arXiv:2602.00988v1 [math.PR] 1 Feb 2026

上限与下限约束下的财富交换：改进的 Bennati–Dragulescu–Yakovenko 模型

Fei Cao * SebastienMotsch † Wendy Garcia Umbarita †

2026年2月3日

目录

1 引言 **2**

2 平均场极限 **4**

2.1 平均场常微分方程组的推导.4 2.2 解的基本性质.6

3 大时间行为 **10**

3.1 趋于平衡.10 3.2 基尼指数比较与不平等缓解.16

4 结论 **18**

A 附录：定理 1 的证明 19

摘要

我们研究经典的 Bennati-Dragulescu-Yakovenko（BDY）美元交换模型，该模型在 [23] 中提出，并探讨财富上限和财富下限的影响。在我们的模型中，参与 BDY 博弈的 N 个相同经济主体，还受到（人工）政府颁布的某些政策约束：这些政策禁止财富超过某个规定阈值（记为 $b \in \mathbb{N}_+$）的个体收取货币，并且

[1]阿默斯特学院—数学系，美国马萨诸塞州阿默斯特 01002[2]亚利桑那州立大学—数学与统计科学学院，900 S Palm Walk，美国亚利桑那州坦佩 85287

禁止财富低于某个阈值（记为 $a \in \mathbb{N}$）的个体交出货币。我们推导出一个平均场系统，由耦合非线性常微分方程（ODE）构成，用于描述个体数量 N 趋于无穷时货币分布的演化，并研究所得常微分方程系统的大时间行为。我们还将通过数值方法探讨财富上限和财富下限对经济不平等（以基尼指数衡量）的影响。

关键词：基于个体的模型、经济物理学、平均场极限、多体动力学、基尼指数、财富不平等

1 引言

本文研究了文献 [23]中提出的经典 Bennati-Dragulescu-Yakovenko（BDY）美元交换模型的一种变体。在原始 BDY 模型中，有 N 个身份代理人，编号从 1 到 N，每个个体由其持有的美元数量表征。我们用 $S_i(t)$ 表示个体 i 在时刻 t 持有的美元数量。该博弈是在封闭经济系统／市场中进行美元交换的一种简单机制：在随机时刻（由指数分布生成），随机均匀选取一个个体 i，由其向另一个同样随机均匀选取的个体 j 支付一美元（前提是其至少持有一美元）；若个体 i 已经破产（即 $S_i = 0$），则不发生任何变化。BDY 博弈可以表示如下：

$$\textbf{BDY game:} \qquad (S_i, S_j) \rightsquigarrow (S_i - 1, S_j + 1) \quad (\text{if } S_i \geq 1). \tag{1.1}$$

由于经济系统是封闭的，我们必须有

$$S_1(t) + \cdots + S_N(t) = N\mu \qquad \text{for all } t \geq 0. \tag{1.2}$$

对于某个 $\mu > 0$，它表示每个个体的平均财富。为简单起见，我们将 $\mu \in \mathbb{N}_+$ 设为一个固定的正整数。上述 BDY 模型是经济物理学中最早出现的模型之一，自问世以来，已在不同领域得到广泛研究 [6, 10, 27, 31]。由于所有至少拥有一美元的个体都会以固定速率向其他个体转出货币，而且博弈并不偏向任何特定个体（或特定群体），BDY 模型在 [6, 10] 中被称为无偏交换模型，在 [27] 中则被称为单币模型。对基础 BDY 博弈的后续扩展提出了银行（甚至多家银行）的存在，使个体能够负债（即 $S_i < 0$）；有兴趣的读者可参阅近期的一系列研究 [4, 14, 28, 29]。BDY 动力学的其他自然扩展包括引入偏向性，例如通过征税或再分配机制 [6, 15, 32], ，以使交换偏向

双边交换中的贫穷或富裕个体。另一种可能的变体引入了概率性欺诈者 [1, 12], : 个体可能诚实，也可能以正概率谎称自己没有货币可供转出，从而通过隐瞒获得优势。最后，近期一项研究 [3] 推导并分析了经典 BDY 模型的连续、无穷小版本，其形式为一个与非线性罗宾型边界条件耦合的非线性偏微分方程。

在这份手稿中，我们旨在介绍并研究一种标准 BDY 模型的变体，该模型为每个个体设置了财富上限和财富下限。为此，我们引入两个额外的模型参数 $b \in \mathbb{N}_+$ 和 $a \in \mathbb{N}$，使得

$$a < \mu < b. \tag{1.3}$$

我们修改后的基于代理的 BDY 模型可概括如下:

修改后的 BDY 模型: $(S_i,\ S_j) \rightsquigarrow (S_i - 1,\ S_j + 1)$ （若 $S_i > a$ 和 $S_j < b$）(1.4)

换言之， a和 b 分别可视为财富下限和财富上限：前者防止财富不足的个体支付一美元，后者则防止极其富裕的个体收到一美元，如图 1 所示。参数 a和 b的引入可解释为政府为缓解个体之间的经济不平等而制定的一项政策，缓解效果以基尼指数衡量。从现在起，我们根据个体的财富对其进行分类：若个体 i 满足 $S_i \leq a$，则称其为贫穷（下层阶级）；若满足 $S_i \geq b$，则称其为富裕（上层阶级）；若满足$a < S_i < b$，则称其为中产阶级。因此，本文提出的修正 BDY 动力学 (1.4) 将个体仅按财富划分为三个阶层，故我们将该模型称为**三阶层 BDY 模型**。值得强调的是，当 $a = 0$ 和$b \to +\infty$时，我们的模型便退化为经典的 BDY 模型 (1.1)。

据我们所知，这是首项将财富上限和财富下限同时纳入经济物理模型，并从数学角度对其进行分析的研究。从政策制定的角度来看，随着人们对先进人工智能技术应用可能导致就业岗位流失的担忧日益加剧，全民基本收入（UBI）的理念近来受到广泛关注。因此，我们的研究也可视为探索特定政策对人工社会整体财富分布影响的第一步。

尽管本文聚焦于一种特定的二元交换模型，但也可以构建并分析其他交易机制，从而产生不同的动力学。例如，在即时交换模型 [25], 中，个体两两随机配对，交换各自财富中独立且服从均匀分布的部分。另一种研究较为深入的变体是均匀重分配模型 [7, 23, 30] 及其变体 [5, 19, 20], : 两个随机选取的个体在交互前的财富总和

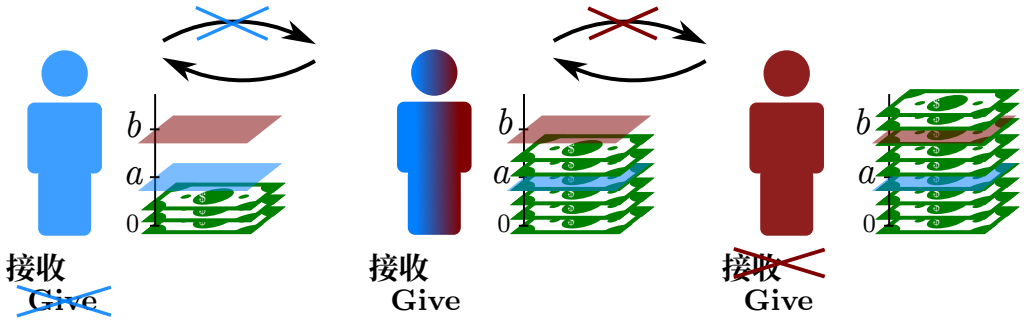

图 1：在所提出的二元交换动力学中，左侧所示的货币少于 a 的个体（贫穷 个体）不再能够给予货币。同样，右侧所示的货币多于 b 的个体（富裕个体）无法接收货币。中产阶级由财富处于 a 和 b 之间的个体组成（如中间所示），他们既可以给予也可以接收货币。

会在交互后在两者之间均匀分配。其他源自经济物理学的模型可见 [24, 33–35]。

本文余下部分的结构如下。第 2 节推导出与基于个体的模型（1.4）相对应的非线性常微分方程组的平均场系统，并确定其唯一的平衡分布。第 3 节致力于分析平均场常微分方程组的大时间行为；通过引入一种新颖的广义熵泛函，我们建立了解向唯一平衡态的收敛性。第 4 节总结全文，附录 A 给出了若干辅助结果的证明。

2 平均场极限

2.1 平均场常微分方程组的推导

设$\mathbf{p}(t) = (p_0(t)\ p_1(t)\ldots)$为一个概率质量函数，其中，$p_n(t)$表示在大规模总体极限 $N \to \infty$ 下，时间 t 时拥有 n美元的个体所占的（确定性）比例。换言之，$p_n(t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{\{S_i(t)=n\}}$（其中，收敛的概念将在下文的定理 1中予以严格定义）。从平均场视角来看，自然可以预期$\mathbf{p}(t)$的演化将由以下非线性常微分方程组控制（见图2：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{p}(t) = \mathcal{L}[\mathbf{p}(t)], \tag{2.1}$$

其中

$$\mathcal{L}[\mathbf{p}]_n := \lambda_r \left(\mathbb{1}_{\{a\le n\}}\, p_{n+1} - \mathbb{1}_{\{a+1\le n\}}\, p_n\right) + \lambda_g \left(\mathbb{1}_{\{1\le n\le b\}}\, p_{n-1} - \mathbb{1}_{\{n\le b-1\}}\, p_n\right) \tag{2.2}$$

and

$$\lambda_r := \sum_{0\le \ell \le b-1} p_\ell, \quad \lambda_g := \sum_{\ell \ge a+1} p_\ell \tag{2.3}$$

