arXiv:2602.00984v1 [math.AG] 1 Feb 2026

Nekrasov规范折纸理论的几何

Noah Arbesfeld、Martijn Kool 和 Woonam Lim

Abstract. Nekrasov规范折纸理论为 ADHM箭图及其表示的模空间提供了一种（复）四维推广。我们将折纸模空间描述为光滑空间上二次向量丛的各向同性截面的零点轨迹。这使我们能够用 Oh–Thomas 虚拟闭链给出折纸分区函数的代数几何定义。关键在于计算与模空间的每个环面不动点相关联的一个符号。此外，我们建立了一个整性结果和维数约化公式，并依循 Nekrasov 的工作，讨论其在非微扰 Dyson–Schwinger 方程中的应用。最后，我们猜想可用 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上某些二维带框架层来描述折纸模空间，并在环面不动点层面验证了这一猜想。

Contents

1. 引言 2 1.1. 箭图描述 3 1.2. 带框架层的描述 8 2. 箭图描述 11 2.1. 箭图表示的模空间 11 2.2. 环面作用与不动点轨迹 13 2.3. 示例与 $J_A = 0$ 轨迹 16 2.4. 连通性 19 2.5. 虚拟结构 21 2.6. 定理 1.1 的证明 27 2.7. 不变量 30 2.8. 非微扰 Dyson–Schwinger 方程 40 3. 带框架层的描述 44 3.1. 带框架层模空间 44 3.2. 导出结构 52 3.3. 通过带框架层构造折纸分区函数 54 3.4. 主要猜想 60 参考文献 64

1. Introduction

如下方图1所示的（2D）ADHM箭图 Q_2及其表示，在几何、表示论和物理学中发挥着核心作用。关系式

$$[B_1, B_2] + IJ = 0 \tag{1}$$

有时称为 ADHM方程，它最早出现在 Atiyah–Drinfeld–Hitchin–Manin 关于在 S^4 [ADHM] 上构造 SU(r)瞬子的研究中。固定维数向量 (r, n)，若表示 (B_1, B_2, I, J) 满足以下条件，则称其为稳定表示

$$\mathbb{C}\langle B_1, B_2\rangle \cdot I(W) = V,$$

其中 $V := \mathbb{C}^n$ ，且 $W := \mathbb{C}^r$。稳定表示的模空间 $M_{Q_2}(r, n)$ 是 Q_2 的一个光滑拟射影簇，其维数为 $2rn$。簇 $M_{Q_2}(r, n)$ 带有代数环面 $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^2 \times (\mathbb{C}^*)^r$ 的作用，其中 $(\mathbb{C}^*)^2$ 对环进行缩放，而 $(\mathbb{C}^*)^r$ 的作用则由其在 W 上的对角作用诱导。尽管 $M_{Q_2}(r, n)$ 非紧致，但不动点轨迹 $M_{Q_2}(r, n)^{\mathbb{T}}$ 是零维且既约的。因此，对 $\mathbb{T}$-等变基本类积分 $\mathbb{T}$-等变上同调类是定义良好的 [AB]。某些称为 Nekrasov 配分函数的生成级数，可通过固定被积函数的形式并对所有 n [求和，在数学上加以定义 Nek1]。

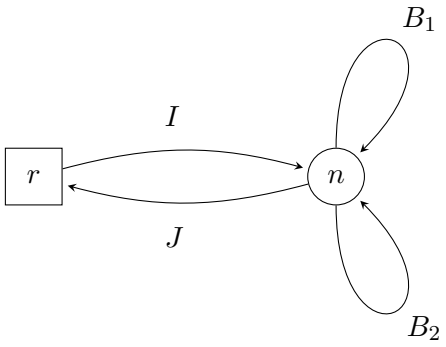

Figure 1. 箭图 Q_2。

空间 $M_{Q_2}(r,\ n)$ 存在一种基本上归功于 Barth[Bar], （另见 [Don, Nak, OSS]）的层论描述。考虑 $\mathbb{P}^2$ ，其无穷远直线记为 ℓ_∞。$\mathbb{P}^2$ 上的秩为 r 、瞬子数为 n 的框架层是一个二元组 $(E,\ \phi)$，其中 E 是 $\mathbb{P}^2$ 上的秩为 r 的无挠层，满足 $c_2(E) = n$ 和 $\phi\colon\ E|_{\ell_\infty} \to \mathcal{O}_{\ell_\infty}^{\oplus r}$ 是一个同构。框架层模空间记为 $M_{\mathbb{P}^2}(r,\ n)$，它自然带有 $\mathbb{T}$ 作用，并且存在一个 $\mathbb{T}$ 等变同构

$$M_{Q_2}(r, n) \cong M_{\mathbb{P}^2}(r, n). \tag{2}$$

本文研究 Nekrasov 引入的四维 ADHM 箭图 Q_4，它是二维 ADHM 箭图 [Nek2, Nek3, Nek4, Nek5, Nek6] 的推广。相关的稳定箭图表示模空间记为 $M_{Q_4}(\vec{r}, n)$，并称为折纸模空间。Nekrasov 为这些模空间关联了一个特定的不变量生成函数，称为规范折纸配分函数。正如我们在例 2.24 中所解释的，规范折纸配分函数可以视为局部 Vafa–Witten 配分函数在奇异曲面情形下的推广。与二维 ADHM 理论不同，折纸模空间通常是奇异的，因此难以理解配分函数的几何意义，也难以给出其层论描述。因此，我们提出以下问题:

(1) 是否存在一个虚拟循环 $[M_{Q_4}(\vec{r}, n)]^{\mathrm{vir}}$，从而为规范折纸配分函数提供代数几何定义？(2) 折纸模空间 $M_{Q_4}(\vec{r}, n)$ 是否具有层论描述?

我们通过将 $M_{Q_4}(\vec{r}, n)$ 实现为无关系四维 ADHM 箭图的稳定表示模空间上某个二次向量丛的各向同性截面的零点轨迹，解决了问题 (1)。这一描述为我们提供了一个（全局定义的）Oh–Thomas 虚拟循环 [OT], ，并据此给出规范折纸配分函数的代数几何定义。通过仔细分析环面不动点上的定向（符号），我们证明，本文的代数几何定义与 Nekrasov 最初以玻尔兹曼权重给出的定义相吻合。由此，我们得以沿着 Nekrasov 的思路，重新证明所谓的 非微扰 *Dyson–Schwinger* 方程。我们还针对问题 (2) 给出一个猜想性的答案，将其表述为 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上某些二维带框架层，并在不动点层面验证了这一答案。

关于规范折纸理论的（量子）代数结构及数学物理的深入探讨，请参阅 Kimura–Noshita 的系列论文 [KN1, KN2, KN3, KN4] 。Nekrasov 的 qq-特征标的表示论构造可见 Liu [Liu1] 的工作。本文则聚焦于规范折纸理论的几何。

1.1. 箭图描述。将图2中的无关系（带框架）箭图记为 Q_4。遵循 Nekrasov [Nek4], ，我们引入以下记号。令$\mathbf{4} := \{1, 2, 3, 4\}$，并将满足 $|A| = 2$ 的子集族 $\bar{A} \subset \mathbf{4}$ 记为$\mathbf{6}$。我们还定义$\mathbf{3} := \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\} \subset \mathbf{6}$。此外, 将满足 $A \cap \bar{A} = \varnothing$ 的$\mathbf{6}$ 中的唯一元素记为$\bar{A}$，并定义 $\phi(A) = \min A$。接下来考虑以下 ADHM 方程

$$
\begin{aligned}
&\mu_A := [B_a, B_b] + I_A J_A = 0, \quad \nu_A := J_{\bar{A}} I_A = 0, \\
&\mu_{A,\bar{a}} := B_{\bar{a}} I_A = 0, \quad \nu_{A,\bar{a}} := J_A B_{\bar{a}} = 0,
\end{aligned} \tag{3}
$$

对所有 $A = \{a < b\} \in \mathbf{6}$和 $\bar{a} \in A$均成立。四维 ADHM 箭图 Q_4 是通过对 Q_4施加关系 (3) 得到的。我们固定一个维数向量

$$
(\vec{r}, n) = ((r_A), n), \tag{4}
$$

其中 $(r_A) = (r_A)_{A\in\mathbf{6}}$。我们定义 $V := \mathbb{C}^n$, $W_A := \mathbb{C}^{r_A}$ 并令

$$r := \sum_A r_A.$$

当表示 $(B_a, I_A, J_A) = (B_a, I_A, J_A)_{a\in\mathbf{4},A\in\mathbf{6}}$ 满足以下条件时，称其为稳定表示

$$\sum_A \mathbb{C}\langle B_1, B_2, B_3, B_4\rangle \cdot I_A(W_A) = V. \tag{5}$$

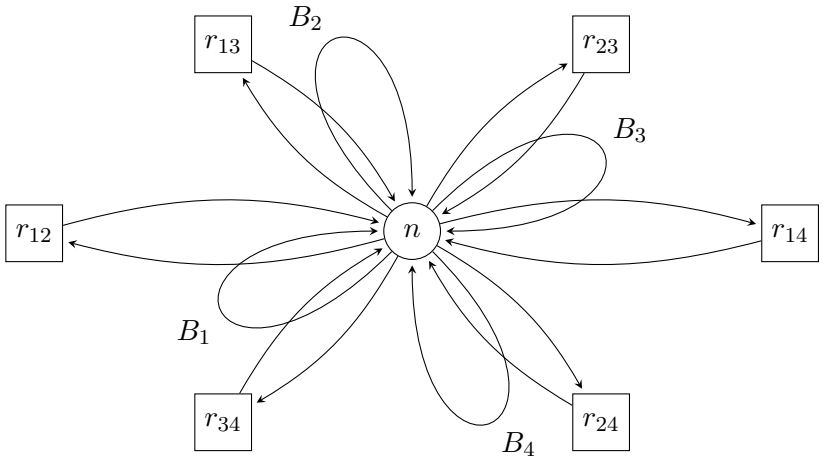

FIGURE 2. 箭图 Q_4。从 r_A 到 n的箭头标记为I_A，从 n 到 r_A 的箭头标记为 J_A。

存在一个拟射影概形 $\mathcal{M} := M_{Q_4}(\vec{r}, n)$，用于参数化维数向量为 $(\vec{r}, n)$ 的 Q_4 的稳定表示（命题 2.1）。该概形通常是奇异的（例2.6和例2.7）。它是光滑簇 $\mathcal{A} := A_{\widehat{Q}_4}(\vec{r}, n)$ 的闭子概形，该簇用于参数化维数向量为 $(\vec{r}, n)$ 的 Q_4 的稳定表示。Nekrasov 将 $\mathcal{M}$ 中的元素称为尖峰瞬子。粗略而言，$\mathcal{M}$ 中的元素可视为 $\mathbb{C}^4$ 中六个坐标二维平面之并上的瞬子。

对于 $r_{12} = r$ 和 $r_A = 0$，其他情况下，Q_4 和 Q_2 的稳定表示相同，且 $M_{Q_4}(\vec{r},\ n) \cong M_{Q_2}(r,\ n)$（例2.2）。

我们构造一个偶秩二次向量丛 $(E,\ q) \to \mathcal{A}$，即一个带有逐纤维非退化双线性形式 $q\colon E \otimes E \to \mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ 的向量丛。向量丛$(E,\ q)$具有以下性质。存在一个各向同性截面 $s \in H^0(\mathcal{A},\ E)$，也就是说，一个满足 $q(s,\ s) = 0$ 的截面 s。对于一个表示 $(B_a,\ I_A,\ J_A)$，截面 s 由 $(\mu_A,\ \nu_A,\ \mu_{A,\ a},\ \nu_{A,\ a})$ 定义，其中 A 遍历**6** 的所有元素，而 $a-$

A 的所有元素。截面 $\overline{s}$ 切出 $\mathcal{M}$，即 $\mathcal{M} = Z(s)$。这一构造产生一个三项对称障碍理论

$$\phi\colon E_{Q_4}^{\bullet} \to \tau^{\geqslant -1}\mathbb{L}_{\mathcal{M}}, \quad (E_{Q_4}^{\bullet})^{\vee}[2] \overset{\theta}{\cong} E_{Q_4}^{\bullet}, \quad \theta^{\vee}[2] = \theta$$

通过我们在第 2.5 节回顾的一种标准构造，其中 $\tau^{\geqslant -1}\mathbb{L}_{\mathcal{M}}$ 表示 $\mathcal{M}$的截断余切复形。此外，我们构造了一个极大各向同性子丛 $\Lambda \subset E$，它在 $\mathcal{M}$上诱导出一个定向，即一个同构

$$o\colon \det(E_{Q_4}^{\bullet}) \cong \mathcal{O}_{\mathcal{M}}$$

满足 $o \otimes o = (-1)^{\mathrm{rk}(\mathrm{rk}-1)/2}\det(\theta)$，其中 $\mathbf{rk} := \mathbf{rk}(E)$。定向的具体选择见 (20)。

我们考虑以下代数环面

$$T := Z(t_1t_2t_3t_4 - 1) \leqslant (\mathbb{C}^*)^4, \quad \mathbb{T} := T \times (\mathbb{C}^*)^r. \tag{6}$$

我们将 $(\mathbb{C}^*)^r$ 称为框架环面。如第 2.1 节所述，$\mathbb{T}$ 在 $\mathcal{A}$、E和 Λ 上有自然作用；相对于该作用，s 是 $\mathbb{T}$-等变的，而 q 是$\mathbb{T}$-不变的。因此，态射 ϕ和 θ 是 $\mathbb{T}$-等变的。此外，不动点轨迹 $\mathcal{M}^{\mathbb{T}}$ 是零维且既约的。根据 Oh–Thomas 理论[OT][1], , 这些数据导出一个虚循环和一个虚拟结构层

$$[\mathcal{M}]^{\mathrm{vir}} \in A^{\mathbb{T}}_{\mathrm{vd}}(\mathcal{M}, \mathbb{Q}), \quad \widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}_{\mathcal{M}} \in K_0^{\mathbb{T}}(\mathcal{M})_{\mathrm{loc}}, \quad \mathrm{vd} := -\sum_{A \in \underline{\mathbf{3}}} r_A r_{\overline{A}},$$

其中 $A^{\mathbb{T}}_*(\mathcal{M},\ \mathbb{Q})$ 表示 $\mathcal{M}$ 的 $\mathbb{T}$等变（有理）Chow群，而 $K_0^{\mathbb{T}}(\mathcal{M})_{\mathrm{loc}}$表示 $\mathcal{M}$上 $\mathbb{T}$等变凝聚层的（适当局部化的）格罗滕迪克群。[2] 这些类取决于定向的选择（20）。请注意，虚维数与瞬子数 n无关。

W我们定义上同调和 K 理论规范折纸配分函数

$$\mathsf{Z}_{\vec{r}}(q) := \frac{1}{\mathsf{C}_{\vec{r}}} \sum_{n=0}^{\infty} q^n \int_{[M_{Q_4}(\vec{r},n)]^{\mathrm{vir}}} 1, \quad \mathsf{Z}^K_{\vec{r}}(q) := \frac{1}{\mathsf{C}^K_{\vec{r}}} \sum_{n=0}^{\infty} q^n \chi(M_{Q_4}(\vec{r},n), \widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}), \tag{7}$$

其中

$$\mathsf{C}_{\vec{r}} := \int_{[M_{Q_4}(\vec{r},0)]^{\mathrm{vir}}} 1, \quad \mathsf{C}^K_{\vec{r}} := \chi(M_{Q_4}(\vec{r},0), \widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}),$$

是归一化因子。[3] 上同调规范折纸分区函数的系数是关于 $\mathbb{T}$等变参数 s_1,s_2,s_3,s_4 的有理函数（模去 $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 0$) 和 $(v_{A,\alpha})$，其中 A 遍历 **6** 的所有元素，而 α遍历 $\{1,\ldots, r_A\}$的所有元素。K理论规范折纸 −

[1]由于我们主要采用等变和 K 理论方法，因此遵循 Oh–Thomas 的处理方式，而非 Borisov–Joyce [BJ] 或 Cao–Leung [CL]的处理方式。[2]由于我们使用 Chow群，因此负次数中存在非平凡类。[3] 上同调归一化因子与 [Nek4 的公式（111）、（119）中的微扰前因子“交叉部分”仅相差一个符号。

11 1 1分区函数是关于 t_1^2,t_2^2,t_3^2,t_4^2 的有理函数（模去$t_1t_2t_3t_4=1$）1以及$(w_{A,\alpha}^2)$，其中 $s_i=c_1^{\mathbb{T}}(t_i)$ 和 $v_{A,\alpha}=c_1^{\mathbb{T}}(w_{A,\alpha})$。事实上，上同调规范折纸分区函数 $\mathsf{Z}_{\vec{r}}(q)$ 可以通过取极限从其 K理论类比 $\mathsf{Z}_{\vec{r}}^K(q)$得到，见引理 2.22。考虑一点的 $\mathbb{T}$等变 K 群

$$K_0^{\mathbb{T}}(\mathrm{pt})\cong\mathbb{Z}[t_1^{\pm1},\dots,t_4^{\pm1},(w_{A,\alpha}^{\pm1})]/(t_1t_2t_3t_4-1).$$

它包含元素

$$t_A:=t_at_b,\quad P_a:=1-t_a,\quad P_A:=(1-t_a)(1-t_b),\quad P_{1234}:=\prod_{a=1}^4(1-t_a),$$

对于任意 $A=\{a<b\}\subseteq\mathbf{6}$。对于任意虚特征 $\chi\in K_0^{\mathbb{T}}(\mathrm{pt})$，我们将其对偶记为 χ^*，它由替换 $t_a\mapsto 1/t_a$, $w_{A,\alpha}\mapsto 1/w_{A,\alpha}$ 得到。此外，假设χ 没有带负系数的 $\mathbb{T}$-不动部分，我们考虑其欧拉类 $e(\chi)$ 以及对称化K理论欧拉类

$$[\chi]:=\widehat{\Lambda}_{-1}\chi^*:=\frac{\Lambda_{-1}\chi^*}{\det(\chi^*)^{\frac{1}{2}}},\tag{8}$$

其中 $\Lambda_{-1}(-)=\sum_i(-1)^i\Lambda^i(-)$。不动点轨迹 $M_{Q_4}(\vec{r},n)^{\mathbb{T}}$ 由总大小为 n 的整数分拆（有限二维分拆）集合标记，即

$$\underline{\boldsymbol{\lambda}}=(\lambda_{A,\alpha}),\quad |\underline{\boldsymbol{\lambda}}|:=\sum_{A,\alpha}|\lambda_{A,\alpha}|=n,$$

其中 $|-|$ 表示大小。我们将整数分拆 λ 视为 $\mathbb{Z}_{\geqslant0}^2$ 的有限子集，并要求其满足如下性质：若 $(i,j)\in\lambda$, $0\leqslant i'\leqslant i$, 且 $0\leqslant j'\leqslant j$，则 $(i',j')\in\lambda$。对于这个不动点，我们关联以下由 Nekrasov [Nek4, (90)][4] 引入的 $K_0^{\mathbb{T}}(\mathrm{pt})$ 元素

$$\begin{aligned}\mathsf{v}_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}&:=\sum_A(P_{\phi(A)}T_A+P_{\overline{A}}N_A\sum_{B\neq A}K_B^*)-P_{1234}\sum_{A<B}K_AK_B^*,\\ T_A&:=N_AK_A^*+t_AN_A^*K_A-P_AK_AK_A^*,\\ K_{A,\alpha}&:=\sum_{(i,j)\in\lambda_{A,\alpha}}t_a^it_b^jw_{A,\alpha},\quad K_A:=\sum_\alpha K_{A,\alpha},\qquad N_A:=\sum_\alpha w_{A,\alpha},\end{aligned}\tag{9}$$

其中 $A<B$ 由字典序定义（例如 $\{1,\ 2\}$ 是最小元素）。注意，T_A 恰好是经典瞬子模空间切丛的特征乘以因子 t_A。这意味着$\mathsf{v}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 没有$\mathbb{T}$-不动项。[5]

[4]请注意原文所引文献中有一处小笔误：$\overline{\ }\phi(A)$ 应为 $\phi(A)$。[5]只有 T_A 的对角贡献可能含有 $\mathbb{T}$-不动项。这些贡献是 $\mathbb{C}^2$的点的 Hilbert 概形的不动点处切空间的副本，至多相差一个因子 t_A。众所周知，这些切空间不含形如 $\mathbb{C}\cdot(t_1t_2)^m$的特征子空间，由此即可得出该结论。例如，参见 [CK，引理 3.6]，其中对 $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^4)$给出了类似结果。

我们的第一个主要结果是，借助Oh–Thomas虚拟闭链整体定义的不变量(7)，确实产生了Nekrasov的“玻尔兹曼权重” [Nek4，式(89)、(90)]，并且符号选择正确。

Th定理 1.1. 固定 $\vec{r}=(r_A)$. 对于任意 n，令 o 为由 (20) 给出的定向。该 n

$$\mathsf{Z}_{\vec{r}}(q)=\sum_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}} q^{|\underline{\boldsymbol{\lambda}}|} e(-\mathsf{v}_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}), \quad \mathsf{Z}^K_{\vec{r}}(q)=\sum_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}} q^{|\underline{\boldsymbol{\lambda}}|}[-\mathsf{v}_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}].$$

该公式的证明使用 Oh–Thomas虚拟环面局部化公式[OT]。主要困难在于确定由我们对定向（20）的（全局）选择在不动点上诱导的定向（符号）。在第二位作者与 Rennemo 的工作 [KR], 中，$\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^4)$ 希尔伯特概形也被实现为光滑环境空间上二次向量丛各向同性截面的零点集。虽然 Q_4 比与 $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^4)$相关的标架4-圈箭图更复杂，但我们能够将 Q_4 的定向计算归约为标架4-圈箭图的定向计算。令人惊讶的是，将我们的结果改写为涅克拉索夫特征 $\mathsf{v}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 后，我们发现所有符号都是 $+1$。

定理 1.1 立即推出如下维数约化公式。对于 $r_{12}=r$ 和其他情形 $r_A=0$，折纸分区函数化为与二维 ADHM 箭图 Q_2 相关的 $\widehat{\chi}_{-t_3}(M_{Q_2}(r,n))$ 的生成级数，其中$\widehat{\chi}_{-y}(-)$ 表示对称化的 Hirzebruchχ_{-y}-亏格（例 2.24）。此外，对于任意 $\vec{r}$ 且满足 $r_{14}=r_{24}=r_{34}=0$，折纸分区函数化为与三维ADHM箭图Q_3 相关的 $\chi(M_{Q_3}(\vec{r},n),\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}})$ 的生成级数（例 2.25）。这里，$M_{Q_3}(\vec{r},n)$ 具有 Behrend–Fantechi 完美障碍理论，该理论由如下表述诱导：$M_{Q_3}(\vec{r},n)$ 是光滑环境簇上某个正则函数的临界轨迹；而 $\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}$ 表示其（经 Nekrasov–Okounkov 扭曲的）Behrend–Fantechi虚拟结构层。$M_{Q_3}(\vec{r},n)$ 可描述为临界轨迹这一事实，归功于 Rapˇc´ak–Soibelman–Yang–Zhao [RSYZ],，他们构造了 $\mathbb{C}^3$ 的上同调霍尔代数在这些模空间的临界上同调上的作用。因此我们看到，折纸分区函数将全纯辛模空间以及 (-1)-移位辛模空间的不变量作为特例包含在内。我们还用多重对称指数（定义于式 (30)）刻画了一个“真正四维”的配分函数。[6]

定理 1.2. 对于 $r_{12}=r_{34}=1$ 和 $r_A=0$，其他情况下，我们有

$$\mathsf{Z}^K_{\vec{r}}(q)=\mathrm{Exp}\left(\frac{[t_1t_3][t_2t_3]}{[t_1][t_2]}\frac{q}{1-q}\right)\mathrm{Exp}\left(\frac{[t_1t_3][t_1t_4]}{[t_3][t_4]}\frac{q}{1-q}\right).$$

该定理的证明分为几个步骤。首先，对于任意 $M_{Q_4}(\vec{r},\ n)$，我们证明 Oh–Thomas 虚拟结构层 $\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}$ 虽然先验上只是一个局部化的K理论类，但它可以提升为一个实际的相干层，因此具有整

[6]Nekrasov 将满足 $M_{Q_4}(\vec{r},\ n)$ 且 $r_{12},\ r_{34}\neq 0$，其他情况下的元素称为交叉瞬子。

K理论类（差别至多涉及一些等变参数，命题 2.23）。其次，对于$r_{12} = r_{34} = 1$ 和其他情况下，我们利用 $M_{Q_4}(\vec{r},\ n)$ 同构于 $\mathbb{C}^4$ 上的某个 Quot 概形这一事实（命题 2.10），从而可以将其推前到 $\mathsf{Sym}^n(\mathbb{C}^4)$。由此可证明，折纸分区函数与等变框架参数无关。第三，对等变框架参数取某些极限，便可得到所需的分解。关于自旋结构背景下 Oh–Thomas 虚拟结构层提升的近期研究，可参阅 Kuhn [Kuh] 的工作。

我们引入折纸分区函数的一个余稳定类似物（第 2.7.4 节），并猜想稳定/余稳定墙穿越公式是平凡的。这意味着折纸分区函数具有一种非平凡对称性，即

$$\mathsf{Z}^K_{\vec{r}}(q)\Big|_{(w_{A,\alpha})\mapsto(t_A w_{A,\alpha}^{-1})} = \mathsf{Z}^K_{\vec{r}}(q),$$

对此我们给出一些计算证据。这推广了在情形 $r_{12} = r$ 下于 [AKL] 中证明的一个定理，而在 $r_A = 0$ 时则不然。

紧随 Nekrasov [Nek2, Nek3]，，定理 1.1 的另一应用是所谓的非微扰 Dyson–Schwinger 方程。设 $r_{12}, r_{34} > 0$，而在 $r_A = 0$ 时则不然。Nekrasov 紧致性定理 [Nek3，第 8] 节断言，对于由某些 $\mathbb{T}$-特征标的核给出的某些子环面 $\mathbb{T}' \leqslant \mathbb{T}$，不动点轨迹$M_{Q_4}(\vec{r}, n)^{\mathbb{T}'}$ 是真的。这意味着（未归一化的、上同调的）折纸分区函数 $\mathsf{C}_{\vec{r}}\cdot\mathsf{Z}_{\vec{r}}(q)$ 在对应于这些 $\mathbb{T}$-特征标的等变参数中没有极点。这些极点的消失蕴含与原始二维 ADHM 箭图 Q_2 相关联的“经典”Nekrasov 配分函数的非平凡方程。我们在第 2.8 节讨论 Nekrasov 的一个例子。我们强调，这一应用依赖于折纸分区函数具有一个整体 定义，正如本文所给出的那样。

最后，我们讨论折纸模空间的连通性。在存在关系的情况下，箭图表示模空间的连通性是一个微妙的问题。在定理 2.12 中，我们证明模空间 $M_{Q_4}(\vec{r}, n)$ 总是连通的，从而推广了通常的二维 ADHM 模空间的连通性。

1.2. 带框架层的描述。 设 X 为光滑射影四维簇。设D 为 X上的丰有效除子，不一定光滑，且满足 $2D \in |-K_X|$。设 F为 D上的一个（完美）一维层，称为框架层，并且是 μ_D-半稳定的。我们考虑带框架层 $(E,\ \phi)$ 它由 X上的纯二维层 E以及一个同构 $\phi\colon\ E|_D \to F$组成。对于固定的拓扑类型 $v = (0,\ 0,\ \gamma,\ *,\ *) \in H^{\mathrm{even}}(X,\ \mathbb{Q})$，令 $M_{\mathrm{fr}(X,\ D,\ F)}(v)$为参数化 X 上满足 $\mathsf{ch}(E) = v$的带框架层 $(E,\ \phi)$ 族的模函子。下述内容（本质上）是第3.2节中的定理 3.20。

定理1.3。 模函子 $M_{\mathrm{fr}(X,\ D,\ F)}^{(v)}$ 由一个拟射影概形 $\mathcal{M}:=M_{\mathrm{fr}(X,\ D,\ F)}^{(v)}$表示。此外， $\mathcal{M}$ 带有一个三项对称障碍理论

$$\phi_{\mathrm{fr}}\colon E_{\mathrm{fr}}^{\bullet}\to\tau^{\geqslant -1}\mathbb{L}_{\mathcal{M}},\quad (E_{\mathrm{fr}}^{\bullet})^{\vee}[2]\overset{\theta_{\mathrm{fr}}}{\cong}E_{\mathrm{fr}}^{\bullet},\quad \mathrm{vd}:=\frac{1}{2}\,\mathrm{rk}(E_{\mathrm{fr}}^{\bullet})=-\frac{1}{2}\gamma^{2},$$

使得对于每个点 $P=[(E,\phi)]\in\mathcal{M}$，我们有

$$(E_{\mathrm{fr}}^{\bullet})^{\vee}|_{P}\cong R\,\mathrm{Hom}_{X}(E,E(-D))[1].$$

*Fur*此外， $\mathcal{M}$具有一个导出增强，并带有一个 (-2)-移位辛结构 *e.*

该模空间可实现为 Huybrechts– Lehn 的 δ-稳定带框架层模空间的一个开子集（其挠性版本） [HL]。这一方法受到 Bruzzo–Markushevich 关于曲面上框架无挠层的类似结果的启发[BM]。为证明存在 Pantev–To¨en–Vaqui´e–Vezzosi 意义下的 (-2)-移位辛结构 [PTVV], ，我们依赖 Spaide 的工作 [Spa]。我们预计，通过调整 [CGJ, Boj, JU]中的构造，模空间 $M_{\mathrm{fr}(X,\ D,\ F)}^{(v)}$ 可以配备定向。在枚举几何中，框架层模空间也曾出现在局部曲面的背景下，见 [Opr] ，以及近期 [KLT]关于K理论 DT/PT顶点对应的证明中。

模空间 $M_{\mathrm{fr}(X,\ D,\ F)}^{(v)}$是非紧的，因此要定义不变量，我们需要代数环面 $\mathbb{T}$ 的作用，且其不动点轨迹紧致。我们的主要例子是

$$X=\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1,\quad D=\{(z_1,z_2,z_3,z_4)\,|\,z_1z_2z_3z_4=\infty\}.$$

对于每个 $A\in\mathbf{6}$，考虑曲面

$$S_A:=\{(z_1,z_2,z_3,z_4)\in X\,|\,z_{\bar{a}}=z_{\bar{b}}=0\},\quad \overline{A}=\{\bar{a}<\bar{b}\}$$

并将其与 D 的交记为 $\ell_A:=S_A\cap D$。于是 $S_A\simeq\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 和 ℓ_A 构成一条由两个 $\mathbb{P}^1$ 组成的链。我们在 D 上选择的框架层为

$$F_{\vec{r}}:=\bigoplus_{A}\mathcal{O}_{\ell_A}^{\oplus r_A}$$

其中 $r_A\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$。根据四维 ADHM 箭图的维数向量$(\vec{r},\ n)$ 选择陈特征，我们设

$$v_{\vec{r},n}:=\sum_{A}r_A\cdot\mathrm{ch}(\mathcal{O}_{S_A})-n[\mathrm{pt}],$$

并设 $M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r},\ n):=M_{\mathrm{fr}(X,\ D,\ F)}^{(v_{\vec{r},\ n})}$。我们注意到，由三项对称障碍理论得到的$M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r},\ n)$ 的虚维数为 $-\sum_{A\in\mathbf{3}}r_Ar_{\overline{A}}$，这与相应折纸模空间的虚维数一致。

式 (6) 中定义的环面 $\mathbb{T}\cong(\mathbb{C}^*)^3\times(\mathbb{C}^*)^r$ 自然作用于 $M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r},n)$，其中第一个因子的作用由其在 $(\mathbb{P}^1)^4$ 上的标准作用诱导，第二个因子则作用于框架。因此，定理1.3中的 $\phi_{\mathrm{fr}},\theta_{\mathrm{fr}}$ 是 $\mathbb{T}$-等变的。

有若干迹象表明，模空间 $M_{Q_4}(\vec{r},\ n)$ 和 $M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r},\ n)$密切相关。二者都依赖于相同的离散参数 $(\vec{r},\ n)$ ，并且都具有

$\mathbb{T}$-等变导出增强，带有一个 (-2)-移位辛形式，且虚维数相同。我们提出以下猜想，可将其视为 Barth 的结果的四维类比。

猜想 1.4. 对于任意 $(\vec{r}、\ n)$，存在一个 $\mathbb{T}$-等变同构

$$M_{Q_4}(\vec{r},n) \cong M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r},n)$$

将两侧的 $\mathbb{T}$-等变三项对称障碍理论相互交织。

我们支持这一猜想的主要依据是，两个模空间的 $(\mathbb{C}^*)^r$-不动轨迹同构，并且 $\mathbb{T}$-不动点处的虚切空间表示一致（第 3.3 节中的推论 3.28 和命题 3.29）。[7]

定理 1.5. 存在一个 $\mathbb{T}$-等变同构

$$M_{Q_4}(\vec{r},n)^{(\mathbb{C}^*)^r} \cong M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r},n)^{(\mathbb{C}^*)^r}.$$

在此同构下，对于任意 $P \in M_{Q_4}(\vec{r}、\ n)^{\mathbb{T}} \cong M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r}、\ n)^{\mathbb{T}}$，有

$$(E^\bullet_{Q_4})^\vee|_P = (E^\bullet_{\mathrm{fr}})^\vee|_P \in K_0^{\mathbb{T}}(\mathrm{pt}).$$

