史瓦西时空中的三体量子导引

Guang-Wei Mi[1], Xiaofen Huang [1]，以及 Tinggui Zhang[1], *
[1] *School of Mathematics and Statistics,Hainan Normal University, Haikou,* 571158, *China*
* *Email address: tinggui333@163.com*

我们研究了霍金辐射对嵌入史瓦西时空中的三方系统的量子导引和导引不对称性的影响。所有三体导引类型均已分类，包括三种 $1 \to 2$ 和三种 $2 \to 1$ 导引情形。通过系统分析所有物理上相关的情形（包括可访问模式和不可及模式），我们将其归纳为三种典型情形，分别具有一个、两个和三个物理可访问模式。在具有三个物理可访问模式的情形中，霍金辐射会破坏量子导引；双向导引向单向导引转变过程中导引不对称性达到最大值之处，恰好划定了这两种状态之间的相边界。对于具有两个物理可访问模式的情形，霍金辐射表现出双重作用：在某些参数下增强 Alice 和 Bob 到 Anti-Charlie 的导引，而在另一些参数下则抑制这种导引，同时增强其他类型的导引。对于只有一个物理可访问模式的情形，黑洞的霍金效应会显著增强量子导引。这些发现为弯曲时空中的量子关联提供了新的见解，并确立了量子导引现象中霍金效应的可观测特征。

PACS 编号：03.67.Mn, 03.67.Hk

arXiv:2602.00991v1 [gr-qc] 1 Feb 2026

引言

量子导引由Schr¨odinger于1935年首次提出，作为爱因斯坦-波多尔斯基-罗森（EPR）悖论的延伸，刻画了一方观测者通过局域测量非局域地操控远处系统量子态的能力 [1–3]。2007年，自Wiseman等人借助局域隐态（LHS）模型将量子导引形式化，并将其操作层级确立为介于纠缠与贝尔非定域性之间的一种量子关联以来 [4], ，该领域重新引发了研究兴趣 [5–11]。在这一框架下，人们已提出多种不等式，用于探测量子态中的量子导引 [12–15]。此外，实验证据已证实量子系统中量子导引的不对称性 [16–18]。由于导引不对称性，双体系统呈现出三种不同的不对称构型：双向、单向和无向导引。EPR 导引独特的方向性已在基础量子信息任务和非对称量子通信方案中得到广泛研究与实现 [19–23]。

20世纪初，阿尔伯特·爱因斯坦创立了广义相对论，将引力重新诠释为时空曲率与质量-能量分布动态耦合所产生的几何结果。1916年，卡尔·施瓦西 [24] 推导出爱因斯坦场方程的第一个精确解，并定义了施瓦西半径：这是一个临界边界，低于该边界的静态球对称质量会对光产生无法逃逸的引力，由此首次以严谨的数学方法证实了黑洞的存在。1974年，斯蒂芬·霍金提出了霍金辐射理论 [25], ，开创了确立了黑洞与量子力学之间的深刻联系，随后促成了黑洞信息悖论 [26–28]的提出。进入21世纪，人类实现了从理论到实证的重大飞跃：2019年对M878* [29–34] 的成像，以及2022年发布的人马座A*的 [35]观测数据，进一步验证了广义相对论。

近年来，在寻求调和量子力学与广义相对论的推动下，研究非惯性参考系和弯曲时空中的量子信息已成为一个快速发展的研究前沿 [36–48]。在 [49], Debarshi Das等人提出了一种判据：通过给定的双量子比特态构造另一个双量子比特态，从而检测该态是否为 EPR 可导引态；如果新构造的量子态是纠缠态，那么原始量子态就是 EPR 可导引的。在 [50], Wu等人研究了霍金辐射对史瓦西时空中费米子模的量子导引及其单配约束的影响。在 [51],Chen等人通过将三量子比特态的（真）三体可导引性与相应量子态的（真）三方纠缠联系起来，提出了有效判据。在 [52], 作者研究了 GHZ 态和 W态下由三个 Unruh-DeWitt 探测器组成的系统中的三体量子导引动力学。

本文探讨了霍金效应对史瓦西时空中三方系统量子导引的影响。假设 Alice、Bob 和 Charlie 最初在渐近平坦区域共享一个 GHZ态。随后，Alice 留在渐近平坦区域，而 Bob 和 Charlie 则作为静止观察者位于黑洞事件视界附近。接下来，我们全面分析所有可行配置，包括物理可访问模式和不可及模式，并明确区分三种不同情形：（i）三个物理可访问模式，（ii）两个物理可访问模式，以及（iii）一个物理可访问模式。