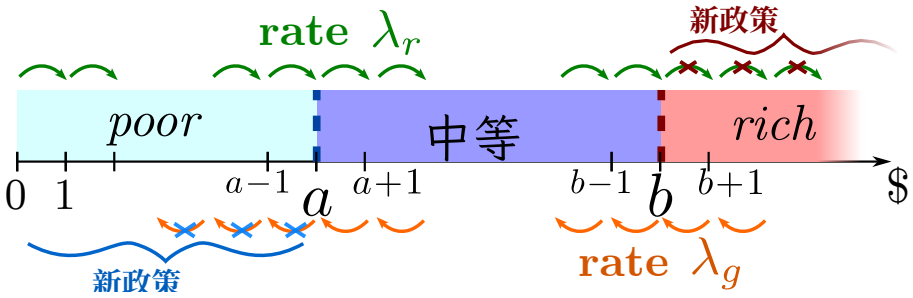

图 2：在 $N \to \infty$ 条件下，平均场极限 (2.1)-(2.3) 中财富交换动力学的示意图。群体由概率质量函数 $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \dots)$ 描述，其演化由速率 λ_g 和 λ_r 规定，分别表示给予者和接受者的比例。

我们强调，在 $a = 0$ 且 $b \to \infty$这一特殊情况下，非线性常微分方程组 (2.1)-(2.3) 与通常 BDY 模型的平均场常微分方程组相一致。另一方面，从随机 N-个体动力学 (1.4) 到大群体极限 $N \to \infty$下的无穷常微分方程组 (2.1) 的过渡，依赖于混沌传播这一概念 [17, 18, 36]，；该概念已针对社会经济科学中的多种模型（包括经典 BDY动力学） [6–10, 15] 以及物理科学和生物科学中的多种模型 [16, 21, 22] 得到严格确立。

为了说明当个体数量 N 趋于无穷大时，基于主体的动力学 (1.4) 收敛到其平均场动力系统 (2.1)-(2.3)，我们引入与修正的 BDY 模型相关联的经验分布：

$$\mathbf{p}_{\text{emp}}(t) := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \delta_{S_n(t)}, \tag{2.4}$$

其中，δ 表示狄拉克 δ 分布。此外，对于任意连续有界测试函数 φ，我们记 $\langle \mathbf{p}^{\text{emp}}, \varphi \rangle := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \varphi(S_i)$。我们可以证明以下版本的混沌传播性质：

定理 1 假设$\mathbf{p}(t) = \{p_n(t)\}_{n\ge 0}$ 是(2.1)-(2.3)的一个经典解，且$\mathbf{p}(0) \in P(\mathbb{N})$ 的均值为 $\mu \in \mathbb{N}_+$，并且$\mathbf{p}^{\text{emp}}(t)$ 表示与修正的 *BDY* 模型(1.4)相关联的经验分布。则存在某个普适常数 $C > 0$，使得

$$\mathbb{E}\left[\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_{\text{emp}}(t)\|_{\ell^1}\right] \le \left[\mathbb{E}\left[\|\mathbf{p}(0) - \mathbf{p}_{\text{emp}}(0)\|_{\ell^1}\right] + \frac{C\, t\, \sqrt{\log N}}{\sqrt{N}}\right] \mathrm{e}^{8t} \tag{2.5}$$

对所有 $t \geq 0$ 均成立。特别地，若 $\mathbb{E}\left[\|\mathbf{p}(0) - \mathbf{p}^{\mathrm{emp}}(0)\|_{\ell^1}\right] \xrightarrow{N\to 0} 0$，则对于任意 $T > 0$,$\mathbb{E}\left[\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^{\mathrm{emp}}(t)\|_{\ell^1}\right] \xrightarrow{N\to 0} 0$ 对每个 $t \in [0,T]$ 均成立。

备注。 定理 1 保证，当种群规模趋于无穷大 $N \to \infty$ 时，经验分布 $\mathbf{p}^{\mathrm{emp}}(t)$ 在任意有限时间区间内都以期望总变差距离收敛到确定性平均场分布 $\mathbf{p}(t)$。

我们强调，定理 1 可以通过一种基于鞅的技术来证明，该技术与 [6,31] 中采用的技术类似。为完整起见，我们在附录 A 中给出一个自包含的证明。这里，我们通过数值方法展示，随着种群规模 N 增大（固定时间下），随机智能体系统如何趋近其确定性平均场极限。

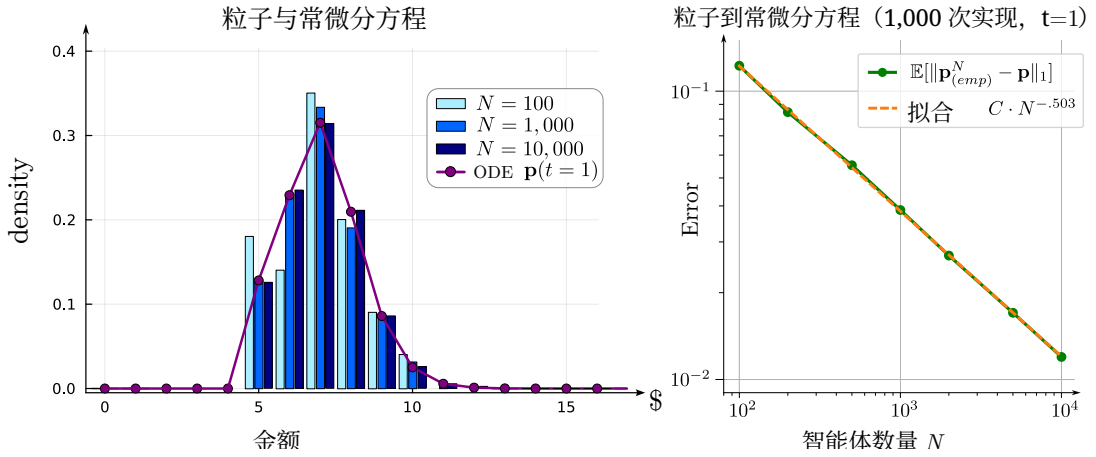

图 3：**左：** 通过粒子模拟得到的不同 N 个体在时间 $t = 1$ 的经验财富分布，以及平均场常微分方程解（实线）。**右：** 不同 N 个体的粒子分布与 $t = 1$ 时刻的常微分方程解之间的误差（图中采用双对数坐标）。

2.2 解的基本性质

我们介绍平均场常微分方程组 (2.1)-(2.3) 的解的一些基本性质。

引理 2.1 假设 $\mathbf{p}(t) = \{p_n(t)\}_{n\geq 0}$ 是 (2.1)-(2.3)的经典解，且 $\mathbf{p}(0) \in P(\mathbb{N})$ 的均值为 $\mu \in \mathbb{N}_+$，则

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}[\mathbf{p}]_n = 0 \quad and \quad \sum_{n=0}^{\infty} n\,\mathcal{L}[\mathbf{p}]_n = 0. \tag{2.6}$$

特别地，总概率质量和均值随时间保持不变。

证明 直接计算可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}[\mathbf{p}]_n = \sum_{n\geq a} p_{n+1}\,\lambda_r - \sum_{n\geq a+1} p_n\,\lambda_r + \sum_{1\leq n\leq b} p_{n-1}\,\lambda_g - \sum_{0\leq n\leq b-1} p_n\,\lambda_g = 0$$

因此，总概率质量得以守恒。将$\mathcal{L}[\mathbf{p}]$ 的第 n 个分量乘以 n，并对 $n\in\mathbb{N}$ 求和可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} n\,\mathcal{L}[\mathbf{p}]_n &= \lambda_r \sum_{n\geq a} n\,p_{n+1} - \lambda_r \sum_{n\geq a+1} n\,p_n + \lambda_g \sum_{1\leq n\leq b} n\,p_{n-1} - \lambda_g \sum_{0\leq n\leq b-1} n\,p_n \\ &= -\lambda_r \sum_{n\geq a+1} p_n + \lambda_g \sum_{0\leq n\leq b-1} p_n \\ &= -\lambda_r\lambda_g + \lambda_g\lambda_r = 0.\end{aligned}$$

因此，证明完成。 □

根据引理 2.1，我们可以推得，对于所有 $t\geq 0$，都有$\mathbf{p}(t)\in V_\mu$，其中

$$V_\mu := \left\{\mathbf{p} \mid \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1,\ p_n\geq 0,\ \sum_{n=0}^{\infty} n\,p_n = \mu\right\} \tag{2.7}$$

表示均值为给定值 μ 的概率质量函数空间。

为了确定非线性常微分方程组 (2.1)-(2.3) 的平衡分布，记为 $\mathbf{p}^*$，我们令 $\mathcal{L}[\mathbf{p}^*]_n = 0$。由于平衡分布的均值为 μ 且满足 $a<\mu<b$，因此速率 λ_r 和 λ_g 在所有时刻都严格为正。

平衡分布的一个候选形式如下：

$$p_n^* = \begin{cases} 0 & \text{if } 0\leq n<a, \\ \bar{r}^{n-a}\,p_a^* & \text{if } a\leq n\leq b, \\ 0 & \text{if } n>b, \end{cases} \tag{2.8}$$