这一结果意味着，由箭图模型和带框层模型定义的虚拟不变量相同，前提是我们采用来自箭图模型的符号选择。我们在第 3.4 节为猜想 1.4 提供了进一步的证据。具体而言，我们建立了一个 $\mathbb{T}$-等变同构，将 $(J_A = 0)$ locus in$M_{Q_4}(\vec{r},\ n)$ 与 $M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r},\ n)$ 中的相应locus对应起来——这些locus包含定理 1.5 的 $(\mathbb{C}^*)^r$-固定loci。

致谢。 若没有 N. Nekrasov 对规范折纸理论的精彩发现与探索，本文便无从问世。我们感谢 Y. Bae、Y. Cao、H. Ir- itani、D. Joyce、T. Kimura、T. Kinjo、H. Liu、S. Monavari、A. Okounkov、H. Park、B. Szendr˝oi 和 R. P. Thomas 提供的有益讨论。第二位作者特别感谢 J. Rennemo； [KR] 中的符号分析为本文提供了关键依据。第三位作者特别感谢 D. Butson、L. Hennecart 和 G. Noshita，感谢他们分别就 Quot 概形轨迹、折纸模空间的连通性以及稳定/余稳定墙穿越展开讨论。NA 获得英国工程与自然科学研究委员会通过项目 EP/R013349/1 提供的资助，以及日本文部科学省的世界顶级国际研究中心计划（WPI）资助。MK 获得荷兰科学研究组织项目 VI.Vidi.192.012 和欧洲研究委员会协同资助 FourSurf 101087365 的支持。WL 获得延世大学 2024-22-0502 研究基金、浦项TJ朴基金会的浦项科学奖学金，以及韩国政府（MSIT）资助的韩国国家研究基金会项目（RS-2025-00514643）的支持。

[7]为进一步支持这一猜想，Rennemo 告知我们，他可以构造一个态射 $M_{Q_4}(\vec{r},\ n) \to M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r},\ n)$；当 $r_A = 0$ 时，对于所有 $A \neq \{1,\ 2\}$，该态射与 Barth 的同构一致。

2. Quiver description

2.1. 箭图表示模空间。 本节介绍本文研究的箭图表示模空间。特别地，我们将引言中的稳定性 (5) 实现为 King 稳定性条件。

考虑图2中无关系的（带框）箭图 Q_4。沿用引言中的记号，我们固定维数向量 $(\vec{r},\ n)$ 取自（4），并令 $V:=\mathbb{C}^n$ 和$W_A:=\mathbb{C}^{r_A}$。我们考虑子集

$$\mathcal{U}\subset\mathcal{R}:=\bigoplus_a \mathrm{End}(V)\oplus\bigoplus_A\Big(\mathrm{Hom}(W_A,V)\oplus\mathrm{Hom}(V,W_A)\Big)$$

由满足

$$P:=(B_a,I_A,J_A)$$

稳定性条件（5）的表示组成。

由于在 Q_4 上存在一个 King 稳定性条件，其稳定对象的轨迹为 $\mathcal{U}$（根据下文命题 2.1 的证明），因此 $\mathcal{U}$ 是开集。我们考虑 $G:=\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ 在 $\mathcal{R}$ 上的作用，其定义为

$$g\cdot P=(gB_ag^{-1},gI_A,J_Ag^{-1}),\tag{10}$$

for $g\in G$。该作用限制在 $\mathcal{U}$ 上，并且在此处是自由的。我们考虑商空间 stac k

$$A_{\widehat{Q}_4}(\vec{r},n):=[\mathcal{U}/G].$$

根据以下命题，该商空间是一个光滑拟射影簇。回顾 $r:=\sum_A r_A$。

命题 2.1。 簇 $A_{\widehat{Q}_4}(\vec{r}\,n)$ 是光滑的，其维数为 $3n^2+2rn$。

证明。 我们使用 Crawley-Boevey 技巧：构造一个辅助箭图 Q_4'，使其表示空间同构，并将 Q_4 的稳定带框表示实现为 Θ-稳定表示 Q_4'，其中 King 稳定性取适当的选择。我们使用 [Rei] 的记号。

令Q_4'是一个具有两个顶点的箭图，顶点记为 0 和 8，边包括位于 0 的 4 个环、从 8 指向 0 的 r 个箭头以及从 0 指向 8 的 r 个箭头。于是，Q_4 的维数向量为 $(\vec{r},\ n)$ 的表示与 Q_4' 的维数向量为 $(d_\infty,\ d_0)=(1,\ n)$ 的表示通过以下方式对应起来：

$$(B_a,I_A,J_A)\mapsto(B_a,i_{A,\alpha},j_{A,\beta}),$$

其中，$i_{A,\ \alpha}$ 表示 I_A 的列向量，而 $j_{A,\ \beta}$ 表示 J_A 的行向量。考虑群

$$G':=(\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\times\mathbb{C}^*)/\mathbb{C}^*,$$

其中商是对两个因子中的对角矩阵取商。该群通过共轭作用于 Q_4'的表示。此外，在同构下，

$$G'\cong\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\times\{1\}\cong G$$

上述表示的对应关系交织了群作用。

我们选取 $\Theta = (\Theta_\infty = n,\ \Theta_0 = -1)$。将所诱导的 G'-线性化记为 χ_Θ[Rei]。于是容易看出，不存在严格 Θ-半稳定的$\widehat{\ }$ Q_4' 表示，其维数向量为 $(1,\ n)$。此外，Θ-稳定的 Q_4' 表示，其$\widehat{\ }$维数向量为 $(1,\ n)$，恰好对应于 Q_4的稳定表示。该结果由 [Rei，第3节5]得出。□

在前一命题的证明中，$A_{\widehat{Q}_4}(\vec{r},\ n)$ 被实现为稳定表示的模空间$\widehat{\ }$，这些稳定表示属于某个辅助箭图 Q_4'，并相对于 King 稳定性条件的某一选取。由此观点，我们考虑$\widehat{\ }$半单表示的模空间，这些表示属于 Q_4'，其维数向量为 $(1,\ n)$；（略滥用记号）我们将其记为 $A^{\mathrm{ssimp}}_{\widehat{Q}_4}(\vec{r},\ n)$。于是 $A^{\mathrm{ssimp}}_{\widehat{Q}_4}(\vec{r},\ n)$ 是一个仿射簇，并且存在一个射影态射 [Rei，命题3.5]

$$A_{\widehat{Q}_4}(\vec{r},n) \to A^{\mathrm{ssimp}}_{\widehat{Q}_4}(\vec{r},n),$$

称为半单化映射。

我们通过 $A_{\widehat{Q}_4}(\vec{r},n)$ 上的向量丛的一个截面施加关系 (3)。考虑$\widetilde{\ }$纤维为 $E \to \mathcal{U}$ 的平凡向量丛

$$\bigoplus_A \mathrm{End}(V) \oplus \bigoplus_A \mathrm{Hom}(W_A, W_{\overline{A}}) \oplus \bigoplus_{A,\overline{a}} (\mathrm{Hom}(W_A,V) \oplus \mathrm{Hom}(V,W_A)).$$

方程 (3) 定义了一个截面 $\widetilde{s} \in H^0(\mathcal{U}, \widetilde{E})$，在某个 $P{:=}\,(B_a, I_A, J_A)$ 处取值为

$$\widetilde{s}_P := (\mu_A, \nu_A, \mu_{A,\overline{a}}, \nu_{A,\overline{a}}). \tag{11}$$

此外，G在此向量丛上作用如下

$$g \cdot (P, (P_A, Q_A, R_{A,\overline{a}}, S_{A,\overline{a}})) = (g \cdot P, (gP_Ag^{-1}, Q_A, gR_{A,\overline{a}}, S_{A,\overline{a}}g^{-1}))$$

$\widetilde{\ }$且 $\widetilde{s}$ 是一个 G-等变截面。因此，$E, \widetilde{s}$ 下降为 $A_{\widehat{Q}_4}(\vec{r},n)$ 上的一个向量丛及截面 E, s。我们定义闭子概形

$$M_{Q_4}(\vec{r},n) := Z(s) \subset A_{\widehat{Q}_4}(\vec{r},n).$$

$M_{Q_4}(\vec{r},n)$ 的闭点对应于稳定表示的同构类，这些表示属于四维 ADHM 箭图 Q_4，并满足关系 (3)。遵循 Nekrasov 的说法，我们将 $M_{Q_4}(\vec{r},n)$ 称为折纸模空间。

和之前一样，存在一个 Q_4'的半单表示模空间，记作 $M^{\mathrm{ssimp}}_{Q_4}(\vec{r},\ n)$，以及一个射影态射

$$M_{Q_4}(\vec{r},n) \to M^{\mathrm{ssimp}}_{Q_4}(\vec{r},n),$$

同样称为半单化映射。

下面两个例子表明，Q_4 及其表示构成了传统二维 ADHM 箭图及其较新的三维类比的推广。

例2.2。考虑 Q_4 ，并固定 $r_{12} = r$ 和 $r_A = 0$ 。令 $P = (B_a、 I_A、 J_A)$ 为 Q_4 的一个维数向量为 $(\vec{r}、 n)$的稳定表示。我们断言 $B_3 = B_4 = 0$。根据稳定性条件 (5)， V 中的每个向量都具有$v = f(B_1、 B_2、 B_3、 B_4)I_{12}(w)$ 的形式，其中 f是某个多项式（关于非交换变量），且 $w \in W_{12}$。四维ADHM方程 (3) 表明， B_3 与所有 B_a's 以及 $B_3 I_{12} = 0$交换，因此 $B_3(v) = 0$。类似地，我们有 $B_4 = 0$。因此， $(B_1、 B_2、 I_{12}、 J_{12})$是二维 ADHM 箭图 Q_2 （图1）的一个维数向量为$(r、 n)$的表示。显然，这给出了一个同构 $M_{Q_4}(\vec{r}、 n) \cong M_{Q_2}(r、 n)$。

例 2.3. 我们如下定义三维ADHM箭图 Q_3 。从图2中去掉由 B_4 标记的环以及由 I_{a4}、J_{a4}标记的箭头。我们施加关系

$$[B_a, B_b] + I_A J_A = 0, \quad B_{\bar{a}} I_A = 0, \quad J_A B_{\bar{a}} = 0, \tag{12}$$

对所有 $A = \{a < b\} \in \underline{\mathbf{3}} := \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ 以及 $a \in \{1, 2, 3\} \backslash A$。这些关系可通过取带框势的循环导数得到

$$W^{\mathrm{fr}} := B_3([B_1, B_2] + I_{12} J_{12}) + B_2([B_1, B_3] + I_{13} J_{13}) + B_1([B_2, B_3] + I_{23} J_{23})$$

在 [RSYZ]中引入。稳定性条件与之前相同，即

$$\sum_{A \in \underline{\mathbf{3}}} \mathbb{C}\langle B_1, B_2, B_3 \rangle \cdot I_A(W_A) = V.$$

与四维情形一样，存在光滑簇$A_{\widehat{Q}_3}(\vec{r}, n)$，用以参数化相应箭图 Q_3 在无关系时的稳定 $(\vec{r}, n)$-$\widehat{}$维表示。随后，关系（12）截出 $M_{Q_3}(\vec{r}, n) \subset A_{\widehat{Q}_3}(\vec{r}, n)$。

现在考虑 Q_4 满足 $r_{a4} = 0$ 对所有 a成立的情形。根据例2.2的论证，任何稳定表示 $P = (B_a, I_A, J_A)$ ，若属于 Q_4 且维数向量为 $(\vec{r}, n)$ ，则都满足 $B_4 = 0$ 。因此存在一个同构 $M_{Q_4}(\vec{r}, n) \cong M_{Q_3}(\vec{r}, n)$。

2.2. **环面作用与不动轨迹**。 本节定义折纸模空间上的环面作用，并分析其环面不动点。我们定义代数环面 $\mathbb{T}' := (\mathbb{C}^*)^4 \times (\mathbb{C}^*)^r$，它以 $\mathbb{T} \leqslant \mathbb{T}'$ （在（6）中定义）为子环面。

回顾上一节中折纸模空间的定义。则$\mathbb{T}$ 通过以下方式作用于 $\mathcal{R}$ 中的点 $P = (B_a, I_A, J_A)$：[8]

$$\tau \cdot P = (t_a^{-1} B_a, I_A w_A^{-1}, t_A^{-1} w_A J_A), \tag{13}$$

对于 $\tau = (t_a, w_A) \in \mathbb{T}$，其中 w_A 视为一个对角矩阵，其对角项为$w_{A,1}, \ldots, w_{A,r_A}$。由于 $\mathbb{T}$-作用保持开子集 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{R}$，且 G与 $\mathbb{T}$的作用彼此交换，因此在 $A_{\widehat{Q}_4}(\vec{r}$ 上诱导出一个 $\mathbb{T}$-作用$, n)$。

$\widetilde{}$ $\mathbb{T}$ 的作用通过 E 提升到

$$\begin{aligned} &\tau \cdot (P, (P_A, Q_A, R_{A,\bar{a}}, S_{A,\bar{a}})) = \\ &(\tau \cdot P, (t_A^{-1} P_A, t_{\overline{A}}^{-1} w_{\overline{A}} Q_A w_A^{-1}, t_{\bar{a}}^{-1} R_{A,\bar{a}} w_A^{-1}, t_A^{-1} t_{\bar{a}}^{-1} w_A S_{A,\bar{a}})). \end{aligned} \tag{14}$$

[8]我们通过 $B_a \mapsto t_a^{-1} B_a$ 作用于 $points$，从而通过 $b_a \mapsto t_a b_a$作用于相应的坐标函数。

G与 $\mathbb{T}$ 的作用彼此交换，因此我们得到 $\mathbb{T}$ 在 E上的作用。由于 s 是 $\mathbb{T}$-等变的，因此在 $M_{Q_4}(\vec{r},\ n)$上诱导出一个 $\mathbb{T}$-作用。总之，我们有如下图表

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & & \downarrow \circlearrowright s \\ M_{Q_4}(\vec{r},n) := Z(s) & \hookrightarrow & A_{\widehat{Q}_4}(\vec{r},n), \end{array}$$

其中 $\mathbb{T}$ 作用于 E，且 s是 $\mathbb{T}$-等变的。

我们首先分析框架环面作用下的不动点轨迹。下面的命题类似于 Bifet 关于 Quot 概形 [Bif] 的一个结果。

命题 2.4。 存在一个 $\mathbb{T}$-等变的概形同构

$$M_{Q_4}(\vec{r},n)^{(\mathbb{C}^*)^r} \cong \bigsqcup_{\sum_{A,\alpha} n_{A,\alpha}=n} \prod_{A,\alpha} M_{Q_2}(1,n_{A,\alpha}),$$

其中，不交并取遍所有分解 $\sum_{A,\ \alpha} n_{A,\ \alpha} = n$，且 $M_{Q_2}(1,n_{A,\ \alpha})$表示维数向量为 $(1,\ n_{A,\ \alpha})$的二维 *ADHM* 箭图表示的模空间。此外，不动点轨迹中的任意表示 $(B_a, I_A,\ J_A)$ 均满足$J_A = 0$，对所有 A成立。

证明。 我们首先在闭点层面构造一个双射。从右向左的映射可通过写出

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{A,\alpha} \mathbb{C}^{n_{A,\alpha}}$$

并取直和。对于从左向右的映射，我们从一个由 $(\mathbb{C}^*)^r$ 固定的表示 (B_a, I_A, J_A) 开始。然后，对每个 $w = (w_{A,\alpha}) \in (\mathbb{C}^*)^r$，存在唯一的 $g_w \in G = \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$，使得

$$g_w B_a g_w^{-1} = B_a, \quad g_w I_A w_A^{-1} = I_A, \quad w_A J_A g_w^{-1} = J_A,$$

其中 w_A 表示对角矩阵，其元素为 $w_{A,\alpha}$。这一对应给出一个表示

$$(\mathbb{C}^*)^r \to \mathrm{GL}(V), \quad w \mapsto g_w,$$

其中 $V := \mathbb{C}^n$。记 $\chi_{A,\alpha}\colon (\mathbb{C}^*)^r \to \mathbb{C}^*$ 为由 $\chi_{A,\alpha}(w) = w_{A,\alpha}$ 定义的特征。于是我们得到一个分解

$$V = \bigoplus_{A,\alpha} V_{A,\alpha} \otimes \chi_{A,\alpha}$$

并定义 $n_{A,\alpha} := \dim V_{A,\alpha}$。记 $W_A = \mathbb{C}^{r_A}$ 的标准基为 $e_{A,\alpha}$。显然，$B_a V_{A,\alpha} \subset V_{A,\alpha}$ 且 $I_A e_{A,\alpha} \in V_{A,\alpha}$。我们断言以下结论成立。

- $J_A V_{A,\ \alpha} \subset \mathbb{C} e_{A,\ \alpha}$ 以及 $J_A V_{B,\ \beta} = 0$ 对于所有 $A \neq B$ 和任意 $\beta = 1,\ \ldots\ldots, r_B$；
- $B_a V_{A,\ \alpha} = 0$ 对于所有 $A \in Q_0$、$\alpha = 1,\ \ldots\ldots,\ r_A$、$a \in A$。

这两个性质都由四维ADHM方程（3）和稳定性（5）推出。由此得到的对应是一个定义良好的双射。对于最后一条陈述，$(B_1,\ B_2,\ I,\ J)$ 中任意表示 $M_{Q_2}(1,\ n)$ 都满足 $J=0$ [Nak，命题2.8]。

该论证对于有限型基 $\mathbb{C}$-概形 S 也成立：$w\in(\mathbb{C}^*)^r$替换为 $w\in\mathrm{Hom}(S,\ (\mathbb{C}^*)^r)$ 和 $(B_a,\ I_A,\ J_A)$ 替换为 S上的稳定表示族。具体而言，我们考虑 $B_a\in\mathrm{Hom}(\mathcal{V},\ \mathcal{V})$、$I_A\in\mathrm{Hom}(W_A\otimes\mathcal{O}_S,\ \mathcal{V})$和 $J_A\in\mathrm{Hom}(\mathcal{V},\ W_A\otimes\mathcal{O}_S)$，其中 $\mathcal{V}$是 S上的秩为 n的局部自由层，满足 S 上的方程 (3)，并且在所有点 $s\in S$上的纤维上都稳定。因此，根据 [Fog，定理 2.3]，该双射是概形同构。□

利用命题 (2.4)，我们可以描述 $\mathbb{T}$-不动点轨迹。

Co推论 2.5。$\mathbb{T}$-不动点轨迹 $M_{Q_4}(\vec{r},n)^{\mathbb{T}}$ 由以下约化点标记

$$\underline{\boldsymbol{\lambda}}=(\lambda_{A,\alpha})_{A\in\underline{\mathbf{6}},\,1\leqslant\alpha\leqslant r_A},\quad |\underline{\boldsymbol{\lambda}}|=\sum_{A,\alpha}|\lambda_{A,\alpha}|=n,$$

其中每个$\lambda_{A,\ \alpha}$ 都是一个整数分拆。

证明。在命题 2.4 的同构下，$\mathbb{T}$ 在因子$M_{Q_2}(1,\ n_{A,\ \alpha})$ 上的作用限制为 $(\mathbb{C}^*)^2\times(\mathbb{C}^*)^r$的作用，其中 $(\mathbb{C}^*)^2$ 通过标准作用（坐标为 $(t_a)_{a\in A}$）作用，而 $(\mathbb{C}^*)^r$ 平凡作用。不动点轨迹为$M_{Q_2}(1,\ n_{A,\ \alpha})^{(\mathbb{C}^*)^2}$ 是零维且既约的，[Nak], 因此我们推得$M_{Q_4}(\vec{r},\ n)^{\mathbb{T}}$也是零维且既约的。注意，$M_{Q_2}(1,\ n)\cong\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$是 n 点在 $\mathbb{C}^2$ [Nak]上的 Hilbert概形。推论由 $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$的不动点轨迹的标准描述得到。□

我们为整数分拆引入一些记号。整数分拆 λ 是一个序列

$$\lambda=(\lambda_i\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0})_{i\geqslant 1}$$

满足 $\lambda_i\geqslant\lambda_{i+1}$ 对所有 i 均成立，且总和有限大小 $|\lambda|:=\sum_i\lambda_i$。我们可以通过定义将 λ 视为 $\mathbb{Z}^2_{\geqslant 0}$ 的子集

$$(i,j)\in\lambda\Leftrightarrow j+1\leqslant\lambda_{i+1}.$$

我们用 $\ell(\lambda)$表示分拆的长度；它是满足 $\lambda_\ell\neq 0$的最大 ℓ。对于任意方格 $(i,\ j)\in\lambda$，我们将 $(i,\ j)$ 处的钩长定义为

$$h_\lambda(i,j):=|\{(i,j')\in\lambda\,|\,j'\geqslant j\}\cup\{(i',j)\in\lambda\,|\,i'\geqslant i\}|,$$

并且当 $(i,\ j)\notin\lambda$时，令 $h_\lambda(i,\ j)=0$。对于序列 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_{A,\ \alpha})$，将每个 $\lambda_{A,\ \alpha}$ 视为 $\mathbb{Z}^4_{\geqslant 0}$ 的子集会很方便，具体如下。对于 $A=\{a<b\}$，我们如上所述将 $\lambda_{A,\ \alpha}\subset\mathbb{Z}^2_{\geqslant 0}$ 视为子集，并根据 $A=\{a<b\}\subset\mathbf{4}$通过显然的包含映射嵌入 $\mathbb{Z}^2_{\geqslant 0}\subset\mathbb{Z}^4_{\geqslant 0}$（例如，对于 $A=\{2,\ 4\}$，我们映射 $(x,\ y)\mapsto(0,\ x,\ \mathbf{0},\ y)$）。

现在引入 $M_{Q_4}(\vec{r},\ n)$ 上的秩为 n 的典范向量丛 $\mathcal{V}$。考虑纤维为 V 的平凡向量丛 $\mathcal{V}\to\mathcal{U}:=\mathbb{C}^n$。群 G 作用于 $\mathcal{V}$，其作用为

$$g\cdot(P,v)=(g\cdot P,gv),$$

~ 对所有 $g \in G$ 均成立。此外， $\mathbb{T}$ 在 $\mathcal{V}$ 上的平凡作用与 G-作用可交换。因此，在商 $A_{\widehat{Q}_4}(\vec{r}, n)$ 上，我们得到一个秩为 $n\,\mathbb{T}$ 的等变向量丛 $\mathcal{V}$，并将其限制到 $M_{Q_4}(\vec{r},\ n)$ 后仍记为同一符号。

将 $M(1, n_{A,\alpha})$ 上通常的典范丛记为 $\mathcal{V}_{A,\alpha}$。用 Hilbert概形表示时，$\mathcal{V}_{A,\alpha}$ 是一个向量丛 $\mathcal{O}^{[n]}$，其在 $Z \in \mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ 上的纤维为 $H^0(Z, \mathcal{O}_Z)$。在命题 2.4 的同构下，我们有

$$\mathcal{V}|_{\prod_{A,\alpha} M_{Q_2}(1,n_{A,\alpha})} \cong \boxplus_{A,\alpha} \mathcal{V}_{A,\alpha}.$$

因此，对于任意对应于整数分拆 $\boldsymbol{\lambda}$ 的不动点 $P \in M_{Q_4}(\vec{r}, n)^{\mathbb{T}}$，纤维 $\mathcal{V}|_P \cong V$ 的 $\mathbb{T}$-特征由下式给出

$$\sum_A K_A,\ K_A := \sum_\alpha K_{A,\alpha},\ K_{A,\alpha} := \sum_{(i,j)\in\lambda_{A,\alpha}} t_a^i t_b^j w_{A,\alpha} \text{ for all } A = \{a < b\} \in \underline{\mathbf{6}}. \tag{15}$$

2.3. **例子与 $J_A = 0$ 轨迹**。本节给出折纸模空间 $M_{Q_4}(\vec{r}, n)$ 的一些例子，并讨论其与 Quot 概形的关系。

在以下例子中，我们明确描述取两种秩向量时的模空间 $M_{Q_4}(\vec{r}, 1)$ 。当设定 $n = 1$ 时，这些描述之所以成为可能，是因为可以得到若干简化：稳定性 (5) 等价于至少有一个非零的 I_A；交换子 $[B_a, B_b]$ 对任意 $A = \{a, b\} \in \mathbf{6}$ 都自动消失，并且群 $\mathrm{GL}(1,\mathbb{C})$ 以权 0、1、 -1 分别作用于 B_a、 I_A、 J_A 。

例 2.6. 令 $n = 1$ ，并令 $\vec{r}$ 为秩向量，使得 $r_{12} = r_{34} = 1$ （否则 $r_A = 0$ ）。根据下文的命题 2.31，广义 ADHM 方程的所有稳定解都满足 $J_A = 0$。除去 $\mathbb{C}^*$ 作用后，解有三种类型（所有未特别说明的变量均为零）：

(i) $I_{12} = 1,\ \ B_1,\ \ B_2 \in \mathbb{C}$;
(ii) $I_{34} = 1,\ \ B_3,\ \ B_4 \in \mathbb{C}$;
(iii) $[I_{12} :\ I_{34}] \in \mathbb{P}^1$。

这些解并非互不相交。满足 $[I_{12} :\ I_{34}] = [1 :\ 0]$ 的 (iii) 型解（分别地，满足 $[I_{12} :\ I_{34}] = [0 :\ 1]$ 的解），等同于满足 $B_a = 0$ 的 (i) 型解（分别地，(ii) 型解），其中所有 $a \in \mathbf{4}$ 均成立。因此，$M_{Q_4}(\vec{r},\ 1)$ 有三个不可约分支 $\mathbb{C}^2$、 $\mathbb{C}^2$ 和 $\mathbb{P}^1$ ，它们如图3所示粘合在一起。此外，根据局部方程可以验证，该模空间是既约的。这个例子也在 [Nek3，第 6 节2] 中针对更一般的 $r_{12},\ r_{34} > 0$ （否则 $r_A = 0$ ）进行了讨论。

例 2.7. 令 $n = 1$ ，并令 $\vec{r}$ 为秩向量，使得 $r_{12} = r_{23} = 1$，否则 $r_A = 0$ 。如例 2.3 所述，广义 ADHM 方程的所有稳定解均满足 $B_4 = 0$。在 $\mathbb{C}^*$- 作用下，解分为五种类型（所有未特别指定的变量均为零）：

(i) $I_{12} = 1, B_1,\ \ B_2 \in \mathbb{C}$,
(ii) $I_{23} = 1, B_2,\ \ B_3 \in \mathbb{C}$,
(iii) $[I_{12} : I_{23}] \in \mathbb{P}^1, B_2 \in \mathbb{C}$,

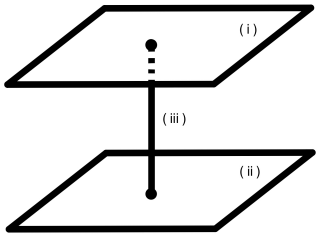

FIGURE 3. 例 2.6的模空间。

(iv) $I_{12}=1$, $J_{23}\in\mathbb{C}$, $B_2\in\mathbb{C}$,

(v) $I_{23}=1$, $J_{12}\in\mathbb{C}$, $B_2\in\mathbb{C}$.

因此，该模空间有五个分支 $\mathbb{C}^2$，$\mathbb{C}^2$，$\mathbb{C}\times\mathbb{P}^1$，$\mathbb{C}^2$，$\mathbb{C}^2$，如图4所示粘合在一起。同样，可以验证该模空间是既约的。分

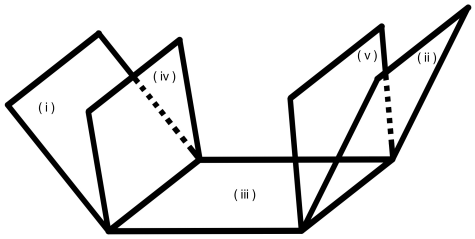

FIGURE 4. 例 2.7的模空间。

~支（iv）和（v）的内部有 $J_A\neq 0$，因此它们不属于 $M_{Q_4}(\vec{r},\ 1)$，如下文定义 2.9所述。

注2.8. 与例 2.6 不同，我们在例 2.7 中描述的模空间不同于 [Nek3, Sect. 6.4] 中的模空间。在该文献中仅有类型 (i)、(ii)、(iii) 的解。这一差异源于 [Nek3, Sect. 3.3] 中引入的对模空间的修改。[9] 这一修改就 Calabi–Yau 三维簇的 Donaldson–Thomas理论而言造成了显著差异。虽然我们在例 2.7 中描述的模空间整体上是一个临界轨迹（如第 2.5 节所解释），但 [Nek3, Sect. 6.4] 不能在不可约分支的交点附近写成临界轨迹。这是因为 Nekrasov 的模空间是三个分支 (i)、(ii)、(iii) 的并，具有既约的局部完全交奇点。由 [BF2, Cor. 1.21], ，临界轨迹不具有此类奇点。

[9]沿用 [Nek3第3节3], 的记号，本文所考虑的模空间记为 $\mathfrak{M}_n^0(\vec{r})$。 [Nek3第6节4] 中描述的模空间，是通过施加额外方程得到的较小模空间 $\mathfrak{M}_n^\infty(\vec{r})$。若秩向量满足$r_{12},\ r_{34}\geqslant 0$，则这两个模空间重合，否则为 $r_A=0$。

我们以与奇异曲面$\bigcup_{A\in\mathbf{6}}\mathbb{C}^2_A\subset\mathbb{C}^4$上 Quot 概形的一个关系来结束本节，其中$\mathbb{C}^2_A=Z(x_a,\ x_b)$，并且$A=\{a,\ b\}$。我们参考 [FM] 对$\bigcup_{a\in\mathbf{4}}\mathbb{C}^3_a\subset\mathbb{C}^4$上一个类似 Quot 概形的分析，以及 [Mon] 对$\bigcup_{a\in\{1,\ 2\}}\mathbb{C}^1_a\subset\mathbb{C}^2$（采用显然的记号）的分析。

定义 2.9. 我们将 $M_{Q_4}(\vec{r},n)$ 记为模空间$M_{Q_4}(\vec{r},n)$的闭子概形，它参数化满足对所有 $A\in\mathbf{6}$ 均有 $J_A=0$ 的 (B_a,I_A,J_A)。

由命题 2.4，我们有

$$M_{Q_4}(\vec{r},n)^{(\mathbb{C}^*)^r}\subset\widetilde{M}_{Q_4}(\vec{r},n).$$

命题 2.10. 存在一个同构

$$\widetilde{M}_{Q_4}(\vec{r},n)\simeq\mathrm{Quot}_{\mathbb{C}^4}\Big(\bigoplus_A\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2_A}^{\oplus r_A},n\Big),$$

其中右侧是参数化层 $\bigoplus_A\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2_A}^{\oplus r_A}$ 的长度为 n 的商的 *Quot* 概形。

证明. 由于所有 J_A 均设为零，$M_{Q_4}(\vec{r},n)$ 参数化满足方程的线性映射 (B_a,I_A)

$$[B_a,B_b]=0,\quad B_{\bar{a}}I_A=0,$$

对于所有的 $A=\{a\le b\}\in\mathbf{6}$ 和 $a\in A$，以及稳定性条件

$$\sum_A\mathbb{C}\langle B_1,B_2,B_3,B_4\rangle\cdot I_A(W_A)=V,$$

在 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 作用下取等价类。利用这些关系，我们将稳定性条件改写为

$$\sum_{A=\{a<b\}\in\underline{\mathbf{6}}}\mathbb{C}[B_a,B_b]\,I_A(W_A)=V.$$

由于多项式环 $\mathbb{C}[B_1,B_2,B_3,B_4]$ 作用于 n 维向量空间V，我们可以将 V 视为仿射四维空间 $\mathbb{C}^4$ 上的一个长度为n的零维层。此外，稳定性条件意味着线性映射 I_A: $W_A\to V$诱导出一个满射态射

$$\bigoplus_A\Big(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2_A}\otimes W_A\Big)\twoheadrightarrow V$$

在 $\mathbb{C}^4$ 上的凝聚层。在线性群 $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$ 作用下等价的两组线性映射，在 Quot 概形中定义同一个点。这个过程可逆，从而得到 $\mathbb{C}$-点与 $M_{Q_4}(\vec{r},\ n)$ 和 Quot 概形之间的双射。

□

2.4. 连通性。 一般而言，带关系的箭图的表示模空间在复解析拓扑下的连通性是一个难题。中岛箭图簇的连通性已在 [CB] 中得到证明。本节将证明模空间 $M_{Q_4}(\vec{r}, n)$ 的连通性。

下面的引理给出了一个充分判据：当概形配备了环面作用和等变真态射时，可据此判断其连通性。

引理 2.11. 设 X, Y 为有限型 $\mathbb{C}$-概形，且带有代数环面 T的作用。设 $\pi\colon X \to Y$ 为一个 T-等变真态射。假设$Y^T = \{y_0\}$，且对每个 $y \in Y$，都存在一个1参数子群 $\lambda\colon \mathbb{C}^* \to T$，使得 $\lim_{t\to 0} \lambda(t)\cdot y = y_0$。若 X^T 包含于 X的某个单一连通分支中，则 X是连通的。

