初始化试验取平均。

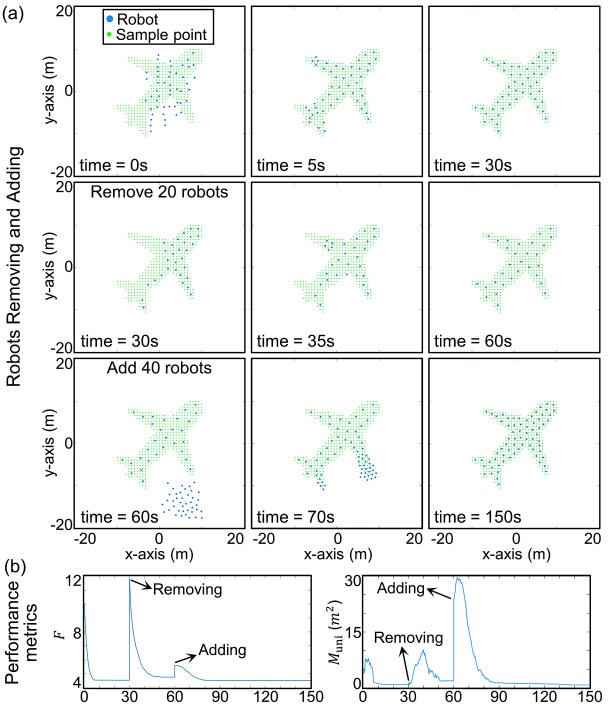

图6. 机器人加入和移除的仿真结果。(a) 50个机器人在移除20个并加入40个机器人后形成飞机形状的快照。(b) 相应的性能指标。

第三个示例展示了我们的策略对群体规模变化的适应能力，如图6所示。图6(a)中的仿真快照显示，50个机器人最初随机分布，并形成飞机形状，该形状在 $t = 30$s时稳定下来。图6(b)中相似度指标 F 和均匀度指标 M_{uni} 的收敛验证了队形的完成。随后移除20个机器人，并为剩余的30个机器人重新计算 F。为使形状得以重新形成，我们将式(7)中所有机器人的质量估计器内部状态重置为零（即，对所有i，$z_{k,\,i} = 0$ k），因为该估计器需要无误差初始条件$\sum_{i=1}^{n} z_{k,\,i} = 0$ [29]。这一重置可通过去中心化广播实现。重置后，30个机器人调整位置以填充形状，并在 $t = 60$s时形成队形，此时F 和 M_{uni} 收敛至新的最小值。随后加入40个机器人，并为扩展后的70机器人群重新计算 F。群体继续形成该形状，最终在 $t = 150$s时完成飞机队形，指标收敛证实了这一点。

值得注意的是，我们的方法假设期望形状固定；如果群体规模 n 超过该形状的容纳能力，就可能面临可扩展性挑战。为确保形成效果良好，应满足两个条件。首先，为促进系统收敛到近最优分布，并避免相似度指标 F 的局部极小值（因为定理3仅保证收敛到 F的一个临界点），采样点 m 的数量应足够大。根据我们的仿真，我们建议 $m \geq 5n$。其次，启用避碰时，采样点间距 d_{pts}必须足以容纳机器人，避免彼此重叠。将每个机器人建模为半径为 r_{avoid}的圆，形状的近似面积 $S_{\text{shape}} \approx m d_{\text{pts}}^2$ 必须足够大，能够容纳 n 个这样的圆。因此，需满足条件 $d_{\text{pts}} \geq \sqrt{\pi n/m} \cdot r_{\text{avoid}}$。

C. 实验结果

我们开展了实验，以验证所提策略在实际应用中的有效性。图7(a)所示的实验硬件配置由四个主要部分组成：(1) 10台TurtleBot3 Burger机器人，它们是基于ROS 2的非完整约束平台；(2) 一套Nokov动作捕捉系统，以200 Hz的频率跟踪每台机器人的位置；(3) 一台工作站，用于接收这些位置，并通过MATLAB为每台机器人计算速度指令；以及(4) 一台路由器，通过Wi-Fi向所有机器人广播这些指令。由于TurtleBot3是欠驱动的，速度指令会根据[30]转换为线速度和角速度。MATLAB程序还会仿真第II-A节中定义的去中心化交互。

我们首先通过引导一个由10个机器人组成的机器人群形成“ S”形和“ E”形编队来验证所提出的策略，如图7(b)所示。参数设置如下：感知半径为 $r_{\text{sense}} = 1.5$米，规避半径为 $r_{\text{avoid}} = 0.35$ 米，增益为 $\sigma_1 = 2$、 $\sigma_2 = 15$和 $\gamma = 0.05$。“S”形的带宽为 $\beta = 5.5$ ，“E”形的带宽为 $\beta = 9$ 。控制和形状协商频率均为10 Hz，而质量估计以100 Hz运行。如图所示

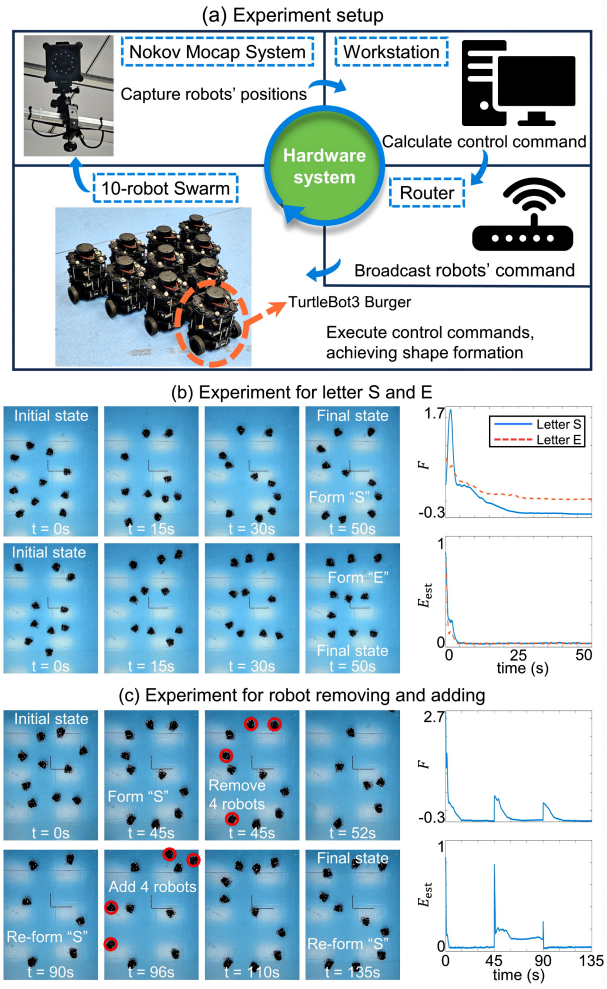

图 7. 实验设置与结果。(a) 实验的硬件设置。(b) 10 个机器人形成“S”形和“E”形的快照及相应指标。(c) 展示对群体规模变化的适应性的快照和指标：在“S”形队形形成过程中，于 $t = 45$s 移除 4 个机器人，并于 $t = 90$s 重新加入。

从快照中可以看出，群体在50秒内成功从随机初始配置收敛到期望形状。由于形状协商尚未收敛，相似度指标可能在初始阶段上升，但在协商和质量估计均收敛后（5秒内）单调下降至最小值，从而确认队形形成成功。

第二个实验展示了我们的方法对群体规模变化的适应能力（图 7(c)）。最初，10 机器人群在 45 秒内形成“S”形，这一点由相似度指标和估计误差的收敛得到验证。随后，移除 4 台机器人，并将质量估计器的内部状态重置为 $z_{k,\,i} = 0$ （与第 V-B 节中的适应性仿真相同）。剩余的 6 台机器人在 $t = 90$ 秒内重新组成“S”形。接着，重新加入这 4 台机器人，10 台机器人的群体在 $t = 135$ 秒内再次形成该形状。各阶段相似度指标和估计误差的降低，验证了队形形成和质量估计收敛，从而证明该方法在实际中能够适应群体规模变化。