其中，$\bar{r}\in\mathbb{R}_+$ 和 p_a^* 的选取满足 $\mathbf{p}^*\in V_\mu$ 是具有指定均值 μ的概率质量函数。我们将数值 r 称为公比。直观而言，$\mathbf{p}^*$ 是定义在可能有界定义域上的截断几何型分布。为确定 r 和 p_a^*，我们首先利用$\mathbf{p}^*$在 $\mathbb{N}$上为概率质量这一条件，将 p_a^* 表示为 r 的函数：

$$1 = \sum_{n\geq 0} p_n^* = \sum_{n=a}^{b} p_n^* = p_a^*\,\frac{1-\bar{r}^{b+1-a}}{1-\bar{r}},$$

由此得到

$$p_a^* = \frac{1-\bar{r}}{1-\bar{r}^{b+1-a}}. \tag{2.9}$$

为求公比 r，我们依据分布$\mathbf{p}^*$ 的均值 μ为:

$$\begin{aligned}\mu = \sum_{n\geq 0} n\, p_n^* &= \frac{p_a^*}{\bar{r}^a} \sum_{n=a}^{b} n\, \bar{r}^n \\ &= \frac{p_a^*}{\bar{r}^a}\, \frac{\bar{r}}{(1-\bar{r})^2} \left[a\, \bar{r}^{a-1} + (1-a)\, \bar{r}^a - (b+1)\, \bar{r}^b + b\, \bar{r}^{b+1}\right]\end{aligned}$$

利用（2.9）代入 p_a^*，得到

$$\mu = \frac{1-\bar{r}}{\bar{r}^a\,(1-\bar{r}^{b+1-a})}\, \frac{\bar{r}}{(1-\bar{r})^2} \left[a\, \bar{r}^{a-1} + (1-a)\, \bar{r}^a - (b+1)\, \bar{r}^b + b\, \bar{r}^{b+1}\right].$$

因此，我们推得 $r \in \mathbb{R}_+$ 必须满足

$$(b-\mu)\, \bar{r}^{b+2-a} + (\mu-b-1)\, \bar{r}^{b+1-a} + (\mu-a+1)\, \bar{r} + a - \mu = 0. \tag{2.10}$$

现在我们陈述一项技术性结果，涉及由（2.10）左侧定义的多项式的（正）根。

命题 2.2 给定 $0 \leq a < \mu < b$，其中 a、μ、$b \in \mathbb{N}$，并为 $x \geq 0$ 定义多项式函数

$$f(x) = (b-\mu)\, x^{b+2-a} + (\mu-b-1)\, x^{b+1-a} + (\mu-a+1)\, x + a - \mu. \tag{2.11}$$

Then

(i) 当 $\mu < \frac{a+b}{2}$, f（x） 在 （0，1） 内有唯一的根时；***(ii)*** 当 $\mu = \frac{a+b}{2}$, f（x） 在 $x = 1$ 处有唯一的根时；***(iii)*** 当 $\mu > \frac{a+b}{2}$, f（x） 在 （1，∞） 内有唯一的根时。

证明 我们从 (ii) 的证明开始，因此假设 $b - \mu = \mu - a$。在这种情况下，方程 $f(x) = 0$ 意味着

$$(\mu-a)\, x^{2\,(\mu-a+1)} - (\mu-a+1)\, x^{2\,(\mu-a)+1} + (\mu-a+1)\, x + a - \mu = 0. \tag{2.12}$$

对（2.12）左侧进行因式分解可得

$$(x-1)^3 \sum_{\ell=1}^{\mu-a} \left[\ell\, x^{\mu-a+\ell-1} + \ell\, x^{\mu-a+\ell-2} + \cdots + \ell\, x^{\ell} + \ell\, x^{\ell-1} + (\ell-1)\, x^{\ell-2} + \cdots + 1\right] = 0,$$

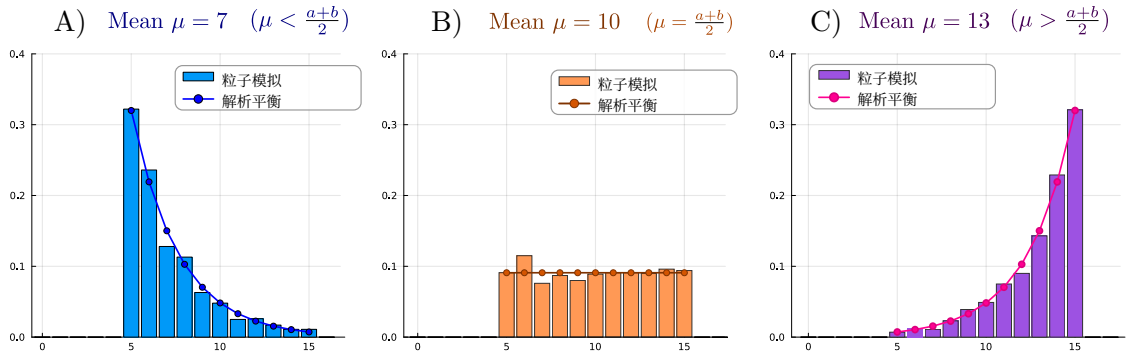

图 4：不同均值 μ 下的几何型平衡分布 $\mathbf{p}^*$ 2.8。**A)** 对应于根位于 **(0，1)** 内的情况，此时分布在 $[a, b]$ 内递减。**B)** 对应于根恰好位于 $x = 1$ 的情况，此时分布在 $[a, b]$ 内近似均匀。**C)** 对应于根位于 **(1，∞)** 内的情况，此时分布在 $[a, b]$ 内递增。

由此显然可知，$f(x)$的唯一正根出现在 $x = 1$ 处（因为乘在因子 $(x-1)^3$ 前的多项式显然对所有 $x \geq 0$均为正）。现在我们转而证明第（i）部分，并假设 $b - \mu > \mu - a$（第（iii）部分的证明与第（i）部分相似，故略去）。我们将多项式 f 分解如下：

$$f(x) = (x-1)^2\, g(x) \quad \text{with} \quad g(x) = x^{\mu-a} \sum_{\ell=1}^{b-\mu} \ell\, x^\ell - \sum_{\ell=1}^{\mu-a} \left(1 + x + \cdots + x^{\ell-1}\right).$$

由于 $0 \leq a < \mu < b$ 和 $b - \mu > \mu - a$，我们有 $g(0) = a - \mu < 0$ 且 $g(1) = \sum_{\ell=1}^{b-\mu} \ell - \sum_{\ell=1}^{\mu-a} \ell > 0$，根据中值定理，存在某个 $x \in (0, 1)$，使得 $g(x) = 0$。此外，g 的导数很容易计算，且

$$g'(x) = \sum_{\ell=1}^{b-\mu} (\mu - a + \ell)\, \ell\, x^{\mu-a+\ell-1} - \sum_{\ell=1}^{\mu-a} \left[(\ell-1)\, x^{\ell-2} + \cdots + 2\, x + 1\right].$$

我们观察到，对所有 $x > 1$ 均有 $g'(x) > 0$，因为

$$g'(x) > \sum_{\ell=1}^{b-\mu} \ell\, (\underbrace{x^\ell + x^\ell + \cdots x^\ell}_{\ell \text{ times}}) - \sum_{\ell=1}^{\mu-a} \ell\, \left(x^{\ell-1} + \cdots + x + 1\right) > 0$$

对于所有 $x \geq 1$。因此，多项式 $g(x)$ 在 **(1，∞)** 内没有根。为了证明 g 在 **(0，1)** 内没有其他根（除了 x），只需证明

$$g'(x_*) > 0 \tag{2.13}$$

每当 $x_* \in (0,\ 1)$ 是 g 的根时。事实上，反设（不失一般性） $x_1 < x_2$ 是 g 在 $(0,\ 1)$ 内的两个不同的根，且 g 在 $(x_1,\ x_2)$ 内没有其他根。由于 $g'(x_1) > 0$，我们推得，对于所有 $x \in (x_1,\ x_2)$，均有 $g(x) > 0$。另一方面，由连续性以及 $g'(x_2) > 0$ 这一事实，对于任意充分接近 x_2 的 ξ，我们也有 $g'(\xi) > 0$，这与方程 $g(x_2) = 0$ 矛盾。最后，尚需证明 (2.13)。由于 $x_* \in (0,\ 1)$ 是 g 的根，我们可以进行如下估计：

$$\begin{aligned} g'(x_*) &= \sum_{\ell=1}^{b-\mu} \frac{(\mu - a + \ell)}{x_*}\, \ell\, x_*^{\mu-a+\ell} - \sum_{\ell=1}^{\mu-a} \left[(\ell-1)\, x_*^{\ell-2} + \cdots + 2\, x_* + 1\right] \\ &> \sum_{\ell=1}^{b-\mu} \frac{(\mu - a + \ell)}{x_*}\, \ell\, x_*^{\mu-a+\ell} - (\mu - a) \sum_{\ell=1}^{\mu-a} \left[x_*^{\ell-1} + \cdots + x_* + 1\right] \\ &> (\mu - a)\, g(x_*) = 0, \end{aligned}$$

由此可得上述不平等。 □

作为命题 2.2 的直接推论，我们可以 deduce 截断几何型平衡分布 $\mathbf{p}^*$ (2.8) 定义中的公比 $r \in \mathbb{R}_+$ 满足

- 如果 $\mu < \frac{a+b}{2}$，那么 $r < 1$，且 $\mathbf{p}^*$ 在 $[a, b]$ 上是衰减函数（见图 4-A）
- 如果 $\mu = \frac{a+b}{2}$，那么 $r = 1$，且 $\mathbf{p}^*$ 在 $[a, b]$ 上是平坦的（见图 4-B）
- 如果 $\mu > \frac{a+b}{2}$，那么 $r > 1$，且 $\mathbf{p}^*$ 在 $[a, b]$ 上递增（见图 4-C）。