证明。 若 x 和 x' 属于 X的同一个连通分支，我们记作 $x \sim x'$。取任意一点 $x \in X$，并令 $y = \pi(x)$。根据假设，存在一个一参数子群 $\lambda\colon \mathbb{C}^* \to T$，使得 $\lim_{t\to 0} \lambda(t)\cdot y = y_0$。换言之，存在一个态射

$$f\colon \mathbb{C} \to Y, \quad t \mapsto \begin{cases} \lambda(t)\cdot y & \text{if } t \neq 0, \\ y_0 & \text{if } t = 0. \end{cases}$$

该态射适合放入一个交换图中

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & X \\ & & \downarrow \pi \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

其中顶部箭头将 $t \in \mathbb{C}^*$ 映射到 $\lambda(t)\cdot x \in X$。由于 π 是真概形，态射 f 唯一提升为态射 $\tilde{f}\colon \mathbb{C} \to X$。令 $x_0 := f(0) \in X$。于是 $x \sim x_0$，因为它们由 $\tilde{f}$连接。注意，$X_{y_0} := \pi^{-1}(y_0)$是一个包含X^T和 x_0的真 T-概形。选择一个一般一参数子群 $\mu\colon \mathbb{C}^* \to T$，使得 $X^T = X^\mu$。由于X_{y_0} 是真概形，存在极限 $\lim_{t\to 0} \mu(t)\cdot x_0 =: x_1 \in X_{y_0}$。由于极限点必然是 μ-不动点，我们有 $x_1 \in X^\mu = X^T$。因此 $x \sim x_0 \sim x_1 \in X^T$。由于 X^T 位于同一个连通分支中，这表明 X 是连通的。□

定理 2.12. 对于任意 $(\vec{r}, n)$，模空间 $M_{Q_4}(\vec{r}, n)$ 是连通的。

证明. 将引理 2.11 应用于以下情形：

i) $X = M_{Q_4}(\vec{r}, n)$, $Y = M_{Q_4}^{\mathrm{ssimp}}(\vec{r}, n)$，赋予其自然的 $\mathbb{T}$-作用；ii) 半单化映射 $\pi\colon M_{Q_4}(\vec{r}, n) \to M_{Q_4}^{\mathrm{ssimp}}(\vec{r}, n)$，它是真且 $\mathbb{T}$-等变的；iii) $M_{Q_4}^{\mathrm{ssimp}}(\vec{r}, n)^{\mathbb{T}} = \{y_0\}$，对于所有 $a \in \mathbf{4}, A \in \mathbf{6}$，对应于 $B_a = I_A = J_A = 0$。

我们验证引理的假设。首先，考虑 $\lambda\colon \mathbb{C}^* \to T$ 定义为

$$\lambda(t) := (t_a = t^{-1}, w_A = t^{-1}\cdot \mathrm{id}).$$

由于 $\lambda(t)\cdot(B_a,\ I_A,\ J_A)=(tB_a,\ tI_A,\ tJ_A)$，这个一参数子群将空间$M_{Q_4}^{\mathrm{ssimp}}(\vec{r},\ n)$收缩到 y_0，当 t趋于 0 时。

还需证明 $M_{Q_4}(\vec{r},\ n)^{\mathbb{T}}$ 属于同一个连通分支。这是证明中最为微妙的部分。我们证明稍强的陈述，即$M_{Q_4}(\vec{r},\ n)^{(\mathbb{C}^*)^r}$ 属于同一个连通分支。粗略地说，这是因为例 2.6 和 2.7 中的分支 (i) 与 (ii) 通过分支 (iii) 相连。由命题 2.4 可知，$(\mathbb{C}^*)^r$-不动点轨迹 $M_{Q_4}(\vec{r},\ n)$ 是

$$\bigsqcup_{\sum_{A,\alpha} n_{A,\alpha}=n} \prod_{A,\alpha} \mathrm{Hilb}^{n_{A,\alpha}}(\mathbb{C}_A^2). \tag{16}$$

注意，不交并中以$(n_{A,\ \alpha})$为指标的每个集合都是连通的。

对于每个 $B\in$ 6 和 $\beta=1,\ \ldots,\ r_B$，记$(\delta_{B,\beta})$ 为如下序列：当 $A=B$ 和 $\alpha=\beta$时取值为 1，否则取值为 0。于是，在 (16) 中为连通分支编号的任意两个数值类型$(n_{A,\alpha})$ 都可以通过一系列简单修改相互联系起来，即将$(m_{A,\alpha})+(\delta_{B,\beta})$ 改为$(m_{A,\ \alpha})+(\delta_{B',\beta'})$，其中$\sum_{A,\alpha} m_{A,\alpha}=n-1$。因此，只需构造一个连通族的表示，使其同时与 (16) 中分别对应于$(m_{A,\alpha})+(\delta_{B,\beta})$ 和$(m_{A,\alpha})+(\delta_{B',\beta'})$ 且具有 $(B,\beta)\neq(B',\beta')$的两个连通分支相交。固定

$$(Z_{A,\alpha})\in\prod_{A,\alpha}\mathrm{Hilb}^{m_{A,\alpha}}(\mathbb{C}_A^2)$$

使得对于所有 $A,\ \alpha$，$Z_{A,\ \alpha}$ 的支撑与原点 $o\in\mathbb{C}_A^2$ 不相交。我们将对应于 $Z_{A,\ \alpha}$ 的 ADHM 数据记为

$$B_a^{(A,\alpha)}\in\mathrm{End}(V_{A,\alpha}),\quad I_{A,\alpha}\in\mathrm{Hom}(\mathbb{C}_{A,\alpha},V_{A,\alpha}),\quad J_{A,\alpha}=0\in\mathrm{Hom}(V_{A,\alpha},\mathbb{C}_{A,\alpha}),$$

其中 $V_{A,\ \alpha}$ 是维数为 $m_{A,\ \alpha}$的向量空间，$\mathbb{C}_{A,\ \alpha}$ 是一个 1 维向量空间，而 $J_{A,\ \alpha}=0$ 由命题 2.4 给出。我们定义一个具有秩向量 $(\vec{r},\ n)$的 $\mathbb{P}^1_{[s:t]}$族表示。具体而言，对每个 $[s\colon t]\in\mathbb{P}^1$，定义 $(B_a,\ I_A,\ J_A)$如下：

a) 中心顶点为 $V=\left(\bigoplus_{A,\ \alpha} V_{A,\ \alpha}\right)\oplus\mathbb{C}$,

b) 自同态 B_a 通过 $B^{(A,\ \alpha)}$作用于 $V_{A,\ \alpha}$，并在 $\mathbb{C}$ 上作用为 0,

c) 记 $\iota_{A,\ \alpha}\colon V_{A,\ \alpha}\hookrightarrow\bigoplus_{A',\ \alpha'} V_{A',\ \alpha'}$ 为包含，则线性映射 I_A由下式确定

$$I_A|_{\mathbb{C}_{A,\alpha}}(1)=\begin{cases}(\iota_{A,\alpha}(I_{A,\alpha}(1)),0) & \text{if}\quad (A,\alpha)\neq(B,\beta),(B',\beta')\\ (\iota_{A,\alpha}(I_{A,\alpha}(1)),s) & \text{if}\quad (A,\alpha)=(B,\beta)\\ (\iota_{A,\alpha}(I_{A,\alpha}(1)),t) & \text{if}\quad (A,\alpha)=(B',\beta'),\end{cases}$$

d) 对所有 A 均成立。

这一选择满足广义 ADHM 方程 (3)。稳定性源于 $Z_{A,\alpha}$ 的支撑远离 $o\in\mathbb{C}_A^2$ 和 $(s,\ t)\neq(0,0)$ 这一事实。通过应用 [KR 引理 3.7] 的二维类比，可以看出这一性质。

并结合 [KR 引理 3.6]。将情形特化为 $[s:t]=[1:0]$，这一构造得到一个具有数值数据 $(m_{A,\alpha})+(\delta_{B,\beta})$ 的 $(\mathbb{C}^*)^r$-不动点。更确切地说，它对应于 $(Z'_{A,\alpha})$，使得 $Z'_{B,\beta}=Z_{B,\beta}\sqcup o$，并且 $Z'_{A,\alpha}=Z_{A,\alpha}$，若 $(A,\alpha)\neq(B,\beta)$。情形 $[s:t]=[0:1]$ 类似。换言之：上述表示束将一个支撑于 o 的点从副本 (B,β) 移至副本 (B',β')。证明至此完成。□

回想定义 2.9，$M_{Q_4}(\vec{r},\ n)\hookrightarrow M_{Q_4}(\vec{r},\ n)$ 表示满足额外方程 $J_A=0$（对所有 $A\in\mathbf{6}$）的闭轨迹。上一条定理证明中的论证同样适用于该轨迹。

命题 2.13. 对任意 $(\vec{r}、\ n)$，模空间 $M_{Q_4}(\vec{r}、\ n)$ 是连通的。

证明。注意，$\widetilde{M}_{Q_4}(\vec{r},\ n)^{(\mathbb{C}^*)^r}=M_{Q_4}(\vec{r},\ n)^{(\mathbb{C}^*)^r}$。由于定理 2.12 的证明中显式构造的 $\mathbb{P}^1_{[s:t]}$族表示都属于 $J_A=0$ 轨迹，同一证明也适用于 $\widetilde{M}_{Q_4}(\vec{r},\ n)\to\widetilde{M}^{\mathrm{ssimp}}_{Q_4}(\vec{r},\ n)$。

□

2.5. **虚拟结构**。本节为 $M_{Q_4}(\vec{r},\ n)$ 赋予一个对称的三项障碍理论。我们还将讨论寻找 $\vec{r}$ 的一些取值，使得折纸模空间是光滑或拟光滑的。在此过程中，我们会讨论本研究设定中的相关障碍理论、虚循环和虚结构层。

2.5.1. 光滑情形。考虑模空间 $\mathcal{M}:=M_{Q_4}(\vec{r},\ n)$。当 $r_{12}=r$且 $r_A=0$时，$M_{Q_4}(\vec{r},\ n)\cong M_{Q_2}(r,\ n)$（例2.2）是一个维数为 $2rn$ [Nak]的光滑簇。此外，它是全纯辛的，也就是说 [Nak]

$$T_{\mathcal{M}}\overset{\theta}{\cong}\Omega_{\mathcal{M}}\otimes(t_1t_2)^{-1},\quad \theta^{\vee}=\theta\otimes(t_1t_2). \tag{17}$$

对于一般的 $\vec{r}$，空间 $\mathcal{M}$ 不再光滑，例如例2.6和例2.7所示。

2.5.2. 拟光滑情形。假设对所有 a，$r_{a4}=0$ 成立。我们说明如何在折纸模空间上构造拟光滑结构。由例 2.3可知，$M_{Q_4}(\vec{r},\ n)\cong M_{Q_3}(\vec{r},\ n)$。与 [RSYZ], 中一样，考虑正则函数

$$f\colon\mathcal{A}:=A_{\widehat{Q}_3}(\vec{r},n)\to\mathbb{C},\quad (B_1,B_2,B_3,(I_A,J_A)_{A\in\underline{\mathbf{3}}})\mapsto\sum_{A=\{a<b\}\in\underline{\mathbf{3}}}\mathrm{tr}(B_{\overline{a}}\mu_A).$$

回顾一下，$\underline{\mathbf{3}}=\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$, a 是 $\{1,2,3\}\backslash A$ 的唯一元素，而 μ_A的定义见式（3）。根据 [RSYZ, 引理 3.1.1],，有 $M_{Q_3}(\vec{r},n)=Z(df)$。因此存在一个虚维数为零的 Behrend–Fantechi 二项障碍理论 [BF1]

$$\begin{array}{ccc} T_{\mathcal{A}}|_{\mathcal{M}}\otimes(t_1t_2t_3) & \longrightarrow & \Omega_{\mathcal{A}}|_{\mathcal{M}} \\ \big\downarrow{\scriptstyle (df)^*} & & \big\| \\ I/I^2|_{\mathcal{M}} & \xrightarrow{\ d\ } & \Omega_{\mathcal{A}}|_{\mathcal{M}} \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{c} E^{\bullet}_{\widehat{Q}_3} \\ \big\downarrow \\ \tau^{\geqslant -1}\mathbb{L}_{\mathcal{M}}, \end{array}$$

其中 $I := I_{\mathcal{M}/\mathcal{A}} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ 表示 $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ 的理想层，底部映射是 K¨ahler 微分，顶部映射 $d \circ (df)^*$ 是 f 的黑塞矩阵。注意，

$$(E_{Q_3}^\bullet)^\vee[1] \overset{\theta}{\cong} E_{Q_3}^\bullet \otimes (t_1t_2t_3)^{-1}, \quad \theta^\vee[1] = \theta \otimes (t_1t_2t_3).$$

模空间 $\mathcal{A}$，$\mathcal{M}$ 通常是非紧的，但它们具有一个作用

$$\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^3 \times (\mathbb{C}^*)^r$$

如式 (13) 中所定义。由于 f 按权重为 $t_1t_2t_3$ 的 $\mathbb{T}$ 缩放，上述二项障碍理论是 $\mathbb{T}$-等变的。$\mathbb{T}$-不动点轨迹 $\mathcal{M}^{\mathbb{T}}$ 是零维且既约的（命题 2.4）。因此存在虚循环和虚拟结构层 [BF1]

$$[\mathcal{M}]^{\mathrm{vir}} \in A_0^{\mathbb{T}}(\mathcal{M}), \quad \mathcal{O}_{\mathcal{M}}^{\mathrm{vir}} \in K_0^{\mathbb{T}}(\mathcal{M}).$$

与 Nekrasov–Okounkov [NO]，一样，使用扭曲的虚拟结构层更为自然

$$\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}}^{\mathrm{vir}} := \mathcal{O}_{\mathcal{M}}^{\mathrm{vir}} \otimes (\det E_{Q_3}^\bullet)^{\frac{1}{2}} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{M}}^{\mathrm{vir}} \otimes K_{\mathcal{A}}|_{\mathcal{M}} \otimes (t_1t_2t_3)^{-\frac{\dim(\mathcal{A})}{2}}, \tag{18}$$

它属于 $K_0^{\widetilde{\mathbb{T}}}(\mathcal{M})$，其中 $\widetilde{\mathbb{T}} \to \mathbb{T}$ 是 $\mathbb{T}$ 的二重覆盖。根据等变Chow群的 Atiyah–Bott局部化公式 [EG] 以及等变K理论的 Thomason局部化公式 [Tho]，我们有

$$\iota_*\colon A_*^{\mathbb{T}}(\mathcal{M}^{\mathbb{T}}) \otimes_{\mathbb{Z}[\sigma]} \mathbb{Q}(\sigma) \xrightarrow{\cong} A_*^{\mathbb{T}}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathbb{Z}[\sigma]} \mathbb{Q}(\sigma)$$
$$\iota_*\colon K_0^{\mathbb{T}}(\mathcal{M}^{\mathbb{T}}) \otimes_{\mathbb{Z}[\tau,\tau^{-1}]} \mathbb{Q}(\tau) \xrightarrow{\cong} K_0^{\mathbb{T}}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathbb{Z}[\tau,\tau^{-1}]} \mathbb{Q}(\tau),$$

其中 $\mathbb{Z}[\sigma] \cong A_*^{\mathbb{T}}(\mathrm{pt})$、$\mathbb{Z}[\tau,\ \tau^{-1}] = K_0^{\mathbb{T}}(\mathrm{pt})$、$\tau = (t_1,\ t_2,\ t_3,\ w_{A,\ \alpha})$ 表示 $\mathbb{T}$ 的所有本原特征标的集合，而 $\sigma = (s_1,\ s_2,\ s_3,\ v_{A,\ \alpha})$ 是相应的等变参数，即，

$$s_a = c_1^{\mathbb{T}}(t_a), \quad v_{A,\alpha} = c_1^{\mathbb{T}}(w_{A,\alpha}).$$

为了处理扭虚拟结构层，我们必须将上面的同构与 $- \otimes_{\mathbb{Z}[\tau,\ \tau^{-1}]} \mathbb{Q}(\tau^{\frac{1}{2}})$ 张量积。因此，可以将 $\int_{[\mathcal{M}]^{\mathrm{vir}}} 1$ 定义为 $(\iota_*)^{-1}[\mathcal{M}]^{\mathrm{vir}}$ 到一点的等变前推。同样，精化不变量 $\chi(\mathcal{M},\ \widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}}^{\mathrm{vir}})$ 定义为 $(\iota_*)^{-1}\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}}^{\mathrm{vir}}$ 到一点的 K 理论等变前推。具体而言，这些表达式由 Graber–Pandharipande局部化公式 [GP]，及其由 Qu [Qu] 给出的 K理论类比确定。

$$\int_{[\mathcal{M}]^{\mathrm{vir}}} 1 = \int_{[\mathcal{M}^{\mathbb{T}}]^{\mathrm{vir}}} \frac{1}{e(N^{\mathrm{vir}})} \in \mathbb{Q}(\sigma),$$

$$\chi(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}}^{\mathrm{vir}}) = \chi\Big(\mathcal{M}^{\mathbb{T}}, \frac{\mathcal{O}_{\mathcal{M}^{\mathbb{T}}}^{\mathrm{vir}} \otimes \det(E_{Q_3}^\bullet)^{\frac{1}{2}}|_{\mathcal{M}^{\mathbb{T}}}}{\Lambda_{-1}(N^{\mathrm{vir}})^\vee}\Big) \in \mathbb{Q}(\tau^{\frac{1}{2}}),$$

其中 $[\mathcal{M}^{\mathbb{T}}]^{\mathrm{vir}}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}^{\mathbb{T}}}^{\mathrm{vir}}$ 是由 $\mathcal{M}^{\mathbb{T}}$ 诱导的虚循环和虚拟结构层，N^{vir} 是虚法丛，$e(-)$ 是 $\mathbb{T}$- 等变欧拉类，而 $\Lambda_{-1}(-)^\vee$

是 K 理论的 $\mathbb{T}$-等变欧拉类。考虑 Calabi–Yau环面

$$\mathbb{T}_0 := Z(t_1t_2t_3 - 1) \leqslant \mathbb{T}.$$

那么， $E^\bullet_{Q_3}$ 是一个 $\mathbb{T}_0$-等变的对称二项障碍理论，其含义见[Beh]。在这种情况下，上述不变量彼此相同，且为整数，将在下文的命题 2.27 中计算。

2.5.3. 一般情形。现在我们讨论一般的折纸模空间 $\mathcal{M} := M_{Q_4}(\vec{r},\ n)$。回顾一下，$\mathcal{M} \subset \mathcal{A} := A_{\widehat{Q}_4}(\vec{r},\ n)$ 由向量丛$E \to \mathcal{A}$ 的截面 s 切出，如第 2.1 节所述。不过，这里还有更多结构。为了讨论这些结构，我们将 $\mathbb{C}^4$ 和 $\Lambda^2\mathbb{C}^4$ 的标准基按如下方式编号

$$\mathbb{C}^4 :\quad (e_a)_{a\in\underline{\mathbf{4}}},\quad \Lambda^2\mathbb{C}^4 :\quad (e_A := e_a \wedge e_b)_{A=\{a<b\}\in\underline{\mathbf{6}}}.$$

在 E上定义一个二次型 q如下：对任意点 P，令 $q\colon E|_P \to \mathbb{C}$为

$$\begin{aligned} q(P_A, Q_A, R_{A,\bar{a}}, S_{A,\bar{a}}) = &\sum_{A\in\underline{\mathbf{3}}} (\operatorname{tr}(P_A P_{\overline{A}}) - \operatorname{tr}(Q_A Q_{\overline{A}}))\cdot e_A \wedge e_{\overline{A}} \\ &+ \sum_{A\in\underline{\mathbf{6}}} \operatorname{tr}(R_{A,\bar{a}} S_{A,\bar{b}} - R_{A,\bar{b}} S_{A,\bar{a}})\cdot e_A \wedge e_{\overline{A}}, \end{aligned} \tag{19}$$

其中，在第二个求和中，我们写作$\overline{A} = \{\bar{a} < \bar{b}\}$。此外，我们使用$e_A \wedge e_A$，通过选取由 $e_1 \wedge \cdots \wedge e_4 \mapsto 1$确定的同构 $\mathbb{C}\cdot(e_1 \wedge \cdots \wedge e_4) \cong \mathbb{C}$来记录符号。二次型 q非退化。此结果成立是因为，对于任意两个有限维复向量空间 U，V，二次型 $\operatorname{Hom}(U,\ V) \times \operatorname{Hom}(V,\ U) \mapsto \mathbb{C}$, $(A,\ B) \mapsto \operatorname{tr}(BA)$ 非退化，而且非退化二次型的直和仍然非退化。

命题 2.14. 由四维*ADHM*方程(3) 定义的截面 $s \in H^0(\mathcal{A}, E)$ 关于(19)中的二次型 q 是各向同性的。

证明。 回想一下，对于任意两个矩阵 X和 Y，其大小分别为 $m\times n$ 和$n \times m$，均有 $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX)$。特别地，迹在四个矩阵的循环置换下是不变的。根据二次型的定义，我们有

$$\begin{aligned} q(s) = &\sum_{A=\{a<b\}\in\underline{\mathbf{3}}} \operatorname{tr}\left(([B_a, B_b] + I_A J_A)([B_{\bar{a}}, B_{\bar{b}}] + I_{\overline{A}} J_{\overline{A}})\right) e_A \wedge e_{\overline{A}} \\ &- \sum_{A=\{a<b\}\in\underline{\mathbf{3}}} \operatorname{tr}\left(J_{\overline{A}} I_A J_A I_{\overline{A}}\right) e_A \wedge e_{\overline{A}} \\ &+ \sum_{A\in\underline{\mathbf{6}}} \operatorname{tr}\left(B_{\bar{a}} I_A J_A B_{\bar{b}} - B_{\bar{b}} I_A J_A B_{\bar{a}}\right) e_A \wedge e_{\overline{A}}. \end{aligned}$$

利用迹的对称性和四循环不变性，这个和式可简化为

$$\sum_{A=\{a<b\}\in\underline{\mathbf{3}}} \operatorname{tr}\left([B_a, B_b][B_{\bar{a}}, B_{\bar{b}}] + I_A J_A [B_{\bar{a}}, B_{\bar{b}}] + I_{\overline{A}} J_{\overline{A}} [B_a, B_b]\right) e_A \wedge e_{\overline{A}}$$

$$- \sum_{A \in \underline{\mathbf{6}}} \operatorname{tr}\left(I_A J_A [B_{\overline{a}}, B_{\overline{b}}]\right) e_A \wedge e_{\overline{A}}.$$

由于 $\{\overline{A},\ A\}_{A \in \underline{\mathbf{3}}} = \mathbf{6}$ 和 $e_A \wedge e_{\overline{A}} = e_{\overline{A}} \wedge e_A$，除了以下可能的项外，其余各项均为零

$$\sum_{A=\{a<b\} \in \underline{\mathbf{3}}} \operatorname{tr}\left([B_a, B_b][B_{\overline{a}}, B_{\overline{b}}]\right) e_A \wedge e_{\overline{A}}.$$

KR 引理 3 中证明了这个表达式为零，但为方便读者，我们在此重述其证明。展开各个交换子并利用迹的循环性，可得上述表达式等于

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{tr}\left(B_{\sigma(1)} B_{\sigma(2)} B_{\sigma(3)} B_{\sigma(4)}\right)$$

其中 sgn 表示 σ 的符号。该和为零。 □

由于 $\mathcal{M}$ 是由光滑环境空间上的二次向量丛的各向同性截面切出的，因此我们有一个对称三项阻碍理论

$$\begin{array}{ccccc} T_{\mathcal{A}}|_{\mathcal{M}} & \xrightarrow{ds} & E|_{\mathcal{M}} \overset{q}{\cong} E^*|_{\mathcal{M}} & \xrightarrow{(ds)^*} & \Omega_{\mathcal{A}}|_{\mathcal{M}} \\ & & \downarrow{\scriptstyle s} & & \| \\ & & I/I^2|_{\mathcal{M}} & \xrightarrow{d} & \Omega_{\mathcal{A}}|_{\mathcal{M}} \end{array} \qquad \begin{array}{c} E^{\bullet}_{Q_4} \\ \downarrow \\ \tau^{\geqslant -1}\mathbb{L}_{\mathcal{M}}, \end{array}$$

其中 $s^*\colon E^* \to \mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ 表示对偶截面，ds 是该截面的微分，$(ds)^*$ 是其对偶。根据各向同性，顶行构成一个复形（命题 2.14）。该阻碍理论相对于式 (13) 中定义的 $\mathbb{T}$ 作用是 $\mathbb{T}$-等变的，并且是 $\mathbb{T}$-等变对称的

$$(E^{\bullet}_{Q_4})^{\vee}[2] \overset{\theta}{\cong} E^{\bullet}_{Q_4}, \quad \theta^{\vee}[2] = \theta.$$

由于该阻碍理论是三项的，因此不存在相应的 Behrend–Fantechi 虚循环。不过，我们有一个 Oh–Thomas 虚循环 [OT]。其构造需要选择一个定向。在我们的设置中，定向由映射 $o\colon \mathcal{O}_{\mathcal{A}} \to \det E$ 确定，使得复合

$$\mathcal{O}_{\mathcal{A}} \overset{o \otimes o}{\to} \det(E) \otimes \det(E) \overset{\mathrm{id} \otimes \Lambda^{\mathrm{rk}} q}{\to} \det(E) \otimes \det(E^*) \to \mathcal{O}_{\mathcal{A}}$$

等于 $(-1)^{\mathrm{rk}(\mathrm{rk}-1)/2}\,\mathrm{id}_{\mathcal{O}_A}$，其中 $\mathrm{rk} := \mathrm{rk}(E)$ 为偶数。

通过指定一个（$\mathbb{T}$-不变量）极大迷向子丛来确定一个定向

$$0 \to \Lambda \to E \to \Lambda^* \to 0.$$

事实上，我们将选择 Λ，使得该短正合列是分裂的。任意这样的 Λ都会产生一个典范同构

$$p_{\Lambda}\colon \det E \cong \det \Lambda \otimes \det \Lambda^* \cong \mathcal{O}_{\mathcal{A}},$$

并且，根据 [OT，定义 2.2], ，由 Λ 诱导的定向为

$$o_\Lambda = (-\sqrt{-1})^{\mathrm{rk}/2} p_\Lambda^{-1}.$$

以下结论可直接由 E 和 q的定义得到。

引理 2.15。令 $\Lambda \subset E$ 为具有纤维的 $\mathbb{T}$-不变量子丛

$$\bigoplus_{A\in\underline{\mathbf{3}}} \Big(\mathrm{End}(V)\cdot t_A^{-1} \oplus \mathrm{Hom}(W_A, W_{\overline{A}})\cdot t_{\overline{A}}^{-1}\Big) \oplus \bigoplus_{A\in\underline{\mathbf{6}},\overline{a}\in\overline{A}} \mathrm{Hom}(V, W_A)\cdot t_{\overline{a}}^{-1} t_A^{-1}$$

遍历所有 $P \in \mathcal{A}$。则 Λ 是极大迷向的，因而诱导出一个定向 o_Λ。

在本文余下部分，我们固定以下定向[10]，取在 $M_{Q_4}(\vec{r},\ n)$:

$$o := (-1)^{(r-1)n}\cdot o_\Lambda. \tag{20}$$

于是我们得到一个 Oh–Thomas 虚拟循环和虚拟结构层

$$[\mathcal{M}]^{\mathrm{vir}} \in A^{\mathbb{T}}_{\mathrm{vd}}(\mathcal{M}, \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]),\quad \widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}_{\mathcal{M}} \in K_0^{\mathbb{T}}(\mathcal{M})_{\mathrm{loc}},$$

其中

$$\mathrm{vd} := \dim\mathcal{A} - \frac{1}{2}\mathrm{rk}(E) = -\sum_{A\in\underline{\mathbf{3}}} r_A r_{\overline{A}}.$$

此处 $A^{\mathbb{T}}_*(\mathcal{M},\ \mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$表示以 $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$为系数的 $\mathbb{T}$-等变周群，并且

$$K_0^{\mathbb{T}}(\mathcal{M})_{\mathrm{loc}} := K_0^{\mathbb{T}}(\mathcal{M})\otimes_{\mathbb{Z}[\tau,\tau^{-1}]}\mathbb{Q}(\tau^{\frac{1}{2}}).$$

如前所述，可以利用Chow理论或K理论中的 $\mathbb{T}$-局部化定理来定义$\int_{[\mathcal{M}]^{\mathrm{vir}}} 1$ 和 $\chi(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}_{\mathcal{M}})$。

定义 2.16. 我们相对于定向(20)的选取，将上同调的（相应地，K理论的）折纸分区函数定义为

$$\mathsf{Z}_{\vec{r}}(q) := \frac{1}{\mathsf{C}_{\vec{r}}}\sum_{n=0}^{\infty} q^n \int_{[M_{Q_4}(\vec{r},n)]^{\mathrm{vir}}} 1,\quad \mathsf{Z}^K_{\vec{r}}(q) := \frac{1}{\mathsf{C}^K_{\vec{r}}}\sum_{n=0}^{\infty} q^n \chi(M_{Q_4}(\vec{r},n), \widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}),$$

$$\mathsf{C}_{\vec{r}} := \int_{[M_{Q_4}(\vec{r},0)]^{\mathrm{vir}}} 1, \qquad \mathsf{C}^K_{\vec{r}} := \chi(M_{Q_4}(\vec{r},0), \widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}).$$

在下一节中，我们证明“领头项”$\mathsf{C}_{\vec{r}}$、$\mathsf{C}^K_{\vec{r}}$非零，从而上述商是良定义的。

为了将这些表达式写得明确，我们需要 Oh–Thomas 局部化公式 [OT，第 7] 节。由于 $\mathcal{M}^{\mathbb{T}}$ 是零维且既约的（命题 2.4），在任意不动点 P处，我们有 $h^0(E^\bullet_{Q_4}|^{\mathbb{T}}_P) = 0$，其中 $E^\bullet_{Q_4}|^{\mathbb{T}}_P$表示复形的 $\mathbb{T}$-不动部分。因此微分

$$d_P s\colon T_{\mathcal{A}}|^{\mathbb{T}}_P \hookrightarrow E|^{\mathbb{T}}_P$$

[10]插入整体符号 $(-1)^{(r-1)n}$，是为了随后与Nekrasov通过玻尔兹曼权重给出的折纸分区函数原始定义精确吻合（定理 1.1）。

是单射，因此 $T_{\mathcal{A}}|_P^{\mathbb{T}}$ 可被视为 $E|_P^{\mathbb{T}}$的一个各向同性子空间。先验上有两种情况：

- $T_{\mathcal{A}}|_P^{\mathbb{T}}$ 不是极大的，此时 $\mathbf{rk} E_{Q_4}^\bullet|_P^{\mathbb{T}} < 0$ 与 P 对不变量没有贡献；
- $T_{\mathcal{A}}|_P^{\mathbb{T}}$ 是极大的，此时 $E_{Q_4}^\bullet|_P^{\mathbb{T}}$ 是无环的，且 $[E_{Q_4}^\bullet|_P] = [E_{Q_4}^\bullet|_P^m] \in K_0^{\mathbb{T}}(\mathcal{M})_{\mathrm{loc}}$，其中 $(-)^m$ 表示 $\mathbb{T}$-移动部分。

在第二种情形[11],下，对不变量的贡献为

$$\pm\frac{1}{\sqrt{(-1)^{\mathrm{vd}} e(E_{Q_4}^\bullet|_P^\vee)}}, \quad \pm\frac{1}{\sqrt{(-1)^{\mathrm{vd}}\widehat{\Lambda}_{-1}(E_{Q_4}^\bullet|_P)}}.$$

这里 $\pm\sqrt{-}$ 表示由整体定向选择 $o = (-1)^{(r-1)n} o_\Lambda$所确定的平方根选择。取平方根的方法在 [OT 第 7] 节中作了一般性描述，并在 [KR]中针对由各向同性截面（整体）截出的模空间作了显式处理。在K理论中，我们有一个分解

$$[E_{Q_4}^\bullet|_P] = F_P + F_P^*, \quad F_P := [T_{\mathcal{A}}|_P - \Lambda|_P]. \tag{21}$$

因此，上述表达式可以稍作简化，得到

$$\pm\frac{1}{e(T_{\mathcal{A}}|_P - \Lambda|_P)}, \quad \pm\frac{1}{\widehat{\Lambda}_{-1}(\Omega_{\mathcal{A}}|_P - \Lambda^*|_P)}.$$

符号的“正确”选择来自对由 $T_{\mathcal{A}}|_P^{\mathbb{T}}$ 和 $\Lambda|_P^{\mathbb{T}}$诱导的定向的比较。结果如下，即 [KR]。

命题 2.17 (Kool–Rennemo)。 在上述设定中，我们有

$$\pm = (-1)^{(r-1)n} \cdot (-1)^{\dim \mathrm{cok}(\pi_\Lambda \circ d_P s)^{\mathbb{T}}},$$

其中我们考虑复合映射

$$T_{\mathcal{A}}|_P \xrightarrow{d_P s} E|_P = \Lambda|_P \oplus \Lambda^*|_P \xrightarrow{\pi_\Lambda} \Lambda|_P$$

而 π_Λ 表示到 $\Lambda|_P$的投影。

下一节的目标是确定

$$\int_{[\mathcal{M}]^{\mathrm{vir}}} 1 = \sum_{P \in \mathcal{M}^{\mathbb{T}}} \pm\frac{1}{e(T_{\mathcal{A}}|_P - \Lambda|_P)}$$

$$\chi(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}}^{\mathrm{vir}}) = \sum_{P \in \mathcal{M}^{\mathbb{T}}} \pm\frac{1}{\widehat{\Lambda}_{-1}(\Omega_{\mathcal{A}}|_P - \Lambda^*|_P)}.$$

主要结果是确定这些符号 $\pm$。

[11]由下一节证明的定理 1.1可知，对于所有不动点 P，$\mathbf{rk}\ E_{Q_4}^\bullet|_P^{\mathbb{T}} = 0$，因此第一种情况从未发生。

2.6. **定理 1.1 的证明**。我们沿用前面各节的记号。Le t

$$P = [(B_a^P, I_A^P, J_A^P)] \in \mathcal{M}^{\mathbb{T}} = M_{Q_4}(\vec{r}, n)^{\mathbb{T}}.$$

我们从以下关键命题开始。

命题 2.18。设

$$\Xi_P : \bigoplus_{a=1}^{3} \mathrm{End}(V) \cdot t_a^{-1} \to \bigoplus_{A \in \underline{\mathbf{3}}} \mathrm{End}(V) \cdot t_A^{-1},$$
$$(B_1, B_2, B_3) \mapsto \Big([B_a^P, B_b] + [B_a, B_b^P] \Big)_{A=\{a<b\} \in \underline{\mathbf{3}}}.$$

则 余核$(\pi_\Lambda \circ d_P s)^{\mathbb{T}}$ = 余核$(\Xi_P)^{\mathbb{T}}$.