VI. 结论

本文提出了一种基于分布的编队控制方法，以实现复杂形状编队并适应群体规模变化。首先，我们引入了一种定义在离散采样点上的质量分布模型，该模型能够精确表示期望形状，并将其与群体规模解耦。其次，我们基于分布式平均跟踪设计了一种分布式质量估计器，使每台机器人都能通过局部交互准确获取全局质量分布。第三，我们设计了一种均值漂移控制器，利用质量反馈，通过拟合采样点分布驱动机器人朝期望形状移动。我们证明了控制器的稳定性，并确保其在凸形状下收敛。最后，大量仿真、实验以及与最先进方法的比较，展示了所提方法的有效性及其对不同群体规模的适应能力。未来工作将着重开发一种鲁棒的质量估计器，使其在移除机器人时无需广播信号，并在更大规模的群体中开展真实实验。

附录A 预备引理

为了建立理论结果，我们需要引入以下必要的预备结果。

引理8 (LaSalle不变性原理，定理4.4，见[31])。记$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为相对于系统 $\dot{x} = f(x)$正向不变的紧集。此处，$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是局部利普希茨的。假设 $V:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个连续可微函数，满足 $\dot{V}(x) \le 0$ 在Ω中成立。令 $E = \{x \in \Omega : \dot{V}(x) = 0\}$，且 M 为 E中的最大不变集。那么，从Ω 出发的每个解都趋近于 M，当$t \to \infty$时。

引理9。 $xe^{-\beta x^2} \le 1/\sqrt{2\beta e}$对所有 $x \ge 0$均成立。

证明。考虑 $f(x) = xe^{-\beta x^2}$，其中 $x \ge 0$。其导数为 $f'(x) = e^{-\beta x^2} - 2\beta x^2 e^{-\beta x^2} = (1-2\beta x^2)e^{-\beta x^2}$。由于对所有 x均有 $e^{-\beta x^2} > 0$，$f'(x) = 0$的解满足 $1-2\beta x^2 = 0$。因此，临界点为 $x^* = 1/\sqrt{2\beta}$。当 $x < \frac{1}{\sqrt{2\beta}}$ 时导数为正，当 $x > \frac{1}{\sqrt{2\beta}}$时导数为负，这证实了 x^*是最大值。因此，对所有 $x \ge 0$，$f(x) \le f(x^*) = 1/\sqrt{2\beta e}$均成立。 □

引理 10 $E = \{\Lambda = [\xi^\top, \zeta^\top]^\top \in \mathbb{R}^{2d} \quad \xi\ \zeta \in \mathbb{R}^d\ \xi^\top\zeta = 0 \quad \xi^\top\zeta = -\ 1-\varepsilon\ \|\xi\|^2\}$ 集合：、，或()在 $\mathbb{R}^{2d}$ 中对 $d \ge 1$ 的勒贝格测度为零。

证明。将 $E = A \cup B$ 划分为 $A = \{\Lambda \in \mathbb{R}^{2d} : \xi^\top\zeta = 0\}$ 和 $B = \{\Lambda \in \mathbb{R}^{2d} : \xi^\top\zeta = -(1-\varepsilon)\|\xi\|^2\}$。记 $\mu(\cdot)$ 为勒贝格测度。接下来证明 $\mu(A) = \mu(B) = 0$。

我们首先证明 A 具有零勒贝格测度。定义 $f:\mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$，使得 $f(\Lambda) = \xi^\top\zeta$。那么 f 是光滑的，且 $A = f^{-1}(0)$。其梯度为 $\nabla f = [\nabla_\xi f^\top, \nabla_\zeta f^\top]^\top = [\zeta^\top, \xi^\top]^\top$。注意，$\nabla f$ 的临界点满足 $\nabla f = \mathbf{0} \iff \xi = \zeta = \mathbf{0} \iff \Lambda = \mathbf{0}$。于是，$df(v) = \nabla f^\top v$从 $\mathbb{R}^{2d}$到 $\mathbb{R}$ 是满射，当且仅当 $\Lambda \ne \mathbf{0}$。因此，f 在 $\mathbb{R}^{2d} \setminus \{\mathbf{0}\}$上是浸没。根据原像定理 [32]，$A = f^{-1}(0)$ 是$\mathbb{R}^{2d} \setminus \{\mathbf{0}\}$的子流形，其维数为 dim $A = 2d-1 < 2d$。根据 [33], 中的推论 6.12，我们得到 $\mu(A) = 0$。

接下来证明 B 的勒贝格测度为零。定义h： $\mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$，使得 $h(\Lambda) = \zeta^\top\xi + (1-\varepsilon)\|\xi\|^2$。于是$B = \{\Lambda \in \mathbb{R}^{2d} : h(\Lambda) = 0\}$。$h$ 的梯度为 $\nabla h = [\nabla_\xi h^\top, \nabla_\zeta h^\top]^\top = [(\zeta + 2(1-\varepsilon)\xi)^\top, \xi^\top]^\top$。注意，$\nabla h$ 的临界点满足 $\nabla h = \mathbf{0} \iff \xi = \zeta = \mathbf{0} \iff \Lambda = \mathbf{0}$。因此，类似于 A，我们也可以得到 $\mu(B) = 0$。

根据勒贝格测度的次可加性，$\mu(E) \le \mu(A) + \mu(B) = 0 + 0 = 0$，即 E的勒贝格测度为零。 □

附录 B 定理证明

本附录给出定理 1 和定理 2 的证明。

定理 *1* 的证明。令 $\delta_i = q_{o,i} - \bar{q}_o$。考虑李雅普诺夫候选函数 $V(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \delta_i(t)^\top\delta_i(t)$。根据 [34], 中的定理 1，对 $V(t)$ 关于 t 求导，得到

$$\dot{V}(t) \le -\frac{c_1}{2}\left(4\lambda_2\left(L(\mathcal{G}(t))\right)\right)^{\frac{1+\alpha}{2}} V(t)^{\frac{1+\alpha}{2}}$$

其中 $c_1 > 0$ 和 $0 < \alpha < 1$ 是两个常数。这里，$L(\mathcal{G}(t))$ 是 $\mathcal{G}(t)$ 的拉普拉斯矩阵，$\lambda_2(L(\mathcal{G}(t)))$ 是 $\mathcal{G}(t)$ 的代数连通度。由于对所有 $t \ge t_0$，$\mathcal{G}(t)$ 都是连通的，因此 $\lambda_2(L(\mathcal{G}(t))) > 0$ 始终成立。注意，$\mathcal{G}(t)$ 的所有可能连接方式都是有限的。因此，$K = \min\{\lambda_2(L(\mathcal{G}(t))) : t \ge t_0\}$存在且严格为正。于是我们推得

$$\dot{V}(t) \le -c_1 2^\alpha K^{\frac{1+\alpha}{2}} V(t)^{\frac{1+\alpha}{2}}.$$

根据 [35],中的定理 1，存在

$$t^* \le \frac{2^{1-\alpha}V(t_0)^{\frac{1-\alpha}{2}}}{c_1 K^{\frac{1+\alpha}{2}}(1-\alpha)}$$

使得 $V(t) = 0$ 对所有 $t \ge t^*$均成立，这意味着 $q_{o,i}(t) = \bar{q}_o$ 对所有 $t \ge t^*$均成立。类似地，按照协议(5)的证明，$\theta_{o,i}(t) = \theta_o$ 也可以在有限时间内达到。 □