备注： 一般而言，至少当 $\mu \neq (a+b)/2$ 时，似乎无法得到用 r 表示的关于 a、b 和 μ 的闭式表达式。不过，在 $b \to \infty$ 且 $a \in \mathbb{N}$ 的特殊情况下，我们可以明确确定 r；此时，几何型平衡分布 $\mathbf{p}^*$ 可简化为

$$p_n^* = 0 \quad \text{for} \quad n \leq a-1, \quad p_a^* = \frac{1}{\mu - a + 1}, \quad p_n^* = \left(\frac{\mu - a}{\mu - a + 1}\right)^{n-a} p_a^* \quad \text{for} \quad n \geq a. \tag{2.14}$$

3 大时间行为

3.1 趋于平衡

在本小节中，我们将关注证明非线性常微分方程组 (2.1)–(2.3) 的解收敛于其唯一平衡态 $\mathbf{p}^*$ 的问题

(2.8)。我们将依赖的关键要素，是构造一个与演化方程 (2.1)–(2.3) 相关的适当李雅普诺夫泛函。我们将把研究范围限制在满足以下条件的可容许初始数据 $\mathbf{p}(0)$ 集合上

$$\mathbf{p}(0) \in \mathcal{A} \coloneqq \left\{ \mathbf{p} \in V_\mu \mid \sum_{n\geq 0} 2^n \, p_n < \infty \right\}. \tag{3.1}$$

我们在此指出，假设 (3.1) 中出现的常数 2 可以替换为任意常数 K，只要 $K > 1$; 但为便于表述，我们仍采用 $K = 2$ 这一选择。此外，从实际角度看，对初始数据的限制 (3.1) 是温和的，因为要实现与无穷维平均场常微分方程组 (2.1)-(2.3) 相关的数值实验，必须执行截断步骤。

我们从关于经典 BDY 模型的早期工作 $[6, 10, 23]$ 中回顾到，该模型对应于在本手稿中取 $a = 0$ 和 $b \to \infty$，玻尔兹曼熵（亦称玻尔兹曼 H 泛函）

$$\mathrm{H}[\mathbf{p}] \coloneqq \sum_{n\geq 0} p_n \, \log p_n \tag{3.2}$$

沿着平均场系统的解而耗散

$$p_n' = \begin{cases} p_1 - (1-p_0)\, p_0 & \text{for} \quad n = 0, \\ p_{n+1} + (1-p_0)\, p_{n-1} - (1 + (1-p_0))\, p_n & \text{for} \quad n \geq 1. \end{cases} \tag{3.3}$$

此外，均值为 μ的几何分布是玻尔兹曼泛函 $\mathrm{H}[\mathbf{p}]$ 在 $\mathbf{p} \in V_\mu$ 中的唯一（全局）极小化子。

我们拟将 H 调整为适用于我们的动力学，并采用以下候选李雅普诺夫泛函:

$$\mathcal{H}_{ab}[\mathbf{p}] \coloneqq \sum_{n=0}^{a-1} p_n + \sum_{n=a}^{b} p_n \, \log p_n + \sum_{n=b+1}^{\infty} p_n. \tag{3.4}$$

事实上，考虑到 $p_n^* = 0$ 对所有 $n \notin \{a, \ a+1, \ \ldots\ldots, \ b\}$都成立，且 $\{p_n^{*}a \leq n \leq b$ 类似于几何分布（其定义域可能是有界定义域），因此自然可以考虑形式为 $\sum_{n=a}^{b} p_n \log p_n$ 的局部／截断熵。与此同时，由于局部熵$\sum_{n=a}^{b} p_n \log p_n$ 的时间导数会产生项 $\sum_{n=a}^{b} p_n'$，其符号不定，因此我们在设计 $\mathcal{H}_{ab}[\mathbf{p}]$时，通过加入总和 $\sum_{n\notin\{a, \ a+1, \ \ldots\ldots, \ b\}} p_n$ 来补偿上述项的贡献。

运用拉格朗日乘子法的常规步骤可知，平衡分布$\mathbf{p}^*$ (2.8)具有如下变分刻画:

$$\mathbf{p}^* = \operatorname*{argmin}_{\mathbf{p}\in V_\mu} \mathcal{H}_{ab}[\mathbf{p}].$$

让我们考察所提出的李雅普诺夫泛函$\mathcal{H}_{ab}[\mathbf{p}]$沿着非线性常微分方程组 (2.1)-(2.3) 的解$\mathbf{p}(t)$如何变化。

命题 3.1 假设$\mathbf{p}(t) = \{p_n(t)\}^{n\geq 0}$ 是(2.3) 的一个经典解，且$\mathbf{p}(0) \in P(\mathbb{N})$ 的均值 (2.1)-为 $\mu \in \mathbb{N}_+$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{H}_{ab}[\mathbf{p}] \leq -\lambda_r \log \lambda_r \sum_{n=b+1}^{\infty} p_n - \lambda_g \log \lambda_g \sum_{n=0}^{a-1} p_n, \tag{3.5}$$

其中 λ_r ， 且 λ_g 定义如(2.3)所示。

证明。 经过直接计算可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{H}_{ab}[\mathbf{p}] &= \sum_{n=0}^{a-1} p_n' + \sum_{n=a}^{b}(p_n' \log p_n + p_n') + \sum_{n=b+1}^{\infty} p_n' \\ &= \sum_{n=a}^{b} p_n' \log p_n,\end{aligned}$$

其中我们利用了这一事实： $\sum_{n\geq 0} p_n' = 0$ ， 这是由于总概率质量守恒。因此,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{H}_{ab}[\mathbf{p}] &= \underbrace{\lambda_g\, p_{a-1} \log p_a + \lambda_r\, p_{b+1} \log p_b}_{\leq 0} \\ &\quad + \sum_{n=a}^{b-1} [\lambda_r p_{n+1} - \lambda_g p_n] \log \frac{p_n}{p_{n+1}}.\end{aligned}$$

由于 $p_{a-1} \log p_a \leq 0$ 且 $p_{b+1} \log p_b \leq 0$, 我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{H}_{ab}[\mathbf{p}] \leq -\sum_{n=a}^{b-1} \underbrace{[\lambda_r\, p_{n+1} - \lambda_g\, p_n] \log \frac{\lambda_r\, p_{n+1}}{\lambda_g\, p_n}}_{\geq 0} + \sum_{n=a}^{b-1} [\lambda_r\, p_{n+1} - \lambda_g\, p_n] \log \frac{\lambda_r}{\lambda_g}.$$

根据初等不等式（$y - x$）（$\log\ y - \log\ x$）≥ 0，对所有 $x,\ y \geq 0$ 均成立，我们得出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{H}_{ab}[\mathbf{p}] &\leq \underbrace{\sum_{n=0}^{a-1} \lambda_g p_n \log \lambda_r + \sum_{n=b+1}^{\infty} \lambda_r p_n \log \lambda_g}_{\leq 0} \\ &\quad - \sum_{n=0}^{a-1} \lambda_g p_n \log \lambda_g - \sum_{n=b+1}^{\infty} \lambda_r p_n \log \lambda_r,\end{aligned}$$

其中我们用到了 $\log\ \lambda_r < 0$ 和 $\log \lambda_g < 0$。由此，证明完成。 □

遗憾的是，对于一般的初始数据$\mathbf{p} \in \mathcal{A}$，候选李雅普诺夫泛函$\mathcal{H}_{ab}[\mathbf{p}]$ 沿平均场常微分方程组 (2.1)-(2.3) 的解不一定递减。尽管如此，人们或许可以猜想，其时间导数在某个有限时刻之后变为非正。

为了克服对$\mathcal{H}_{ab}[\mathbf{p}],$ 的朴素选择所带来的问题，我们决定通过添加额外的耗散项来修改泛函$\mathcal{H}_{ab}$：

$$\widetilde{\mathcal{H}}_{ab}[\mathbf{p}] \coloneqq \mathcal{H}_{ab}[\mathbf{p}] + k_1 \sum_{n=b+1}^{\infty} n\, p_n + k_2 \sum_{n=0}^{a-1} (a-n)\, p_n, \tag{3.6}$$

其主要思想是，当正权重 k_1 和 k_2足够大时，项$\sum_{n\geq b+1} n\, p_n$和 $\sum_{n\leq a-1}(a-n)\, p_n$ 将抵消修正后的候选李雅普诺夫泛函$\widetilde{}$(3.6)的时间导数中可能出现的正项。我们还要强调，广义玻尔兹曼$\mathcal{H}_{ab}$ 泛函 (3.6) 在 $a = 0$ 和$b \to \infty$的特殊情形下，归结为经典 H 泛函 3.2。对于我们之前的泛函$\mathcal{H}_{ab}[\mathbf{p}],$ ，可以通过拉格朗日乘子法验证，截断几何型分布$\mathbf{p}^*$ 仍然是$\mathcal{H}_{ab}[\mathbf{p}]$的$\widetilde{}$唯一全局极小值点:

$$\mathbf{p}^* = \operatorname*{argmin}_{\mathbf{p}\in V_\mu} \widetilde{\mathcal{H}}_{ab}[\mathbf{p}]$$