证明。 回顾第 2.1 节， $\mathcal{A} = [\mathcal{U}/G]$。稍微滥用记号，我们也将 $P := (B_a^P,\ I_A^P,\ J_A^P) \in \mathcal{U}$记作 P 的一个提升。于是存在一个满射 $T_{\mathcal{U}}|_P \twoheadrightarrow T_{\mathcal{A}}|_P$，因此只需考虑该复合映射的余核

$$T_{\mathcal{U}}|_P \twoheadrightarrow T_{\mathcal{A}}|_P \xrightarrow{d_P s} E|_P = \Lambda|_P \oplus \Lambda^*|_P \xrightarrow{\pi_\Lambda} \Lambda|_P.$$

明确地，利用（11），该复合映射由以下映射给出

$$\bigoplus_{a=1}^{4} \mathrm{End}(V) \cdot t_a^{-1} \oplus \bigoplus_{A \in \underline{\mathbf{6}}} \Big(\mathrm{Hom}(W_A, V) \oplus \mathrm{Hom}(V, W_A) \cdot t_A^{-1} \Big) \to$$
$$\bigoplus_{A \in \underline{\mathbf{3}}} \Big(\mathrm{End}(V) \cdot t_A^{-1} \oplus \mathrm{Hom}(W_A, W_{\overline{A}}) \cdot t_{\overline{A}}^{-1} \Big) \oplus \bigoplus_{A \in \underline{\mathbf{6}}, \overline{a} \in \overline{A}} \mathrm{Hom}(V, W_A) \cdot t_{\overline{a}}^{-1} t_A^{-1}$$
$$(B_a, I_A, J_A) \mapsto \big((d_P \mu_A)_{A \in \underline{\mathbf{3}}}, (d_P \nu_A)_{A \in \underline{\mathbf{3}}}, (d_P \nu_{A,\overline{a}})_{A \in \underline{\mathbf{6}}, \overline{a} \in \overline{A}} \big)$$

其中微分为

$$d_P \mu_{A=\{a<b\}} = [B_a^P, B_b] + [B_a, B_b^P] + I_A^P J_A + I_A J_A^P,$$
$$d_P \nu_A = J_{\overline{A}}^P I_A + J_{\overline{A}} I_A^P, \quad d_P \nu_{A,\overline{a}} = J_A^P B_{\overline{a}} + J_A B_{\overline{a}}^P.$$

由于 $P \in \mathcal{M}^{\mathbb{T}}$，命题 2.4 推出 $J_A^P = 0$。这将复合简化为映射

$$(B_a, I_A, J_A) \mapsto \big(([B_a^P, B_b] + [B_a, B_b^P] + I_A^P J_A)_{A \in \underline{\mathbf{3}}}, (J_{\overline{A}} I_A^P)_{A \in \underline{\mathbf{3}}}, (J_A B_{\overline{a}}^P)_{A \in \underline{\mathbf{6}}, \overline{a} \in \overline{A}} \big).$$

由于我们关注的是余核的 $\mathbb{T}$-不变部分，只需证明$I_A^P J_A \in \mathrm{End}(V) \cdot t_A^{-1}$， $J_A I_A^P \in \mathrm{Hom}(W_A,\ W_A) \cdot t_A^{-1}$， $\_ J_A B_a^P \in \mathrm{Hom}(V, \_ W_A) \cdot t_a^{-1} t_A^{-1}$ 没有 $\mathbb{T}$-不变部分。回忆一下，这些向量空间的 $\mathbb{T}$-特征标可由以下分解读出

$$V = \bigoplus_{A \in \underline{\mathbf{6}}} \bigoplus_{1 \leqslant \alpha \leqslant r_A} \bigoplus_{(i,j) \in \lambda_{A,\alpha}} t_a^i t_b^j w_{A,\alpha}, \quad W_A = \bigoplus_{1 \leqslant \alpha \leqslant r_A} w_{A,\alpha}.$$

由此可知，以下向量空间的 $\mathbb{T}$-不变部分均为零

$$\left(\mathrm{Hom}(V,W_A)\cdot t_A^{-1}\right)^{\mathbb{T}} = \left(\mathrm{Hom}(W_A,W_{\overline{A}})\cdot t_{\overline{A}}^{-1}\right)^{\mathbb{T}} = \left(\mathrm{Hom}(V,W_A)\cdot t_{\overline{a}}^{-1}t_A^{-1}\right)^{\mathbb{T}} = 0.$$

特别地，$J_A I_A^P$ 和 $J_A B_a^P$ 没有 $\mathbb{T}$-不动部分。同样，$I_A^P J_A$ 没有 $\mathbb{T}$-不动部分，因为它位于 $\mathbb{T}$-等变映射的像中

$$\mathrm{Hom}(V,W_A)\cdot t_A^{-1} \xrightarrow{I_A^P(-)} \mathrm{End}(V)\cdot t_A^{-1}. \tag{22}$$

□

由命题 2.4，不动点 $P\in\mathcal{M}^{\mathbb{T}}$ 对应于一组整数分拆

$$P \leftrightarrow \underline{\boldsymbol{\lambda}}.$$

$\dim \mathrm{cok}(\Xi|_P)^{\mathbb{T}}$ 的奇偶性，已在 [KR 第4.2]节中计算 $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^4)$ 的不动点符号时确定。根据 [KR 命题4.5，4.2],将该结果应用于我们的设定可得

$$\dim \mathrm{cok}(\Xi|_P)^{\mathbb{T}} \equiv \sum_{A\in\underline{\mathbf{6}}\setminus\underline{\mathbf{3}}}\sum_{\alpha}\Big(|\lambda_{A,\alpha}| - h_{\lambda_{A,\alpha}}(0,0)\Big) \mod 2, \tag{23}$$

其中 $\underline{\mathbf{6}}\setminus\underline{\mathbf{3}} = \{\{1,\ 4\},\ \{2,\ 4\},\ \{3,\ 4\}\}$ 和 $h_{\lambda_{A,\ \alpha}}(0,\ 0)$ 表示方格 $(0,\ 0)\in\lambda_{A,\ \alpha}$ 的钩长。[12]

注 2.19。 在 $n=0$ 的情况下，空间 $\mathcal{M}=\mathcal{A}$ 由单个闭点 P 组成。于是，$\Lambda|_P$ 的特征为

$$\sum_{A\in\underline{\mathbf{3}}} N_A^* N_{\overline{A}} t_{\overline{A}}^{-1},$$

其中 N_A 在 (9) 中定义，且

$$\chi(\mathcal{M},\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}}^{\mathrm{vir}}) = \prod_{A\in\underline{\mathbf{3}}}[N_A^* N_{\overline{A}} t_{\overline{A}}^{-1}],$$

其中 $[-]$ 在 (8) 中定义。我们将这个不变量记为 $\mathsf{C}_{\vec{r}}^K$，而根据 (23) 应用于 $\boldsymbol{\lambda}=\varnothing$，其符号为 $+$。类似地，我们定义 $\mathsf{C}_{\vec{r}} := \int_{[\mathcal{M}]^{\mathrm{vir}}} 1 = \prod_{A\in\underline{\mathbf{3}}} e(N_A^* N_A t_A^{-1})$。

现在我们比较 $T_{\mathcal{M}}^{\mathrm{vir}}|_P := E_{Q_4}^\bullet|_P^\vee$ 的两种半部选择：一种是由 (21) 得到的选择，另一种是 Nekrasov 给出的选择 (9)。

命题 2.20。 我们在 K 理论中有以下恒等映射

$$\mathsf{v}_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}} - \Big(T_{\mathcal{A}}|_P - \Lambda|_P + \sum_{A\in\underline{\mathbf{3}}} N_A^* N_{\overline{A}} t_{\overline{A}}^{-1}\Big) = G_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}} - G_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}^*,$$

对于满足条件的某个类 $G_{\boldsymbol{\lambda}}\in K_0^{\mathbb{T}}(\mathrm{pt})$

$$\mathrm{rk}\, G_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}^m \equiv (r-1)n + \sum_{A\in\underline{\mathbf{6}}\setminus\underline{\mathbf{3}}}\sum_{\alpha}\Big(|\lambda_{A,\alpha}| - h_{\lambda_{A,\alpha}}(0,0)\Big) \mod 2,$$

[12]当我们将 [KR，命题4.5，4.2] 应用于 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_{A,\ \alpha})$ 时，他们的公式大大简化，因为当把 $\lambda_{A,\ \alpha}$ 视为立体分拆时，$(i,\ j,\ k,\ \ell)\in\lambda_{A,\ \alpha}\subset\mathbb{Z}_{\geqslant 0}^4$ 中有两个坐标为零。

其中 $(-)^m$ 表示 $\mathbb{T}$-运动部分。

证明。与之前一样，我们考虑 $\mathcal{A}=[\mathcal{U}/G]$，并稍微滥用一下记号，将 $P\in\mathcal{U}$记为 P的一个提升，使得我们有一个满射 $T_{\mathcal{U}}|_P \twoheadrightarrow T_{\mathcal{A}}|_P$。事实上， $T_{\mathcal{A}}|_P = T_{\mathcal{U}}|_P - \mathrm{End}(V)$。由（15）和（9）， V和 W_A 的特征标为

$$\chi_V=\sum_A K_A,\quad \chi_{W_A}=N_A,$$

其中 N_A 在（9）中定义，而 $\boldsymbol{\lambda}$ 是与 P对应的整数分拆集合。由于 $\mathbb{T}$ 按（13）中的定义作用， $T_{\mathcal{U}}|_P$的特征标为

$$(t_1^{-1}+t_2^{-1}+t_3^{-1}+t_4^{-1})\cdot\sum_{A,B}K_A^*K_B+\sum_{A,B}N_A^*K_B+\sum_{A,B}K_A^*N_B\cdot t_B^{-1}. \tag{24}$$

另一方面，由（14）， $\Lambda|_P$ 的特征标为

$$((t_1t_2)^{-1}+(t_1t_3)^{-1}+(t_2t_3)^{-1})\cdot\sum_{A,B}K_A^*K_B+\sum_{A\in\underline{\mathbf{3}}}N_A^*N_{\overline{A}}t_{\overline{A}}^{-1}+\sum_{A,B,\overline{a}\in\overline{A}}K_B^*N_A\cdot t_{\overline{a}}^{-1}t_A^{-1}. \tag{25}$$

回顾一下，在引言中，对于$A\in\mathbf{6}$，我们定义了 $\phi(A):=\min A$。我们还定义了 $\psi(A):=\max A$。经过繁琐但直接的计算可知，第一个等式在以下情形成立

$$\begin{aligned}G_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}:=&\sum_{A\in\underline{\mathbf{3}}}(t_1+t_2+t_3-t_1t_2-t_1t_3-t_2t_3)K_A^*K_A+\\&\sum_{A\in\underline{\mathbf{6}}\setminus\underline{\mathbf{3}}}\Big(\sum_{a\neq\psi(A)}t_a-\sum_{B\in\underline{\mathbf{3}}\,\mathrm{s.t.}\,\psi(A)\notin B}t_B\Big)K_A^*K_A-\\&\sum_A(1-t_A+t_{\phi(A)}t_A)N_A^*K_A-\sum_{A\neq B}N_A^*K_B+\\&\sum_{A<B}(1-t_1^{-1}-t_2^{-1}-t_3^{-1}-t_4^{-1}+t_1t_4+t_2t_4+t_3t_4)K_A^*K_B,\end{aligned}$$

其中我们始终模关系 $t_1t_2t_3t_4=1$进行计算。

对于命题的第二部分，我们必须确定 $\mathrm{rk}\ G_{\boldsymbol{\lambda}}^m=\mathrm{rk}\ G_{\boldsymbol{\lambda}}-\mathrm{rk}\ G_{\boldsymbol{\lambda}}^{\mathbb{T}}$。注意，$\mathrm{rk}\,G_{\boldsymbol{\lambda}}\equiv rn \bmod 2$。由下文的引理 2.21 可得此结果，其证明是一个留给读者完成的计算。□

引理 2.21. 设 λ 为一个整数分拆，并定义 $Z_\lambda:=\sum_{(i,\ j)\in\lambda}t_1^it_2^j$。则

$$\begin{aligned}\dim(t_2Z_\lambda Z_\lambda^*)^T&=|\lambda|-\ell(\lambda),\\\dim(t_3Z_\lambda Z_\lambda^*)^T&=0,\\\dim(t_1t_2Z_\lambda Z_\lambda^*)^T&=|\lambda|-h_\lambda(0,0),\\\dim(t_1t_3Z_\lambda Z_\lambda^*)^T&=0,\end{aligned}$$

其中 $(-)^T$ 是关于 T：$= Z(t_1t_2t_3t_4-1)$ 的 T-不动部分， $\ell(\lambda)$ 表示长度，而 $h_\lambda(0$、$0)$ 表示 λ 在 $(0$、$0)$ 处的钩长。

现在我们将所有内容整合起来。

定理 *1.1* 的证明。由命题 2.17、2.18、2.20、注 2.19 以及（23），我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\chi(\mathcal{M},\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}_{\mathcal{M}})}{\mathsf{C}^K_{\vec{r}}} &= (-1)^{(r-1)n}\cdot\sum_{P\in\mathcal{M}^{\mathbb{T}}}(-1)^{\dim\operatorname{cok}(\pi_\Lambda\circ d_P s)^{\mathbb{T}}}\frac{\widehat{\Lambda}_{-1}(-\sum_{A\in\underline{\mathbf{3}}}N_AN_{\overline{A}}^*t_{\overline{A}}))}{\widehat{\Lambda}_{-1}(\Omega_{\mathcal{A}}|_P-\Lambda^*|_P)}\\ &= (-1)^{(r-1)n}\cdot\sum_{P\in\mathcal{M}^{\mathbb{T}}}(-1)^{\dim\operatorname{cok}(\pi_\Lambda\circ d_P s)^{\mathbb{T}}}(-1)^{\mathrm{rk}(G^m)}[-\mathsf{v}_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}]\\ &= \sum_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}\,\mathrm{s.t.}\,|\underline{\boldsymbol{\lambda}}|=n}[-\mathsf{v}_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}],\end{aligned}$$

其中，在第二个等式中，$\boldsymbol{\lambda}$ 表示与 P对应的分拆。至此，证明完成。

□

2.7. **不变量**。本节将探讨定理 1.1 的若干推论。我们首先讨论定义 2.16 中上同调和 K- 理论折纸配分函数的一些一般性质。然后考察两个特殊情形（这两种情形都要求定理 1.1 中的所有符号均为“+”）：

- （二维 ADHM） $r_{12}=r$，其他情况下为 $r_A=0$ （例 2.2 的延续）；
- （三维 ADHM） $r_{a4}=0$ 对所有 a 均成立（例 2.3 的延续）。

我们以一个“真正的四维”例子结束本节： $r_{12}=r_{34}=1$ 以及 $r_A=0$否则（定理 1.2）。

2.7.1. 不变量的结构。我们首先注意到以下标准性质：凝聚上同调配分函数可通过对 K 理论分拆函数取某个极限得到（参见 [CKM、Nek7] 中的类似结果）。

引理 2.22。我们有

$$\lim_{b\to 0}\mathsf{Z}^K_{\vec{r}}(q)\Big|_{t_i=e^{b\cdot s_i},w_{A,\alpha}=e^{b\cdot v_{A,\alpha}}}=\mathsf{Z}_{\vec{r}}(q).$$

证明。根据定理 1.1，我们有

$$\mathsf{Z}^K_{\vec{r}}(q)=\sum_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}q^{|\underline{\boldsymbol{\lambda}}|}[-\mathsf{v}_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}],\quad \mathsf{Z}_{\vec{r}}(q)=\sum_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}q^{|\underline{\boldsymbol{\lambda}}|}e(-\mathsf{v}_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}),$$

其中， $e(-)$表示 $\mathbb{T}$-等变欧拉类。关键在于，对于任意对应于 $\mathbb{T}$-不动点 $P\in\mathcal{M}^{\mathbb{T}}$ 的$\boldsymbol{\lambda}$，虚特征 $\mathsf{v}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 由于定义 2.16 中的归一化而具有秩 0。具体而言，我们可以写成

$$\mathsf{v}_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}=\sum_i\tau^i-\sum_j\tau^j,$$

其中我们使用多重指标记号 $\tau = (t_1,\ t_2,\ t_3,\ (w_{A,\ \alpha}))$、 $i = (i_1,\ i_2,\ i_3,\ (i_{A,\ \alpha}))$、 $j =(j_1,\ j_2,\ j_3,\ (j_{A,\ \alpha}))$，我们消去了 $t_4 = (t_1t_2t_3)^{-1}$ 和

$$\sum_i 1 - \sum_j 1 = 0. \tag{26}$$

回顾引言可知，$\mathsf{v}_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}$ 没有 $\mathbb{T}$-固定项。_显然

$$[-\mathsf{v}_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}]\big|_{t_i=e^{b\cdot s_i},w_{A,\alpha}=e^{b\cdot v_{A,\alpha}}} = \frac{\prod_j \left((j_1s_1+j_2s_2+j_3s_3+\sum_{A,\alpha} j_{A,\alpha}v_{A,\alpha})b+O(b^2)\right)}{\prod_i \left((i_1s_1+i_2s_2+i_3s_3+\sum_{A,\alpha} i_{A,\alpha}v_{A,\alpha})b+O(b^2)\right)}.$$

B由（26）可知，分子和分母中的因子数相同。因此

$$\lim_{b\to 0}[-\mathsf{v}_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}]\big|_{t_i=e^{b\cdot s_i},w_{A,\alpha}=e^{b\cdot v_{A,\alpha}}} = \frac{\prod_j (j_1s_1+j_2s_2+j_3s_3+\sum_{A,\alpha} j_{A,\alpha}v_{A,\alpha})}{\prod_i (i_1s_1+i_2s_2+i_3s_3+\sum_{A,\alpha} i_{A,\alpha}v_{A,\alpha})} = e(-\mathsf{v}_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}).$$

□

如第 2.5 节所述，虚拟结构层起初是局部化K理论中的一个类，即 $\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}} \in K_0^{\mathbb{T}}(M_{Q_4}(\vec{r},n))_{\mathrm{loc}}$ 因此

$$(\mathsf{C}_{\vec{r}}^K)^{-1}\cdot\chi(M_{Q_4}(\vec{r},n),\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}) \in K_0^{\mathbb{T}}(\mathrm{pt})_{\mathrm{loc}} = \mathbb{Q}(t_1^{\frac{1}{2}},t_2^{\frac{1}{2}},t_3^{\frac{1}{2}},t_4^{\frac{1}{2}},(w_{A,\alpha}^{\frac{1}{2}})) \quad \text{with}\ \ t_1t_2t_3t_4=1.$$

现在我们将证明，存在一个上同调 $\mathbb{Z}/2$-分次的 $\mathbb{T}$-等变相干层 $\mathcal{N}_{\vec{r},n}$ 定义在 $M_{Q_4}(\vec{r},\ n)$ 上，它表示 $\mathbb{T}$-等变K理论类 $\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}$（差一个等变参数中的整体常数因子）。我们利用这一点证明以下“K理论整性结果”

$$(\mathsf{C}_{\vec{r}}^K)^{-1}\cdot\chi(M_{Q_4}(\vec{r},n),\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}) \in \mathbb{Q}(t_1,t_2,t_3,t_4,(w_{A,\alpha})), \quad \text{with}\ \ t_1t_2t_3t_4=1.$$

我们将在本节末尾定理 1.2 的证明中使用这一结果。

存在性$\mathcal{N}_{\vec{r},\ n}$ 基于一个类似的事实，该事实曾用于证明 Nekrasov的“壮丽四重奏”猜想 [Nek7]的背景下，见 [KR]。在上述文献中，虚拟结构层 $\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}$ 并未提升为层；只有乘以适当的典范插入类后，它才能提升为层。值得注意的是，在我们的情形中，$\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}$ 本身就能提升为层（相差一个整体常数因子）。

现在回顾一下第 2.5 节一般设定下关于虚拟结构层的一些事实。在该设定中，我们有 $E, q, \mathcal{A}, s, \mathcal{M}, \Lambda$，并且有环面 $\mathbb{T}$ 的作用。对于下面的讨论，我们不需要假设 $\mathcal{M}^{\mathbb{T}}$ 是零维且既约的。回想一下，我们还假设存在一个分解[13] $E = \Lambda \oplus \Lambda^*$，其中 $\Lambda \subset E$ 是一个$\mathbb{T}$-等变极大各向同性子丛。因此， $s = (s_\Lambda, s_{\Lambda^*})$ 相应地分解。于是我们得到一个称为 Koszul分解 [KO, OS] 的 2-周期复形

$$\mathcal{K}^{-1} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \Lambda^{2i+1}\Lambda^*, \quad \mathcal{K}^0 = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \Lambda^{2i}\Lambda^*, \qquad d = s_{\Lambda^*}\wedge + s_\Lambda \lrcorner .$$

[13]可以去掉这一假设；在这种情况下，应当使用与 $(E,\ q)$ 相关联的 Clifford代数层上的自旋模，如 [KR]所述。不过，在 origami 情形中，我们只会遇到分裂情形，因此仍采用 2-周期复形。

根据各向同性条件， $d^2 = 0$ 。其上同调层支撑在$\mathcal{M}$上。关键事实是，对于定向 $o = (-1)^{(r-1)n} \cdot o_\Lambda$，我们有

$$\begin{aligned} &(-1)^{(r-1)n} \cdot \mathcal{K} \otimes \det(\Lambda^*)^{-\frac{1}{2}} \otimes \det(T_{\mathcal{A}}|_{\mathcal{M}})^{-\frac{1}{2}} \\ &= (-1)^{(r-1)n} \cdot (H^{-1}(\mathcal{K}, d)[1] \oplus H^0(\mathcal{K}, d)) \otimes \det(\Lambda^*)^{-\frac{1}{2}} \otimes \det(T_{\mathcal{A}}|_{\mathcal{M}})^{-\frac{1}{2}} \\ &= \widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}_{\mathcal{M}} \in K_0^{\mathbb{T}}(\mathcal{M})_{\mathrm{loc}}, \end{aligned} \tag{27}$$

其中 $H^i(-)$ 是 2-周期复形 $(-)$ 的上同调层。第二个等式由 Oh–Sreedhar 的工作 [OS] 得出。因此，为了将 $\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}_{\mathcal{M}}$ 提升为按上同调 $\mathbb{Z}/2$ 分级的 $\mathbb{T}$-等变相干层，我们只需证明 $\det(\Lambda^*) \otimes \det(T_{\mathcal{A}}|_{\mathcal{M}})$ 作为 $\mathbb{T}$-等变线丛具有平方根。[14]我们证明，除等变参数中的一个整体常数因子外，情况确实如此。

命题 2.23. 存在一个按上同调 $\mathbb{Z}/2$ 分级的 $\mathbb{T}$-等变相干层 $\mathcal{N}_{\vec{r},n}$ ，定义在 $M_{Q_4}(\vec{r}$ 上，$n)$ ，使得相对于定向 (20)，有

$$[\mathcal{N}_{\vec{r},n}] = \left(\prod_{A \in \underline{\mathbf{3}}} t_A^{r_A r_{\overline{A}}} \prod_{\alpha=1}^{r_A} \prod_{\beta=1}^{r_{\overline{A}}} w_{A,\alpha}^{-1} w_{\overline{A},\beta} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}} \in K_0^{\mathbb{T}}(M_{Q_4}(\vec{r}, n)).$$

此外，我们有

$$(\mathsf{C}_{\vec{r}}^K)^{-1} \cdot \chi(M_{Q_4}(\vec{r}, n), \widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}) \in \mathbb{Q}(t_1, t_2, t_3, t_4, (w_{A,\alpha})), \quad \text{with } t_1 t_2 t_3 t_4 = 1.$$

证明。令 $\mathcal{A} := A_{\widehat{Q}_4}(\vec{r}, n)$ 及 $\mathcal{M} := M_{Q_4}(\vec{r}, n)$。回忆一下，我们用 $\mathcal{V}$ 表示第 2.1 节末尾引入的 $\mathcal{A}$ 上的典范秩 n 向量丛。那么

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{A}} =& (t_1^{-1} + t_2^{-1} + t_3^{-1} + t_4^{-1} - 1) \cdot \mathcal{E}nd(\mathcal{V}) \oplus \\ & \bigoplus_A \mathcal{H}om(W_A \otimes \mathcal{O}, \mathcal{V}) \oplus \bigoplus_A \mathcal{H}om(\mathcal{V}, W_A \otimes \mathcal{O}) \cdot t_A^{-1}, \end{aligned}$$

其中 $W_A = \bigoplus_{\alpha=1}^{r_A} \mathbb{C} \cdot w_{A,\alpha}$。我们已在 (24) 中遇到该方程在不动点 $P \in \mathcal{M}^{\mathbb{T}}$ 上的纤维类比。类似地，我们有

$$\begin{aligned} \Lambda \cong& ((t_1 t_2)^{-1} + (t_1 t_3)^{-1} + (t_2 t_3)^{-1}) \cdot \mathcal{E}nd(\mathcal{V}) \\ & \oplus \bigoplus_{A \in \underline{\mathbf{3}}} \mathrm{Hom}(W_A, W_{\overline{A}}) \otimes \mathcal{O} \cdot t_A \oplus \bigoplus_{A \in \underline{\mathbf{6}}, \overline{a} \in \overline{A}} \mathcal{H}om(\mathcal{V}, W_A \otimes \mathcal{O}) \cdot t_{\overline{a}}, \end{aligned}$$

在不动点上可简化为 (25) $P \in \mathcal{M}^{\mathbb{T}}$ 。由此可得

$$\det(T_{\mathcal{A}}|_{\mathcal{M}}) \otimes \det(\Lambda^*|_{\mathcal{M}}) \cong \left(\prod_{A \in \underline{\mathbf{3}}} t_A^{-r_A r_{\overline{A}}} \cdot \prod_{\alpha=1}^{r_A} \prod_{\beta=1}^{r_{\overline{A}}} w_{A,\alpha} w_{\overline{A},\beta}^{-1} \right) \cdot \left(\det(\mathcal{V})^r \cdot t_4^{-n^2} \prod_{A,\alpha} w_{A,\alpha}^{-n} \right)^2,$$

[14]对于光滑簇上向量丛 E的截面 s所关联的 $\mathbb{T}$-等变完美障碍理论（带有 $\mathbb{T}$-作用）， $\mathcal{O}^{\mathrm{vir}}_{\mathcal{M}}$ 由 Koszul 复形$\bigoplus_i H^i(\Lambda^\bullet E^*, s_)[i]$ [Oko]的上同调表示。若 $s = df$，则由 (18)， $\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}_{\mathcal{M}}$ 也可提升为一个层（至多差一个覆盖 $\widetilde{\mathbb{T}} \to \mathbb{T}$）。

其中 $r := \sum_A r_A$。然后，对于 $(\mathcal{K}, d)$，如上所述，我们定义

$$\mathcal{N}_{\vec{r},n} := t_4^{n^2} \cdot \Big(\prod_{A,\alpha} w_{A,\alpha}^n \Big) \cdot \det(\mathcal{V})^{-r} \cdot (H^{-1}(\mathcal{K}, d)[1] \oplus H^0(\mathcal{K}, d))[(r-1)n].$$

命题的第一部分由 (27) 得出，第二部分则源于 $[\mathcal{N}_{\vec{r},n}] \in K_0^{\mathbb{T}}(\mathcal{M})$ 这一事实（以及定义 2.16 中的归一化）。□

我们指出， $\mathbb{T}$ 中由 $t_i = 1$ 和 $w_{A,\alpha} = w_{A',\alpha'}$（对所有 $i, A, \alpha, A', \alpha'$）给出的单参数子群在 $\mathcal{M}$ 以及复形 $\mathcal{K}$的所有项上均平凡作用。因此，等变参数$w_{A,\alpha}$ 仅通过它们的两两商 $w_{A,\alpha}/w_{A',\alpha'}$进入 $\chi(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}}^{\mathrm{vir}})$。类似地，等变参数 $v_{A,\alpha}$ 进入$\int_{[\mathcal{M}]^{\mathrm{vir}}} 1$ 时仅通过它们的两两差 $v_{A,\alpha} - v_{A',\alpha'}$。

2.7.2. 二维和三维 *ADHM* 箭图的不变量。 现在我们继续讨论例 2.2 和 2.3。

例 2.24. 考虑 Q_4，取 $r_{12} = r$，否则取 $r_A = 0$。则$M_{Q_4}(\vec{r}, n) \cong M_{Q_2}(r, n) =: \mathcal{M}$。由定理 1.1 与 (17)，在对应于 $\boldsymbol{\lambda}$的不动点 P 处，我们有

$$\mathsf{v}_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}} = (1 - t_3) t_1 t_2 T_{\mathcal{M}}|_P = (1 - t_3) \Omega_{\mathcal{M}}|_P.$$

因此

$$[-\mathsf{v}_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}] = t_3^{-rn} \frac{\Lambda_{-1}(\Omega_{\mathcal{M}}|_P \otimes t_3)}{\Lambda_{-1}\Omega_{\mathcal{M}}|_P}, \tag{28}$$

其中我们使用了恒等映射 $\widehat{\Lambda}_{-1} E = (-1)^{\mathrm{rk}(E)} \widehat{\Lambda}_{-1} E^*$。光滑射影簇 M 的对称化 Hirzebruchχ_{-y}-亏格定义为

$$\widehat{\chi}_{-y}(M) := y^{-\dim(M)/2} \chi(M, \Lambda_{-1}(\Omega_M \otimes y)).$$

对于带有环面作用、且具有真的不动点轨迹M^T（其连通分支为 M_i）的光滑拟射影簇 M，该表达式由如下等变公式给出

$$\widehat{\chi}_{-y}(M) = y^{-\dim(M)/2} \sum_i \chi\Big(M_i, \frac{\Lambda_{-1}(\Omega_M \otimes y)|_{M_i}}{\Lambda_{-1}(N^*_{M_i/M})} \Big),$$

其中 $N_{M_i/M}$ 表示 $M_i \subset M$的法丛。由 (28)，我们有

$$\mathsf{Z}_{\vec{r}}^K(q) = \sum_n q^n \widehat{\chi}_{-t_3}(M_{Q_2}(r, n)).$$

这可以视为秩 r K 理论的 Vafa–Witten 生成函数$\mathbb{C}^2$；关于精确关系，参见例如 [AKL]。 $r = 1$ 情形的计算见[CNO，公式（48）] 以及 [Oko，定理 5.3]13]:

$$\mathsf{Z}_{\vec{r}}^K(q) = \mathrm{Exp}\left(\frac{[t_1 t_3][t_2 t_3]}{[t_1][t_2]} \frac{q}{1-q} \right). \tag{29}$$

这里，对于满足 $f(t_1,\dots,t_r,0)=0$的 $f(t_1,\dots,t_r,q)\in\mathbb{Q}(t_1,\dots,t_r)[\![q]\!]$，其 plethys- tic 指数 $\mathrm{Exp}(f)$ 定义为

$$\mathrm{Exp}(f(t_1,\dots,t_r,q)):=\exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}f(t_1^n,\dots,t_r^n,q^n)\Big) \tag{30}$$

视为 $\mathbb{Q}(t_1,\dots,t_r)[\![q]\!]$ 的一个元素。(29) 中的多重对称指数通过将指数展开为 q 的升幂而得到。

例 2.25。考虑 Q_4，其中对所有 a 都有 $r_{a4}=0$。那么 $M_{Q_4}(\vec{r},n)\cong M_{Q_3}(\vec{r},n)=:\mathcal{M}$，后者是一个正则函数 $f\colon\ \mathcal{A}:=A_{\widehat{Q}_3}(\vec{r},n)\to\mathbb{C}$ 的临界轨迹，如第 2.5 节所述。此描述导出一个 $\mathbb{T}$-等变的二项完美障碍理论。因此，我们有两个虚循环和虚结构层

$$[\mathcal{M}]^{\mathrm{vir}}_{\mathrm{OT}},\quad [\mathcal{M}]^{\mathrm{vir}}_{\mathrm{BF}}\in A_0^{\mathbb{T}}(\mathcal{M},\mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]),$$
$$\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}_{\mathcal{M},\mathrm{OT}},\quad \widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}_{\mathcal{M},\mathrm{BF}}\in K_0^{\mathbb{T}}(\mathcal{M})_{\mathrm{loc}},$$