定理 *2* 的证明。对于固定的 $k \in \{1,\dots,m\}$，定义 $r_i = e^{-\beta\|p_i - q_k\|^2}$ 和 $f_i = \dot{r}_i$，其中 $i \in \{1,\dots,n\}$。对 $\hat{P}_{k,i}$ 关于 t求导，并将 (7) 代入，可得

$$\dot{\hat{P}}_k^i = f_i + \gamma\sum_{j\in\mathcal{N}_i}\operatorname{sign}\left(\hat{P}_{k,j} - \hat{P}_{k,i}\right). \tag{17}$$

根据 [29], 中的定理3，若存在常数 $f > 0$，使得 $|f_i| \le f$且对于任意 $i \in \{1,\cdots,n\}$，$\gamma > (n-1)f$，则根据 (17) 的作用，$\lim_{t\to\infty}\hat{P}_{k,i}(t) = P_k$对所有$i$均成立。由 f_i的定义可知

$$\begin{aligned}|f_i| &= \left|\frac{d}{dt}e^{-\beta\|p_i - q_k\|^2}\right| \\ &= 2\beta e^{-\beta\|p_i-q_k\|^2}\left|(q_k - p_i)^\top v_i\right| \\ &\le 2\beta e^{-\beta\|p_i-q_k\|^2}\|q_k - p_i\|\|v_i\| \\ &\le 2\beta\frac{\|q_k - p_i\|}{e^{\beta\|p_i-q_k\|^2}}v_{\max}.\end{aligned} \tag{18}$$

根据引理9，(18)意味着 $|f_i| \le 2\beta v_{\max}/\sqrt{2\beta e}$，因此 $|f_i| \le \bar{f} := \sqrt{2\beta/e}v_{\max}$。由于 $\gamma >$

$(n-1)\sqrt{2\beta/e}\,v_{\max}$，则 $\gamma > (n-1)\,\bar{f}$。因此，$\hat{}$有 $\lim_{t\to\infty} P_{k,\,i}(t) = P_k$，对于 $i \in \{1,\cdots,n\}$和$k \in \{1,\ldots,m\}$。□

附录 C 引理证明

在本附录中，我们给出本文所有定理的理论分析。

引理 *1* 的证明。 根据柯西-施瓦茨不等式，可得 $|\mathbf{P}^\top \mathbf{1}_m| \le \|\mathbf{P}\|\|\mathbf{1}_m\|$。这里，$\mathbf{1}_m = [1,\ldots,1]^\top \in \mathbb{R}^m$和 $\|\mathbf{P}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^m P_k^2}$是欧几里得范数。当且仅当对某个 $c \in \mathbb{R}$，$\mathbf{P} = c\mathbf{1}_m$ 时等号成立，这等价于对所有 $k,l \in \{1,\ldots,m\}$，$P_k = P_l$。进一步可得 $-\ln(|\mathbf{P}^\top \mathbf{1}_m|/(\|\mathbf{P}\|\|\mathbf{1}_m\|)) \ge 0$，且当且仅当对所有 k,l，$P_k = P_l$ 时等号成立。于是，我们有

$$\begin{aligned} 0 &\le -\ln\left(\frac{|\mathbf{P}^\top \mathbf{1}_m|}{\|\mathbf{P}\|\,\|\mathbf{1}_m\|}\right) \\ &= -\ln\left(\sum_{k=1}^m P_k\right) + \ln\|\mathbf{P}\| + \frac{1}{2}\ln m \\ &\le -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m \ln P_k - (1-\frac{1}{2})\ln m + \ln\|\mathbf{P}\| \\ &= F_{\text{uni}} \end{aligned}$$

其中，第二个不等式由詹森不等式得出；等号成立当且仅当对所有 k,l，$P_k = P_l$。因此，$F_{\text{uni}} \ge 0$，且等号成立当且仅当对所有 $k,l \in \{1,\ldots,m\}$，$P_k = P_l$。□

引理 *2* 的证明。首先，我们证明质量函数 $P_k(\mathbf{p})$ 关于$\mathbf{p}$的光滑性。回顾一下，$P_k : \mathbb{R}^{dn} \to \mathbb{R}_{>0}$ 定义为 $P_k(\mathbf{p}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e^{-\beta\|p_i - q_k\|^2}$。定义平方距离函数 $d_{ik} : \mathbb{R}^{dn} \to \mathbb{R}$ 为$d_{ik}(\mathbf{p}) := \|p_i - q_k\|^2$。该函数在$\mathbb{R}^{dn}$上关于$\mathbf{p}$ 光滑。令 $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ 表示指数函数$\tau(x) = e^{-\beta x}$，它是光滑的。由于 P_k 是有限个光滑函数（即 $P_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \tau \circ d_{ik}$）复合而成的和，因此 P_k 关于$\mathbf{p}$光滑。

接下来，我们证明 F的光滑性。由于 $P_k > 0$ 严格成立，且对数函数 $\ln(\cdot) : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ 光滑，因此每个 $\ln P_k$ 在$\mathbf{p}$上都是光滑的。因此，作为光滑函数的有限和与一个常数之和，度量

$$F = -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m P_k - \ln\ln$$关于$\mathbf{p}$是光滑的。□

引理*3*的证明。重新整理式 (13) 得到

$$(v_i^{\text{cv}})^\top v_i^{\text{ms}} \ge -(1-\varepsilon)\|v_i^{\text{ms}}\|^2. \tag{19}$$

因此，我们只需证明（19）成立。如果 $(\tilde{v}_i^{\text{cv}})^\top v_i^{\text{ms}} \ge 0$，那么有 $(v_i^{\text{cv}})^\top v_i^{\text{ms}} \ge 0 \ge -(1-\varepsilon)\|v_i^{\text{ms}}\|^2$，这意味着（19）成立。如果 $(\tilde{v}_i^{\text{cv}})^\top v_i^{\text{ms}} < 0$，则可得

$$\begin{aligned} (v_i^{\text{cv}})^\top v_i^{\text{ms}} &= \varphi \cdot \min\left\{-\frac{(1-\varepsilon)\|v_i^{\text{ms}}\|^2}{(v_i^{\text{ms}})^\top \tilde{v}_i^{\text{cv}}}, 1\right\} \cdot (\tilde{v}_i^{\text{cv}})^\top v_i^{\text{ms}} \\ &\ge \left(-\frac{(1-\varepsilon)\|v_i^{\text{ms}}\|^2}{(\tilde{v}_i^{\text{cv}})^\top v_i^{\text{ms}}}\right) \cdot (\tilde{v}_i^{\text{cv}})^\top v_i^{\text{ms}} \\ &= -(1-\varepsilon)\|v_i^{\text{ms}}\|^2. \end{aligned}$$

因此，式 (19) 总是成立，式 (13) 也成立。□

引理*4*的证明。 我们通过证明对所有 $i \in \{1,\ldots,n\}$ 而言 p_i 的有界性，来说明 $\mathbf{p}$ 是有界的。核心思路是构造一个常数 $L > 0$，使得当$\|p_i\| > L$时 $\frac{d}{dt}\|p_i\| < 0$，从而确保 p_i 保持有界。为此，我们分析 $\frac{d}{dt}\|p_i\| = p_i^\top v_i/\|p_i\|$的符号。将（14）中定义的 v_i 代入，对于 $\|p_i\| > L$，可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|p_i\| &= \Gamma\left(\|v_i^{\text{ms}} + v_i^{\text{cv}}\|\right)\frac{p_i^\top (v_i^{\text{ms}} + v_i^{\text{cv}})}{\|p_i\|} \\ &\le \Gamma\left(\|v_i^{\text{ms}} + v_i^{\text{cv}}\|\right)\left(\|v_i^{\text{cv}}\| + \frac{p_i^\top v_i^{\text{ms}}}{\|p_i\|}\right) \end{aligned} \tag{20}$$