对于每一组固定的参数对 $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2_+$。这可视为几何分布在$\mathbf{p} \in V_\mu$ 中的最小熵刻画的一种自然推广（此处使用“最小”而非“最大”，因为香农熵 $-\mathbf{H}[\mathbf{p}]$ 与玻尔兹曼熵 $\mathbf{H}[\mathbf{p}]$ 仅相差一个负号）。

现在我们可以陈述手稿的主要结果。

定理 2（广义熵的耗散） 设 $\mathbf{p}(t) = \{p_n(t)\}_{n\geq 0}$是非线性常微分方程组 (2.1)-(2.3) 的经典解，且满足 $\mathbf{p}(0) \in \mathcal{A}$。存在固定的 $k_1 > 0$ 和 $k_2 > 0$，使得对所有 $t \geq 0$，均有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \widetilde{\mathcal{H}}_{ab}[\mathbf{p}] \leq 0. \tag{3.7}$$

此外，$\mathrm{d}\ \widetilde{\mathrm{d}t} - H_{ab}[\mathbf{p}] = 0$ 当且仅当$\mathbf{p}$ 与$\mathbf{p}^*$ (2.8)一致时成立。因此，$\mathbf{p}(t) \xrightarrow{t\to\infty}$ $\mathbf{p}^*$ 对每个 $1 < p < \infty$均在 ℓ^p 中强收敛。

可以确定 k_1 和 k_2 的显式取值，并将在定理 2 的证明中用到。具体而言，我们设

$$k_1 = -\ln(1-\mu/b) \quad \text{and} \quad k_2 = \ln\left(\max\left\{\frac{2^{b+1}+2^a}{1-\mu/b}, \sum_{n\geq 0} 2^n p_n(0)\right\}\right). \tag{3.8}$$

本小节余下部分将用于证明定理 2。为便于阐述，我们先给出若干预备结果。我们需要分别为 λ_r 和 λ_g 建立关于时间的一致下界。建立 λ_r 的一致下界相当简单，而建立 λ_g 的一致下界则需要额外的努力，并要求初始数据 (3.1) 满足良好的准备条件。

引理 3.2 对于每个 $\mathbf{p} \in A$，令 $C_0 = \sum_{n\geq 0} 2^n p_n < \infty$。则

$$\lambda_r \geq 1 - \frac{\mu}{b} \quad and \quad \lambda_g \geq 1/C_0. \tag{3.9}$$

证明 λ_r 的下界基本上可由马尔可夫不等式得出。事实上，由于 $\mu = \sum_{n\geq 0} n\, p_n \geq \sum_{n\geq b} n\, p_n \geq b \sum_{n\geq b} p_n = b(1-\lambda_r)$，我们可推得 $\lambda_r \geq 1 - \frac{\mu}{b}$。为得到 λ_g 的下界，我们采用二阶矩方法。令 $X \sim \mathbf{p}$ 为一个取值于 $\mathbb{N}$ 的随机变量，其分布由 $\mathbf{p}$ 给出，则有

$$\mu = \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X\,\mathbb{1}\{X \geq \mu\}] + \mathbb{E}[X\,\mathbb{1}\{X < \mu\}] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}\,\sqrt{\mathbb{P}(X \geq \mu)} + \mu - 1,$$

这里的不等式源于以下观察：$X \in \mathbb{N}$ 和 $\mu \in \mathbb{N}_+$ 意味着 $X\,\mathbb{1}\{X < \mu\} \leq \mu - 1$ 几乎必然成立。由于 $\mathbb{E}[X^2] = \sum_{n\geq 0} n^2 p_n \leq \sum_{n\geq 0} 2^n p_n = C_0$ 且 $\mathbb{P}(X \geq \mu) \leq \lambda_g$，由前一个不等式可推得 $\lambda_g \geq 1/C_0$，从而完成证明。□

根据引理 3.2 的内容，一旦我们证明 $\sum_{n\geq 0} 2^n p_n$ 存在一致的（上）界，就可以期望 λ_g 存在一致的下界。下面我们转而证明这一点。

引理 3.3 设 $\mathbf{p}(t) = \{p_n(t)\}_{n\geq 0}$ 是非线性常微分方程组 (2.1)-(2.3) 的经典解，且 $\mathbf{p}(0) \in V_\mu$，则有

$$\sup_{t\geq 0} \sum_{n\geq 0} K^n\, p_n(t) \leq \max\left\{ \frac{K^{b+1} + K^a}{1 - \mu/b}, \sum_{n\geq 0} K^n\, p_n(0) \right\} \tag{3.10}$$

对所有 $K > 1$，只要 $\sum_{n\geq 0} K^n\, p_n(0) < \infty$，结论成立。

证明 令 $y(t) = \sum_{n\geq 0} K^n\, p_n(t)$。对 y 求时间导数，经过直接计算可得

$$\begin{aligned} y' &= \lambda_g\,(K-1) \sum_{n\leq b-1} K^n\, p_n + \lambda_r\,(1/K - 1) \sum_{n\geq a+1} K^n\, p_n \\ &= \lambda_g\,(K-1) \sum_{n\leq b-1} K^n\, p_n + \lambda_r\,(1 - 1/K) \sum_{n\leq a} K^n\, p_n - \lambda_r\,(1-1/K)\, y \\ &\leq (K-1)\, K^b + (1-1/K)\, K^a - \left(1 - \frac{\mu}{b}\right)(1-1/K)\, y. \end{aligned}$$

因此，只要满足以下条件，我们就可以推出 $y' \le 0$

$$y \ge \frac{(K-1)\,K^b + (1-1/K)\,K^a}{(1-1/K)(1-\mu/b)} = \frac{K^{b+1}+K^a}{1-\mu/b},$$

由此即得所宣布的一致界 (3.10)。 □

注。 值得强调的是，引理 3.3 的证明中所采用的策略在 $b \to \infty$ 时将会失效（因为 K^{b+1} 在 $b \to \infty$ 时会爆破），并且为了在渐近区域中当 $b \to \infty$ 时建立一致界 (3.10) 的一个类似结果，将需要更为精细的论证（例如可参见近期工作 [10]，其针对对应于 $a = 0$ 和 $b \to \infty$ 的经典 BDY 模型）。

我们还需要以下来自微积分的初等结果。

引理 3.4 设 $\gamma \in (0,\ 1)$，$k > 0$，并定义 $f(x) := -x \ln x - k\,x$（对 $x \in \mathbb{R}_+$）。则若 $k \ge -\ln \gamma$，对所有 $x \in [\gamma, 1]$ 有 $f(x) \le 0$。

证明 只需注意到，对于 $x \in [\gamma, 1]$，当 $k \ge -\ln \gamma$ 时，$f(\gamma) = -\gamma \ln \gamma - k\,\gamma \le 0$ 且 $f'(x) = -\ln x - 1 - k \le 0$。□

利用前面的一系列预备引理，我们现在可以给出定理 2 的证明。

定理 2 的证明 我们首先调用命题 3.1 中的计算，得到新泛函 $\mathcal{H}_{ab}[\mathbf{p}]$ 的时间导数 $\widetilde{\ }$：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{\mathcal{H}}_{ab}[\mathbf{p}] \ &\le\ -\lambda_r \log \lambda_r \sum_{n=b+1}^{\infty} p_n - \lambda_g \log \lambda_g \sum_{n=0}^{a-1} p_n &(3.11)\\ &+\ k_1 \sum_{n=b+1}^{\infty} n\,p_n' + k_2 \sum_{n=0}^{a-1} (a-n)\,p_n'. &(3.12)\end{aligned}$$

接下来，我们注意到，对于 $0 \le n \le a-1$，$\sum_{\ell=0}^{n} p_\ell' = -\lambda_g\, p_n$。因此，

$$\sum_{0\le n\le a-1} (a-n)\,p_n' = \sum_{n=0}^{a-1}\sum_{\ell=0}^{n} p_\ell' = -\lambda_g \sum_{0\le n\le a-1} p_n \le 0. \tag{3.13}$$

另一方面，我们还有

$$\sum_{n\ge b+1} n\,p_n' = -\lambda_r \left[\sum_{n\ge b+1} p_n + b\,p_{b+1}\right] \le -\lambda_r \sum_{n\ge b+1} p_n \le 0. \tag{3.14}$$

综合这些估计可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{\mathcal{H}}_{ab}[\mathbf{p}] &\le [-\lambda_r\ \log \lambda_r - k_1\,\lambda_r] \sum_{n\ge b+1} p_n + [-\lambda_g\ \log \lambda_g - k_2\,\lambda_g] \sum_{n\le a-1} p_n \qquad (3.15)\\ &\le 0,\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由引理 3.2–3.4 以及 k_1 和 k_2 (3.8) 的定义得出。

此外，$\mathbf{p}$ 不难仅当 $\mathbf{p}_{\mathrm{ab}}[\mathbf{p}] = \mathbf{p}$ 时 $\mathbf{p}_{\mathrm{ab}}[\mathbf{p}] = \mathbf{p}^*$。最后，定理 2 中所述的长时间收敛保证可以用与标准平均场 BDY 动力学 (3.3) 类似的方式加以证明（例如参见 [6,31]）。 □

为从数值上研究$\mathbf{p}(t)$向其平衡分布$\mathbf{p}^*$的收敛，我们取 $\mu = 7$、 $a = 5$ 和 $b = 10$ ，并使用1001个分量来逼近分布$\mathbf{p}(t)$（即$\mathbf{p}(t) \approx (p_0(t) \ldots, p_{1000}(t))$）。作为初始条件，对 $i \neq \mu$我们采用 $p_\mu(0) = 1$和 $p_i(0) = 0$。采用标准四阶龙格–库塔法对平均场常微分方程组(2.1)-(2.3)进行离散，时间步长为 $\Delta t = 0.01$。