在第一种情形中，霍金效应会破坏量子导引。由双向导引转变为单向导引的过程，以最大导引不对称性为标志，精确界定了黑洞时空中这两种状态下的相边界。在第二种情形中，霍金效应对量子导引具有双重影响：在某些参数范围内，它会增强量子导引$S_H^{AB\to c}$，而在另一些参数范围内则会抑制它。对于其他类型的量子导引，霍金效应带来的总体效果是增强。在第三种情形中，霍金效应会增强量子导引。有趣的是，在所考虑的所有三种情形中， $1\to 2$ 量子导引强度始终高于 $2\to 1$ 量子导引强度。

本文其余部分安排如下。在第II节中，我们简要概述了史瓦西时空中狄拉克场的量子化。在第III节中，我们通过纠缠量化了X型态的各类三体量子导引。在第IV节中，我们研究霍金辐射对史瓦西时空中三体量子导引的影响。我们在第V节中给出结论。

史瓦西黑洞中狄拉克场的量子化

一般背景时空中的狄拉克方程可以表述为 [53],

$$[\gamma^a e_a^\mu(\partial_\mu+\Gamma_\mu)+\mu]\,\Phi=0, \tag{1}$$

其中 μ 是狄拉克场的质量， γ^a 是狄拉克矩阵， e_a^μ 是标架 e_μ^a 的逆，且 $\Gamma_\mu=\frac{1}{8}[\gamma^a,\gamma^b]e_a^\nu e_{b\nu}$ 是自旋联络。刻画史瓦西时空的度规可写为 [54]

$$\begin{aligned} ds^2=&-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2\\ &+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2), \end{aligned} \tag{2}$$

其中， M 为黑洞的质量。具体而言，史瓦西时空中的无质量狄拉克方程形式为 [55]

$$\begin{aligned} &-\frac{\gamma_0}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\gamma_1\sqrt{1-\frac{2M}{r}}\left[\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}+\frac{M}{2r(r-2M)}\right]\Phi\\ &+\frac{\gamma_2}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cot\theta}{2}\right)\Phi+\frac{\gamma_3}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}=0. \end{aligned} \tag{3}$$

式（3）明确构造了正频率出射模，这些模贯穿事件视界的内部和外部区域 [39, 54, 56],

$$\Phi^+_{k,out}=\phi(r)e^{-i\omega\mu}, \tag{4}$$

$$\Phi^+_{k,in}=\phi(r)e^{i\omega\mu}, \tag{5}$$

其中， k 是波矢， ϕ（r）表示四分量狄拉克旋量， ω 表示单色频率，而 $\mu=t-r_*$ 为乌龟坐标$r_*=r+2M\ln\frac{r-2M}{2M}$。此外，狄拉克场 Φ 可通过式（4）和式（5）展开为模的形式：

$$\begin{aligned} \Phi=\int dk\,\Big[&\hat{a}_k^{in}\Phi^+_{k,in}+\hat{b}_{-k}^{in\dagger}\Phi^-_{-k,in}\\ &+\hat{a}_k^{out}\Phi^+_{k,out}+\hat{b}_{-k}^{out\dagger}\Phi^-_{-k,out}\Big], \end{aligned} \tag{6}$$

其中，$\hat{a}_k^{in}$对应事件视界内的费米子湮灭算符，而$\hat{b}_{-k}^{out\dagger}$表示外部区域的反费米子产生算符。通常，模 $\Phi_k^{\pm}{}_{,\,out}$ 和 $\Phi_k^{\pm}{}_{,\,in}$ 统称为施瓦西模。

遵循 Damour 和 Ruffini 提出的框架 [57], ，我们构造了正能量克鲁斯卡尔模的一组完备正交归一基，从而明确联系了方程（4）和（5）

$$\Psi^+_{k,out}=e^{-2\pi M\omega}\Phi^-_{-k,in}+e^{2\pi M\omega}\Phi^+_{k,out}, \tag{7}$$

$$\Psi^+_{k,in}=e^{-2\pi M\omega}\Phi^-_{-k,out}+e^{2\pi M\omega}\Phi^+_{k,in}. \tag{8}$$

因此，狄拉克场 Φ 可按克鲁斯卡尔模展开

$$\begin{aligned} \Phi=\int dk\,[2\cosh(4\pi M\omega)]^{-\frac{1}{2}}\Big[&\hat{c}_k^{in}\Psi^+_{k,in}\\ &+\hat{d}_{-k}^{in\dagger}\Psi^-_{-k,in}+\hat{c}_k^{out}\Psi^+_{k,out}+\hat{d}_{-k}^{out\dagger}\Psi^-_{-k,out}\Big], \end{aligned} \tag{9}$$

其中，$\hat{c}_k^\theta$ 和 $\hat{}\ d_k^\theta$ （$\theta=$ （in， out））表示费米子湮灭算符以及反费米子产生算符，它们均作用于克鲁斯卡尔真空。