其中，根据式 (14)，$\Gamma > 0$。然后，我们考察括号内项的符号。

首先，我们证明 $\|v_i^{\text{cv}}\|$有上界。根据式 (12) 中 κ_2 的定义，我们有 $\kappa_2 \in [0,1]$，由此可得

$$\|v_i^{\text{cv}}\| \le \sigma_2 \sum_{j\in\mathcal{N}_i^{\text{cv}}} (r_{\text{avoid}} - \|p_i - p_j\|) \le \sigma_2(n-1)r_{\text{avoid}}.$$

其次，我们分析 $p_i^\top v_i^{\text{ms}}/\|p_i\|$的上界。令$R = \max_k \|q_k\|$，并令 $B(R) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \le R\}$ 为一个紧球。将 $\alpha_k = (P_k)^{-1}\omega(\|q_k - p_i\|) > 0$和 $y = \sum \alpha_k q_k/(\sum \alpha_k)$代入式 (11)，得到 $v_i^{\text{ms}} = \sigma_1(y - p_i)/m$。根据 y 的定义可得 $\|y\| < R$，即 $y \in B(R)$。这表明 v_i^{ms}始终指向 $B(R)$。对于 $\|p_i\| > R$（即 $p_i \notin B(R)$），v_i^{ms}与 p_i 之间的夹角为钝角，这表明 $p_i^\top v_i^{\text{ms}} < 0$。令 x 为从原点到 v_i^{ms}所在直线的正交投影，则 $x \in B(R)$。根据图 8 所示的相似三角形关系，我们有

$$\frac{\|p_i\|}{\|p_i - x\|} = \frac{\|v_i^{\text{ms}}\|}{\left|p_i^\top v_i^{\text{ms}}/\|p_i\|\right|}.$$

那么，对于 $\|p_i\| > 2R$，可得

$$\begin{aligned} \left|\frac{p_i^\top v_i^{\text{ms}}}{\|p_i\|}\right| &= \frac{\|v_i^{\text{ms}}\|\|p_i - x\|}{\|p_i\|} \\ &\ge \frac{\sigma_1}{m}\frac{\|y - p_i\|\|x - p_i\|}{\|p_i\|} \\ &\ge \frac{\sigma_1}{m}\left|\|p_i\| - (\|x\| + \|y\|) + \frac{\|x\|\|y\|}{\|p_i\|}\right| \\ &> \frac{\sigma_1}{m}(\|p_i\| - 2R). \end{aligned}$$

将此与 $p_i^\top v_i^{\text{ms}} < 0$ 结合，可得 $p_i^\top v_i^{\text{ms}}/\|p_i\| < -\sigma_1(\|p_i\| - 2R)/m$。

接下来，我们证明 p_i 的有界性。将 $L = 2R + \sigma_2 m(n-1)r_{\text{avoid}}/\sigma_1$ 作为所需常数，并将 $\|v_i^{\text{cv}}\|$ 和 $\|v_i^{\text{ms}}\|$ 的上界代入式 (20)，可得

$$\frac{d}{dt}\|p_i\| < -\Gamma\left[\frac{\sigma_1}{m}(\|p_i\| - 2R) - \sigma_2(n-1)r_{\text{avoid}}\right] < 0$$

对于$\|p_i\| > L$。现在我们用反证法证明$\|p_i\| \le M = \max\{L, \|p_1(t_0)\|, \ldots, \|p_n(t_0)\|\}$。假设对于某个 $t_1 > t_0$，有 $\|p_i(t_1)\| > M$。由于 $p_i(t)$ 是连续的，且 $\|p_i(t_0)\| \le M$，因此存在 $t_2 \in [t_0, t_1)$，使得对于所有 $t \in (t_2, t_1]$，$\|p_i(t_2)\| = M$ 且 $\|p_i(t)\| > M$。由于只要 $\|p_i(t)\| > L$，就有 $\frac{d}{dt}\|p_i(t)\| < 0$，因此范数 $\|p_i(t)\|$在 $[t_2, t_1]$上严格递减。这意味着 $\|p_i(t_1)\| <$

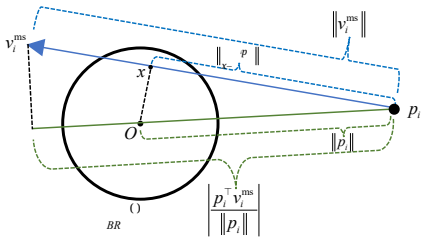

图 8. p_i、 v_i^{ms}、 x和 $|p_i^\top v_i^{\mathrm{ms}}/\|p_i\||$之间的关系。注意，$|p_i^\top v_i^{\mathrm{ms}}/\|p_i\||$是 v_i^{ms}在 p_i上的投影的范数。

$\|p_i(t_2)\| = M$，这与 $\|p_i(t_1)\| > M$矛盾。因此，对于所有 $t \geq t_0$，都有 $\|p_i(t)\| \leq M$，这证明了 p_i 有界。由于群体规模 n 有限， $\|\mathbf{p}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|p_i\|^2} \leq \sqrt{nM}$成立，这意味着 $\mathbf{p}$ 也有界。 □

引理5的证明。将 κ_1^的具体定义代入式（10），并根据假设2用 P_k 替换$P_{k,\ i}$ ，可得

$$v_i^{\mathrm{ms}}(\mathbf{p}) = -\frac{\sigma_1 \nabla_{p_i} F(\mathbf{p})}{2\beta \sum_{k=1}^m \left(P_k(\mathbf{p})\right)^{-1} e^{-\beta\|p_i - q_k\|^2}}.$$

根据引理 2， $F(\mathbf{p})$关于$\mathbf{p}$是光滑的，因此$\nabla_{p_i} F(\mathbf{p})$关于$\mathbf{p}$也是光滑的。由于 $P_k(\mathbf{p}) > 0$ 关于$\mathbf{p}$是光滑的，因此 v_i^{ms}关于$\mathbf{p}$是光滑的。此外，光滑函数必为局部利普希茨函数，因此 v_i^{ms}关于$\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{dn}$是局部利普希茨的。 □

引理 *6* 的证明。记 $\eta = \eta_1 \cdot \eta_2$ 为 $\eta_1 = \varphi$ =最小 $\{\|v_i^{\mathrm{ms}}\|^2/\varepsilon, 1\}$ 且

$$\eta_2 = \begin{cases} 1, & \left(v_i^{\mathrm{ms}}\right)^\top \tilde{v}_i^{\mathrm{cv}} \geq 0 \\ \min\left\{-\dfrac{(1-\varepsilon)\|v_i^{\mathrm{ms}}\|^2}{\left(v_i^{\mathrm{ms}}\right)^\top \tilde{v}_i^{\mathrm{cv}}}, 1\right\}, & \left(v_i^{\mathrm{ms}}\right)^\top \tilde{v}_i^{\mathrm{cv}} < 0. \end{cases}$$

那么， $\eta = \kappa_2$和 v_i^{cv}可以改写为 $v_i^{\mathrm{cv}} = \eta \cdot \tilde{v}_i^{\mathrm{cv}}$。由于局部利普希茨函数的乘积仍为局部利普希茨函数，我们只需分别证明 η 和 $\tilde{v}_i^{\mathrm{cv}}$关于 $\mathbf{p}$是局部利普希茨的，即可说明 v_i^{cv}具有局部利普希茨连续性。