我们在图5左侧绘出了不同时间单位 $0 \leq t \leq 5$ 下的数值解$\mathbf{p}$ ，并将其与平衡分布$\mathbf{p}^*$进行比较。值得特别强调的是，这两个分布$\mathbf{p}(t = 5)$和$\mathbf{p}^*$ 几乎无法区分。事实上，如图5所示，趋近平衡分布的过程随时间呈指数收敛。

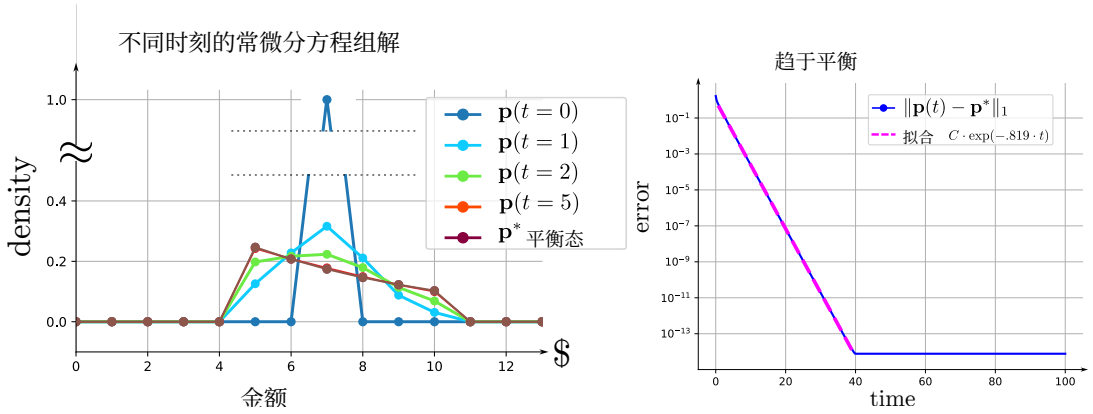

图5：**左：**平均场模型 (2.1)-(2.3) 的数值解$\mathbf{p}(t)$与几何型均衡$\mathbf{p}^*$ 的比较，其中 $0 \leq t \leq 5$。**右：**$\mathbf{p}(t)$趋近平衡态$\mathbf{p}^*$时距离的指数衰减。

3.2 基尼指数比较与不平等缓解

我们希望考察财富下限和上限对分布$\mathbf{p}$ 的财富不平等的影响，该不平等由基尼指数衡量。基尼指数定义为：对于任意$\mathbf{p} \in V_\mu$ ，

$$G[\mathbf{p}] = \frac{1}{2\,\mu} \sum_{i,j \geq 0} |i - j|\, p_i\, p_j. \tag{3.16}$$

基尼指数是一种广泛使用的不平等指数，取值范围从 0（完全平等）到 1（最大不平等）。除了应用于经济物理学模型 [2, 6, 8], 之外，基尼指数的概念还应用于经济学以外的许多其他领域，例如社会物理学（意见动力学） [11],、信号的稀疏表示 [26], 以及所谓的完全图上的扩散过程 [13]。

自然会预期，与标准 BDY 模型相比，引入财富下限或上限会降低财富不平等。形式上，这一直觉引出了以下猜想，称为**基尼指数比较猜想**：给定初始条件 $\mathbf{p}(0) \in V_\mu$，令 $\mathbf{p}^{a,b}(t)$ 表示平均场常微分方程组 (2.1)-(2.3) 在时刻 t 的解。那么对所有 $t > 0$，基尼指数 $G[\mathbf{p}^{a,b}(t)]$ 关于 $a < \mu$ 单调不增，关于 $b > \mu$ 单调不减。为数值检验这一猜想，我们绘制了在保持平均金额 $\mu = 5$ 不变的情况下，不同参数a 和 b 对应的基尼指数 $G[\mathbf{p}^{a,b}]$ 的演变（见图 6）。显然，上述猜想得到了数值证据的支持。

尽管我们尚未对上述基尼指数比较猜想给出严格证明（我们将其留作未来研究中的开放问题），但在特殊情形下，当 $b \to \infty$ 和 $a \in \mathbb{N}$ 时，可以检验该猜想是否成立；此时，解 $\mathbf{p}^{a,b}$ 达到平稳状态。

命题3.5 设 $a \in \mathbb{N}$ 和 $b \to \infty$。则平均场系统 (2.1) 在初值 $\mathbf{p}(0) \in V_\mu$ 下的平衡解 $(\mathbf{p}^{a,\infty})^*$满足以下基尼指数比较原理

$$G[(\mathbf{p}^{a',\infty})^*] \le G[(\mathbf{p}^{a,\infty})^*] \tag{3.17}$$

当且仅当 $a \le a' < \mu$。

证明 证明的关键在于式 (2.14) 给出的平衡分布 $(\mathbf{p}^{a,\infty})^*$ 的完全显式表达式。经过常规但繁琐的计算，我们得到

$$G[(\mathbf{p}^{a,\infty})^*] = 1 - \frac{\mu^2 - a^2 + a}{\mu\,[1 + 2\,(\mu - a)]}. \tag{3.18}$$

值得注意的是，在 $a = 0$ 这一特殊情况下，(3.18) 给出 $G[(\mathbf{p}^{0,\infty})^*] = \frac{1+\mu}{1+2\mu}$，这与成功概率等于 $1 - (\mathbf{p}^{0,\infty})_0^* = \frac{\mu}{1+\mu}$ 的几何分布的基尼指数一致。要完成证明，只需注意到，对于所有 $0 \le a < \mu$，映射 $a \mapsto \frac{\mu^2 - a^2 + a}{\mu\,[1 + 2\,\mu - a\,()]}$ 是非递减函数。□

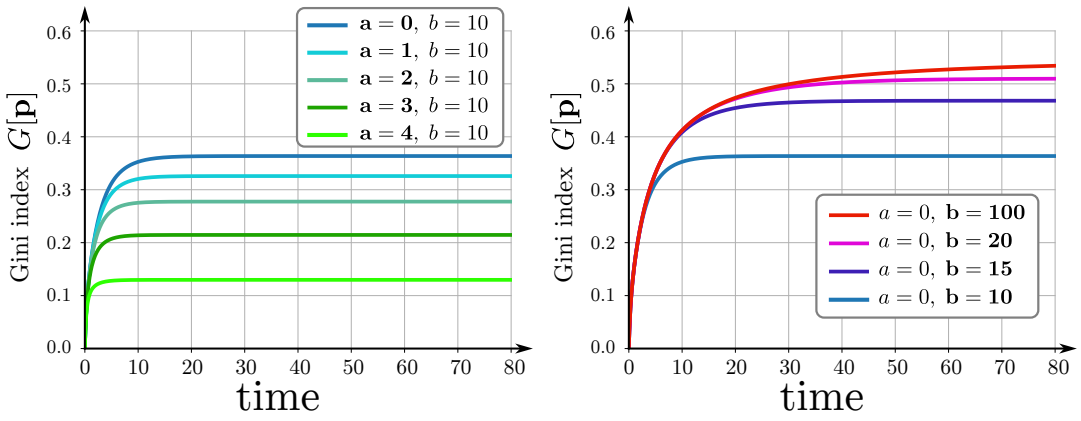

图 6：不同 a 和 b取值下基尼指数的演化。随着财富下限 a 的增加（左图），个体之间的差距缩小，导致基尼指数下降。相反，提高财富上限 b 会加剧不平等，使基尼指数显著上升（右图）。参数：$\Delta t = 10^{-1}$ 和 $\mu = 5$。

4 结论

在这项工作中，我们提出并分析了经典 Ben- nati–Dragulescu–Yakovenko（BDY）二元交换模型 [23]，的一个自然扩展，该扩展同时纳入了财富下限和上限效应。尽管这些额外约束使基于个体的层面上的分析更加复杂，我们仍严格推导出相应的平均场常微分方程系统，并通过适当构造的熵型李雅普诺夫泛函来研究其长期行为。我们还考察了参数 a 和 b 对财富不平等的影响。具体而言，根据第 3.2 节所呈现的数值证据，我们猜想，与原始 BDY 模型相比，施加财富下限和上限约束能够缓解不平等（以基尼指数衡量）。然而，对这一猜想的严格证明仍有待解决。

据我们所知，在本研究之前，尚未针对当前模型开展平均场分析。本文所得结果为后续研究开辟了若干有前景的方向。一个自然的下一步是，在平均场层面建立广义熵 $\mathcal{H}_{ab}[\mathbf{p}]$ 的定量衰减估计，从而更精确地刻画趋于平衡的过程。另一个重要方向是，严格验证在平均财富 μ 固定时，$\mathbf{p}(t)$ 的基尼指数关于参数 a 和 b 的单调性。在这些方面取得进展，将有助于更深入、更定量地理解财富下限和上限约束如何塑造系统的长期行为与不平等结构。

最后，我们强调，近年来，纳入财富下限和上限机制的经济物理模型受到的关注相对较少，尽管这类模型与现实经济政策息息相关。在实践中，财富下限可以理解为社会安全网或最低收入保障，而财富上限则可能体现为累进税制或旨在限制过度积累的再分配政策。从这一视角来看，本文研究的模型提供了一个简单而富有启发性的理论框架，可用于探讨此类约束如何影响集体财富动态和财富不平等。我们的结果表明，即使是最低限度的下限和上限干预，也会显著影响长期分配结果，这促使我们更系统地研究受约束交换模型，将其作为连接统计物理学与社会经济政策设计的桥梁。