其中下标 $(-)_{\mathrm{OT}}$ 表示由与各向同性截面 s （以及定向 (20)）相关联的三项对称障碍理论所诱导的一个类，而 $(-)_{\mathrm{BF}}$ 表示由正则函数 f 给出的二项障碍理论所诱导的一个类。注意，$\mathsf{C}_{\vec{r}}^{K}=\mathsf{C}_{\vec{r}}=1$ （注 2.19）。我们声称

$$\int_{[\mathcal{M}]^{\mathrm{vir}}_{\mathrm{OT}}}1=\int_{[\mathcal{M}]^{\mathrm{vir}}_{\mathrm{BF}}}1,\quad \chi(\mathcal{M},\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}_{\mathcal{M},\mathrm{OT}})=\chi(\mathcal{M},\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}_{\mathcal{M},\mathrm{BF}}).$$

这一结果由以下引理得出。

引理 2.26. 对于对应于整数分拆 $\boldsymbol{\lambda}$ 的不动点 $P\in\mathcal{M}^{\mathbb{T}}$，我们有

$$\mathsf{v}_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}-\Big(T_{\mathcal{A}}|_P-\Omega_{\mathcal{A}}|_P\otimes(t_1t_2t_3)^{-1}\Big)=G_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}-G^*_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}},$$

对于某个类 $G_{\boldsymbol{\lambda}}\in K_0^{\mathbb{T}}(\mathrm{pt})$，满足 $\mathrm{rk}\,G^m_{\boldsymbol{\lambda}}\equiv 0$ 模 2，其中 $(-)^m$ 表示$\mathbb{T}$-移动部分。

证明. 沿用 (24) 的思路，$\mathbb{T}$ 的 $T_{\mathcal{A}}|_P$ 特征为

$$T_{\mathcal{A}}|_P=(t_1^{-1}+t_2^{-1}+t_3^{-1}-1)\cdot\sum_{A,B\in\underline{\mathbf{3}}}K_A^*K_B+\sum_{A,B\in\underline{\mathbf{3}}}N_A^*K_B+\sum_{A,B\in\underline{\mathbf{3}}}K_A^*N_B\cdot t_B^{-1}.$$

利用 (9)，证明与命题 2.20 的证明类似。例如，以下选择的 $G_{\boldsymbol{\lambda}}$ 可行：

$$\begin{aligned}G_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}=&(t_1+t_2+t_3+t_1^{-1}t_2^{-1}+t_1^{-1}t_3^{-1}+t_2^{-1}t_3^{-1}+t_1t_2t_3)\sum_{A\in\underline{\mathbf{3}}}K_AK_A^*\\&+\sum_{A\in\underline{\mathbf{3}}}(t_A-t_1t_2t_3-1+t_c^{-1})N_A^*K_A\\&+(-1+t_1+t_2+t_3-t_1t_2-t_1t_3-t_2t_3+t_1t_2t_3)\sum_{A<B\in\underline{\mathbf{3}}}K_AK_B^*\end{aligned}$$

$$+\sum_{A\neq B\in\underline{\mathbf{3}}}(1-t_c)N_AK_B^*,$$

其中 c 始终表示 $\{1,2,3\}\backslash A$ 中的唯一元素。 □

现在很容易确定例 2.25 在 Calabi–Yau 三重特化 $s_1+s_2+s_3=0$ 下的不变量。此特化对应于对

$$T_0:=Z(t_1t_2t_3-1)\leqslant T,\quad \mathbb{T}_0:=T_0\times(\mathbb{C}^*)^r\leqslant\mathbb{T}.$$

命题 2.27. 令 $r_{a4}=0$ 对所有 a均成立。那么特化 $\mathsf{Z}_{\vec{r}}(q)|_{s_1+s_2+s_3=0}$定义良好，且有[15]

$$\mathsf{Z}_{\vec{r}}(q)|_{s_1+s_2+s_3=0}=\overline{\eta}(q)^{-r},$$

其中 $\eta(q)=\prod_{n>0}(1-q^n)$ 表示归一化戴德金 η 函数。

证明。 注意，根据命题 2.4，有 $M_{Q_3}(\vec{r},\ n)^{\mathbb{T}_0}=M_{Q_3}(\vec{r},\ n)^{\mathbb{T}}$。对于任意 $P\in\mathcal{M}:=M_{Q_3}(\vec{r},\ n)^{\mathbb{T}}$，考虑 $T_{\mathcal{A}}|_P-\Omega_{\mathcal{A}}|_P$。显然，它没有 $\mathbb{T}_0$-不变部分。因此，所需的特化定义良好。P 对 $\mathsf{Z}_{\vec{r}}(q)|_{s_1+s_2+s_3=0}$ 的贡献为

$$(-1)^{\dim T_{\mathcal{A}}|_P^m}q^n,$$

其中 $(-)^m$ 表示相对于 $\mathbb{T}_0$的动部分。令 $\boldsymbol{\lambda}$ 为对应于 P的整数分拆。利用引理 2.21（但在模关系 $t_1t_2t_3=1$下计算）可以轻松得到

$$\begin{aligned}\operatorname{rk}T_{\mathcal{A}}|_P^m&=\operatorname{rk}T_{\mathcal{A}}|_P-\operatorname{rk}T_{\mathcal{A}}|_P^f\\&=2n^2+2rn-2\sum_{A,\alpha}\Big(|\lambda_{A,\alpha}|-h_{\lambda_{A,\alpha}}(0,0)\Big)\\&\equiv 0\mod 2.\end{aligned}\tag{31}$$

因此，所求生成函数为 $\sum_{\boldsymbol{\lambda}}q^{|\boldsymbol{\lambda}|}=\eta(q)^{-r}$。 □

备注 2.28. 考虑 $\mathcal{M}:=M_{Q_3}(\vec{r},\ n)$。除了$\int_{[\mathcal{M}]^{\mathrm{vir}}_{\mathrm{BF}}}1\in\mathbb{Z}$（相对于环面 $\mathbb{T}_0$定义）之外，也可以通过对 Behrend 可构造函数 $\nu_{\mathcal{M}}$ 积分来定义不变量：$\mathcal{M}(\mathbb{C})\to\mathbb{Z}$ [Beh]

$$\int_{\mathcal{M}}\nu_{\mathcal{M}}\,de:=\sum_k k\cdot e(\nu_{\mathcal{M}}^{-1}(\{k\}))\in\mathbb{Z},$$

其中 $e(-)$ 表示拓扑欧拉示性数。由于 $\mathcal{M}$不是紧的，这（先验地）可能会产生与对虚循环进行等变积分不同的结果。由命题 2.4 可知，$\mathcal{M}^{\mathbb{T}}=\mathcal{M}^{\mathbb{T}_0}$是零维且既约的。特别地

$$\int_{\mathcal{M}}\nu_{\mathcal{M}}\,de=\sum_{P\in\mathcal{M}^{\mathbb{T}_0}}\nu_{\mathcal{M}}(P).$$

[15]由于 vd $=0$，我们有 $\mathsf{Z}^K_{\vec{r}}(q)|_{t_1t_2t_3=1}=\mathsf{Z}_{\vec{r}}(q)|_{s_1+s_2+s_3=0}$，因此只需考虑格 er.

我们有 $T_{\mathcal{A}}|_P - \Omega_{\mathcal{A}}|_P = T_{\mathcal{M}}|_P - \Omega_{\mathcal{M}}|_P$，其中 $T_{\mathcal{M}}|_P := \Omega_{\mathcal{M}}|_P^*$ 表示 $\mathcal{M}$ 在 P处的扎里斯基切空间。由于 $\mathcal{M}^{\mathbb{T}_0}$ 是零维且既约的，限制$T_{\mathcal{M}}|_P$ 没有 $\mathbb{T}_0$不变部分。因此我们确定 Behrend值

$$1 = (-1)^{\mathrm{rk}\, T_{\mathcal{A}}|_P^m} = (-1)^{\mathrm{rk}\, T_{\mathcal{M}}|_P^m} = (-1)^{\mathrm{rk}\, T_{\mathcal{M}}|_P} = \nu_{\mathcal{M}}(P),$$

其中，第一个等号由 (31) 得出，而最后一个等号由 [BF2 定理 3.4] 给出。因此，不动点处的 Behrend值为 $+1$，所以虚不变量与 Behrend不变量一致

$$\int_{\mathcal{M}} \nu_{\mathcal{M}}\, de = \int_{[\mathcal{M}]^{\mathrm{vir}}_{\mathrm{BF}}} 1.$$

这种情况与 [MNOP、BF2], 中研究的 Hilb$^n(\mathbb{C}^3)$ 情形相似，不同之处在于，在我们的设定中，不动点处的 Behrend值始终为 $+1$。[16]

我们注意到，例 2.25 的不变量在其他特化下似乎也呈现出有趣的模性质。

例2.29。 令 $r_{12} = r_{13} = 1$，并令 $r_A = 0$ 取其他值。考虑雅可比 theta 函数 $\theta_2(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} q^{n^2}$、Dedekind eta 函数 $\eta(q)$ 及其归一化版本 $\eta(q)$。对于对角特化 $s_1 = s_2 = s_3$ 和 $e_{12,\ 1} = e_{13,\ 1}$，等变参数消去，我们通过显式计算得到

$$\frac{\mathsf{Z}_{\vec{r}}(q)}{\overline{\eta}(q)^{-8}} = \frac{\eta(q^4)^2}{\eta(q^2)\eta(q)^6} \mod q^5.$$

右边也可以写成 $\theta_2(q)/2\eta(q)^6$。我们预期这个等式对 q 的所有阶都成立。

注 2.30。 设 $\mathbf{M}_{Q_2}(r,n)$、$\mathbf{M}_{Q_3}(\vec{r},n)$ 和 $\mathbf{M}_{Q_4}(\vec{r},n)$ 分别为二维、三维和四维 ADHM 箭图的稳定表示的导出模空间，其导出结构分别由光滑结构、临界轨迹描述和各向同性零点轨迹描述所诱导（第 2.5 节）。按照 [PTVV] 的意义，它们分别是 0-移位辛、(-1)-移位辛和 (-2)-移位辛的。二维和三维 ADHM 箭图的不变量可由四维 ADHM 箭图的不变量特化得到这一事实（例 2.24、2.25），提示了这些导出模空间之间存在如下几何关系。若 $r_{12} = r$且 $r_A = 0$ 否则，那么我们预期

$$\mathbf{M}_{Q_3}(\vec{r},n) \simeq \mathrm{Tot}\Big(\mathbb{L}_{\mathbf{M}_{Q_2}(r,n)}[-1]\Big),$$

其中，$\mathbb{L}[n]$ 表示 n 平移的余切复形，Tot$(-)$ 表示全空间。同样，如果对所有 a 都有 $r_{a4} = 0$，那么我们预期

$$\mathbf{M}_{Q_4}(\vec{r},n) \simeq \mathrm{Tot}\Big(\mathbb{L}_{\mathbf{M}_{Q_3}(\vec{r},n)}[-2]\Big).$$

[16]我们提醒读者，这些证据不足以支持猜想 $\nu_{\mathcal{M}}$ 为常数 [JKS].

2.7.3. 交叉瞬子。 在本节余下部分，我们研究维数向量为 $r_{12}=r_{34}=1$ 且满足 $r_A=0$ 的 Q_4 。我们证明定理 1.2。我们从以下命题开始。

命题 2.31. 设 $P=[(B_a,I_A,J_A)]\in M_{Q_4}(\vec{r},n)$ 满足 $r_{12}=r_{34}=1$ 和$r_A=0$，否则。则对所有 $A\in\mathbf{6}$，都有 $J_A=0$ 。

证明。 不失一般性，我们只考虑 $A=\{3,4\}$ 的情形。利用稳定性条件 (5)，我们可以将任意 $v\in V=\mathbb{C}^n$ 写成如下形式的向量的线性组合： $FI_{12}w$和 $F'I_{34}w'$，其中 $w\in W_{12}$, $w'\in W_{34}$，且 $F,F'\in\mathbb{C}\langle B_1,\dots,B_4\rangle$。由 (3)，

$$J_{34}FI_{12}w=0.$$

此外， F' 中出现的所有单项式 M，只要含有至少一个 B_1 或 B_2，就具有性质 $J_{34}MI_{34}w'=0$。剩下需要考虑的，是仅依赖于 B_3,B_4的 F'。注意，到目前为止，我们只用到了对 $A\neq\{1,2\},\{3,4\}$，有 $r_A=0$。接下来的部分需要用到 $r_{12}=r_{34}=1$。

现在，对于任意单项式 M 属于 B_3, B_4，我们有

$$J_{34}MI_{34}=\mathrm{tr}(J_{34}MI_{34})=0.$$

我们断言，第二个等式可由反复使用等式 $[B_3,\ B_4]+I_{34}J_{34}=0$ 以及迹的循环性得到，正如 [Nak，命题 2.8]中所述。这可通过对 M的长度 ℓ 进行归纳来证明。注意， $\ell=0$ 的情形可由 $\mathrm{tr}(J_{34}I_{34})=\mathrm{tr}(I_{34}J_{34})=-\mathrm{tr}([B_3,\ B_4])=0$立即得到。□

由命题 2.10 和 2.31 可直接得到以下结果 t.

推论 2.32. 假设 $r_{12}=r_{34}=1$ 且 $r_A=0$ ，否则。则

$$M_{Q_4}(\vec{r},n)\cong\mathrm{Quot}_{\mathbb{C}^4}\Big(\bigoplus_A\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2_A}^{\oplus r_A},n\Big).$$

在证明定理 1.2 之前，我们还需要一个引理。定义 $w:=w_{12,\ 1}$， $w':=w_{34,\ 1}$，并令 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_{12},\ \lambda_{34})=(\lambda,\ \lambda')$ 为一对整数分拆。

引理 2.33. 假设 $r_{12}=r_{34}=1$ 和 $r_A=0$ 否则。那么

$$\lim_{L\to\infty}[-\mathsf{v}_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}]\Big|_{w=1,w'=L}=[-P_3T_\lambda][-P_1T_{\lambda'}]=\lim_{L\to0}[-\mathsf{v}_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}]\Big|_{w=1,w'=L},$$

其中 $T_\lambda:=T_{12}$ 和 $T_{\lambda'}:=T_{34}$ 定义见 (9)。

证明。 这可通过直接计算得出。要证明的是，对于 $w=1$,$w'=L$，这些表达式

$$[-P_{12}N_{34}K_{12}^*],\quad[-P_{34}N_{12}K_{34}^*],\quad[P_{1234}K_{12}K_{34}^*]$$

对于 $L^{\pm1}\to\infty$，它们都趋于 1。事实上，对于第一项

$$[-P_{12}N_{34}K_{12}^*]\Big|_{w=1,w'=L}=\prod_{(i,j)\in\lambda}\frac{(t_1^{-\frac{i-1}{2}}t_2^{-\frac{j}{2}}L^{\frac12}-t_1^{\frac{i-1}{2}}t_2^{\frac{j}{2}}L^{-\frac12})(t_1^{-\frac{i}{2}}t_2^{-\frac{j-1}{2}}L^{\frac12}-t_1^{\frac{i}{2}}t_2^{\frac{j-1}{2}}L^{-\frac12})}{(t_1^{-\frac{i}{2}}t_2^{-\frac{j}{2}}L^{\frac12}-t_1^{\frac{i}{2}}t_2^{\frac{j}{2}}L^{-\frac12})(t_1^{-\frac{i-1}{2}}t_2^{-\frac{j-1}{2}}L^{\frac12}-t_1^{\frac{i-1}{2}}t_2^{\frac{j-1}{2}}L^{-\frac12})}$$

whi当 $L^{\pm 1} \to \infty$ 时，ch 趋于 1。其他项的极限也可类似地计算 .

□

定理 *1.2* 的证明。回想一下， $w := w_{12,1}$, $w' := w_{34,1}$。由于框架环面 $(\mathbb{C}^*)^r$ 的对角子群在折纸模空间上平凡作用，我们可以令 $w = 1$。由命题 2.23 可得

$$(\mathsf{C}_{\vec{r}}^K)^{-1} \cdot \chi(M_{Q_4}(\vec{r}, n), \widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}) = \frac{\chi(M_{Q_4}(\vec{r}, n), \mathcal{N}_{\vec{r},n})}{1 - (w' t_1 t_2)^{-1}}.$$

我们使用 [Ryd 的 Quot 到 Chow 态射，推论 7.15]

$$M_{Q_4}(\vec{r}, n) \cong \mathrm{Quot}_{\mathbb{C}^4}\Big(\bigoplus_A \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2_A}^{\oplus r_A}, n \Big) \to \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^4).$$

由于此映射是 $\mathbb{T}$-等变且为真，我们有

$$R\nu_* \mathcal{N}_{\vec{r},n} \in K_0^{\mathbb{T}}(\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^4)).$$

此外，框架环面 $(\mathbb{C}^*)^r$ 在 $\mathsf{Sym}^n(\mathbb{C}^4)$ 上平凡作用，因此我们可以写成 e

$$R\nu_* \mathcal{N}_{\vec{r},n} = \sum_i V_i \cdot w'^i, \quad V_i \in K_0^T(\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^4)),$$

其中求和是有限的，且 $T := Z(t_1 t_2 t_3 t_4 - 1)$。因此，我们有

$$\frac{\chi(M_{Q_4}(\vec{r}, n), \mathcal{N}_{\vec{r},n})}{1 - (w' t_1 t_2)^{-1}} = \frac{f(w')}{1 - (w' t_1 t_2)^{-1}}, \quad f(w') \in \mathbb{Q}(t_1, t_2, t_3, t_4)[w'^{\pm 1}], \quad t_1 t_2 t_3 t_4 = 1.$$

根据定理 1.1 和引理 2.33，极限 $\lim_{L^{\pm 1} \to \infty} f(L)/(1 - (L t_1 t_2)^{-1})$ 存在，因此对于某个 α, $\beta \in \mathbb{Q}(t_1, t_2, t_3, t_4)$，我们有 $f(w') = \alpha + \beta (w')^{-1}$，其中 $t_1 t_2 t_3 t_4 = 1$。事实上，这些极限相等，因此我们有 $\alpha = -t_1 t_2 \beta$。于是， $f(w')/(1 - (w' t_1 t_2)^{-1}) = \alpha$ 与 w'无关。[17] 因此，再次由定理 1.1 和引理 2.33，我们有

$$\begin{aligned}(\mathsf{C}_{\vec{r}}^K)^{-1} \cdot \chi(M_{Q_4}(\vec{r}, n), \widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}) &= \lim_{L \to \infty} (\mathsf{C}_{\vec{r}}^K)^{-1} \cdot \chi(M_{Q_4}(\vec{r}, n), \widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}) \\ &= \sum_{\substack{\lambda, \lambda' \\ |\lambda| + |\lambda'| = n}} [-P_3 T_\lambda][-P_1 T_{\lambda'}],\end{aligned}$$

根据例 2.24，即可得到该定理。 □

2.7.4. **稳定/余稳定墙穿越。** 在 $M_{Q_4}(\vec{r}, n)$的定义中，可以将稳定性条件替换为以下称为余稳定性的条件：

不存在非零子空间 $V' \subseteq \bigcap \ker(J_A)$，它在 $B_1, \ldots, B_4$.$_A$ 作用下保持不变。

[17]我们强调，单个 $\mathbb{T}$-不动点的贡献取决于 w' ——只有在求和后，对 w' 的依赖才会消失。

应用命题 2.1 证明中所述的 Crawley-Boevey 技巧后，余稳定条件等价于关于 $(\Theta_\infty = -n, \Theta_0 = 1)$ 的 King 稳定性。于是，第 2.1 节的结论在此设置下类似成立。我们将由此得到的模空间记为 $M^c_{Q_4}(\vec{r}, n)$。特别地，存在（射影）半单化态射

$$\begin{array}{ccc} M_{Q_4}(\vec{r}, n) & & M^c_{Q_4}(\vec{r}, n) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & M^{\mathrm{ssimp}}_{Q_4}(\vec{r}, n). & \end{array}$$

此外，我们可以像之前一样，在 $M^c_{Q_4}(\vec{r},\ n)$ 上使用相同的 $\mathbb{T}$ 作用，即式 (13)。如下文所示，$M^c_{Q_4}(\vec{r},\ n)$ 的 $\mathbb{T}$-不动点轨迹是零维且既约的。因此，在这种情形下，第 2.5 节同样成立，所以我们有 $M^c_{Q_4}(\vec{r},\ n)$ 的 Oh–Thomas 虚拟循环和虚拟结构层（使用式 (20) 中定义的定向的类似版本）。我们猜想，这两个模空间的不变量之间的墙穿越是平凡的。

猜想 2.34。对于所有 $\vec{r},\ n$，我们有

$$\chi(M_{Q_4}(\vec{r}, n), \widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}) = \chi(M^c_{Q_4}(\vec{r}, n), \widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}).$$

这个猜想蕴含了折纸配分函数的一个有趣对称性 .

推论 2.35。 假设猜想 *2.34* 成立，则有

$$\mathsf{Z}^K_{\vec{r}}(q)\Big|_{(w_{A,\alpha})\mapsto(t_A w^{-1}_{A,\alpha})} = \mathsf{Z}^K_{\vec{r}}(q),$$

也就是说，在将所有 $w_{A,\alpha}$ 替换为 $t_A w^{-1}_{A\,\alpha},$ 后，$\mathsf{Z}^K_{\vec{r}}(q)$ 保持不变量。

证明。映射

$$\sigma\colon M_{Q_4}(\vec{r}, n) \to M^c_{Q_4}(\vec{r}, n), \quad [(B_a, I_A, J_A)] \mapsto [(B^t_a, -J^t_A, I^t_A)]$$

定义了一个同构。该映射仅在 $\mathbb{T}$ 的一个自同构意义下交织 $\mathbb{T}$-作用，即

$$\sigma((t_a, w_A)\cdot[(B_a, I_A, J_A)]) = (t_a, t_A w_A^{-1})\cdot\sigma([(B_a, I_A, J_A)]),$$

对所有 $(t_a, w_A) \in \mathbb{T}$，其中 w_A 表示此前所述的、其元素为 $w_{A,\alpha}$ 的对角矩阵。特别地，由此可知，$M^c_{Q_4}(\vec{r}, n)$ 具有一个零维的既约 $\mathbb{T}$-不动点轨迹。映射 σ 与虚拟结构相容，但要差一个 $\mathbb{T}$ 的自同构$(w_{A,\alpha}) \mapsto (t_A w_A^{-1}{}_{,\alpha})$，因此我们得到

$$\chi(M_{Q_4}(\vec{r}, n), \widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}) = \chi(M^c_{Q_4}(\vec{r}, n), \widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}})\Big|_{(w_{A,\alpha})\mapsto(t_A w^{-1}_{A,\alpha})}.$$

该结果由猜想 2.34 推出。 □

我们强调，对于任意 $\vec{r}$，运算 $(w_{A,\ \alpha}) \mapsto (t_A w_A^{-1}{}_{,\ \alpha})$ 并不会简单地使 $\mathbb{T}$-不动点的贡献发生置换。只有在对所有 $\mathbb{T}$-不动点求和后，推论中的不变性才显现出来。特别是，我们不知道有什么简单的组合论论证可以说明这种不变性。我们对猜想 2.34 及其推论作了如下验证。

(1) 根据例 2.24，对于 $r_{12} = r$ 和其他情况下，猜想中的陈述可化简为

$$\widehat{\chi}_{-t_3}(M_{Q_2}(\vec{r}, n)) = \widehat{\chi}_{-t_3}(M^c_{Q_2}(\vec{r}, n)), \tag{32}$$

该结论最近由 [AKL] 利用混合霍奇模以及 [DHSM] 关于 BPS 层的结果证明。这个证明表明，$\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}$ 到 $M^{\mathrm{ssimp}}_{Q_4}(\vec{r},\ n)$ 的导出推前像表现得像某种 BPS 层，尤其与稳定性的选择无关。(32) 的上同调类比也通过 [Ohk] 中的望月型墙穿越得到了证明。

(2) 如果 $r_{12} = r_{34} = 1$ 且在其他情况下，折纸分区函数根据定理 1.2 与框架等变参数无关，因此推论 2.35 显然成立。

（3）我们使用 SAGE 验证了以下情形中的推论 2.35：• $\sum_A r_A = 2$ 和 $n \leqslant 4$（即生成级数的前 5 项），• $\sum_A r_A = 3$ 和 $n \leqslant 2$（即生成级数的前 3 项），• $\sum_A r_A = 4$ 和 $n \leqslant 1$（即生成级数的前 2 项）。

2.8. **非微扰 Dyson–Schwinger 方程**。 Nekrasov 构造交叉瞬子的动机，是为所谓的非微扰 Dyson–Schwinger 方程提供几何解释。这类方程是某些递推关系，生成级数由对中岛箭图簇上的积分构成；中岛箭图簇是一类空间，包括模空间 $M_{Q_2}(r, n)$。由此得到的恒等式验证了源自四维规范理论与二维共形场论之间物理对应的预言，参见例如 [Nek2]。在物理学文献中，可以在 [Tam，第 6]节找到 Nekrasov 的方法的简要概述。

在数学文献中，非微扰 Dyson–Schwinger 方程的例子已被富有成效地应用于概率论（众多例子中的一个见[BBG，第 4]节），以及共形场论 [NT], ，用于将 Nekrasov 配分函数与某些共形块相匹配。在这些应用中，相关恒等式是根据需要逐一证明的；见 [NT，附录 A]。

Nekrasov 的折纸模空间提供了一种统一的几何方法，用于证明许多类的非微扰 Dyson–Schwinger 方程。前几节中的代数虚循环构造及相关符号计算，是使 Nekrasov 的方法具备数学严谨性所必需的。

其核心几何思想是，规范折纸模空间的紧性性质转化为级数 $\mathsf{Z}_{\vec{r}}(q)$各项关于等变参数的正则性。我们回顾以下结果，它可视为 [Arb, Prop. 3.2]的上同调版本；另见 [Liu2, Sect. 5.5–6]。

设 M 是 $\mathbb{C}$上的有限型概形，配备代数环面 T 的作用，且不动点轨迹 M^T 是真概形。我们考虑带$\mathbb{Q}$系数的 Chow群。根据 [Bri, Sect. 2.3, Cor. 2],，由包含 $M^T \hookrightarrow M$ 诱导的映射 $A_*^T(M^T) \to A_*^T(M)$ 在逆化所有非平凡T特征后变为同构（事实上，只需逆化有限多个 T特征即可）。将其逆映射与从 M^T 到一点的推前复合，便得到一个良定义的映射$A_*^T(M) \to \mathrm{Frac}(A_*^T(\mathrm{pt}))$，它由对循环 $1 \in A_T^*(M)$ 进行积分给出。

给定一个非平凡的 T-权重 $e^x = w\colon T \to \mathbb{C}^*$，并令 T_w 表示包含在 $\ker(w)$.中的极大环面

命题2.36。 若相对于 $T_w \subset T$ 的不动点轨迹 M^{T_w} 是真，则对任意 $\alpha \in A_*^T(M)$，有理函数

$$\int_\alpha 1 \in \mathrm{Frac}(A_*^T(\mathrm{pt}))$$

在 $x = 0$处没有极点。

证明。 包含 $i\colon M^{T_w} \to M$诱导出一个态射 $i_*\colon A_*^T(M^{T_w}) \to A_*^T(M)$。我们使用 [Bri，第2.3节，推论 2], 中 [Gon，命题2.15]的加强版。该结果断言，映射 i_* 在对有限多个特征$u_i\colon T \to \mathbb{C}^*$取逆后成为同构，且这些特征在 T_w 上的限制均非平凡。令 $(i_*)_{\mathrm{loc}}$ 表示这个同构，并令 $\pi\colon M^{T_w} \to \mathrm{pt}$ 为投影。由 π的适当性以及 π_* 关于 $A_*^T(\mathrm{pt})$的线性性，我们有

$$\int_\alpha 1 = \pi_*((i_*)_{\mathrm{loc}}^{-1}\alpha) \in A_*^T(\mathrm{pt})[c_1^T(u_i)^{-1}] \subset \mathrm{Frac}(A_*^T(\mathrm{pt})). \qquad \square$$

我们将上述讨论专门应用于“交叉瞬子”的模空间。考虑对于 $\vec{r}$ 有 $M_{Q_4}(\vec{r}, n)$，使得 $r_{12}, r_{34} > 0$，否则 $r_A = 0$，以及第2.2节中定义的环面$\mathbb{T} \cong (\mathbb{C}^*)^3 \times (\mathbb{C}^*)^{r_{12}} \times (\mathbb{C}^*)^{r_{34}}$。令 $u\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}^*$ 为由 $(t_i, w_{12,\alpha}, w_{34,\beta}) \mapsto \prod_\alpha w_{12,\alpha},$给出的特征，并设 $x = c_1^{\mathbb{T}}(u)$；换言之， $u = e^x$.