首先，我们证明 $\tilde{v}_i^{\mathrm{cv}}$ 关于 $\mathbf{p}$ 是局部利普希茨的。为此，我们将其重新整理为 $\tilde{v}_i^{\mathrm{cv}}(\mathbf{p}) = \sigma_2 \sum_{j \neq i} \Phi(e_{ij}(\mathbf{p}))$，其中对于 $x \in \mathbb{R}^d$， $\Phi(x) = \phi(\|x\|)x$，而对于$\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{dn}$， $e_{ij}(\mathbf{p}) = p_i - p_j$；对于 $z \geq 0$，$\phi(z) = \max\{(r_{\mathrm{avoid}} - z)/(z + \varepsilon)\ 0\}$。由于 e_{ij} 关于 $\mathbf{p}$ 是线性的，因此它关于 $\mathbf{p}$ 是局部利普希茨的。接下来，我们证明 $\Phi(x)$ 关于 $x \in \mathbb{R}^d$ 是局部利普希茨的。为此，我们首先证明 $\phi(z)$ 是全局利普希茨的。$(r_{\mathrm{avoid}} - z)/(z + \varepsilon)$ 关于 z 的导数为 $-(r_{\mathrm{avoid}} + \varepsilon)/(z+\varepsilon)^2$, , 其绝对值被 $L_\phi = (r_{\mathrm{avoid}} + \varepsilon)/\varepsilon^2$ 所界定。因此，$(r_{\mathrm{avoid}} - z)/(z + \varepsilon)$ 是 L_ϕ- 利普希茨的。由于 $\max\{\cdot, 0\}$ 是 1- 利普希茨的，我们得出 $\phi(z)$ 关于 z 是 L_ϕ-利普希茨的。于是，对于 $x_0 \in \mathbb{R}^d$ 以及 x_1， $x_2 \in B(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$，我们有

$$\begin{aligned} &\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| \\ \leq &|\phi(\|x_1\|) - \phi(\|x_2\|)|\,\|x_1\| + \phi(\|x_2\|)\|x_1 - x_2\| \\ \leq &L_\phi \|x_1 - x_2\|\|x_1\| + \frac{r_{\mathrm{avoid}}}{\varepsilon}\|x_1 - x_2\| \\ \leq &\left(L_\phi\left(\|x_0\| + \varepsilon\right) + \frac{r_{\mathrm{avoid}}}{\varepsilon}\right)\|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

如可见， $\Phi(x)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上是局部利普希茨的。因此，作为 $\Phi(x)$ 与 $e_{ij}(\mathbf{p})$ 的求和与复合， $\tilde{v}_i^{\mathrm{cv}}(\mathbf{p})$ 关于 $\mathbf{p}$ 是局部利普希茨的。

其次，我们证明 η 关于 $\mathbf{p}$是局部利普希茨的。注意，η 仅与 v_i^{ms}和 $\tilde{v}_i^{\mathrm{cv}}$有关。由于已证明 v_i^{ms}（引理 5）和 $\tilde{v}_i^{\mathrm{cv}}$关于 $\mathbf{p}$是局部利普希茨的，因此我们只需证明 η 关于 $[(v_i^{\mathrm{ms}})^\top, (\tilde{v}_i^{\mathrm{cv}})^\top]^\top$是局部利普希茨的。记 $\xi = v_i^{\mathrm{ms}}$、 $\zeta = \tilde{v}_i^{\mathrm{cv}}$和 $\Lambda = [\xi^\top, \zeta^\top]^\top$。那么， η 可改写为 $\eta(\Lambda) = \eta_1(\Lambda)\eta_2(\Lambda)$，其中 $\eta_1(\Lambda) = \min\{\|\xi\|^2/\varepsilon, 1\}$，并且

$$\eta_2(\Lambda) = \begin{cases} 1, & \zeta^\top \xi \geq 0 \\ \min\left\{-\dfrac{(1-\varepsilon)\|\xi\|^2}{\zeta^\top \xi}, 1\right\}, & \zeta^\top \xi < 0 \end{cases}.$$

现在的目标是证明 $\eta(\Lambda)$ 在 $\Lambda \in \mathbb{R}^{2d}$ 中局部利普希茨。为此，我们分析它在以下两个不同子集中的局部利普希茨连续性。

y g g

- Scenario 1: $\{\Lambda \in \mathbb{R}^{2d} : \|\xi\| > 0\}$.

W首先，我们通过分别证明 $\eta_1$ll和 η_2i 的局部利普希茨连续性，表明 η 在 $\{\Lambda \in \mathbb{R}^{2d}$ 上局部利普希茨。由于 $\|\xi\|^2/\varepsilon$ 在有界集上具有有界梯度，且 $\min\{\cdot, 1\}$ 是 1-利普希茨函数，因此函数 η_1 在 $\mathbf{p}$ 上局部利普希茨。接下来，我们讨论 η_2 在 $\{\Lambda \in \mathbb{R}^{2d} : \|\xi\| > 0\}$ 中任意一点 $\Lambda_0 = [\xi_0^\top, \zeta_0^\top]^\top$ 处的局部利普希茨性质。我们考虑以下三种情况。

情况1： $\zeta_0^\top \xi_0 > 0$。在这种情况下， $\zeta^\top \xi$ 的连续性保证存在 Λ_0 的一个邻域 U，使得对于所有 $\Lambda \in U$，都有 $\zeta^\top \xi > 0$。于是，$\eta_2(\Lambda)$ 在 U 上 $= 1$，这意味着 η_2 在 Λ_0 处局部利普希茨。

情况2： $\zeta_0^\top \xi_0 < 0$。在这种情况下，存在 Λ_0 的有界邻域 U，使得对所有$\Lambda \in U$都有 $\zeta^\top \xi < \zeta_0^\top \xi_0/2 < 0$。定义 $g(\Lambda) = -(1-\varepsilon)\|\xi\|^2/(\zeta^\top \xi)$。$g$ 的梯度为

$$\nabla_\Lambda g(\Lambda) = \frac{(1-\varepsilon)}{(\zeta^\top \xi)^2}\begin{bmatrix} -2(\zeta^\top \xi)\xi + \|\xi\|^2 \zeta \\ \|\xi\|^2 \xi \end{bmatrix},$$

由于 $\|\xi\|$ 和 $\|\zeta\|$ 在 U 中均有上界，且 $1/(\zeta^\top \xi)^2 < 4/(\zeta_0^\top \xi_0)^2$，因此该式有界。由此， g 在 U上是利普希茨连续的。由于 $\eta_2(\Lambda) = \min\{g(\Lambda)\ 1\}$，且 $\min\{\cdot, 1\}$ 是 1- 利普希茨的，因此 η_2 在 U上是利普希茨连续的。因此， η_2 在 Λ_0处局部利普希茨连续。

情况3： $\zeta_0^\top \xi_0 = 0$。记 $\delta_1 = \|\xi_0\|/4$。根据三角不等式，对所有满足 $\|\xi - \xi_0\| < \delta_1$的 ξ，都有 $\|\xi\| > \|\xi_0\|/2$。令$c = (1-\varepsilon)(\|\xi_0\|/2)^2$。由 $|\zeta^\top \xi|$的连续性，存在 $\delta_2 > 0$，使得对所有满足 $\|\Lambda - \Lambda_0\| < \delta_2$的 Λ，都有 $|\zeta^\top \xi| < c$。令$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，并取 $\Lambda \in B(\Lambda_0, \delta)$。若 $\zeta^\top \xi \geq 0$，则$\eta_2(\Lambda) = 1$。若 $\zeta^\top \xi < 0$，则 $|\zeta^\top \xi| < c < (1-\varepsilon)\|\xi\|^2$，因此 $g(\Lambda) = (1-\varepsilon)\|\xi\|^2/|\zeta^\top \xi| > 1$，这意味着 $\eta_2(\Lambda) = \min\{g(\Lambda)\ 1\} = 1$。因此，对所有 $\Lambda \in B(\Lambda_0, \delta)$，都有 $\eta_2(\Lambda) = 1$，从而证明 η_2 在 Λ_0处局部利普希茨连续。

综上， η_2 在 $\{\Lambda \in \mathbb{R}^{2d} : \|\xi\| > 0\}$上局部利普希茨，且 $\eta = \eta_1 \cdot \eta_2$ 在该集合上局部利普希茨。