因此，式（6）和式（9）分别表明，狄拉克场通过史瓦西算符和克鲁斯卡尔算符进行量子化。该过程在两组算符之间诱导出博戈留波夫变换 [58] ，其具体形式如下

$$\hat{c}_k^{out}=\frac{1}{\sqrt{e^{-8\pi M\omega}+1}}\hat{a}_k^{out}-\frac{1}{\sqrt{e^{8\pi M\omega}+1}}\hat{b}_{-k}^{in\dagger}, \tag{10}$$

$$\hat{c}_k^{out\dagger}=\frac{1}{\sqrt{e^{-8\pi M\omega}+1}}\hat{a}_k^{out\dagger}-\frac{1}{\sqrt{e^{8\pi M\omega}+1}}\hat{b}_{-k}^{in}. \tag{11}$$

通过应用博戈留波夫变换，史瓦西时空中的克鲁斯卡尔真空和激发态可以表示为 [59, 60],

$$\begin{aligned} &|0\rangle_K=\frac{1}{\sqrt{e^{-\frac{\omega}{T}}+1}}|0\rangle_{out}|0\rangle_{in}+\frac{1}{\sqrt{e^{\frac{\omega}{T}}+1}}|1\rangle_{out}|1\rangle_{in},\\ &|1\rangle_K=|1\rangle_{out}|0\rangle_{in}, \end{aligned} \tag{12}$$

其中$T=\frac{1}{8\pi M}$为霍金温度， $|n\rangle_{out}$ 和$|n\rangle_{in}$ 分别对应事件视界外的费米子模和事件视界内的反费米子模。

三体量子导引的量化

本节将系统分析三体量子导引，对所有可能的导引情形进行量化，包括三种类型的 $1 \to 2$ 量子导引和三种类型的 $2 \to 1$ 量子导引。考虑以下 X 型量子态，其密度矩阵形式为

$$\rho_X = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{18} \\ 0 & \rho_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{27} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33} & 0 & 0 & \rho_{36} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{44} & \rho_{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{54} & \rho_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{63} & 0 & 0 & \rho_{66} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{72} & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{77} & 0 \\ \rho_{81} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{88} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

其中 $\rho_{11}+\rho_{22}+\rho_{33}+\rho_{44}+\rho_{55}+\rho_{66}+\rho_{77}+\rho_{88}=1$、$\rho_{ii}\rho_{jj} \geq |\rho_{ij}|^2$（$i \neq j$ 和 $i+j=9$）以及 $\rho_{ij}=\rho_{ji}$。若 $\rho_{44}\rho_{55} < |\rho_{18}|^2$ 或 $\rho_{33}\rho_{66} < |\rho_{27}|^2$ 或 $\rho_{22}\rho_{77} < |\rho_{36}|^2$ 或 $\rho_{11}\rho_{88} < |\rho_{45}|^2$，则 X 型态 ρ_X 是纠缠态。

在量化三体量子导引之前，我们先介绍以下引理。

引理 1。（参考文献 *[49]* 的观察 3）对于 Alice 和 Bob 共享的任意量子位数-量子比特态 ρ_{AB}，定义另一个新的量子位数-量子比特态 τ_{AB}，其形式为

$$\tau_{AB}^1 = \mu_1 \rho_{AB} + (1-\mu_1)\tilde{\rho^1}_{AB}, \quad (14)$$

其中 $\tilde{\rho^1}_{AB} = \rho_A \otimes \frac{\mathbb{I}_2}{2}$，$\rho_A = Tr_B[\rho_{AB}] = Tr_B[\tau_{AB}^1]$是 Alice 一侧的约化态（qudit），而 $\mathbb{I}_2$ 是2×2 单位矩阵。若 τ_{AB}^1 是纠缠态，则对于 $0 \leq \mu_1 \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$，$\rho_{AB}$ 从 Bob 到 Alice 是 EPR 可导引的。

引理 2。（参考文献 *[51]*中的定理 2）设 ρ_{ABC} 为一个三量子比特态，且

$$\tau_{ABC}^2 = \mu_2 \rho_{ABC} + (1-\mu_2)\frac{\mathbb{I}_4}{4} \otimes \rho_C, \quad (15)$$

其中 $\rho_C = Tr_{AB}[\rho_{ABC}]$和 $\mathbb{I}_4$是 4×4单位矩阵。若 τ_{ABC}^2 是三体纠缠态，则对于 $0 \leq \mu_2 \leq \frac{1}{3}$，$\rho_{ABC}$ 可由 Alice 和 Bob 向 Charlie 进行三体量子导引。

请注意，在引理 1 中，可以检测 Alice 和 Bob 共享的量子位数-量子比特态中从 Bob 到 Alice 的 EPR 导引，但这并不能检测他们共享的同一量子位数-量子比特态中从 Alice 到 Bob 的 EPR 导引。