在 [Nek3 的第 8], 节中，针对一类子环面 $\mathbb{T}' \subset \mathbb{T}$，论证了 $M_{Q_4}(\vec{r}, n)^{\mathbb{T}'}$ 的不动轨迹的紧性。其一个推论是，前一段中定义的 u 对应的不动点轨迹$M_{Q_4}(\vec{r}, n)^{\mathbb{T}_u}$ 是真映射。应用命题 2.36，可得 [Nek4 第 3 节的如下结论。4]: 将 $\mathsf{C}_{\vec{r}} \cdot \mathsf{Z}_{\vec{r}}(q)$ 按 x 的降幂展开，有

$$[x^{-k}]\,(\mathsf{C}_{\vec{r}} \cdot \mathsf{Z}_{\vec{r}}(q)) = 0 \quad \text{for all } k > 0, \tag{33}$$

其中 $[x^{-k}](-)$ 表示 x^{-k}-系数。

注 2.37。 非归一化配分函数 $\mathsf{C}_{\vec{r}} \cdot \mathsf{Z}_{\vec{r}}(q)$ 是通过全局定义的类 $[M_{Q_4}(\vec{r},\ n)]^{\mathrm{vir}}$ 来定义的，这一点对于从几何上推导方程 (33) 至关重要。

此外，对单参数子群$\sigma\colon\ \mathbb{C}^* \to (\mathbb{C}^*)^3 \times (\mathbb{C}^*)^{r_{12}} \times (\mathbb{C}^*)^{r_{34}}$进行局部化，该子群由 $t \mapsto (1,\ (t,\ \ldots\ldots,\ t),\ 1),$ 给出，可以将

对 $M_{Q_4}(\vec{r},\ n)$ 的虚拟类的积分用取在其上的积分来表示

$$M_{Q_4}(\vec{r},n)^{\sigma} \cong \bigsqcup_{n_1+n_2=n} M_{Q_2}(r_{12},n_1)\times M_{Q_2}(r_{34},n_2).$$

根据定理 1.1 和等变局部化，虚拟不变量 $\int_{[M_{Q_4}(\vec{r},\ n)]^{\mathrm{vir}}} 1$可写为

$$\sum_{n_1+n_2=n}\int_{M_{Q_2}(r_{12},n_1)\times M_{Q_2}(r_{34},n_2)} e(T_{M_{Q_2}(r_{12},n_1)}\otimes e^{-s_3})e(T_{M_{Q_2}(r_{34},n_2)}\otimes e^{-s_1})\cdot e(\mathcal{W}\otimes e^{-x+s_1+s_2}),$$

其中 K 是一个显式的等变 $\mathcal{W}$-类，可用 $M_{Q_2}(r_{12},\ n_1)$ 和 $M_{Q_2}(r_{34},\ n_2)$ 上的重言丛表示；参见 [Tam，公式 (6.8)–(6.11)]。对每个 $k>0$，提取关于 x^{-k} 各次幂的系数，由此，方程 (33) 得到如下形式的关系：

$$0=\sum_{n_1\leqslant n}\int_{M_{Q_2}(r,n_1)} e(T_{M_{Q_2}(r_{12},n_1)}\otimes e^{-s_3})f_k(\mathcal{V})\in\mathbb{Q}(s_1,s_2,s_3,w_{12,\alpha},w_{34,\beta}), \tag{34}$$

其中 $\mathcal{V}$ 是 $M_{Q_2}(r,\ n_1)$ 上的一个典范丛，而 f_k 是 $K_0^{\mathbb{T}}(M_{Q_2}(r,\ n))$ 的局部化上的一个显式（但通常很复杂的）函数，以陈根表示。在 [Nek2], Nekrasov 解释了如何将消失式 (34) 理解为 qq-特征标的正则性关系；这类特征标是 q-特征标的一参数变形，已在量子仿射代数理论中得到研究。

如 [Nek2], 的情况 $r_{12}=r_{34}=1$所述，当 k 取较小值时，关系 (33) 具有特别简洁的形式。令 $(\mathbb{C}^*)^2$ 带有等变参数$e^{s_1},\ e^{s_2}$作用于$M_{Q_2}(1,\ n)\cong \mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$，如第2.2节所述，并设

$$\mathsf{G}(q;s_1,s_2,s_3):=\sum_{n=0}^{\infty} q^n\int_{M_{Q_2}(1,n)} e(T_{M_{Q_2}(1,n)}\otimes e^{-s_3}).$$

命题2.38。 [Nek2，方程 (265)] 令 $r_{12}=r_{34}=1$，否则 $r_A=0$。那么，作用于 $k=1$ 的 *Dyson–Schwinger* 方程(33) 为微分方程

$$s_3s_4\mathsf{G}(q;s_1,s_2,s_3)\cdot\frac{d}{dq}\mathsf{G}(q;s_3,s_4,s_1)+s_1s_2\mathsf{G}(q;s_3,s_4,s_1)\cdot\frac{d}{dq}\mathsf{G}(q;s_1,s_2,s_3)=0.$$

证明。 由于 $r_{12}=r_{34}=1$，我们有$x=v_{12,\ 1}$ 以及 $\mathsf{C}_{\vec{r}}=-x+v_{34,\ 1}-s_3-s_4$。我们将证明 $[x^{-1}](\mathsf{Z}_{\vec{r}}(q))=0$。由此可得，关于$k=1$ 的 Dyson–Schwinger 方程 (33) 等于

$$[x^{-2}](\mathsf{Z}_{\vec{r}}(q))=0.$$

使用记号 (9)，我们有

$$\mathsf{v}_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}^{\sigma-\mathrm{fix}}=P_3T_{12}+P_1T_{34},\quad \mathsf{v}_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}^{\sigma-\mathrm{mov}}=P_{34}N_{12}K_{34}^*+P_{12}N_{34}K_{12}^*-P_{1234}K_{12}K_{34}^*.$$

注意，特征是 σ-不变的，当且仅当它不依赖于 u。此外，$\mathsf{v}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 是秩为零的复形，而 $\mathsf{v}_{\boldsymbol{\lambda}}^{\sigma-\mathrm{mov}}$的三个直和项的秩均为

z零。因此，我们可以将 $e(-\mathsf{v}_{\boldsymbol{\lambda}})$ 按 x的负幂展开。利用恒等式

$$[x^{-1}]\frac{(x+w+w_1)(x+w+w_2)}{(x+w)(x+w+w_1+w_2)}=0,$$
$$[x^{-2}]\frac{(x+w+w_1)(x+w+w_2)}{(x+w)(x+w+w_1+w_2)}=w_1w_2,$$
$$[x^{-1}]\frac{(x+w)\Big(\prod_{i<j}(x+w+w_i+w_j)\Big)(x+w+w_1+w_2+w_3+w_4)}{\Big(\prod_i(x+w+w_i)\Big)\prod_{i<j<k}(x+w+w_i+w_j+w_k)}=0,$$
$$[x^{-2}]\frac{(x+w)\Big(\prod_{i<j}(x+w+w_i+w_j)\Big)(x+w+w_1+w_2+w_3+w_4)}{\Big(\prod_i(x+w+w_i)\Big)\prod_{i<j<k}(x+w+w_i+w_j+w_k)}=0,$$

其中 i， j， $k\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，不难看出

$$[x^{-1}](e(-\mathsf{v}_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}))=0,$$
$$[x^{-2}](e(-\mathsf{v}_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}))=e(-P_3T_{12})e(-P_1T_{34})\Big(|\lambda_{34}|s_3s_4+|\lambda_{12}|s_1s_2\Big).$$

记 $N\coloneqq M_{Q_2}(r_{12},\ n_{12})$ 其中 $n_{12}:=|\lambda_{12}|$，我们注意到

$$e(-P_3T_{12})=\frac{e(t_1t_2t_3T_N|_P)}{e(t_1t_2T_N|_P)}=\frac{e(t_3\Omega_N|_P)}{e(\Omega_N|_P)}=\frac{e(t_3^{-1}T_N|_P)}{e(T_N|_P)},$$

其中 $P\in N$ 是不动点 λ_{12} 所对应的不动点，并且我们使用了（17）。对所有 $\boldsymbol{\lambda}$求和即可得到结果。□

在 [Nek2 的第10.3节1], 中，解释了如何利用命题2.38的方程推导出显式公式

$$\mathsf{G}(q;s_1,s_2,s_3)=\left(\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^n}\right)^{\frac{(s_1+s_3)(s_2+s_3)}{s_1s_2}}$$

此前已证明，例如见 [CO，第 1]条推论。

对于任意 r_{12}， r_{34}，非微扰 Dyson–Schwinger 方程难以用显式形式表述；参见 [Nek2，第 7.1.2 节，定理 6.1]。当 $r>1$ 时，目前尚无关于其高秩类比的简洁闭式表达

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^n\int_{M_{Q_2}(r,n)}e(T_{M_{Q_2}(r,n)}\otimes e^{-s_3})$$

$\mathsf{G}(q;\ s_1,\ s_2,\ s_3)$。如果形如 (33) 的关系能够唯一刻画这类级数，那将很有意义。

注 2.39。在 [Nek3], Nekrasov 将折纸模空间等价地定义为厄米向量空间之间满足实解析方程、并模去一个 $U(n)$-作用后的线性映射空间。紧性

定理（同上）似乎依赖于折纸模空间的实解析描述。若能给出一个纯代数的证明来证明他的紧致性定理，将会很有意义。

注 2.40. 原则上，对于任意选取的 $\vec{r} \in \mathbb{Z}^{6}_{\geqslant 0}$. ，都应能导出形如 (33) 的非微扰 Dyson–Schwinger 方程。然而，按照 [Nek3]，的记号，紧致性定理是在空间 $\mathfrak{M}^{\infty}_{n}(\vec{r})$ 上证明的。除非秩向量具有如下形式： $r_A,\ r_{A} \geqslant 0$ 其中某个 $A \in \mathbf{6}$ 和 $r_B = 0$ 满足其余条件；否则，空间 $\mathfrak{M}^{\infty}_{n}(\vec{r})$ 严格小于 $\mathfrak{M}^{0}_{n}(\vec{r}) = M_{Q_4}(\vec{r},\ n)$。因此，我们仅在秩向量具有上述形式时，才将 [Nek3 第 8] 节的紧致性定理应用于我们的情形。

例如，若 $r_{12} = r_{23} = 1$ 且 $r_A = 0$ 满足其余条件，化简后，$\int_{[M_{Q_4}(\vec{r},\ 1)]^{\mathrm{vir}}} 1$ 的分母变为

$$s_1 s_2 s_3 (s_1 + s_2 - v_{12,1} + v_{23,1})(s_2 + s_3 - v_{23,1} + v_{12,1}). \tag{35}$$

这可以作如下几何解释。考虑以下余维一子环面

$$\mathbb{T}' := \{(t_a, w_{A,\alpha}) \in \mathbb{T} \,|\, t_1 t_2 w_{12,1}^{-1} w_{23,1} = 1\},$$
$$\mathbb{T}'' := \{(t_a, w_{A,\alpha}) \in \mathbb{T} \,|\, t_2 t_3 w_{12,1} w_{23,1}^{-1} = 1\}$$

它们对应于 (35) 的最后两个因子。利用例 2.7，我们可以验证，$M_{Q_4}(\vec{r},\ 1)$ 的 $\mathbb{T}'$-不动点轨迹是类型 (v) 解的 $B_2 = 0$ 部分，而 $\mathbb{T}''$-不动点轨迹是类型 (iv) 解的 $B_2 = 0$ 部分。特别地，$M_{Q_4}(\vec{r},\ 1)^{\mathbb{T}'}$ 和 $M_{Q_4}(\vec{r},\ 1)^{\mathbb{T}''}$ 同构于 $\mathbb{A}^1$，后者并不紧。注意，分支 (iv) 和 (v) 正是较小模空间 $\mathfrak{M}^{\infty}_{n}(\vec{r})$ 中缺失的分支，而该空间的紧致性定理已在 [Nek3，第 8] 节中得到证明。

3. Framed sheaves description

3.1. 带框架层模空间。 本节中，我们介绍任意维数下的带框架层模空间。我们讨论两种类型的带框架层：一种依赖于有效除子的选取，另一种则不依赖。按照 Huybrechts–Lehn [HL]的术语，我们将前一种称为带框架层，后一种称为 HL-带框架层。

定义 3.1. 设 (X, D) 为一对由光滑射影簇 X 和有效除子 $i\colon D \hookrightarrow X$组成的对象。$(X, D)$ 上的框架层是一个有序对 (E, ϕ)，其中 E 是 X 上的纯相干层，且 $\phi\colon i^{*}E \xrightarrow{\sim} F$ 是一个同构；这里 F 是 D上的一个固定相干层，称为框架层。

定义 3.2. 设 X 为一个光滑射影簇。X上的 HL标架层是一个有序对 (E, ϕ)，其中 E是 X上的相干层，且 $\phi\colon E \to F$是一个态射；这里 F是 X上的一个固定相干层，称为 HL标架层。

注 3.3. 我们可以通过伴随，将每个框架层典范地关联到一个 HL标架层，如下所示。考虑一对 $(X,\ D)$ 以及 D上的一个框架层 F。给定任意一个框架层 $(E,\ \phi)$，同构 $\phi\colon i^{*}E \xrightarrow{\sim} F$ 诱导出一个态射

$\phi\colon E \to i_*F$，我们沿用相同的记号。于是 $(E,\ \phi\colon E \to i_*F)$ 是关于 HL框架层 i_*F 的一个 HL标架层。

尽管带框架层在几何上非常自然，但一般而言，人们对其模空间知之甚少。相反，HL-带框架层的几何性较弱，因为其中允许任意态射而非同构，但对其模空间 [HL] 的了解则更多。具体而言，Huybrechts–Lehn 构造了关于某些稳定性条件的 HL-带框架层射影模空间。本节的主要结果是，在一个相当一般的假设下，对于某种稳定性条件，带框架层是稳定的 HL-带框架层。由此可推论，在该假设下，带框架层模空间是拟射影的。我们利用 HL-带框架层的稳定性条件来刻画带框架层，这一做法受到 Bruzzo–Markushevich [BM, 定理 3.1] 的工作的启发。

设 $(X, \mathcal{O}_X(1))$ 为一个极化光滑射影簇。回忆相干层 E 在 X 上的希尔伯特多项式是唯一的多项式 $P_E(x)$ ，使得$P_E(n) = \chi(X, E(n))$ 对任意整数 n成立。若 E 至多为 d维，则我们有

$$P_E(x) = a_d(E)\frac{x^d}{d!} + a_{d-1}(E)\frac{x^{d-1}}{(d-1)!} + \cdots + a_0(E), \quad a_d(E) \geqslant 0,$$

其中 $a_d(E) = 0$ 当且仅当$\dim(E) < d$。

固定一个HL框架层 F。我们讨论HL-带框架层$(E, \phi\colon\ E \to F)$（维数为$\dim(E) = d$）的稳定性条件。稳定性参数由一个次数严格小于 d 且首项系数为正的多项式$\delta(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 给出。将 (E, ϕ) 的希尔伯特多项式定义为

$$P_{(E,\phi)}(x) = P_E(x) - \epsilon_\phi \cdot \delta(x)$$

其中当 $\phi \neq 0$ 时为 $\epsilon_\phi = 1$ ，当 $\phi = 0$时为 $\epsilon_\phi = 0$ 。若 (E, ϕ) 是一个HL标架层，则任意子层 $E' \subseteq E$通过复合 $\phi'\colon\ E' \subseteq E \xrightarrow{\phi} F$自然地成为HL标架层。对于多项式 $f(x)$与 $g(x)$，若 $f(x) \leqslant g(x)$对 $x \gg 0$成立，则我们称 $f(x) \leqslant g(x)$。

定义 3.4. 一个 d维的HL标架层 (E, ϕ) 是 δ-(半)稳定的，如果 $\phi \neq 0$并且对所有 $0 \subsetneq E' \subsetneq E$ ，我们有

$$a_d(E) \cdot P_{(E',\phi')}(x)\ (\leqslant)\ a_d(E') \cdot P_{(E,\phi)}(x).$$

注意，由此可知，对于一个 δ-半稳定层 (E, ϕ)，$\ker(\phi) = 0$ 或$\ker(\phi)$是纯 d维的。

引理 3.5. 设 $(E、\ \phi)$ 为一个 d维的 δ-稳定HL标架层。则

$$\mathrm{Hom}(E, [E \xrightarrow{\phi} F]) = 0,$$

其中 $[E \xrightarrow{\phi} F]$ 是一个位于0、1次的复形。

证明。利用正合三角 $[E \xrightarrow{\phi} F] \to E \to F \xrightarrow{[1]}$，我们得到

$$\operatorname{Hom}(E, [E \xrightarrow{\phi} F]) = \ker\Big(\operatorname{Hom}_X(E,E) \xrightarrow{\phi\circ -} \operatorname{Hom}_X(E,F)\Big).$$

假设存在非零的 $f\colon\ E \to E$ 使得 $\phi \circ f = 0$。注意到 f不是同构，否则我们将有 $\phi = 0$。因此， $E' \coloneqq \mathsf{im}(f)$ 是 E 的一个非平凡真子层，其诱导的 HL 标架为 $\phi' = 0$。由于 E' 是纯 d维层 $\mathsf{ker}(\phi)$的子层， E' 也是 d维的。由于 $(E,\ \phi)$ 是δ稳定的，我们得到

$$a_d(E)\cdot P_{E'}(x) = a_d(E)\cdot P_{(E',\phi')}(x) \ <\ a_d(E')\cdot P_{(E,\phi)}(x)$$

其中 $a_d(E),\ a_d(E') > 0$。另一方面，考虑 $E'' \coloneqq \mathsf{ker}(f)$ 及其诱导的 HL标架 ϕ''。同样， (E的 δ稳定性， ϕ) 意味着

$$a_d(E)\cdot(P_{E''}(x) - \delta(x)) \leqslant a_d(E)\cdot P_{(E'',\phi'')}(x) \ <\ a_d(E'')\cdot P_{(E,\phi)}(x).$$

由于 $0 \to E'' \to E \to E' \to 0$ 是一个短正合列，我们有

$$P_E(x) = P_{E'}(x) + P_{E''}(x), \quad a_d(E) = a_d(E') + a_d(E'').$$

因此，最后一个不等式可写为

$$a_d(E)\cdot(P_{(E,\phi)}(x) - P_{(E',\phi')}(x)) < (a_d(E) - a_d(E'))\cdot P_{(E,\phi)}(x),$$

这与第一个不等式矛盾。 □

定义 3.6。设 S 是有限型 $\mathbb{C}$-概形。HL-带框架层的 S-族是一个对 $(\mathcal{E}, \Phi)$，其中 S 是 $X \times S$ 上的 $\mathcal{E}$ -平坦相干层，并附带一个态射 $\Phi\colon\ \mathcal{E} \to \pi_1^* F$，其中 $\pi_1\colon\ X \times S \to X$ 表示投影。两个这样的族 $(\mathcal{E}, \Phi)$ 和 $(\mathcal{E}', \Phi')$ 之间的同构是一个同构 $f\colon\ \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'$，满足 $\Phi = \Phi' \circ f$。若沿任意闭点 $s \to S$ 的基变换 $(\mathcal{E}_s, \Phi_s)$ 是 δ-(半)稳定的，则称 HL-带框架层的 S 族 d 维 $(\mathcal{E}, \Phi)$ 为 δ-(半)稳定。

设 $v \in H^*(X, \mathbb{Q})$ 是一个 d 维层的陈特征。上述定义导出一个模函子 $M^{\delta\text{-}(X^{ss}, F)}(v)$（分别为 $M^{\delta\text{-}(X^{st}, F)}(v)$），其取值为_$\delta$-半稳定（分别为_$\delta$-稳定）HL-带框架层 $(E, \phi\colon\ E \to F)$ 在 X 上的同构类，并满足 $\mathsf{ch}(E) = v$，其含义与通常情况相同。

定理 3.7 (Huybrechts–Lehn)。模函子 $M^{\delta\text{-}ss}_{(X,\ F)}(v)$ 由一个射影概形 $M^{\delta\text{-}ss}_{(X,\ F)}(v)$核心表示。此外，存在一个开子概形$M^{\delta\text{-}st}_{(X,\ F)}(v) \subseteq M^{\delta\text{-}ss}_{(X,\ F)}(v)$ 它表示函子 $M^{\delta\text{-}st}_{(X,\ F)}(v)$。

注 3.8. 在 [HL], 中，作者只考虑框架层维数达到最大值的情形，即 $d = $ 维数(X)。不过，他们用于比较 δ-(半)稳定性与 GIT-(半)稳定性的所有结果，早已适用于任意维数的情形，其中最重要的是纯层模空间的构造 [Sim]。另请参阅 [Sal] ，其中讨论了如何针对任意维数 d修改 HL-带框架层的各种概念。

现在，我们将定理 3.7 应用于 d维的带框架层，其定义在 $(X,\ D)$ 并相对于框架层 F ∈凝聚层范畴(D)。本节将在若干处用到以下假设：

(A1) $\dim(F) = d-1$; (A2) D 是丰沛的；(A3) F 是 μ_D-半稳定的，且 $d \geqslant 2$。

当 D 是丰沛的时，我们将考虑极化 $\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_X(D)$。那么，(A3)中的希尔伯特多项式、$\delta$-(半)稳定性和 μ_D-半稳定性（也称为斜率半稳定性）均相对于这一选择而言。

下面的引理表明，对于纯 d维层，按交的维数定义的拓扑横截性与按高阶上同调群消失定义的上同调横截性是等价的。

引理 3.9。 设 $i\colon\ D \hookrightarrow X$ 是一个有效除子，且 E 是 X上的纯 d维层。那么，以下陈述等价：

(1) $\dim(\mathrm{Supp}(E) \cap D) = d-1$ 或 $\mathrm{Supp}(E) \cap D = \varnothing$。

(2) $E \otimes^L \mathcal{O}_D \cong E \otimes \mathcal{O}_D$。(3) $Li^*E \cong i^*E$。

当这些条件满足时，我们有一个短正合列

$$0 \to E(-D) \to E \to E \otimes \mathcal{O}_D \to 0. \tag{36}$$

证明。 由投影公式可知，(2) 与 (3) 等价

$$E \otimes^L i_*\mathcal{O}_D \cong i_*(Li^*E \otimes \mathcal{O}_D) \cong i_*(Li^*E).$$

由于 $\mathcal{O}_D$ 的同调维数为 1，我们有 $\mathcal{T}\text{或}_i(-,\ \mathcal{O}_D) = 0$，其中 $i \geqslant 2$。因此，(2) 等价于 $\mathcal{T}\text{或}_1(E,\ \mathcal{O}_D) = 0$。

假设 (1) 成立。将 E 与 D的理想正合序列作张量积，得到

$$0 \to \mathcal{T}or_1(E, \mathcal{O}_D) \to E(-D) \to E \to E \otimes \mathcal{O}_D \to 0.$$

由于 $\mathcal{T}\text{或}_1(E,\ \mathcal{O}_D)$ 的支撑包含于 $\mathrm{Supp}(E) \cap D$ 中，根据假设，其维数至多为 $(d-1)$。另一方面，E 是纯 d维的。因此，$E(-D)$ 也是如此。这意味着 $\mathcal{T}\text{或}_1(E,\ \mathcal{O}_D) = 0$，故 (2) 成立。

反过来，假设 (2) 成立。则 $\mathcal{T}\text{或}_1(E,\ \mathcal{O}_D) = 0$，并且我们有一个短正合列

$$0 \to E(-D) \to E \to E \otimes \mathcal{O}_D \to 0.$$

因此，$\mathrm{ch}(E \otimes \mathcal{O}_D) = \mathrm{ch}(E) - \mathrm{ch}(E(-D))$ 没有 d维分量。因此，$\dim(\mathrm{Supp}(E) \cap D) = \dim(E \otimes \mathcal{O}_D) \leqslant d-1$。由于 D 是一个除子，根据维数理论基本定理，要么 $\dim(\mathrm{Supp}(E) \cap D) = d-1$，要么 $\mathrm{Supp}(E) \cap D = \varnothing$。□

如果纯的 d 维层 E 满足引理 3.9 中的等价命题之一，那么我们称 E 与 D 横截。

推论 3.10。 如果 (E,ϕ) 是满足 *(A1)* 的 d 维框架层，那么 E 与 D 横截。

证明。 框架定义了一个同构 $i^*E \simeq F$，根据假设 (A1)，其维数为 $d-1$。因此，它满足引理 3.9 的陈述 (1)。□

E 和 i_*F 的希尔伯特多项式可以利用短正合列 (36) 联系起来。

命题 3.11。 设 (E,ϕ) 是满足 *(A1)* 和 *(A2)* 的 d 维框架层。则 $P_E(x)$ 具有如下形式

$$P_E(x) = \frac{a_{d-1}(i_*F)}{d!}x^d + \frac{a_{d-2}(i_*F) + \frac{1}{2}a_{d-1}(i_*F)}{(d-1)!}x^{d-1} + \cdots + \chi(E)$$

且由 $P_{i_*F}(x)$ 和 $\chi(E)$ 决定。

证明。 对短正合列 (36) 取陈特征，得到 in

$$D \cdot \mathrm{ch}(E) = \frac{D}{1-e^{-D}} \cdot \mathrm{ch}(i_*F).$$

根据Hirzebruch–Riemann–Roch定理，我们有

$$\begin{aligned} P_E(x) &= \int_X e^{xD} \cdot \mathrm{ch}(E) \cdot \mathrm{td}(X) \\ &= \chi(E) + \int_X \frac{e^{xD}-1}{D} \cdot \frac{D}{1-e^{-D}} \cdot \mathrm{ch}(i_*F) \cdot \mathrm{td}(X) \\ &= \chi(E) + \sum_{k\geqslant 0} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \int_X D^k \cdot \left(1 + \frac{D}{2} + \cdots\right) \cdot \mathrm{ch}(i_*F) \cdot \mathrm{td}(X) \\ &= \frac{a_{d-1}(i_*F)}{d!}x^d + \frac{a_{d-2}(i_*F) + \frac{1}{2}a_{d-1}(i_*F)}{(d-1)!}x^{d-1} + \cdots + \chi(E). \end{aligned}$$

第三个等式表明， $P_E(x)$ 由 $P_{i_*F}(x)$ 和 $\chi(E)$确定。 □

取 $\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_X(D)$，我们将 d维HL-带框架层的稳定性条件 $\delta(x)$ 写为

$$\delta(x) = \sum_{n=0}^{d-1} \delta_n \frac{x^n}{n!}.$$

我们证明，若相对于框架层 F的拓扑类型， δ_{d-1} 是一个足够小的正数，那么任意框架层 $(E,\ \phi)$ 作为HL标架层都会自动是 δ-稳定的。

命题 3.12. 假设 *(A1)–(A3)* 成立，且满足 $0 < \delta_{d-1} < a_{d-1}(F)$。那么，任意$d$维框架层 (E,ϕ) 都是 *HL* 标架层中的 δ稳定对象。

证明。 设 (E,ϕ) 是 (X,D)上的一个 d维框架层。考虑与之对应的 HL 标架层 ϕ: $E \to i_*F$。我们证明它是 δ稳定的。显然， $\phi \neq 0$，因为它是一个同构的伴随。设 $0 \subsetneq E' \subsetneq E$ 是一个非零真子层。我们需要证明

$$a_d(E)\cdot P_{(E',\phi')}(x) < a_d(E')\cdot P_{(E,\phi)}(x).$$

我们分别分析 ϕ': $E' \subset E \to i_*F$ 为零和非零的情形 .

我们先考虑 ϕ': $E' \to i_*F$ 非零的情形。我们需要证明 t

$$a_d(E)\cdot (P_{E'}(x)-\delta(x)) < a_d(E')\cdot (P_E(x)-\delta(x)). \tag{37}$$

如果我们用 E 内的饱和化替换 E' ，那么 $\phi' \neq 0$ 仍成立， $a_d(E')$ 不变，而且 $P_{E'}(x)$ 不会减小。因此，假设 E' 在 E 内是饱和的。那么 $E'' := E/E'$ 为零或纯 d 维。我们将（容易得多的）情形$E''=0$留给读者，并假设 E'' 是纯 d 维的，从而 $0 < a_d(E') <a_d(E)$。另一方面，（37）的两边都是次数为 d 且首项系数相同的多项式。因此，只需证明 x^{d-1} 项系数之间的不等式

$$\frac{a_{d-1}(E')-\delta_{d-1}}{a_d(E')} < \frac{a_{d-1}(E)-\delta_{d-1}}{a_d(E)}. \tag{38}$$

我们通过应用命题 3.11，将 E 和 E' 的希尔伯特多项式信息替换为支撑在 D 上的层的希尔伯特多项式信息，从而证明（38）。考虑纯 d 维层的正合列 $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ 。由于根据推论 3.10， E 与 D 横截，根据引理 3.9 中横截性的拓扑刻画， E' 和 E'' 也彼此横截。因此，我们得到一个短正合列

$$0 \to E'\otimes \mathcal{O}_D \to E\otimes \mathcal{O}_D \to E''\otimes \mathcal{O}_D \to 0,$$

并将其改写为

$$0 \to i_*F' \to i_*F \to i_*F'' \to 0,$$

对于某个 F'， $F''\in$凝聚层范畴 (D)。注意，这给出了一个框架层 E'，其中 $i^*E' \simeq F'$，且维数为 $\dim(F') = d-1$。将命题 3.11 应用于该框架层和 $(E,\ \phi)$ 后，不等式（38）变为

$$\frac{a_{d-2}(F')+\frac{1}{2}a_{d-1}(F')-\delta_{d-1}}{a_{d-1}(F')} < \frac{a_{d-2}(F)+\frac{1}{2}a_{d-1}(F)-\delta_{d-1}}{a_{d-1}(F)}.$$

这里关键地使用了假设（A3）中的 $d \geqslant 2$ 。该不等式由下式推出

$$0<\delta_{d-1},\quad 0<a_{d-1}(F')<a_{d-1}(F),\quad \text{and}\quad \frac{a_{d-2}(F')}{a_{d-1}(F')} \leqslant \frac{a_{d-2}(F)}{a_{d-1}(F)}.$$

最后一个不等式利用了假设（A3）所给出的 F 的 μ_D-半稳定性 .

现在考虑 ϕ': $E' \to i_*F$ 为零的情况。我们需要证明

$$a_d(E)\cdot P_{E'}(x) < a_d(E')\cdot (P_E(x)-\delta(x)). \tag{39}$$

注意，$\phi' = 0$ 意味着 E' 是 $E(-D) = \ker(E \to i_*F)$ 的子层。我们断言存在某个 $n \geqslant 1$，使得 $E' \subseteq E(-nD)$ 且 $E' \nsubseteq E(-(n+1)D)$。反之，假设并非如此。那么我们有

$$0 \subsetneq E' \subseteq \bigcap_{n \geqslant 1} E(-nD) =: E_\infty.$$

根据 Krull 定理，$\mathrm{Supp}(E_\infty) \cap D = \varnothing$。然而，由于 E_∞ 是二维的，D 的丰性意味着 $\mathrm{Supp}(E_\infty) \cap D \neq \varnothing$，从而导致矛盾。因此，存在一个 $n \geqslant 1$，使得 $E' \subseteq E(-nD)$，但 $E' \nsubseteq E(-(n+1)D)$。

令 $\widetilde{E} := E'(nD) \subseteq E$。那么 $\widetilde{\phi}$：根据 n 的选取，$\widetilde{E} \subseteq E \xrightarrow{\phi} i_*F$ 非零。这使我们可以采用处理 $\phi' \neq 0$ 情形时的论证。特别地，在 $\widetilde{\ }$ 中，我们可以假设 E 在 E 中是饱和的，因此对于某个 $\widetilde{F} \subseteq F$，有 $i^*E \simeq F$。同样，我们将较容易的情形 $E = E$ 留给读者，并假设 $E \subsetneq E$。将命题 3.11 应用于 $(E, i^*E \simeq F)$，得到

$$\begin{aligned} P_{E'}(x) &= P_{E'(nD)}(x-n) = P_{\widetilde{E}}(x-n) \\ &= a_{d-1}(\widetilde{F})\frac{(x-n)^d}{d!} + \left(a_{d-2}(\widetilde{F}) + \frac{a_{d-1}(\widetilde{F})}{2}\right)\frac{(x-n)^{d-1}}{(d-1)!} + \cdots \\ &= a_{d-1}(\widetilde{F})\frac{x^d}{d!} + \left(a_{d-2}(\widetilde{F}) + \frac{a_{d-1}(\widetilde{F})}{2} - n \cdot a_{d-1}(\widetilde{F})\right)\frac{x^{d-1}}{(d-1)!} + \cdots . \end{aligned}$$

因此，不等式 (39) 可由 x^{d-1}-系数对应的不等式推出，即

$$\frac{a_{d-2}(\widetilde{F}) + \frac{1}{2}a_{d-1}(\widetilde{F}) - n \cdot a_{d-1}(\widetilde{F})}{a_{d-1}(\widetilde{F})} < \frac{a_{d-2}(F) + \frac{1}{2}a_{d-1}(F) - \delta_{d-1}}{a_{d-1}(F)}$$

或者，等价地，

$$\frac{a_{d-2}(\widetilde{F})}{a_{d-1}(\widetilde{F})} - n < \frac{a_{d-2}(F) - \delta_{d-1}}{a_{d-1}(F)}.$$

这可由以下不等式推出：

$$n \geqslant 1, \quad \delta_{d-1} < a_{d-1}(F), \quad \text{and} \quad \frac{\alpha_{d-2}(\widetilde{F})}{\alpha_{d-1}(\widetilde{F})} \leqslant \frac{\alpha_{d-2}(F)}{\alpha_{d-1}(F)}.$$

最后一个不等式用到了假设（A3）中 F 的 μ_D-半稳定性 . □

推论 3.13。若 (E, ϕ) 是一个满足假设（*A1*）–（*A3*）的 d 维框架层，则 $\mathrm{Hom}_X(E, E(-D)) = 0$。

证明。取命题 3.12 中的稳定性条件 δ。则相应的 HL标架层 ϕ: $E \to i_*F$是 δ-稳定的。由于 $[E \xrightarrow{\phi} i_*F] \simeq E(-D)$，该结论由引理 3.5 得出。□

现在我们将上述命题应用于带框架层的模理论。首先定义带框架层的模函子。

定义 3.14. 设 S 是一个有限型 $\mathbb{C}$-概形。一个 S 族的 d 维带框架层，是一对 $(\mathcal{E}, \Phi)$，其中包含一个 S-平坦相干层 $\mathcal{E}$（定义在 $X \times S$ 上），对所有闭点 $s \in S$，其纤维 $\mathcal{E}_s$ 都是纯 d 维的；此外还配有一个同构 $\Phi\colon i^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \pi_1^* F$，其中 $i\colon D \times S \hookrightarrow X \times S$ 表示包含，$\pi_1\colon D \times S \to D$ 表示投影。两个这样的族 $(\mathcal{E}, \Phi)$ 和 $(\mathcal{E}', \Phi')$ 之间的同构，是一个满足 $\Phi = \Phi' \circ i^*(f)$ 的同构 $f\colon \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'$。

在假设 (A1) 下，带框架层与除子 D 横截。因此，它们在除子上的限制在族中表现良好。

命题3.15。 假设 *(A1)* 成立。若 $(\mathcal{E}, \Phi)$ 是一个 S-平坦的 d 维带框架层族，则 $Li^*\mathcal{E} \cong i^*\mathcal{E}$ 在 S 上平坦。

证明。 根据推论 3.10，对于每个闭点$s \in S$， $\mathcal{E}_s$ 都与除子 D 横截。由于该命题是关于 X 的局部命题，我们不妨假设 X 是仿射的。设$f\colon X \to \mathbb{A}^1$ 是一个正则函数，使得嘉当除子 $D = f^{-1}(0)$。在 [LW, Cor. 3.4], 的证明中，已证明存在一个包含 $\{0\} \times S$ 的开子集 $U \subseteq \mathbb{A}^1 \times S$，使得 $\mathcal{E}|_U$ 在 U 上平坦。因此， $Li^*\mathcal{E} \cong i^*\mathcal{E}$ 在 S 上平坦。 □

设 $v \in H^*(X, \mathbb{Q})$ 是一个 d 维层的陈特征。这定义了一个模函子 $M_{(X, D, F)}(v)$，其对象为d 维带框架层$(E, \phi\colon i^*E \simeq F)$ 在 (X, D) 上的同构类，满足 $\mathsf{ch}(E) = v$。根据伴随和命题 3.12，我们有一个自然映射

$$\underline{M}_{(X,D,F)}(v) \to \underline{M}^{\delta\text{-}st}_{(X, i_* F)}(v)$$

在假设 (A1)–(A3) 下。我们证明该映射是一个开嵌入。

引理 3.16. 假设 *(A1)–(A3)* 成立，且 $0 < \delta_{d-1} < a_{d-1}(F)$。那么态射 $M_{(X,D,F)}(v) \to M^{\delta\text{-}st}_{(X, i_* F)}(v)$ 是一个开嵌入。