致谢 Fei Cao 衷心感谢 AMS-Simons 旅行资助的支持，该资助由美国数学会管理，资金来自 Simons 基金会。

附录 A：定理 1 的证明

我们旨在建立定量且有限时间的混沌传播估计 (2.5)，这基于近期关于经典 BDY 动力学及其偏置版本 [6, 31] 的工作中所发展的技术。首先，我们注意到，当个体 i （具有$S_i > a$）向 j （具有 $S_j < b$）给出一美元时，经验测度经历如下变换：

$$\mathbf{p}_{\text{emp}} \rightsquigarrow \mathbf{p}_{\text{emp}} + \frac{1}{N}\Big(\delta_{S_i-1} + \delta_{S_j+1} - \delta_{S_i} - \delta_{S_j}\Big) \quad (\text{if } S_i > a \text{ and } S_j < b). \tag{A.1}$$

根据基于个体的模型 (1.4) 的设定，经验分布 $\mathbf{p}^{\text{emp}}$ 的演化由如下随机微分方程（SDE）支配：

$$\mathrm{d}\mathbf{p}_{emp}(t) = \frac{1}{N}\sum_{k=1,\ell=0}^{+\infty} (\delta_{k-1} + \delta_{\ell+1} - \delta_k - \delta_\ell)\,\mathrm{dN}_t^{(k,\ell)}, \tag{A.2}$$

其中 $\{\mathrm{N}_t^{(k,\ell)}\}_{1\le k,\ell\le N}$ 表示一组具有强度的独立泊松时钟

$$\lambda^{(k,\ell)} = p_{\text{emp},k}\,\Big(N\,\rho_{\text{emp},\ell} - \mathbb{1}_{\{k=\ell\}}\Big)\,\mathbb{1}_{\{k\ge a+1\}}\,\mathbb{1}_{\{\ell\le b-1\}}. \tag{A.3}$$

我们声称，与修正后的 BDY 模型 (1.4) 相关的无穷小生成元 $\mathcal{D}$: $\ell^1(\mathbb{N}) \to \ell^1(\mathbb{N})$ 为

$$\mathcal{D} = \mathcal{L} + \frac{1}{N}\,\mathcal{R}, \tag{A.4}$$

其中$\mathcal{L}$是平均场常微分方程组中出现的非线性算子，而算子$\mathcal{R}$ 定义为 (2.1)

$$\mathcal{R}[\mathbf{p}]_k \coloneqq 2\,p_k\,\mathbb{1}_{\{a+1\le n\le b-1\}} - p_{k-1}\,\mathbb{1}_{\{a+2\le n\le b\}} - p_{k+1}\,\mathbb{1}_{\{a\le n\le b-2\}} \tag{A.5}$$

对每个 $k \in \mathbb{N}$。要看出 (A.4)，只需注意到，对任意连续有界测试函数 φ，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}\left[\langle \mathbf{p}_{\mathrm{emp}},\varphi\rangle\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=a+1}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{b-1}\left(\varphi(k-1)+\varphi(\ell+1)-\varphi(k)-\varphi(\ell)\right)\,\mathbf{p}_{\mathrm{emp},k}\,\mathbf{p}_{\mathrm{emp},\ell}\right] \\
&\qquad - \frac{1}{N}\,\mathbb{E}\left[\sum_{k=a+1}^{b-1}\left(\varphi(k-1)+\varphi(k+1)-2\,\varphi(k)\right)\,\mathbf{p}_{\mathrm{emp},k}\right] \\
&= \sum_{\ell=0}^{b-1}\mathbf{p}_{\mathrm{emp},\ell}\,\mathbb{E}\left[\sum_{k=a+1}^{\infty}\left(\varphi(k-1)-\varphi(k)\right)\,\mathbf{p}_{\mathrm{emp},k}\right] + \sum_{k=a+1}^{\infty}\mathbf{p}_{\mathrm{emp},k}\,\mathbb{E}\left[\sum_{\ell=0}^{b-1}\left(\varphi(\ell+1)-\varphi(\ell)\right)\,\mathbf{p}_{\mathrm{emp},\ell}\right] \\
&\qquad - \frac{1}{N}\,\mathbb{E}\left[\sum_{k=a+1}^{b-1}\left(\varphi(k-1)+\varphi(k+1)-2\,\varphi(k)\right)\,\mathbf{p}_{\mathrm{emp},k}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\langle \mathcal{L}[\mathbf{p}_{\mathrm{emp}}],\varphi\rangle\right] + \frac{1}{N}\,\mathbb{E}\left[\langle \mathcal{R}[\mathbf{p}_{\mathrm{emp}}],\varphi\rangle\right] = \mathbb{E}\left[\langle \mathcal{D}[\mathbf{p}_{\mathrm{emp}}],\varphi\rangle\right].
\end{aligned}$$

直观地说，算子 $\mathcal{R}$ (A.5) 刻画了经验测度$\mathbf{p}^{\mathrm{emp}}(t)$ 的动力学相对于由 (2.1)-(2.3) 所支配的平均场极限 $\mathbf{p}(t)$ 的（平均）偏差。随着种群规模 N 增大，此类偏差会减小。借助 Dynkin 公式，经验测度 $\mathbf{p}^{\mathrm{emp}}(t)$ 的补偿过程定义为

$$M(t) \coloneqq \mathbf{p}_{\mathrm{emp}}(t) - \mathbf{p}_{\mathrm{emp}}(0) - \int_0^t \mathcal{D}[\mathbf{p}_{\mathrm{emp}}]\,\mathrm{d}s \tag{A.6}$$

是一个取值于 $\ell^1(\mathbb{N})$ 的鞅。我们现在控制该补偿鞅的大小，为此首先建立如下预备结果：

引理 A.1 假设$\mathbf{x} = (x_0, x_1, \cdots) \in \ell^1(\mathbb{N})$ 满足 $\sum_{k\ge 0}(k+1)\,|x_k| \le C$以及 $\sum_{k\ge 0}(k+1)\,|x_k|^2 \le \frac{C}{N}$，其中常数为 $C>0$和 $N\ge 1$。那么存在一个普适常数 $L>0$（与 N和$\mathbf{x}$无关），使得 $\|x\|_{\ell^1} \le {}^{L\sqrt{\text{对数}}}\!\!\!

Pr呃。 对于每个 $M \geq 1$，我们应用柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0}|x_k| &= \sum_{k=0}^{M}|x_k| + \sum_{k=M+1}^{\infty}|x_k| \\ &= \left(\sum_{k=0}^{M}\frac{1}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=0}^{M}(k+1)\,|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{M+2}\sum_{k=M+1}^{\infty}(k+1)\,|x_k| \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{M+1}\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k\geq 0}(k+1)\,|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{M+2}\sum_{k\geq 0}(k+1)\,|x_k| \\ &\leq \left(\frac{C}{N}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{M+1}\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{M+2}.\end{aligned}$$

因此，令 M 为 N 的整数部分，并利用界 $\sum_{k=1}^{M+1}\frac{1}{k} \leq 1+\log(M+2)$，即可得到所需的估计。□

命题 A.2 令 $M(t)$ (A.6) 为经验测度 $\mathbf{p}^{\mathrm{emp}}(t)$的补偿过程。存在某个普适常数 $C>0$ 使得

$$\mathbb{E}\left[\|M(t)\|_{\ell^1}\right] \leq \frac{C\,t\,\sqrt{\log N}}{\sqrt{N}} \quad \textit{for all } t \geq 0. \tag{A.7}$$

证明。 注意到，k阶分量 M_k 构成一个连续时间鞅，其跳跃幅度至多为 $2/N$，发生速率有界于$N\,(2\mathbf{p}_{\mathrm{emp},k} + \mathbf{p}_{\mathrm{emp},k-1} + \mathbf{p}_{\mathrm{emp},k+1})\,\mathrm{d}t$。因此，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|M_k(t)|] &\leq \frac{2}{N}\int_0^t N\left(2\,\mathbf{p}_{\mathrm{emp},k}(s) + \mathbf{p}_{\mathrm{emp},k-1}(s) + \mathbf{p}_{\mathrm{emp},k+1}(s)\right)\,\mathrm{d}s, \\ \mathbb{E}[|M_k(t)|]^2 &\leq \frac{4}{N}\int_0^t N\left(2\,\mathbf{p}_{\mathrm{emp},k}(s) + \mathbf{p}_{\mathrm{emp},k-1}(s) + \mathbf{p}_{\mathrm{emp},k+1}(s)\right)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由总财富守恒可知，$\sum_{k\geq 0} k\mathbf{p}_{\mathrm{emp},k}(t) = \mu$ 对所有 $t \geq 0$均成立，因此我们推得

$$\sum_{k\geq 0}(k+1)\,\mathbb{E}[|M_k(t)|] \leq C\,t \quad \text{and} \quad \sum_{k\geq 0}(k+1)\,\mathbb{E}[|M_k(t)|^2] \leq \frac{C\,t}{N} \tag{A.8}$$