- 情形 2： $\{\Lambda \in \mathbb{R}^{2d} : \|\xi\| = 0\}$。

接下来，我们证明 η 在 $\{\Lambda \in \mathbb{R}^{2d} : \|\xi\| = 0\}$上局部利普希茨。对于任意 $\Lambda_0 = [\mathbf{0}^\top, \zeta_0^\top]^\top$ 属于 $\{\Lambda \in \mathbb{R}^{2d} : \|\xi\| = 0\}$的元素，令 $U = \{\Lambda : \|\Lambda - \Lambda_0\| < \sqrt{\varepsilon}/2\}$。接下来，我们分两步证明 η 在 U中的 Lipschitz 连续性。

第一步是证明 η 的梯度在 U中几乎处处连续且有界。根据 U 的定义，

我们有 $\|\xi\| < \sqrt{\varepsilon}/2$，其中 $\Lambda \in U$，这意味着 $\eta_1 = \|\xi\|^2/\varepsilon$。因此， η_1 在 U中可微，而 η的可微性等价于 η_2的可微性。根据 η_2的定义，它仅在 $\xi^\top\zeta = 0$ 或 $\xi^\top\zeta = -(1-\varepsilon)\|\xi\|^2$时不可微。因此， $\eta(\Lambda)$在 $U \setminus E$中可微，其中 E是定义为 $E = \{\Lambda \in U : \xi^\top\zeta = 0$ 或 $\xi^\top\zeta = -(1-\varepsilon)\|\xi\|^2\}$的不可微集合，该集合的勒贝格测度为零（由引理10证明）。然后，对于 $\Lambda \in U \setminus E$，有三种情况。

情况1： $\xi^\top\zeta > 0$。如果 $\xi^\top\zeta > 0$，则 $\eta(\Lambda) = \|\xi\|^2/\varepsilon$，这意味着 $\nabla_\Lambda\eta = [2\xi^\top/\varepsilon, 0]^\top$ 在 Λ 上连续，并以 $\|\nabla_\Lambda\eta\| < \varepsilon^{-1/2}$为界。

情况2： $\xi^\top\zeta < 0$ 且 $g(\Lambda) > 1$。如果 $\xi^\top\zeta < 0$ 且 $g(\Lambda) > 1$，则 $\eta(\Lambda) = \|\xi\|^2/\varepsilon$。与情况1相同，我们同样得到 $\nabla_\Lambda\eta$是连续的，并以 $\|\nabla_\Lambda\eta\| < \varepsilon^{-1/2}$为界。

情况3： $\xi^\top\zeta < 0$ 且 $g(\Lambda) < 1$。如果 $\xi^\top\zeta < 0$ 且 $g(\Lambda) < 1$，则 $\eta = -(1-\varepsilon)\|\xi\|^4/(\varepsilon\xi^\top\zeta)$。由此可得 $\nabla_\Lambda\eta = [\nabla_\xi\eta^\top, \nabla_\zeta\eta^\top]^\top$，其中

$$\nabla_\xi\eta(\Lambda) = -\frac{4(1-\varepsilon)\|\xi\|^2\xi}{\varepsilon\xi^\top\zeta} + \frac{(1-\varepsilon)\|\xi\|^4\zeta}{\varepsilon(\xi^\top\zeta)^2},$$
$$\nabla_\zeta\eta(\Lambda) = \frac{(1-\varepsilon)\|\xi\|^4\xi}{\varepsilon(\xi^\top\zeta)^2}.$$

这意味着 $\nabla_\Lambda\eta$ 在 Λ中是连续的。此外，将 $g(\Lambda) < 1$两边乘以 $\xi^\top\zeta$ 可得$|\xi^\top\zeta| > (1-\varepsilon)\|\xi\|^2$，由此得到以下界： $\|\nabla_\xi\eta\| \le 4\|\xi\|/\varepsilon + \|\zeta\|/(\varepsilon(1-\varepsilon)) \le 2/\sqrt{\varepsilon} + (\|\zeta_0\| + \sqrt{\varepsilon}/2)/(\varepsilon(1-\varepsilon))$，且 $\|\nabla_\zeta\eta\| \le \|\xi\|/(\varepsilon(1-\varepsilon)) \le 1/(2\sqrt{\varepsilon}(1-\varepsilon))$。于是我们有 $\|\nabla_\Lambda\eta(\Lambda)\| \le \sqrt{\|\nabla_\xi\eta\|^2 + \|\nabla_\zeta\eta\|^2} \le \tilde{M}$，其中 $\tilde{M} = \sqrt{[2/\sqrt{\varepsilon} + (\|\zeta_0\| + \sqrt{\varepsilon}/2)/(\varepsilon(1-\varepsilon))]^2 + [1/(2\sqrt{\varepsilon}(1-\varepsilon))]^2}$，这表明在此情况下 $\nabla_\Lambda\eta(\Lambda)$是连续且有界的。总之，对于所有 $\Lambda \in U \setminus E$，我们有 $\nabla_\Lambda\eta(\Lambda)$是连续的，且 $\|\nabla_\Lambda\eta(\Lambda)\| \le M$，其中 $M =$取最大值 $\{\varepsilon^{-1/2}, \tilde{M}\}$。

第二步是证明 η 在 U 上的 Lipschitz 连续性。对于 $\Lambda_1, \Lambda_2 \in U$，目标是证明，对于某个 $L_\eta \ge 0$，$|\eta(\Lambda_1) - \eta(\Lambda_2)| \le L_\eta\|\Lambda_1 - \Lambda_2\|$。定义线段 $\gamma(t) = (1-t)\Lambda_1 + t\Lambda_2$，其中 $t \in [0,1]$。令 $S = \gamma^{-1}(E) = \{t \in [0,1] : \gamma(t) \in E\}$ 为 E 在 γ 下的原像。接下来分析 S 的勒贝格测度。定义 $\xi_t = (1-t)\xi_1 + t\xi_2$ 和 $\zeta_t = (1-t)\zeta_1 + t\zeta_2$，其中 $t \in [0,1]$。根据 S 的定义， $t \in S \Leftrightarrow \xi_t^\top\zeta_t = 0$ 或 $\xi_t^\top\zeta_t + (1-\varepsilon)\xi_t^\top\xi_t = 0$。于是， S 可以分解为两个集合的并： $S = S_1 \bigcup S_2$，其中 $S_1 = \{t \in [0,1] : \xi_t^\top\zeta_t = 0\}$，且 $S_2 = \{t \in [0,1] : \xi_t^\top\zeta_t + (1-\varepsilon)\xi_t^\top\xi_t = 0\}$。代入 ξ_t 和 ζ_t后，集合 S_1 和 S_2 可改写为 $S_1 = \{t \in [0,1] : At^2 + Bt + C = 0\}$，以及 $S_2 = \{t \in [0,1] : [A + (1-\varepsilon)P]t^2 + [B + (1-\varepsilon)Q]t + [C + (1-\varepsilon)R] = 0\}$，其中 $A = (\xi_2 - \xi_1)^\top(\zeta_2 - \zeta_1)$， $B = \xi_1^\top(\zeta_2 - \zeta_1) + (\xi_2 - \xi_1)^\top\zeta_1$， $C = \xi_1^\top\zeta_1$，且 $P = \|\xi_2 - \xi_1\|^2, Q = 2\xi_1^\top(\xi_2 - \xi_1)$， $R = \|\xi_1\|^2$。我们先分析 S_1 的勒贝格测度。若 A, B, C 不全为零，则 $At^2 + Bt + C = 0$ 的解有限（至多有两个解），这说明 S_1 是零测度集。若 $A = B = C = 0$, $At^2 + Bt + C = 0$ 对所有 $t \in [0,1]$ 都显然成立，这说明 $S_1 = [0,1]$。因此， S_1 要么是零测度集，要么等价于 $[0,1]$。同理，我们还可以得到， S_2 要么是零测度集，要么等价于 $[0,1]$。接下来，我们通过考虑以下两种情况，证明 η 在 U 上的 Lipschitz 性质。