证明。 设给定一个 S-平坦的 d 维 δ-稳定 HL-带框架层族 $(\mathcal{E}, \Phi\colon \mathcal{E} \to \pi_1^*(i_* F))$ 在 $X \times S$ 上。我们证明，由带框架层构成的 $s \in S$ 的轨迹是一个开子集。回顾一下，$\mathcal{E}_s$ 为纯层的轨迹定义了一个开子集 $U_1 \subseteq S$。此外，带框架层要求与 D 横截。根据[LW，推论 3.4], ，满足此条件的轨迹构成一个开子集 $U_2 \subseteq U_1$，且 $i^*(\mathcal{E}|_{U_2})$ 在 U_2 上平坦。现在考虑伴随态射 $\Phi|_{U_2}\colon i^*(\mathcal{E}|_{U_2}) \to \pi_1^* F$，它介于 U_2-平坦层之间。限制 $\Phi_s\colon i^*\mathcal{E}_s \to F$ 为满射的轨迹定义了一个开子集 $U_3 \subseteq U_2$。在此轨迹上，根据中山引理，态射 $\Phi|_{U_3}\colon i^*(\mathcal{E}|_{U_3}) \to \pi_1^* F$ 是满射。其核仍是一个 U_3-平坦层，因此 $\Phi_s\colon i^*\mathcal{E}_s \to F$ 为同构的轨迹构成若干连通分支$U_4 \subseteq U_3$。这里我们利用了 $Li^*\mathcal{E}_s \cong i^*\mathcal{E}_s$，并且由于固定了 v，$\mathsf{ch}(i^*\mathcal{E}_s) = \mathsf{ch}(Li^*\mathcal{E}_s)$ 与 $\mathsf{ch}(F)$ 要么相同，要么不同。换言之， $U_4 \subseteq S$ 恰好是带框架层的轨迹，因而可证其为开集。 □

推论 3.17。 假设 *(A1)–(A3)* 成立。则模函子 $M_{(X,\ D,\ F)}(v)$ 由一个拟射影概形 $M_{(X,\ D,\ F)}(v)$ 表示。

证明。 此结果由引理 3.16 和定理 3.7 得出。 □

3.2. **导出结构**。 本节讨论带框架层模空间的导出增强。设 $(X,\ D)$ 分别为一个光滑射影簇和一个有效除子。将 X （分别为 D）上的完美复形所构成的导出叠记为

$$\overline{\mathbf{M}}_X := \mathsf{Map}(X, \mathbf{Perf}) \quad \big(\text{resp. } \overline{\mathbf{M}}_D := \mathsf{Map}(D, \mathbf{Perf})\big),$$

这些对象构造于 [TV] 中。沿嵌入 $i\colon D \to X$ 拉回，得到一个态射 $Li^*\colon \mathbf{M}_X \to \mathbf{M}_D$。一个完美框架层 $F \in$ 凝聚层范畴(D) 给出 $\mathbf{M}_D$ 中的一个点。通过同伦纤维图定义 $\mathbf{M}_{(X,\ D,\ F)}$

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbf{M}}_{(X,D,F)} & \longrightarrow & \overline{\mathbf{M}}_X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Li^*} \\ \{F\} & \longrightarrow & \overline{\mathbf{M}}_D. \end{array}$$

设 $f = f_E\colon X \to \mathbf{Perf}$ 为 $\mathbf{M}_X$ 中由 X 上的一个完美复形 E 确定的点。考虑切复形的正合三角

$$\mathbb{T}_{Li^*,f} \to \mathbb{T}_{\overline{\mathbf{M}}_X,f} \to \mathbb{T}_{\overline{\mathbf{M}}_D,f\circ i} \xrightarrow{[1]}$$

相对于态射 $Li^*\colon \mathbf{M}_X \to \mathbf{M}_D$。这可以改写为

$$R\Gamma(X, Lf^*\mathbb{T}_{\mathbf{Perf}}(-D)) \to R\Gamma(X, Lf^*\mathbb{T}_{\mathbf{Perf}}) \to R\Gamma(X, i_*Li^*Lf^*\mathbb{T}_{\mathbf{Perf}}) \xrightarrow{[1]}$$

通过将 $Lf^*\mathbb{T}_{\mathbf{Perf}}$ 与 D的理想正合序列进行张量积得到，参见 [Spa，第 3]节。由于对于万有完美复形 $\mathcal{U}$有 $\mathbb{T}_{\mathbf{Perf}} = R\mathcal{H}om(\mathcal{U},\ \mathcal{U})[1]$，我们可以进一步用完美复形 E来改写该正合三角

$$R\operatorname{Hom}_X(E, E(-D))[1] \to R\operatorname{Hom}_X(E, E)[1] \to R\operatorname{Hom}_D(Li^*E, Li^*E)[1] \xrightarrow{[1]}.$$

当 $2D \in |-K_X|$时，相对切复形 $R\mathbf{Hom}_X(E,\ E(-D))[1]$满足

$$R\operatorname{Hom}_X(E, E(-D))[1] \cong (R\operatorname{Hom}_X(E, E(-D))[1])^\vee[2-\dim(X)]$$

由塞尔对偶可得。这一对偶性表明，$\mathbf{M}_{(X,\ D,\ F)}$ 可能具有移位辛结构。此类结构的存在性已在 [Spa] 中得到证明。[18]

定理 3.18 (Spaide)。 如果 $2D \in |-K_X|$，那么 $\mathbf{M}_{(X,\ D,\ F)}$配备了一个 $(2-$维数$(X))$-移位辛结构。

[18]在 [Spa，定理 0.3], 的记号下，我们取 $Y = \mathbf{Perf},\ E = 0$ 其基映射 $f\colon D \to Y$对应于 D上的完美凝聚层 F。引文中关于映射叠为局部有限表现的导出阿廷叠这一假设，由 [Toe，推论 3.3] 得到满足。

设 $\mathbf{M}_{(X,\ D,\ F)} \subseteq \overline{\mathbf{M}}_{(X,\ D,\ F)}$ 为沿对应于 X 上纯相干层轨迹的开导出子堆 $\mathbf{M}_X \subseteq \mathbf{M}_X$ 对 $\overline{\mathbf{M}}_{(X,\ D,\ F)}$ 作拉回所得。类似地，用 $\mathbf{M}_D \subseteq \mathbf{M}_D$ 表示 D 上凝聚层的开导出子堆。根据定义，$\mathbf{M}_{(X,\ D,\ F)}$ 是参数化如下对象的导出模空间堆：X 上的纯相干层 E，以及其上的同构 $\phi\colon Li^*E \xrightarrow{\sim} F$，该同构定义在 D 上。

假设 (A1) 成立，并令 $\gamma \in H^{2\dim(X)-4}(X,\ \mathbb{Q})$ 为与 X 中某个二维闭子概形的类庞加莱对偶的对象。我们将 $\mathbf{M}_{(X,\ D,\ F)}(v) \subseteq \mathbf{M}_{(X,\ D,\ F)}$ 记为参数化固定拓扑类型 v 对象的开闭子叠，即 $\mathsf{ch}(E) = v = (0,\ .....,\ 0,\ \gamma,\ *,\ *) \in H^{\mathrm{even}}(X,\ \mathbb{Q})$。于是，$\mathbf{M}_{(X,\ D,\ F)}(v)$ 给出模空间叠 $M_{(X,\ D,\ F)}(v)$ 的导出增强，也就是说，[19]

$$t_0(\mathbf{M}_{(X,D,F)}(v)) = \underline{M}_{(X,D,F)}(v).$$

这里用到了命题3.15（尤其是 (A1)）。这一构造尤其在模空间叠 $M_{(X,\ D,\ F)}(v)$ 上定义了一个障碍理论（不一定是二项的），其切复形等于

$$R\operatorname{Hom}_X(E, E(-D))[1] \tag{40}$$

在点 $(E, \phi\colon\ i^*E \xrightarrow{\sim} F)$。我们注意到，在维数 $(X) = 4$ 的情形下，该切复形的秩为 $-\gamma^2$。

推论3.19. 假设 *(A1)* 成立，$F \in$ 凝聚层范畴 (D) 是完美的，且 $2D \in |-K_X|$。则 $M_{(X,D,F)}(v)$ 的导出增强 $\mathbf{M}_{(X,D,F)}(v)$ 具有一个 $(2 -$ 维数 $(X))$-移位辛结构。

证明。将 $\mathbf{M}_{(X,D,F)}$ 的 $(2 -$ 维数 $(X))$-移位辛结构限制到开导出子堆 $\overline{\mathbf{M}}_{(X,D,F)}(v)$。□

为方便起见，我们将四维簇情形记录为一个独立完整的陈述。

定理 3.20. 设 $(X、\ D)$ 为一个光滑射影四维簇，并带有满足 $2D \in |-K_X|$ 的丰有效除子 D。设 $F \in$ 凝聚层范畴 (D) 为一个完美的 μ_D-半稳定一维层。则二维带框架层的模空间 $M_{(X,D,F)}(v)$ 是一个拟射影概形，并具有一个 (-2)-移位辛导出增强。特别地，$M_{(X,D,F)}(v)$ 具有一个三项对称障碍理论，带有自对偶三项局部自由解，该理论是各向同性的，且虚维数为 $-\frac{1}{2}\gamma^2$。

证明. 结合推论 3.17 和 3.19。特别地，自对偶的三项局部自由分解的存在性由 $M_{(X,\ D,F)}(v)$ 的拟射影性（推论 3.17）以及 [OT, Prop. 4.1] 推出。(-2)-移位辛导出增强的存在性由 [OT, Prop. 4.3, Thm. 4.6] 蕴含内禀正规锥的各向同性性质。□

[19] 稍微滥用一下记号，$M_{(X,D,F)}(v)$ 表示一个栈，其对应的经典模空间函子已在定义 3.14 中定义。

注记 3.21. 存在一种不涉及导出几何的“经典”方法，用以在 $M_{(X,D,F)}(v)$ 上构造障碍理论。考虑经典截断 $M_X = t_0(\mathbf{M}_X)$, $M_D = t_0(\mathbf{M}_D)$ 上的限制态射$r = Li^*$: $M_X \to M_D$。设 $\mathcal{U}$、$\mathcal{U}'$ 分别为 $M_X \times X$、$M_D \times D$ 上的泛复形，并用 π 表示到第一分支的投影。令 i 亦表示 i 到 $M_X \times X$ 的基变换，则有 $Li^*\mathcal{U} \cong L(r \times \mathrm{id}_D)^*\mathcal{U}'$。考虑自然正合三角

$$R\mathcal{H}om_\pi(\mathcal{U},\mathcal{U}(-D)) \longrightarrow R\mathcal{H}om_\pi(\mathcal{U},\mathcal{U}) \xrightarrow{\alpha} R\mathcal{H}om_\pi(\mathcal{U}, i_*Li^*\mathcal{U}) \xrightarrow{[1]}.$$

由伴随，我们有 $R\mathcal{H}om_\pi(\mathcal{U}, i_*Li^*\mathcal{U}) \cong Lr^*R\mathcal{H}om_\pi(\mathcal{U}',\mathcal{U}')$。定义 $\mathbb{E} := (R\mathcal{H}om_\pi(\mathcal{U}, \mathcal{U})[1])^\vee$ 与 $\mathbb{F} := (R\mathcal{H}om_\pi(\mathcal{U}',\mathcal{U}')[1])^\vee$，我们得到一个图表

$$\begin{array}{ccccccc} Lr^*\mathbb{F} & \xrightarrow{(\alpha[1])^\vee} & \mathbb{E} & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ Lr^*\mathbb{L}_{M_D} & \longrightarrow & \mathbb{L}_{M_X} & \longrightarrow & \mathbb{L}_{M_X/M_D} & \xrightarrow{[1]} & \end{array}$$

其中竖直箭头由 $\mathcal{U}$、$\mathcal{U}'$ 的 Atiyah 类所诱导，且该方块因 Atiyah 类的函子性而交换。补全该图表后，我们得到一个态射

$$\mathbb{G} \to \mathbb{L}_{M_X/M_D}, \quad \mathbb{G} \cong (R\mathcal{H}om_\pi(\mathcal{U},\mathcal{U}(-D))[1])^\vee,$$

由 [Man, (3.13)]，它是一个相对障碍理论。它对每个完美标架层 $F \in$ 凝聚层范畴(D) 在 $M_{(X,D,F)}(v)$ 上诱导一个障碍理论。类似的构造见 [KLT，命题 3.3.2] 。这一方法不足以推出定理 3.20 中的各向同性性质。

3.3. **通过带框架层描述折纸分区函数**。本节考虑一个特定的带框架层模空间，它与第 2 节讨论的四维 ADHM 箭图的稳定表示模空间密切相关。

令 (X, D) 为满足 $2D \in |-K_X|$ 的以下特定一对

$$X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \quad D = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \,|\, z_1z_2z_3z_4 = \infty\}.$$

对每个 $A \in \mathbf{6}$，定义一个坐标曲面

$$S_A := \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in X \,|\, z_{\bar{a}} = z_{\bar{b}} = 0\}, \quad \overline{A} = \{\bar{a} < \bar{b}\}$$

并将其与除子的交记为 $\ell_A := S_A \cap D$。那么 $S_A \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$和 ℓ_A 是由两个 $\mathbb{P}^1$组成的一条链，它们交于一点。

回顾一下，模空间 $M_{Q_4}(\vec{r}, n)$ 取决于秩向量 $\vec{r} = (r_A)_{A\in\mathbf{6}}$和瞬子数 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$。要将 $M_{Q_4}(\vec{r}, n)$ 与框架层模空间进行比较，我们需要选择合适的框架层和拓扑类型。我们定义相对于 $\vec{r}$ 的框架层如下：

$$F_{\vec{r}} := \bigoplus_A \mathcal{O}_{\ell_A}^{\oplus r_A} \in \mathrm{Coh}(D).$$

作为 $\ell_A = S_A \cap D$，相对于 $F_{\vec{r}}$ i 的框架层最简单的例子 s

$$E = \bigoplus_A \mathcal{O}_{S_A}^{\oplus r_A}, \quad \phi\colon i^*E \xrightarrow{\sim} F_{\vec{r}},$$

其中 ϕ 对应恒等映射。我们将其视为“瞬子数”为零的框架层。对于一般的“瞬子数” $n \geqslant 0$，我们选取陈特征 $v_{\vec{r},\ n} \in H^*(X,\ \mathbb{Q})$，使得

$$v_{\vec{r},n} = \mathrm{ch}\left(\bigoplus_A \mathcal{O}_{S_A}^{\oplus r_A}\right) - n[\mathrm{pt}] = \big(0, 0, \sum_A r_A[S_A], 0, -n\big),$$

其中第二个等式由 Grothendieck–Riemann–Roch 以及 $N_{S_A/(\mathbb{P}^1)^4} \cong \mathcal{O}_{S_A} \oplus \mathcal{O}_{S_A}$这一事实得出。

注 3.22。若 $(E,\ \phi\colon\ i^*E \xrightarrow{\sim} F)$ 是一个框架层，则命题 3.11 表明，希尔伯特多项式 $P_E(x)$ 由希尔伯特多项式 $P_{i_*F}(x)$决定，但相差一个由 $\chi(E)$确定的整数。这里，我们实质上通过固定 $i_*\,\mathsf{ch}(F)$ 和瞬子数 $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，对陈特征 $\mathsf{ch}(E)$ 做了同样的处理。

定义 3.23。关于秩向量 $\vec{r}$ 和瞬子数 n，(X, D) 上的二维带框架层的模空间定义为

$$M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r}, n) := M_{(X,D,F_{\vec{r}})}(v_{\vec{r},n}).$$

接下来，我们定义 $(\mathbb{C}^*)^4 \times (\mathbb{C}^*)^r$ 和 $\mathbb{T} := T \times (\mathbb{C}^*)^r$ 在 $M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r}, n)$上的作用，其中 $T = Z(t_1t_2t_3t_4 - 1)$ 和 $r := \sum_A r_A$ 与前面相同。$(\mathbb{P}^1)^4 \backslash D$ 上点的作用由下式给出:

$$(t_1, t_2, t_3, t_4) \cdot (p_1, p_2, p_3, p_4) = (t_1p_1, t_2p_2, t_3p_3, t_4p_4),$$

该作用扩展为在 $(\mathbb{P}^1)^4$ 上的作用，并保持 D 不变。此外，$(\mathbb{C}^*)^4$ 保持曲面 S_A 和曲线 ℓ_A 不变。对于每个 $t = (t_1, t_2, t_3, t_4) \in (\mathbb{C}^*)^4$，我们将诱导的自同构记为 t:
$(\mathbb{P}^1)^4 \to (\mathbb{P}^1)^4$。令$w = (w_{A,\alpha}) \in (\mathbb{C}^*)^r$。则 (t, w) 将框架层 $[(E, \phi)] \in M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r}, n)$ 映为

$$(t^*E, \quad t^*E|_D \xrightarrow{t^*\phi} t^*F_{\vec{r}} \cong F_{\vec{r}} \xrightarrow{w} F_{\vec{r}}),$$

其中 $t^*F_{\vec{r}} \cong F_{\vec{r}}$ 是等变结构 $t^*\mathcal{O}_{\ell_A} \cong \mathcal{O}_{\ell_A}$ 与 w 的直和，它通过对角矩阵 $\mathrm{diag}(w_{A、1}、\ldots\ldots、w_{A、r_A})$作用于 $F_{\vec{r}}$ 的直和项 $\mathcal{O}_{\ell_A}^{\oplus r_A}$。

定理 3.24。模空间 $M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r}, n)$ 是一个拟射影概形，并具有一个 (-2)-移位辛导出增强。特别地，$M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r}, n)$ 具有一个三项对称障碍理论

$$\phi_{\mathrm{fr}}\colon E_{\mathrm{fr}}^\bullet \to \tau^{\geqslant -1}\mathbb{L}_{\mathcal{M}}, \quad (E_{\mathrm{fr}}^\bullet)^\vee[2] \overset{\theta_{\mathrm{fr}}}{\cong} E_{\mathrm{fr}}^\bullet, \quad \mathrm{vd} := \frac{1}{2}\,\mathrm{rk}(E_{\mathrm{fr}}^\bullet) = -\sum_{A \in \underline{\mathbf{3}}} r_A r_{\overline{A}}$$

它是各向同性的。此外，$M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r}, n)$ 带有一个 $\mathbb{T}$-作用，相对于该作用，三项对称障碍理论是 $\mathbb{T}$-等变的。

证明。我们验证 $M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r},n)$ 满足定理 3.20 的假设。除子 D 显然是丰沛的，并且满足 $2D \in |-K_X|$。由于 $\ell_A \hookrightarrow D$ 是局部完全交，$\mathcal{O}_{\ell_A}$ 作为 D 上的相干层是完美的，因此 $F_{\vec{r}}$ 也是如此。另一方面，$\mathcal{O}_{\ell_A}$ 是 μ_D-稳定的，并且对于每个 $A \in \mathbf{6}$，层 $\mathcal{O}_{\ell_A}$ 具有相同的 μ_D-斜率。因此，$F_{\vec{r}}$ 是 μ_D-半稳定的。我们还计算

$$\Big(\sum_A r_A[S_A]\Big)^2 = 2\sum_{A\in\underline{\mathbf{3}}} r_A r_{\overline{A}}.$$

最后，我们注意到，障碍理论是 $\mathbb{T}$-等变的（事实上是 $(\mathbb{C}^*)^4 \times (\mathbb{C}^*)^r$-等变的）。此外，存在一个 $(\mathbb{C}^*)^4$-等变同构

$$K_{(\mathbb{P}^1)^4} \cong \mathcal{O}(-2D)\otimes(t_1t_2t_3t_4).$$

因此，根据 Grothendieck–Verdier 对偶，我们有一个同构

$$\theta_{\mathrm{fr}}\colon (E_{\mathrm{fr}}^\bullet)^\vee[2] \cong E_{\mathrm{fr}}^\bullet \otimes (t_1t_2t_3t_4)^{-1}, \quad \theta_{\mathrm{fr}}^\vee[2] = \theta_{\mathrm{fr}} \otimes (t_1t_2t_3t_4).$$

Th因此，障碍理论在限制到 $\mathbb{T}$ 后是等变对称的 .
□

令 ℓ_∞ 表示 $\{(z_1,z_2)\,|\,z_1z_2 = \infty\} \subset \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 并考虑模空间 $M_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(r,n)$，它参数化由以下数据组成的对 (E,ϕ)：$\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 上的秩为 r 的无挠层 E，满足条件 $c_2(E) = n$，以及一个同构 $\phi\colon E|_{\ell_\infty} \to \mathcal{O}_{\ell_\infty}^{\oplus r}$.[20]

命题 3.25. 假设 $r_{12} = r$ 且 $r_A = 0$ 其他条件成立。那么存在一个$\mathbb{T}$-等变同构

$$M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r},n) \cong M_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(r,n).$$

证明。识别 $S_{12} = \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$后，有一个显然的态射

$$f\colon M_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(r,n) \to M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r},n),$$

由于同构 $N_{S_{12}/(\mathbb{P}^1)^4} \cong \mathcal{O}\oplus\mathcal{O}$ 和 Grothendieck–Riemann–Roch，陈类相等。我们首先证明 f 是一个双射。设 $[(E,\ \phi)] \in M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r},\ n)$。只需证明概形论支撑 $S := \mathrm{Supp}(E)$等于 S_{12}，从而 $[(E,\ \phi)]$ 属于 f的像。我们先证明 S 在集合论意义下等于 S_{12}，方法是证明对于任意$t \in \mathbb{P}^1\backslash\{0\}$，都有 $S\cap Z(z_4-t) = S\cap Z(z_3-t) = \varnothing$。反设不然。不失一般性，我们可以假设$S\cap Z(z_4-t)\neq\varnothing$。于是 $S\cap Z(z_4-t)$ 的维数至少为 1，因此它与丰沛除子 $D = \{z_1z_2z_3z_4 = \infty\}$相交，即

$$\varnothing \neq S\cap Z(z_4-t)\cap D = \ell_{12}\cap Z(z_4-t),$$

这显然矛盾。接下来，我们注意到 $E|_D \simeq \mathcal{O}_{\ell_{12}}^{\oplus r}$，这意味着在概形论意义下$S\cap D = \ell_{12}$。因此，$S$ 在一般点处既约。然后，E的纯性意味着 $S = S_{12}$，正如所声称的那样。

[20]这为传统框架层模空间提供了一种等价描述，即存在一个等变同构 $M_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(r,n) \cong M_{\mathbb{P}^2}(r,n)$。

现在我们证明 f 是一个同构。回忆一下， $M_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(r,\ n)$ 是维数为 $2rn$ 的光滑空间，其在 $[(E,\ \phi)]\in M_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(r,\ n)$ 处的切空间由 $\mathrm{Ext}^1_{S_{12}}(E,\ E(-\ell_{12}))$给出。另一方面，利用（40）， $M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r},\ n)$ 在 $f([E,\ \phi)])$ 处的切空间由下式给出

$$\mathrm{Ext}^1_{(\mathbb{P}^1)^4}(i_*E, i_*E(-D))$$

其中 $i\colon\ S_{12}\hookrightarrow(\mathbb{P}^1)^4$ 是自然嵌入。由于 $N_{S_{12}/(\mathbb{P}^1)^4}\cong\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}$, $L_qi^*i_*E\cong E\otimes\Lambda^qN^*_{S_{12}/(\mathbb{P}^1)^4}$, 以及 $\mathrm{Hom}_{S_{12}}(E,\ E(-\ell_\infty))\ \cong\ 0\ \cong\mathrm{Ext}^2_{S_{12}}(E,\ E(-\ell_\infty))$ （推论 3.13），我们推得

$$\mathrm{Ext}^1_{(\mathbb{P}^1)^4}(i_*E, i_*E(-D))\cong\mathrm{Ext}^1_{S_{12}}(E, E(-\ell_{12})).$$

这一论证还证明了 $M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r},\ n)$中各点处的扎里斯基切空间的维数均为 $2rn$。由于 f 是双射，这意味着 $M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r},\ n)$ 是既约的，因而是光滑的。因此， f 是光滑簇之间的双射态射，且定义在$\mathbb{C}$上，所以它是同构。□

命题 3.26。 存在一个 $\mathbb{T}$-等变的概形同构

$$M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r},n)^{(\mathbb{C}^*)^r}\ \cong\ \bigsqcup_{\sum_{A,\alpha}n_{A,\alpha}=n}\ \prod_{A,\alpha}M_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(1,n_{A,\alpha}),$$

其中，不交并遍历所有分解 $\sum_{A,\alpha}n_{A,\alpha}=n$。

证明。 通过取直和，可以得到一个从右向左的显然映射。现在我们描述从左向右的映射。设 $[(E,\phi)]\in M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r},n)$ 是 $(\mathbb{C}^*)^r$-不动的。那么对每个 $w\in(\mathbb{C}^*)^r$，都存在一个同构 g_w: $E\to E$，使得图表

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F_{\vec{r}} \\ {\scriptstyle g_w}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w} \\ E & \longrightarrow & F_{\vec{r}} \end{array}$$

可交换，其中水平箭头是限制 $E\to E|_D$ 与ϕ: $E|_D\cong F_{\vec{r}}$复合而成的。由推论 3.13，自然映射

$$\mathrm{Hom}_X(E,E)\hookrightarrow\mathrm{Hom}_X(E,E|_D)$$

是单射，这意味着 g_w 由该图表唯一确定。特别地，对所有 $v,w\in(\mathbb{C}^*)^r$，都有 $g_{vw}=g_v\circ g_w$。 换言之， E 是 $(\mathbb{C}^*)^r$-等变的。就 $(\mathbb{C}^*)^r$-权而言，存在一个分解

$$F_{\vec{r}}=\bigoplus_{A,\alpha}\mathcal{O}_{\ell_A}\otimes\chi_{A,\alpha},$$

其中 $\chi_{A,\alpha}\colon\ (\mathbb{C}^*)^r\to\mathbb{C}^*$ 是由 $\chi_{A,\alpha}(w)=w_{A,\alpha}$ 定义的特征。考虑权重为 $\chi_{A,\alpha}$ 的特征层 $E_{\chi_{A,\alpha}}\subset E$。由于映射 $E\to E|_D\cong F_{\vec{r}}$ 是等变的，有序对 $(E_{\chi_{A,\alpha}},\phi|_{E_{\chi_{A,\alpha}}})$ 是一个框架层，并且根据命题 3.25，其支撑为 S_A。由于 $\mathrm{ch}_2(E)=\sum_A r_A[S_A]$，层 $E_{\chi_{A,\alpha}}$ 在其支撑上的秩为 1，并且对于所有

$\chi \notin (\chi_{A,\alpha})$。记 $n_{A,\alpha} = -\mathsf{ch}_4(E_{\chi_{A,\alpha}})$（对于作为 S_A 上的层的 $E_{\chi_{A,\alpha}}$，即为 $c_2(E_{\chi_{A,\alpha}})$），我们指定了一个元素

$$[(E_{\chi_{A,\alpha}}, \phi|_{E_{\chi_{A,\alpha}}})] \in M_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(1, n_{A,\alpha}).$$

可以验证，上述两个映射互为逆映射 r.

与命题2.4的证明一样，这些论证适用于有限型基底 $\mathbb{C}$ 概形 S 上的族，从而根据 Fog 定理 2.3]，将上述双射扩展为概形同构。该论证用到这样一个事实：对于定义 3.14 中的带框架层族 $(\mathcal{E},\ \phi)$，我们仍有单射 $\mathrm{Hom}_{X\times S}(\mathcal{E},\ \mathcal{E}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{X\times S}(\mathcal{E},\ \mathcal{E}|_{D\times S})$。□

由等变同构

$$M_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(1,n) \cong \mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2), \tag{41}$$

我们得到以下两个推论。

推论 3.27。 $\mathbb{T}$-不动点轨迹 $M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r},n)^{\mathbb{T}}$ 由标记为以下对象的约化点组成

$$\underline{\boldsymbol{\lambda}} = (\lambda_{A,\alpha})_{A\in\underline{\mathbf{6}},\,1\leqslant\alpha\leqslant r_A}, \quad |\underline{\boldsymbol{\lambda}}| = \sum_{A,\alpha}|\lambda_{A,\alpha}| = n,$$

其中每个$\lambda_{A,\ \alpha}$ 都是一个整数分拆。

推论 3.28. 存在一个概形同构

$$M_{Q_4}(\vec{r},n)^{(\mathbb{C}^*)^r} \cong M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r},n)^{(\mathbb{C}^*)^r}.$$

证明. 应用命题 2.4、3.26 和 (41)。 □

使用第 2.5 节的记号，我们回顾一下，对于 $P \in M_{Q_4}(\vec{r},\ n)^{\mathbb{T}}$，有

$$\begin{aligned}(E^\bullet_{Q_4})^\vee|_P &= (T_{\mathcal{A}}|_P - \Lambda|_P) + (T_{\mathcal{A}}|_P - \Lambda|_P)^* \\ &= -\sum_A N_A N_A^* t_{\overline{A}} + \mathsf{v}_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}} + \mathsf{v}_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}^* \in K_0^{\mathbb{T}}(\mathrm{pt})\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{A} \coloneqq A_{\widehat{Q}_4}(\vec{r},\ n)$。

命题 3.29. 对于任意 $P \in M_{Q_4}(\vec{r},\ n)^{\mathbb{T}} \cong M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r},\ n)^{\mathbb{T}}$，有

$$(E^\bullet_{Q_4})^\vee|_P = (E^\bullet_{\mathrm{fr}})^\vee|_P \in K_0^{\mathbb{T}}(\mathrm{pt}).$$

证明。 利用关系 $t_1t_2t_3t_4 = 1$，我们有

$$P_{\phi(A)} + P^*_{\phi(A)} t_A^{-1} = P_{\overline{A}}, \quad P_{\phi(A)}P_A + P^*_{\phi(A)}P^*_A = P_{1234}, \tag{42}$$

对所有 $A \in \mathbf{6}$ 均成立。

令 $\underline{\boldsymbol{\lambda}}$ 为对应于不动点 P 的整数分拆集合。由 (9) 和 (42) 中 $\mathsf{v}_{\boldsymbol{\lambda}}$ 的定义可得

$$-\sum_A N_A N_A^* t_{\overline{A}} + \mathsf{v}_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}} + \mathsf{v}_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}^* = -\sum_A N_A N_A^* t_{\overline{A}} + \sum_{A,B}\left(P_{\overline{A}} N_A K_B^* + P_{\overline{A}}^* N_A^* K_B - P_{1234} K_A K_B^*\right).$$

记 $X := (\mathbb{P}^1)^4$。令 $Z_{A,\alpha} \subset \mathbb{C}^2 \subset S_A \subset X$ 为对应于 $\lambda_{A,\alpha}$ 的零维子概形，并记 $I_{Z_{A,\alpha}/S_A} \subset \mathcal{O}_{S_A}$ 为其理想层。接下来只需证明 $R\mathrm{Hom}_X(E_{\boldsymbol{\lambda}}, E_{\boldsymbol{\lambda}}(-D))[1]$ 由相同的表达式给出，其中

$$E_{\boldsymbol{\lambda}} := \bigoplus_{A,\alpha} I_{Z_{A,\alpha}/S_A} \otimes w_{A,\alpha}$$

并且 $I_{Z_{A,\alpha}/S_A}$ 被视为 X 上的二维层。

利用恒等映射 $I_{Z_{A,\alpha}} = \mathcal{O}_{S_A} - \mathcal{O}_{Z_{A,\alpha}}$ 以及 X 上的塞尔对偶，这归结为计算

$$R\mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_{S_A}, \mathcal{O}_{S_B}(-D)),\ R\mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_{S_A}, \mathcal{O}_{Z_{B,\beta}}(-D)),\ R\text{同调}_X(\mathcal{O}_{Z_{A,\alpha}}\ \mathcal{O}_{Z_{B,\beta}}(-D)).$$

最后一项的计算来自一个相当标准的论证，其中涉及局部到整体谱序列以及如 [MNOP]中的Čech上同调。结果为

$$R\mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_{Z_{A,\alpha}}, \mathcal{O}_{Z_{B,\beta}}(-D)) = \frac{P_{1234}}{t_1 t_2 t_3 t_4} K^*_{A,\alpha} K_{B,\beta}.$$

对于第二项，定义 $\mathbb{T}$-不变量除子 $D_a = Z(z_a)$ 和 $D_a = Z(1/z_a)$。那么

$$\begin{aligned} &D = D_1 + D_2 + D_3 + D_4, \\ &\mathcal{O}(-\widetilde{D}_a) \cong \mathcal{O}(-D_a) \otimes t_a, \\ &\mathcal{O}(-D_a)|_{X\setminus D} \cong \mathcal{O}, \\ &D_{\bar{a}}|_{S_A} = D_{\bar{b}}|_{S_A} = 0, \end{aligned} \tag{43}$$

对于任意 $A = \{a < b\}$，其中 $\bar{A} = \{a \bar{<} b\}$。接下来，我们使用 $\mathbb{T}$-等变解消

$$0 \to \mathcal{O}(-\widetilde{D}_{\bar{a}} - \widetilde{D}_{\bar{b}}) \to \mathcal{O}(-\widetilde{D}_{\bar{a}}) \oplus \mathcal{O}(-\widetilde{D}_{\bar{b}}) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{S_A} \to 0,$$

它与（43）结合，得到

$$\begin{aligned} R\mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_{S_A}, \mathcal{O}_{Z_{B,\beta}}(-D)) =& R\Gamma(X, \mathcal{O}_{Z_{B,\beta}}(-D)) - R\Gamma(X, \mathcal{O}_{Z_{B,\beta}}(\widetilde{D}_{\bar{a}} - D)) - \\ & R\Gamma(X, \mathcal{O}_{Z_{B,\beta}}(\widetilde{D}_{\bar{b}} - D)) + R\Gamma(X, \mathcal{O}_{Z_{B,\beta}}(\widetilde{D}_{\bar{a}} + \widetilde{D}_{\bar{b}} - D)) \\ =& P^*_{\bar{A}} \cdot K_{B,\beta}. \end{aligned}$$