对于某个普适常数 $C > 0$。最后，由 (A.8) 和引理 A.1 可直接得出所需估计 (A.7)。□

接下来，直接应用三角不等式可知，算子 $\mathcal{L}$ 在 $\ell^1(\mathbb{N}) \cap \mathcal{P}(\mathbb{N})$ 上是全局 Lipschitz 连续的，而 $\mathcal{R}$ 在 $\ell^1(\mathbb{N})$ 上定义了一个有界算子：

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}[\mathbf{p}] - \mathcal{L}[\mathbf{q}]\|_{\ell^1} &\leq 8\,\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|_{\ell^1} \quad \text{for any } \mathbf{p},\mathbf{q} \in \ell^1(\mathbb{N}) \cap \mathcal{P}(\mathbb{N}) \qquad \text{(A.9)} \\ \|\mathcal{R}[\mathbf{p}]\|_{\ell^1} &\leq 4\,\|\mathbf{p}\|_{\ell^1} \qquad \text{for any } \mathbf{p} \in \ell^1(\mathbb{N}) \qquad \text{(A.10)} \end{aligned}$$

为推进定理 1 的证明，我们首先回顾经验测度 $\mathbf{p}^{\text{emp}}$ 和平均场定律 $\mathbf{p}(t)$ 分别满足的演化方程：

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= \mathbf{p}(0) + \int_0^t \mathcal{L}[\mathbf{p}(s)]\,\mathrm{d}s \\ \mathbf{p}_{\text{emp}}(t) &= \mathbf{p}_{\text{emp}}(0) + \int_0^t \mathcal{L}[\mathbf{p}_{\text{emp}}(s)]\,\mathrm{d}s + \frac{1}{N}\int_0^t \mathcal{R}[\mathbf{p}_{\text{emp}}(s)]\,\mathrm{d}s + M(t) \end{aligned}$$

令 $\mathcal{E}(t) = \mathbb{E}\left[\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^{\text{emp}}(t)\|_{\ell^1}\right]$，并利用估计式 (A.9)–(A.10)，可得

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &\leq \mathcal{E}(0) + \int_0^t \mathbb{E}\left[\|\mathcal{L}[\mathbf{p}(s)] - \mathcal{L}[\mathbf{p}_{\text{emp}}(s)]\|_{\ell^1}\right]\,\mathrm{d}s + \frac{1}{N}\int_0^t \mathbb{E}\left[\|\mathcal{R}[\mathbf{p}_{emp}(s)]\|_{\ell^1}\right]\,\mathrm{d}s \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\|M(t)\|_{\ell^1}\right] \\ &\leq \mathcal{E}(0) + 8\int_0^t \mathbb{E}\left[\|\mathbf{p}_{emp}(s) - \mathbf{p}(s)\|_{\ell^1}\right]\,\mathrm{d}s + \frac{4\,t}{N} + \mathbb{E}\left[\|M(t)\|_{\ell^1}\right] \\ &\leq \mathcal{E}(0) + 8\int_0^t \mathcal{E}(s)\,\mathrm{d}s + \frac{4\,t}{N} + \frac{C\,t\,\sqrt{\log N}}{\sqrt{N}}. \end{aligned}$$

因此，通过例行应用格朗沃尔不等式，定理 1 的证明即告完成。

参考文献

[1] Kristian Blom、Dmitrii E. Makarov 和 Aljaž Godec。《资产交换模型中的欺骗特征》。*Physical Review Research*，7(1):013279，2025 年。

[2] Bruce M. Boghosian、Merek Johnson 和 Jeremy A. Marcq。资产交换庭院甩卖模型的玻尔兹曼方程 H 定理：基尼系数作为 H 泛函。*Journal of Statistical Physics*，161:1339–1350，2015。

[3] Fei Cao 与 Nadia Loy。连续设定下的 Bennati-Dragulescu-Yakovenko 模型：偏微分方程推导与长期行为。*arXiv* 预印本 *arXiv:2512.06101*，2025。

[4] Fei Cao 与 Stephanie Reed。一个涉及银行与债务且具有不连续均衡的有偏美元交换模型。自然现象数学建模，20:5，2025。

[5] Fei Cao 和 Nicholas F. Marshall. 从二项式重分配模型到货币的泊松分布。网络与异质介质，19(1):24– 43，2024。[6] Fei Cao 和 Sebastien Motsch. 从货币的偏向性交换推导财富分布。动力学及相关模型，16(5):764–794，2023。[7] Fei Cao、Pierre-Emannuel Jabin 和 Sebastien Motsch. 均匀重分配模型的熵耗散与混沌传播。应用科学中的数学模型与方法，33(4):829–875，2023。[8] Fei Cao. 重复平均模型中基尼指数的显式衰减速率。应用科学数学方法，46(4):3583–3596，2023。[9] Fei Cao 和 Roberto Cortez. 相互作用个体中的分形意见。*SIAM*应用动力系统学报，24(2):1529–1552，2025。[10] Fei Cao 和 Pierre-Emmanuel Jabin. 从相互作用的主体到货币的玻尔兹曼–吉布斯分布。非线性，37(12):125020，2024。[11] Fei Cao 和 Stephanie Reed. 迭代说服-极化意见动力学及其平均场分析。*SIAM*应用数学学报，85(4):1596–1620，2025。[12] Fei Cao. 对含概率性欺诈者的随机资产交换模型进行平均场分析。*arXiv*预印本 *arXiv:2505.06767*，2025。[13] Fei Cao 和 Sebastien Motsch. 完全图上的黏性弥散：一种动力学方法。*SIAM*数学分析学报，57(4):3953–3980，2025。[14] Fei Cao 和 Sebastien Motsch. 揭示含银行和债务的美元交换模型中的两阶段动力学。*SIAM*应用数学学报，83(5):1872–1891，2023。[15]Fei Cao 和 Roberto Cortez. 美元交换经济物理模型的一致混沌传播。欧洲应用数学杂志，36(1):27–39，2025。

[16] Eric Carlen、Pierre Degond 和 Bernt Wennberg. 成对相互作用驱动的主方程与生物群体模型的动力学极限。应用科学中的数学模型与方法，23(07):1339–1376，2013。[17] Louis-Pierre Chaintron 和 Antoine Diez. 混沌传播：模型、方法与应用综述。I. 模型与方法。动力学及相关模型，15(6):895–1015，2022。[18] Louis-Pierre Chaintron 和 Antoine Diez. 混沌传播：模型、方法与应用综述。II. 应用。动力学及相关模型，15(6):1017–1173，2022。[19] Anirban Chakraborti 和 Bikas K. Chakrabarti. 货币的统计力学：储蓄倾向如何影响其分布。《欧洲物理学杂志*B*：凝聚态与复杂系统》，17(1):167–170，2000。[20] Arnab Chatterjee、Bikas K. Chakrabarti 和 Subhrangshu Sekhar Manna. 随机储蓄倾向市场动力学模型中的帕累托定律。《物理学*A*：统计力学及其应用》，335(1-2):155–163，2004。[21] Roberto Cortez 和 Joaquin Fontbona. 广义Kac粒子系统的定量混沌传播。《应用概率年刊》，26(2):892– 916，2016。[22] Roberto Cortez. Kac一维粒子系统的一致混沌传播。*Journal of Statistical Physics*，165:1102–1113，2016。[23] Adrian Dragulescu 和 Victor M. Yakovenko. 货币的统计力学。《欧洲物理学杂志*B*：凝聚态与复杂系统》，17(4):723–729，2000。[24] Bertram Düring、Daniel Matthes 和 Giuseppe Toscani. 财富再分配的动力学方程建模：方法比较。《物理评论*E*，78(5):056103，2008。[25] Els Heinsalu 和 Patriarca Marco. 即时交换动力学模型。《欧洲物理学杂志*B*，87(8):1–10，2014。[26] Niall Hurley 和 Scott Rickard. 稀疏度度量的比较。*IEEE*信息论汇刊，55(10):4723–4741，2009。[27]Nicolas Lanchier. 连通图上货币的玻尔兹曼–吉布斯分布的严格证明。*Journal of Statistical Physics*，167(1):160–172，2017。

[28] Nicolas Lanchier 和 Stephanie Reed. 连通图上货币分布的严格结果（含债务模型）。*Journal of Statistical Physics*, 176(5):1115–1137, 2019.[29] Nicolas Lanchier 和 Stephanie Reed. 多家银行参与的连通图上货币分布。自然现象数学建模, 19:10, 2024.[30] Daniel Matthes 和 Giuseppe Toscani. 守恒经济动力学模型的稳态分布。*Journal of Statistical Physics*, 130:1087- 1117, 2008.[31] Mathieu Merle 和 Justin Salez. 平均场零程过程的截断。概率年刊, 47(5):3170–3201, 2019.[32] Maggie Miao, Kristian Blom 和 Dmitrii Makarov. 货币/能量交换模型的非平衡统计力学。*Journal of Physics A: Mathe-matical and Theoretical*, 57(15):155003, 2024.[33] Lorenzo Pareschi 和 Giuseppe Toscani. 相互作用多智能体系统：动力学方程与蒙特卡罗方法。*OUP Oxford*, 2013.[34] Eder Johnson de Area Leão Pereira、Marcus Fernandes da Silva 和 HB de B. Pereira. 经济物理学：过去与现在。《物理学*A*：统计力学及其应用》, 473:251–261, 2017.[35] Gheorghe Savoiu. 经济物理学：背景及其在经济学、金融和社会物理学中的应用. 学术出版社, 2013.[36] Alain-Sol Sznitman. 混沌传播专题。载于*Ecole d'été de proba-bilités de Saint-Flour XIX—1989*, 第165–251页。施普林格, 1991.