情况1： S_1 和 S_2 均为零测度。如果 S_1 和 S_2均为零测度，则 $S = S_1 \bigcup S_2$ 也为零测度。定义 $f(t) = \eta(\gamma(t))$。由于 γ 连续可微，且 η 在 $U \setminus E$上连续可微，因此$f(t)$在 $[0,1] \setminus S$上连续可微。因此，$f'(t)$存在且在 $[0,1] \setminus S$上连续，并且有界 $|f'(t)| = \left|\nabla_\Lambda\eta(\gamma(t))^\top(\Lambda_2 - \Lambda_1)\right| \le M\|\Lambda_2 - \Lambda_1\|$对$t \in [0,1] \setminus S$成立。由于 S为零测度， $f'(t)$在 $[0,1]$ 上可积。因此，$|\eta(\Lambda_1) - \eta(\Lambda_2)| = |f(0) - f(1)| \le \int_0^1 |f'(t)|dt \le M\|\Lambda_2 - \Lambda_1\|$

情况2： S_1 或 S_2 不具有零测度。在这种情况下，上述分析表明 $S_1 = [0,1]$或 $S_2 = [0,1]$成立。于是 $[0,1] \subseteq S_1 \bigcup S_2 = S \subseteq [0,1]$，这意味着$S = [0,1]$。根据 S的定义，我们得到对于所有$t \in [0,1]$， $\gamma(t) \in E$。因此， $\Lambda_1 = \gamma(0) \in E$ 且 $\Lambda_2 = \gamma(1) \in E$。根据 E的定义，我们有 $\eta_2(\Lambda_1) = \eta_2(\Lambda_2) = 1$，这意味着 $\eta(\Lambda_1) = \eta_1(\Lambda_1)$且 $\eta(\Lambda_2) = \eta_1(\Lambda_2)$。注意， η_1 关于 $\Lambda \in U$ 的梯度可由 $\|\nabla_\Lambda\eta_1\| \le 2\|\xi\|/\varepsilon \le 1/\sqrt{\varepsilon}$界定，这意味着 η_1在 U上是利普希茨的，且利普希茨常数为 $L_{\eta_1} = 1/\sqrt{\varepsilon}$。因此， $|\eta(\Lambda_1) - \eta(\Lambda_2)| = |\eta_1(\Lambda_1) - \eta_1(\Lambda_2)| \le L_{\eta_1}\|\Lambda_1 - \Lambda_2\|$。然后取$L_\eta =$的最大值$\{M, L_{\eta_1}\}$，得到对于所有 Λ_1、 $\Lambda_2 \in U$， $|\eta(\Lambda_1) - \eta(\Lambda_2)| \le L_\eta\|\Lambda_2 - \Lambda_1\|$。因此， η在 U上是利普希茨的，因而在 $\{\Lambda \in \mathbb{R}^{2d}$ 上局部利普希茨： $\|\xi\| = 0\}$。

综上， η 在 $\mathbb{R}^{2d} = \{\Lambda \in \mathbb{R}^{2d}$ 上关于 Λ 局部利普希茨: $\|\xi\| > 0\} \cup \{\Lambda \in \mathbb{R}^{2d} : \|\xi\| = 0\}$。结合 $\tilde{v}_i^{\text{cv}}$的局部 Lipschitz 连续性，可得 v_i^{cv}是局部利普希茨的。 □

引理 7 的证明。根据引理 5 和 6， v_i^{ms}和 v_i^{cv}关于$\mathbf{p}$是局部利普希茨的。为了证明 $v_i =$饱和函数$(v_i^{\text{ms}} + v_i^{\text{cv}})$关于$\mathbf{p}$是局部利普希茨的，我们只需证明函数饱和函数$(z)$关于 $z \in \mathbb{R}^d$是利普希茨的。

函数饱和函数(z)可以重新表述为到紧球 $C = \{z \in \mathbb{R}^d : \|z\| \le v_{\max}\}$上的投影，即饱和函数$(z) = \arg\min_{x \in C}\|x - z\|$。回想一下， $v_{\max}$ 是机器人的最大速度。由于 C 是一个非空闭凸集，根据[36]中的命题 5.3，我们有 $\|$饱和函数(z_1) −饱和函数$(z_2)\| \le \|z_1 - z_2\|$。因此，饱和函数$(z)$关于$z \in \mathbb{R}^d$是全局利普希茨的。

总之，sat(·)、 v_i^{ms}和 v_i^{cv}的局部利普希茨连续性均已得到证明，因此我们得出结论： v_i 在 $\mathbb{R}^{dn}$上的$\mathbf{p}$处局部利普希茨。 □

附录 D β 的选择

算法 1 概述了一种通过确定性退火方法 [37]选择带宽参数 β 的方法。给定一组采样点和固定数量的机器人，该算法确定一个 β 值，以确保群体的平衡状态（由式 (8) 中的控制律定义）能够紧密近似期望形状。该过程将 β 初始化为一个较小值，并根据冷却计划逐步增大。在每次迭代中，通过交替执行 E 步（更新机器人与采样点的关联）和 M 步（更新机器人位置），评估当前 β 下的编队质量。该过程持续进行，直到

达到收敛且机器人间距离超过预设阈值 $d_{\min}$，从而产生最优 β。

算法 1 使用确定性退火进行 β1：输入：2：$\{q_k\}_{k=1}^m$：m 采样点的位置 3：n：机器人数量 4：$d_{\min}$：期望队形中的最小机器人间距离 5：输出：6：β：优化后的退火参数 7：初始化参数：8：$\beta_{\text{initial}} \leftarrow 0.01$ // 初始退火参数 9：$\beta_{\text{final}} \leftarrow 150$ // 最终退火参数 10：$\alpha \leftarrow 1.025$ // 冷却率（$\alpha > 1$用于 β 增大）11：$\epsilon \leftarrow 10^{-3}$12：初始化 $\beta \leftarrow \beta_{\text{initial}}$13：初始化机器人的位置 $p_1 = \ldots = p_n = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m q_k$14：当 $\beta < \beta_{\text{final}}$ 时，执行 15：// E 步：更新关联概率 16：对于 $k = 1$ 到 m，执行 17：对于 $i = 1$ 到 n，执行 18：$P(p_i|q_k) = \exp(-\beta\|q_k - p_i\|^2)/\sum_{j=1}^n \exp(-\beta\|q_k - p_j\|^2)$ 19：结束循环 20：结束循环 21：// M 步：更新机器人位置 22：对于 $i = 1$ 到 n，执行 23：$p_i^{\text{old}} = p_i$, $p_i = \sum_{k=1}^m q_k \cdot P(p_i|q_k)/\sum_{k=1}^m P(p_i|q_k)$ 24：结束循环 25：如果 $\max_i \|p_i - p_i^{\text{old}}\| < \epsilon$，则 26：$d_{\text{actual}} \leftarrow \min_{i \neq j} \|p_i - p_j\|$27：如果 $d_{\text{actual}} \geq d_{\min}$，则 28：跳出循环 29：否则 30：$\beta \leftarrow \alpha \cdot \beta$31：结束 if 32：结束 if 33：结束 while 34：返回 β