对于第一项，回顾

$$\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-1,-1)) = \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-1,0)) = \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(0,-1)) = 0, \quad \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}) = 1,$$

以上结论均在 $(\mathbb{C}^*)^2$-等变意义下成立。结合（43），我们得出

$$R\mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_{S_A}, \mathcal{O}_{S_B}(-D)) = \delta_{A\pitchfork B} \cdot t_A,$$

其中我们定义

$$\delta_{A\pitchfork B} := \begin{cases} 1 & \text{if } B = \bar{A} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

所需的 $R\mathrm{Hom}_X(E_{\boldsymbol{\lambda}}, E_{\boldsymbol{\lambda}}(-D))[1]$ 可通过对所有贡献求和得到。□

注 3.30。 一个值得探讨的问题是，定理 3.24 中关于 $\mathcal{M} := M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r},\ n)$ 的障碍理论是否存在定向，从而可以构造虚循环和结构层

$$[\mathcal{M}]^{\mathrm{vir}} \in A^{\mathbb{T}}_{\mathrm{vd}}(\mathcal{M}), \quad \mathrm{vd} = -\sum_{A\in\underline{\mathbf{3}}} r_A r_{\overline{A}}, \quad \widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}_{\mathcal{M}} \in K^{\mathbb{T}}_0(\mathcal{M})_{\mathrm{loc}}.$$

假设 Oh–Thomas 定位公式成立，并在每个不动点处选取某种明确的符号，便可对不变量给出一个朴素的定义

$$\int_{[\mathcal{M}]^{\mathrm{vir}}} 1 := \sum_{P\in\mathcal{M}^{\mathbb{T}}} \pm\frac{1}{\sqrt{(-1)^{\mathrm{vd}} e(E^{\bullet}_{\mathrm{fr}}|^{\vee}_P)}}, \quad \chi(\mathcal{M},\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}_{\mathcal{M}}) := \sum_{P\in\mathcal{M}^{\mathbb{T}}} \pm\frac{1}{\sqrt{(-1)^{\mathrm{vd}}\widehat{\Lambda}_{-1}(E^{\bullet}_{\mathrm{fr}}|_P)}}$$

（不变量取决于这些符号的选择）。当然，这样任意选取的符号未必来自一个全局定向。参照推论 3.28，可以采用第 2.5 节中的符号选择（如第 2.6 节所计算）。那么显然，命题 3.29 允许我们用带框架层来描述定义 2.16 中的折纸分区函数，即

$$\mathsf{Z}^K_{\vec{r}}(q) = \frac{1}{\mathsf{C}^K_{\vec{r}}}\sum_{n=0}^{\infty} q^n \chi(M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r},n),\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}), \quad \mathsf{C}^K_{\vec{r}} = \chi(M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r},0),\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{vir}}),$$

上同调生成级数也有类似的描述。若能证明存在一个 $\mathbb{T}$-等变同构，便可为折纸分区函数的这一给出以正当依据

$$M_{Q_4}(\vec{r},n) \cong M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r},n)$$

该同构需与障碍理论相容，随后再采用左侧按照第 2.5 节构造的定向。下一节将提出存在这样一个等变同构的猜想。

3.4. **主要猜想**。 以下猜想将四维 ADHM 箭图的稳定表示的模空间与 $(\mathbb{P}^1)^4$ 上二维带框架层的模空间联系起来。它可以视为 Barth 的结果 (2) [Bar] 的猜想性推广。

猜想 3.31。 对任意 $(\vec{r}、\ n)$，存在一个 $\mathbb{T}$-等变同构

$$M_{Q_4}(\vec{r},n) \cong M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r},n).$$

此外，在此同构下存在一个 $\mathbb{T}$-等变交换图

$$\begin{array}{ccc} E^{\bullet}_{Q_4} & \xrightarrow{\ \cong\ } & E^{\bullet}_{\mathrm{fr}} \\ \downarrow & \swarrow & \\ \tau^{\geqslant -1}\mathbb{L}_{M_{Q_4}(\vec{r},n)} & & \end{array}$$

其中顶部同构使对称配对 θ_{Q_4}、 θ_{fr} 相互缠结。

支持该猜想的证据包括推论 3.28 中在 $(\mathbb{C}^*)^r$-不动轨迹层面上的同构，以及命题 3.29 中对 $\mathbb{T}$-不动点处虚切特征的比较。下文我们将建立推论 3.28 的一个更强版本。

~回顾命题 2.10，存在一个由 $J_A = 0$ 定义的闭子概形 $M_{Q_4}(\vec{r}, n) \hookrightarrow M_{Q_4}(\vec{r}, n)$，它与 $\mathrm{Quot}_{\mathbb{C}^4}\Big(\bigoplus_A \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2_A}^{\oplus r_A}, n\Big)$ 同构。猜想指出，这个 Quot 概形也应当包含在带框模空间$M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r}, n)$中。事实上，存在一个态射

$$f\colon \mathrm{Quot}_{\mathbb{C}^4}\Big(\bigoplus_A \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2_A}^{\oplus r_A}, n\Big) \to M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r}, n)$$

它将一个商[21]

$$0 \to E \to \bigoplus_A \mathcal{O}_{S_A}^{\oplus r_A} \to Q \to 0$$

其 $\mathrm{Supp}(Q) \subset \mathbb{C}^4 = (\mathbb{P}^1)^4 \backslash D$ 为 的对象映到一个框架层 (E, ϕ)，其中 ϕ 是复合

$$E \subseteq \bigoplus_A \mathcal{O}_{S_A}^{\oplus r_A} \to \bigoplus_A \mathcal{O}_{S_A}^{\oplus r_A}\Big|_D \simeq \bigoplus_A \mathcal{O}_{\ell_A}^{\oplus r_A}.$$

注意，这确实定义了一个框架层，因为 E 和 $\bigoplus_A \mathcal{O}_{S_A}^{\oplus r_A}$ 在除子 D 上一致。

命题 3.32。 态射 f 是一个闭嵌入。此外， f 属于一个交换图

$$\begin{array}{ccccc}
M_{Q_4}(\vec{r}, n)^{(\mathbb{C}^*)^r} & \hookrightarrow & \widetilde{M}_{Q_4}(\vec{r}, n) & \hookrightarrow & M_{Q_4}(\vec{r}, n) \\
\Big|\wr \text{ Corollary 3.28} & & \Big|\wr \text{ Proposition 2.10} & & \\
M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r}, n)^{(\mathbb{C}^*)^r} & \hookrightarrow & \mathrm{Quot}_{\mathbb{C}^4}\Big(\bigoplus_A \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2_A}^{\oplus r_A}, n\Big) & \hookrightarrow & M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r}, n).
\end{array}$$

证明。 一旦证明 f 是闭嵌入，就很容易验证 $\widetilde{M}_{Q_4}(\vec{r}、\ n)$ 和 $\mathrm{Quot}_{\mathbb{C}^4}\Big(\bigoplus_A \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2_A}^{\oplus r_A}、\ n\Big)$ 都包含 $(\mathbb{C}^*)^r$-不动点轨迹，并且命题 2.10 中的同构与推论 3.28 中的同构相容。为了证明态射 f 是闭嵌入，只需证明它是真单态射 [Sta, Tag 04XV]。

我们首先证明 f 是单态射，也就是说，它在 T-点之间定义了一个单射，其中 T 是任意有限型基 $\mathbb{C}$-概形。为简化记号，令

[21]令 $j\colon \mathbb{C}^4 \to (\mathbb{P}^1)^4$ 为 D 的补集的开嵌入。于是我们可以将 $\mathbb{C}^4$ 上的 $\bigoplus_A \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2_A}^{\oplus r_A} = j^*(\bigoplus_A \mathcal{O}_{S_A}^{\oplus r_A}) \to Q$ 的商与 $(\mathbb{P}^1)^4$ 上的伴随商 $\bigoplus_A \mathcal{O}_{S_A}^{\oplus r_A} \to j_*Q$ 等同起来。

$E_{\vec{r}} \coloneqq \bigoplus_A \mathcal{O}_{S_A}^{\oplus r_A}$ 和 $F_{\vec{r}} \coloneqq E_{\vec{r}}\big|_D = \bigoplus_A \mathcal{O}_{\ell_A}^{\oplus r_A}$。考虑 Quot 概形的两个 T-值点

$$0 \to \mathcal{E}_i \xrightarrow{\iota_i} E_{\vec{r}} \boxtimes \mathcal{O}_T \to \mathcal{Q}_i \to 0, \quad i = 1, 2. \tag{44}$$

假设它们定义了相同的 T 带框架层族，即存在一个同构 $\mathcal{E}_1 \xrightarrow{\phi} \mathcal{E}_2$，使得下图交换

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E}_1 & \xrightarrow{\iota_1} & E_{\vec{r}} \boxtimes \mathcal{O}_T & \twoheadrightarrow & F_{\vec{r}} \boxtimes \mathcal{O}_T \\ \downarrow{\scriptstyle \phi} & & & & \| \\ \mathcal{E}_2 & \xrightarrow{\iota_2} & E_{\vec{r}} \boxtimes \mathcal{O}_T & \twoheadrightarrow & F_{\vec{r}} \boxtimes \mathcal{O}_T. \end{array} \tag{45}$$

令 $X \coloneqq (\mathbb{P}^1)^4$，并记 $p\colon X \times T \to T$ 为投影。短正合列 (44) 诱导出一个长正合列

$$\begin{aligned} 0 \to p_* \mathcal{H}om(\mathcal{Q}_i, E_{\vec{r}} \boxtimes \mathcal{O}_T) \to \operatorname{End}_X(E_{\vec{r}}) \otimes \mathcal{O}_T \to p_* \mathcal{H}om(\mathcal{E}_i, E_{\vec{r}} \boxtimes \mathcal{O}_T) \\ \to \mathscr{E}xt_p^1(\mathcal{Q}_i, E_{\vec{r}} \boxtimes \mathcal{O}_T) \to \cdots. \end{aligned}$$

对于任意闭点 $t \in T$，我们断言

$$\operatorname{Hom}_X(\mathcal{Q}_{i,t}, E_{\vec{r}}) = 0, \quad \operatorname{Ext}_X^1(\mathcal{Q}_{i,t}, E_{\vec{r}}) = 0.$$

第一个消失结论源于以下事实：$\mathcal{Q}_{i,\,t}$ 是零维的，而 $E_{\vec{r}}$ 是纯二维的。最后一项 $\operatorname{Ext}_X^1(\mathcal{Q}_{i,\,t},\ E_{\vec{r}}) \simeq \operatorname{Ext}_X^3(E_{\vec{r}},\ \mathcal{Q}_{i,\,t} \otimes K_X)^*$ 也因以下原因而消失。谱序列的各项

$$H^p(X, \mathcal{E}xt^q(E_{\vec{r}}, \mathcal{Q}_{i,t} \otimes K_X)) \Rightarrow \operatorname{Ext}_X^{p+q}(E_{\vec{r}}, \mathcal{Q}_{i,t} \otimes K_X)$$

由于局部Ext层是零维的，因此当 $p > 0$ 时为零。此外，$E_{\vec{r}}$ 的同调维数为 2，这意味着 $\mathcal{E}xt^3(E_{\vec{r}},\ \mathcal{Q}_{i,\,t} \otimes K_X) = 0$。由于 $\mathcal{E}_i$ 和 $E_{\vec{r}} \boxtimes \mathcal{O}_T$ 是 T-平坦的，我们可推出

$$p_* \mathcal{H}om(\mathcal{Q}_i, E_{\vec{r}} \boxtimes \mathcal{O}_T) = 0, \quad \mathscr{E}xt_p^1(\mathcal{Q}_i, E_{\vec{r}} \boxtimes \mathcal{O}_T) = 0,$$

由 [BPS、Kor. 1]，因此 $\operatorname{End}_X(E_{\vec{r}}) \otimes \mathcal{O}_T \cong p_* \mathcal{H}om(\mathcal{E}_i,\ E_{\vec{r}} \boxtimes \mathcal{O}_T)$。取 $i = 1$~ ~ 并取整体截面，我们看到，对于某个 $\phi \in \Gamma(T,\ \mathcal{O}_T) \otimes_{\mathbb{C}} \operatorname{End}_X(E_{\vec{r}})$，有 $\iota_2 \circ \phi = \phi \circ \iota_1$。

将 (45) 限制到 $D \times T \hookrightarrow X \times T$，我们得到

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E}_1\big|_{D\times T} & \longrightarrow & E_{\vec{r}}\big|_D \boxtimes \mathcal{O}_T & = & F_{\vec{r}} \boxtimes \mathcal{O}_T \\ \downarrow{\scriptstyle \phi|_{D\times T}} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\phi}|_{D\times T}} & & \| \\ \mathcal{E}_2\big|_{D\times T} & \longrightarrow & E_{\vec{r}}\big|_D \boxtimes \mathcal{O}_T & = & F_{\vec{r}} \boxtimes \mathcal{O}_T, \end{array}$$

其中左边的方形和大方形均可交换。由于现在所有水平箭头都是~同构，右边的方形也可交换。特别地，$\phi|_{D\times T}$ 是恒等映射。此外，限制映射

$$\operatorname{End}_X(E_{\vec{r}}) \otimes_{\mathbb{C}} \Gamma(T, \mathcal{O}_T) \to \operatorname{End}_D(F_{\vec{r}}) \otimes_{\mathbb{C}} \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$$

很容易看出这是一个同构，并且将恒等映射映到恒等映射。由此可得$\tilde{}$， $\phi = \mathrm{id}$。我们得出结论： $\iota_2 \circ \phi = \iota_1$，且这两个 T-值点属于同一个 Quot 概形。

现在我们证明 f 是适当的。只需证明存在一个笛卡尔方块

$$\mathrm{Quot}_{\mathbb{C}^4}\Big(\bigoplus_A \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2_A}^{\oplus r_A}, n\Big) \xrightarrow{\quad f \quad} M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r}, n)$$

$$\mathrm{Quot}_{(\mathbb{P}^1)^4}\Big(\bigoplus_A \mathcal{O}_{S_A}^{\oplus r_A}, n\Big) \overset{\bar{f}}{\dashrightarrow} M^{\delta(x)\text{-}st}_{((\mathbb{P}^1)^4, i_* F_{\vec{r}})}(v_{\vec{r},n})$$

其中 $\delta(x) = \delta_1 x + \delta_0$ 是某个 $0 < \delta_1 < a_1(F)$ 的 HL 稳定性条件（命题 3.12）。构造出该图表后，由于左下项是射影的，且右下项是分离的， f 的适当性便随之成立。令

$$0 \to E \to E_{\vec{r}} \to Q \to 0$$

为 $(\mathbb{P}^1)^4$的 Quot 概形中的一个点。我们希望证明 $(E,\ \phi)$ 是 $\delta(x)$-稳定的，其中 ϕ 定义为以下复合

$$E \subseteq E_{\vec{r}} \twoheadrightarrow E_{\vec{r}}\big|_D = i_* F_{\vec{r}}.$$

特别地，我们有 $\epsilon_\phi = 1$。一旦确立了 $\delta(x)$-稳定性，态射 f 便定义良好，并且可以验证所得图表是笛卡尔的。

令 $0 \subsetneq E' \subsetneq E$ 为任意非零真子层。令 ϕ' 为复合$E' \subset E \xrightarrow{\phi} i_* F_{\vec{r}}$。为了证明 $(E,\ \phi)$的 $\delta(x)$-稳定性，我们必须证明

$$a_2(E)(a_1(E') - \epsilon_{\phi'} \cdot \delta_1) \leqslant a_2(E')(a_1(E) - \epsilon_\phi \cdot \delta_1) \tag{46}$$

并且，每当等号成立时，我们有

$$a_2(E)(a_0(E') - \epsilon_{\phi'} \cdot \delta_0) < a_2(E')(a_0(E) - \epsilon_\phi \cdot \delta_0). \tag{47}$$

根据 $\epsilon_{\phi'}$ 的取值，我们分两种情况讨论。首先，假设 $\epsilon_{\phi'} = 1$，即 $\phi' \neq 0$。由于 $E_{\vec{r}}$ 是 Gieseker D- 半稳定的，并且 E 与 E' 在 Q 的零维支撑之外相同，我们有

$$a_2(E)a_1(E') \leqslant a_2(E')a_1(E).$$

当 $a_2(E') < a_2(E)$ 时，我们推得 (46) 严格成立。当 $a_2(E') = a_2(E)$ 时，我们只需处理 $a_1(E') = a_1(E)$ 的情况。但此时 $a_0(E') < a_0(E)$ ，且 (47) 成立。

现在，我们假设 $\epsilon_{\phi'} = 0$，即 $\phi' = 0$。在这种情况下，我们有 $E' \subseteq E_{\vec{r}}(-D)$。于是，$E_{\vec{r}}(-D)$ 的 Gieseker D-半稳定性意味着

$$a_2(E)a_1(E') = a_2(E(-D))a_1(E') \leqslant a_2(E')a_1(E(-D)) = a_2(E')(a_1(E) - D^2 \operatorname{ch}_2(E)).$$

由于 D 是丰沛的，我们可以（统一地）选取足够小的 δ_1 ，使得（46）成立且为严格不等式。□

$\widetilde{\ }$**例 3.33**。考虑 $r_{12} = r_{34} = 1$的情形。于是，根据命题 2.31， $M_{Q_4}(\vec{r},\ n) \cong M_{Q_4}(\vec{r},\ n)$ 。记 $M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r},\ n)^{\mathrm{main}}$ 为包含该连通闭子概形的连通分支

$$\widetilde{M}_{Q_4}(\vec{r}, n) \cong \mathrm{Quot}_{\mathbb{C}^4}\Big(\bigoplus_A \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2_A}^{\oplus r_A}, n\Big), \tag{48}$$

wh此处我们使用命题 2.10、2.13 和 3.32。因此，我们有一个闭嵌入

$$f\colon M_{Q_4}(\vec{r}, n) \hookrightarrow M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r}, n)^{\mathrm{main}}.$$

由簇的反函数定理 [Har, Thm. 14.9]，可知，若 $d_P f$ 在所有闭点 P 处均为满射，则 f 诱导底层既约簇之间的同构。

取 $n = 1$、 $M_{Q_4}(\vec{r},\ 1)$ 是既约的，且如例 2.6 所述。 f 的像中的元素可按如下方式刻画。回顾一下，Quot 概形轨迹参数化了如下形式的 $\mathcal{O}_{S_{12}} \oplus \mathcal{O}_{S_{34}}$ 的商

$$0 \to E \to \mathcal{O}_{S_{12}} \oplus \mathcal{O}_{S_{34}} \to Q \to 0, \tag{49}$$

其中 Q 是支撑在点 $p \in \mathbb{C}^2_{12} \cup \mathbb{C}^2_{34}$ 处的摩天大楼层，且 $\mathbb{C}^2_A = S_A \backslash D$。若 $p \in \mathbb{C}^2_{12} \backslash \{o\}$ （分别为 $p \in \mathbb{C}^2_{34} \backslash \{o\}$），则 E 同构于 $I_{p \in S_{12}} \oplus \mathcal{O}_{S_{34}}$（分别为 $\mathcal{O}_{S_{12}} \oplus I_{p \in S_{34}}$），其中 $I_{p \in S_A} \subset \mathcal{O}_{S_A}$ 表示相应的理想层，并将其视为 $(\mathbb{P}^1)^4$ 上的层。若 $p = o$，则定义商 (49) 相当于选取 $\mathcal{O}_{S_{12}}|_o \oplus \mathcal{O}_{S_{34}}|_o$ 的一个一维商。因此，这类点由一支铅笔 $\mathbb{P}^1_{[s:t]}$ 参数化。在同构 (48) 下，这些商对应于例 2.6 中分支 (iii) 的点。对于 $[1:\ 0] \in \mathbb{P}^1$ （分别为 $[0:\ 1] \in \mathbb{P}^1$），子层 E 同构于 $I_{o \in S_{12}} \oplus \mathcal{O}_{S_{34}}$ （分别为 $\mathcal{O}_{S_{12}} \oplus I_{o \in S_{34}}$）。对于 $[s:\ t]$，且 s 和 t 均非零时，子层 E 同构于 $\mathcal{O}_{S_{12} \cup S_{34}}$。像 (48) 中各点处的扎里斯基切空间维数可通过标准的（但冗长的）Ext 群计算得出。除对称情形外，它们为

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{(\mathbb{P}^1)^4}(E, E(-D)) = \begin{cases} 2 & \text{if} \quad E = I_{p \in S_{12}} \oplus \mathcal{O}_{S_{34}} \text{ for } p \in \mathbb{C}^2_{12} \backslash \{o\}, \\ 3 & \text{if} \quad E = I_{o \in S_{12}} \oplus \mathcal{O}_{S_{34}}, \\ 1 & \text{if} \quad E = \mathcal{O}_{S_{12} \cup S_{34}}. \end{cases}$$

这些计算为猜想 3 提供了以下额外证据。 31

$$M_{Q_4}(\vec{r}, 1) \cong M_{(\mathbb{P}^1)^4}(\vec{r}, 1)^{\mathrm{main}}_{\mathrm{red}}.$$

References

[Arb] N. Arbefeld, *a surface K-theoretic Donaldson-Thomas theory and the Hilbert scheme of points on* 8 2001 587 625 ，《代数几何》（ ）–。[AKL] N. Arbesfeld、M. Kool 和 T. Laarakker, *Vafa-Witten invariants from wall-crossing for framed sheaves* ，准备中。[AB] M. F. Atiyah 和 R. Bott, *The moment map and equivariant cohomology*, 《拓扑学》23（1984）1–28。[ADHM] M. F. Atiyah、V. G. Drinfeld、N. J. Hitchin 和 Y. I. Manin, *Construction of instantons*, 《物理学快报 A》65（3）（1978）185–187。

[BPS] C. B ˘ ˘ *Variation der globalen Ext in Deformationen kompakter komplexer Räume* 250 1980 135 155
anica、M. Putinar 和 G. Schumacher，，《数学年刊》（）–。[Bar] W. Barth, *Moduli of vector bundles on the projective plane*，《数学发明》42（1977）63–91。[Beh] K. Behrend, *Donaldson–Thomas type invariants via microlocal geometry*，《数学年刊》170（2009）1307–1338。[BF1] K. Behrend 和 B. Fantechi, *The intrinsic normal cone*，《数学发明》128（1997）45–88。[BF2] K. Behrend 和 B. Fantechi, *Symmetric obstruction theories and Hilbert schemes of points on threefolds* 2 3 2008 313 345 ，《代数数论》（）（）–。[Bif] E. Bifet, *Sur les points fixes du schéma* Quot $\mathcal{O}_X^r/X/k$ *sous l'action du tore* $\mathbb{G}_{m,k}^r$，《巴黎科学院院报》S´er. I Math. 309（1989）609–612。[Boj] A. Bojko, *Orientations for DT invariants on quasi-projective Calabi–Yau 4-folds*，《数学进展》388（2021）107859。[BJ] D. Borisov 和 D. Joyce, *Virtual fundamental classes for moduli spaces of sheaves on Calabi-Yau four-folds* 21 2017 3231 3311 ，《几何与拓扑》（）–。[BBG] A. Borodin、V. Gorin 和 A. Guionnet, *Gaussian asymptotics of discrete β-ensembles*，《高等科学研究所数学出版物》125（2017）1–78。[Bri] M. Brion, *Equivariant Chow groups for torus actions*，《变换群》2（1997）225–267。[BM] U. Bruzzo 和 D. Markushevich, *Moduli of framed sheaves on projective surfaces*，《数学文献》16（2011）399–410。[CGJ] Y. Cao、J. Gross 和 D. Joyce, *Orientability of moduli spaces of Spin(7)-instantons and coherent sheaves on Calabi–Yau 4-folds* 368 2020 107134 ，《数学进展》（）。[CK] Y. Cao 和 M. Kool, *Zero-dimensional Donaldson–Thomas invariants of Calabi–Yau 4-folds* 338 2018 601 648 ，《数学进展》（）–。[CKM] Y. Cao、M. Kool 和 S. Monavari, *K-theoretic DT/PT correspondence for toric Calabi–Yau 4-folds* 396 2022 225 264 ，《数学物理通讯》（）–。[CL] Y. Cao 和 N. C. Leung, *Donaldson-Thomas theory for Calabi-Yau 4-folds*, arXiv:1407.7659。[CNO] E. Carlsson、N. Nekrasov 和 A. Okounkov, *Five dimensional gauge theories and vertex operators* 14 2014 39 61 ，《莫斯科数学杂志》（）–。[CO] E. Carlsson 和 A. Okounkov, *Exts and Vertex Operators*，《杜克数学杂志》161（2012）1791–1815。[CB] W. Crawley-Boevey, *Geometry of the moment map for representations of quivers*，《组合数学》126（2001）257–293。[DHSM] B. Davison、L. Hennecart 和 S. Schlegel Mejia, *BPS algebras and generalised Kac-Moody algebras from 2-Calabi-Yau categories* 2303 12592 ，arXiv: . . [Don] S. K. Donaldson, *Instantons and geometric invariant theory*，《数学物理通讯》93（1984）453–460。[EG] D. Edidin 和 W. Graham, *Equivariant intersection theory*，《数学发明》131（1998）595–634。[FM] N. Fasola 和 S. Monavari, *Tetrahedron instantons in Donaldson–Thomas theory*，《数学进展》462（2025）110099。[Fog] J. Fogarty, *Fixed point schemes*，《美国数学杂志》95（1）（1973）35–51。[Gon] R. P. Gonzales, *Equivariant operational Chow rings of T-linear schemes*，《数学文献》20（2015）401–432。[GP] T. Graber 和 R. Pandharipande, *Localization of virtual classes*，《数学发明》135（1999）487–518。[Har] J. D. Harris, *Algebraic geometry*，《数学研究生教材》133，Springer，纽约，1995。

[HL] D. Huybrechts 和 M. Lehn, *Framed modules and their moduli*, 《国际数学杂志》6 (1995) 297–324。[JKS] J. Jelisiejew、R.F. Schmiermann 和 M. KOOL, *Behrend's function is not constant on* $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{A}^3)$, 《几何与拓扑》29 (2025) 4469–4476。[JU] D. Joyce 和 M. Upmeier, *Bordism categories and orientations of moduli spaces*, arXiv:2503.20456。[KO] B. Kim 和 J. Oh, *Localized Chern characters for 2-periodic complexes*, 《Selecta Mathematica》(2022) 28:23。[KN1] T. Kimura 和 G. Noshita, *Gauge origami and quiver W-algebras*, 《高能物理杂志》2405 (2024) 208。[KN2] T. Kimura 和 G. Noshita, *Gauge origami and quiver W-algebras II: Vertex function and beyond quantum q-Langlands correspondence*, 即将在《纯粹数学进展研究》中发表, arXiv:2404.17061。[KN3] T. Kimura 和 G. Noshita, *Gauge origami and quiver W-algebras III: Donaldson–Thomas qq-characters*, 《高能物理杂志》( )。2503 2025 050
[KN4] T. Kimura 和 G. Noshita, *Gauge origami and quiver W-algebras IV: Pandharipande–Thomas qq-characters*, 即将在《高能物理杂志》发表, arXiv: . . 2508 12125
[KR] M. KOOL 和 J. Rennemo, *Proof of a magnificent conjecture*, arXiv:2507.02852。[Kuh] N. Kuhn, *Spin structures on perfect complexes*, arXiv:2410.20623。[KLT] N. Kuhn、H. Liu 和 F. Thimm, *holds The 3-fold K-theoretic DT/PT vertex correspondence*, 即将在《几何与拓扑》发表, arXiv: . . 2311 15697
[LW] J. Li 和 B. Wu, *Good degeneration of Quot-schemes and coherent systems*, 《数学分析与几何通讯》23 (2015) 841–921。[Liu1] H. Liu, *A representation-theoretic approach to qq-characters*, 《SIGMA》18 (2022) 090, 共20页。[Liu2] H. Liu, *Semistable refined Vafa-Witten invariants*, 《代数几何》, 即将发表。[Man] C. Manolache, *Virtual pull-backs*, 《代数几何杂志》21 (2012) 201–245。[MNOP] D. Maulik、N. Nekrasov、A. Okounkov 和 R. Pandharipande, *Gromov-Witten theory and Donaldson–Thomas theory I*, 《组合数学》( ) – 。142 2006 1263 1285 , ,
[Mon] S. Monavari, *Gauge origami on broken lines*, arXiv:2502.07149。[Nak] H. Nakajima, *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*, 美国数学学会大学讲座丛书第18卷, 美国数学学会, 罗得岛州普罗维登斯, 1999。[Nek1] N. Nekrasov, *Seiberg-Witten prepotential from instanton counting*, 《理论与数学物理进展》7(5) (2003) 831–864。[Nek2] N. Nekrasov, *BPS/CFT correspondence: non-perturbative Dyson–Schwinger equations and qq-characters*, 《高能物理杂志》( )。03 181 2016
[Nek3] N. Nekrasov, *BPS/CFT correspondence II: instantons at crossroads moduli and compactness theorem*, 《理论与数学物理进展》( ) – 。21 2017 503 583
[Nek4] N. Nekrasov, *BPS/CFT correspondence III: gauge origami partition function and qq-characters*, 《数学物理通讯》( ) – 。358 2018 863 894
[Nek5] N. Nekrasov, *BPS/CFT correspondence IV: sigma models and defects in gauge theory*, 《数学物理快报》109 (2019) 579–622。[Nek6] N. Nekrasov, *BPS/CFT correspondence V: BPZ and KZ equations from qq-characters*, arXiv:1711.11582。[Nek7] N. Nekrasov, *Magnificent Four*, 《亨利·庞加莱研究所年刊 D辑》7 (2020) 505–534。[NO] N. Nekrasov 和 A. Okounkov, *Membranes and sheaves*, 《代数几何》3 (2016) 320–369。[NT] N. Nekrasov 和 A. Tsymbaliuk, *Surface defects in gauge theory and KZ equation*, 《数学物理快报》112 (2022), 第28号论文。[OS] J. Oh 和 B. Sreedhar, *Localization by 2-periodic complexes and virtual structure sheaves*, 《朱西厄数学研究所杂志》21 (5) (2022) 1477–1506。

[OT] J. Oh 和 R. P. Thomas, *Counting sheaves on Calabi–Yau 4-folds, I*, 《杜克数学杂志》172 (2023) 1333–1409。[Ohk] R. Ohkawa, *Wall-crossing between stable and co-stable ADHM data*, 《数学物理快报》108 (2018) 1485–1523。[OSS] C. Okonek、M. Schneider 和 H. Spindler, *Vector bundles on complex projective spaces*, 《数学进展》第3卷, Birkh¨auser, 1980。[Oko] A. Okounkov, *Lectures on K-theoretic computations in enumerative geometry*, 《模空间几何与表示论》, IAS/帕克城数学丛书第24卷, 美国数学学会, 罗得岛州普罗维登斯（2017）251–380。[Opr] D. Oprea, *Framed sheaves and symmetric obstruction theories*, 《数学文献》18 (2013) 323–342。[PTVV] T. Pantev、B. To¨en、M. Vaqui´e 和 G. Vezzosi, *Shifted symplectic structures*, 《法国数学学会刊》117 (2013) 271–328。[Qu] F. Qu, *Virtual pull-backs in K-theory*, 《傅里叶研究所年刊》68 (2018) 1609–1641。[RSYZ] M. Rapˇc´ *Cohomological Hall algebras vertex* ak、Y. *algebras and instantons* 376 2020 1803 1873 Soibelman、Y. Yang 和 G. Zhao, , , 《数学物理通讯》( ) – 。[Rei] M. Reineke, *Moduli of representations of quivers*, 欧洲数学学会大会报告丛书 (2008) 589–637。[Ryd] D. Rydh, *Families of cycles and the Chow scheme*, 博士论文, 斯德哥尔摩皇家理工学院（2008）。[Sal] F. Sala, *Restriction theorems for μ-(semi)stable framed sheaves*, 《纯粹与应用代数杂志》217 (2013) 2320–2344。[Sim] C. Simpson, *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projectivevariety. I*, 法国高等科学研究所出版物（1994）47–129。[Spa] T. Spaide, *Shifted symplectic and Poisson structures on spaces of framed maps*, arXiv:1607.03807。[Sta] Stacks项目作者, *The Stacks project*, https://stacks.math.columbia.edu, 2025。[Tam] S. Tamagni, *Instanton Counting, Matrix Models, and Characters*, 佛罗里达中央大学荣誉本科论文集1213, （2022）, https://stars.library.ucf.edu/honorstheses/1213。[Tho] R. W. Thomason, *Une formule de Lefschetz en K-théorie équivariante algébrique*, 《杜克数学杂志》68 (1992) 447–462。[Toe] B. To¨en, *Derived algebraic geometry*, 《欧洲数学学会数学科学综述》1 (2014) 153–240。[TV] B. To¨en 和 M. Vaqui´e, *Moduli of objects in dg-categories*, 《高等师范学校科学年刊》(4) 40 (2007) 第3期, 387–444。

University of Vienna, Faculty of Mathematics
Email address: noah.arbesfeld@univie.ac.at
Utrecht University, Mathematical Institute
Email address: m.kool1@uu.nlYonsei University,
Department of Mathematics*Email address*:
woonamlim@yonsei.ac.kr