参考文献

[1] L. Yang、J. Jiang、X. Gao、Q. Wang、Q. Dou 和 L. Zhang，“基于深度学习的实时分布规划实现的自主环境自适应微型机器人群导航”，《自然·机器智能》，第 4 卷，第 5 期，第 480–493 页，2022 年 5 月。[2] Y. Li、T. Guo、J. Chen、J. Wu、Y. Zhang、S. Alam、K. Cai 和 W. Du，“城市空中交通：综述与挑战”，*IEEE*《智能交通系统杂志》，第 17 卷，第 3 期，第 67–87 页，2025 年 5 月。[3] Y. Qu、B. Xin、Q. Wang、M. Wang 和 M. Guo，“利用遗传编程自动发现机器人群分布式形状形成的高效行为策略”，*IEEE*《自动化科学与工程汇刊》，第 21 卷，第 4 期，第 7599–7615 页，2024 年 10 月。[4] M. Alhafnawi、S. Hauert 和 P. O’Dowd，“机器人群中的自组织显著性检测与表征”，*IEEE*《机器人学与自动化快报》，第 6 卷，第 2 期，第 1487–1494 页，2021 年 4 月。[5] K. Ze、W. Wang、K. Liu 和 J. Lü，“杂乱环境中多架无人机的时变队形规划与分布式控制”，*IEEE*《工业电子学汇刊》，第 71 卷，第 9 期，第 11 305–11 315 页，2023 年 12 月。[6] Q. Yang、X. Zhang、H. Fang、M. Cao 和 J. Chen，“利用位移测量进行联合估计与平面仿射队形控制”，*IEEE*《控制系统技术汇刊》，第 33 卷，第 1 期，第 92–105 页，2025 年 1 月。

[7] H. Wan g 和 M. Rubenstein ，“Shap队形控制适用于同质g群体基于局部任务交换”，IEEE《机器人学汇刊》，第 36 卷，第 3 期，第 597–612 页，2020 年 6 月。[8] X. Li、R. Zhou、Y. Zhang 和 G. Sun，“通过动态分配实现多机器人系统的分布式形状形成”，IEEE《工业电子学汇刊》，第 72 卷，第 3 期，第 3017–3027 页，2025 年 3 月。[9] T. Zheng、Q. Han 和 H. Lin，“通过均值场反馈控制运输机器人群”，IEEE 自动控制汇刊，第 67 卷，第 8 期，第 4170–4177 页，2022 年 8 月。[10] K. Ito 和 K. Kashima，“离散时间线性系统的最大熵最优密度控制与薛定谔桥”，IEEE 自动控制汇刊，第 69 卷，第 3 期，第 1536–1551 页，2024 年。[11] U. Eren 和 B. Açıkme.se，“利用热方程和平滑核生成群体密度控制的速度场”，IFAC-PapEersOnLine，第 50 卷，第 1 期，第 9405–9411 页，2017 年。[12] Y. Chen，“交互智能体系统的密度控制”，IEEE 自动控制汇刊，第 69 卷，第 1 期，第 246–260 页，2023 年 1 月。[13] C. Sinigaglia、A. Manzoni、F. Braghin 和 S. Berman，“机器人群的鲁棒最优密度控制”，Automatica，第 176 卷，112218，2025 年，第。[14] C. L. Liu、I. L. D. Ridgley、M. L. Elwin、M. Rubenstein、R. A. Freeman 和 K. M. Lynch，“利用图像矩实现自愈分布式群体编队控制”，IEEE《机器人学与自动化快报》，第 9 卷，第 7 期，第 6216–6223 页，2024 年 7 月。[15] D. Cui 和 H. Li，“利用鲁棒模型预测均值场控制调节大规模机器人群的密度”，Automatica，第 169 卷，111832 页，2024 年 11 月。[16] D. Gu，“传感器网络中高斯混合的分布式期望最大化算法”，IEEE《神经网络汇刊》，第 19 卷，第 7 期，第 1154–1166 页，2008 年。[17] G. Battistelli 和 L. Chisci，“分布式状态估计中一致性扩展卡尔曼滤波器的稳定性”，Automatica，第 68 卷，第 169–178 页，2016 年。[18] T. Zheng、Q. Han 和 H. Lin，“大规模系统的分布式均值场密度估计”，IEEE 自动控制汇刊，第 67 卷，第 10 期，第 5218–5229 页，2022 年 10 月。[19] G. Sun、J. Lü、K. Liu、Z. Wang 和 G. Chen，“均值漂移理论及其在群体机器人学中的应用：提升多机器人协作效率的新途径”，IEEE《工业电子学杂志》，2025 年，doi: 10.1109/MIE.2025.3627087。[20] S. Zhao、Z. Li 和 Z. Ding，“多智能体系统的仅方位编队跟踪控制”，IEEE 自动控制汇刊，第 64 卷，第 11 期，第 4541–4554 页，2019 年 11 月。[21] Y. Liu 和 Z. Liu，“存在测量噪声时多智能体系统的分布式自适应编队控制”，Automatica，第 150 卷，110857 页，2023 年 4 月。[22] G. Sun、R. Zhou、Z. Ma、Y. Li、R. Gross、Z. Chen 和 S. Zhao，“机器人群形状组装中的均值漂移探索”，《自然·通讯》，第 14 卷，第 1 期，3476 页，2023 年 6 月。[23] T. M. Cover 和 J. A. Thomas，《信息论要素》。新泽西州霍博肯：Wiley-Interscience，2001 年。[24] G. Sun、Y. Xu、K. Liu 和 J. Lü，“无身份机器人群的分布式编队形状控制”，IEEE《工业电子学汇刊》，第 72 卷，第 9 期，第 9591–9601 页，2025 年 9 月。[25] T.-M. Nguyen、Z. Qiu、T. H. Nguyen、M. Cao 和 L. Xie，“机器人群的持续激励自适应相对定位与时变编队”，IEEE《机器人学汇刊》，第 36 卷，第 2 期，第 553–560 页，2019 年 8 月。[26] A. Gasparri、L. Sabattini 和 G. Ulivi，“协作多机器人系统中保持全局连通性的有界控制律”，IEEE《机器人学汇刊》，第 33 卷，第 3 期，第 700–717 页，2017 年 6 月。[27] X. Li、R. Zhou、G. Sun 和 J. Zhang，“通过选择关键邻居实现多智能体系统的连通性保持型群集”，IEEE《网络科学与工程汇刊》，第 10 卷，第 6 期，第 3779–3792 页，2023 年 11 月。[28] C. C. Cheah、S. P. Hou 和 J. J. E. Slotine，“机器人群的基于区域的形状控制”，Automatica，第 45 卷，第 10 期，第 2406–2411 页，2009 年 10 月。[29] F. Chen、Y. Cao 和 W. Ren，“具有有界导数的多个时变参考信号的分布式平均跟踪”，IEEE 自动控制汇刊，第 57 卷，第 12 期，第 3169–3174 页，2012 年 12 月。[30] S. Zhao、D. V. Dimarogonas、Z. Sun 和 D. Bauso，“具有运动约束的移动智能体协调控制通用方法”，IEEE 自动控制汇刊，第 63 卷，第 5 期，第 1509–1516 页，2017 年 5 月。[31] H. K. Khalil，《非线性系统》，第 3 版。新泽西州上萨德尔河：Prentice Hall，2002 年。[32] V. Guillemin 和 A. Pollack，《微分拓扑》。美国数学学会，2010 年，第 370 卷。[33] J. M. Lee

’光滑流形简介. 施普林格 ，2012，第218卷。

[34] L. Wang 和 F. Xiao，“动态智能体网络的有限时间一致性问题”，*IEEE 自动控制汇刊*，第55卷，第4期，第950–955页，2010年4月。[35] S. P. Bhat 和 D. S. Bernstein，“连续自治系统的有限时间稳定性”，*SIAM 控制与优化杂志*，第38卷，第3期，第751–766页，2000年3月。[36] H. Brezis，《泛函分析、索伯列夫空间与偏微分方程》。Springer New York，2011年。[37] K. Rose，“用于聚类、压缩、分类、回归及相关优化问题的确定性退火”，*IEEE 会议录*，第86卷，第11期，第2210–2239页，1998年11月。