对于 Alice、Bob 和 Charlie 共享的三体态 ρ_{ABC}，它可分解为以下三种二体划分类型：$AB|C$、$BC|A$、$CA|B$。因此，根据引理 1，当以下量子态时，可以检测到 Charlie 向 Alice 和 Bob 的量子导引

$$\tau_{AB|C}^1 = \frac{\rho_{ABC}}{\sqrt{3}} + \frac{3-\sqrt{3}}{3}\left(\rho_{AB} \otimes \frac{\mathbb{I}_2}{2}\right) \quad (16)$$

是纠缠的，其中 $\rho_{AB} = Tr_C\,\rho_{ABC}$ 和 $\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$见引理 1。此外，根据引理 2，考虑以下量子态时，可以观察到从 Alice 和 Bob 到 Charlie 的量子导引

$$\tau_{AB|C}^2 = \frac{\rho_{ABC}}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{\mathbb{I}_4}{4} \otimes \rho_C\right) \quad (17)$$

是纠缠的，其中 $\rho_C = Tr_{AB}[\rho_{ABC}]$和 $\mu_2 = \frac{1}{3}$见引理 2。

类似地，当导引密度矩阵 $\tau_{BC|A}^1$、$\tau_{BC|A}^2$、$\tau_{CA|B}^1$和 $\tau_{CA|B}^2$定义如下时，可以观测到从 A 到 BC、从 BC 到 A、从 B 到 CA 以及从 CA 到 B 的量子导引

$$\tau_{BC|A}^1 = \frac{\rho_{BCA}}{\sqrt{3}} + \frac{3-\sqrt{3}}{3}\left(\rho_{BC} \otimes \frac{\mathbb{I}_2}{2}\right), \quad (18)$$

$$\tau_{BC|A}^2 = \frac{\rho_{BCA}}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{\mathbb{I}_4}{4} \otimes \rho_A\right), \quad (19)$$

$$\tau_{CA|B}^1 = \frac{\rho_{CAB}}{\sqrt{3}} + \frac{3-\sqrt{3}}{3}\left(\rho_{CA} \otimes \frac{\mathbb{I}_2}{2}\right), \quad (20)$$

$$\tau_{CA|B}^2 = \frac{\rho_{CAB}}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{\mathbb{I}_4}{4} \otimes \rho_B\right) \quad (21)$$

分别是纠缠的。这里，$\rho_{BC} = Tr_A[\rho_{BCA}]$、$\rho_A = Tr_{BC}[\rho_{BCA}]$、$\rho_{CA} = Tr_B[\rho_{CAB}]$和 $\rho_B = Tr_{CA}[\rho_{CAB}]$。

不失一般性，令 $\rho_{ABC} = \rho_X$。因此，我们推导出 ρ_{ABC} 的导引密度矩阵 $\tau_{AB|C}^1$ 可明确表示为

$$\tau^{1}_{AB|C}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{11}+m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{18}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{22}+m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{27} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{33}+m_2 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{36} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{44}+m_2 & \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{45} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{54} & \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{55}+m_3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{63} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{66}+m_3 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{72} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{77}+m_4 & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{81} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{88}+m_4\end{pmatrix}, \tag{22}$$

其中 $m_1=\frac{3-\sqrt{3}}{6}(\rho_{11}+\rho_{22})$、$m_2=\frac{3-\sqrt{3}}{6}(\rho_{33}+\rho_{44})$、$m_3=\frac{3-\sqrt{3}}{6}(\rho_{55}+\rho_{66})$ 以及 $m_4=\frac{3-\sqrt{3}}{6}(\rho_{77}+\rho_{88})$。量子态 $\tau^1_{AB|C}$ 在满足以下不等式时是纠缠的

$$|\rho_{18}|^2>P^1_{a,-}\qquad or\qquad |\rho_{27}|^2>P^1_{a,+}, \tag{23}$$

or

$$|\rho_{36}|^2>P^1_{b,-}\qquad or\qquad |\rho_{45}|^2>P^1_{b,+}, \tag{24}$$

其中

$$\begin{aligned}P^1_{a,\pm}=&\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}\rho_{33}\rho_{66}+\frac{2\mp\sqrt{3}}{2}\rho_{44}\rho_{55}\\&+\frac{1}{2}(\rho_{33}\rho_{55}+\rho_{44}\rho_{66}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P^1_{b,\pm}=&\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}\rho_{11}\rho_{88}+\frac{2\mp\sqrt{3}}{2}\rho_{22}\rho_{77}\\&+\frac{1}{2}(\rho_{11}\rho_{77}+\rho_{22}\rho_{88}).\end{aligned} \tag{25}$$

由此可观察到从 Charlie 到 Alice 和 Bob 的量子导引。接下来，我们推导出与 ρ_{ABC} 相关的导引密度矩阵$\tau^2_{AB|C}$ 可精确表示为

$$\tau^2_{AB|C}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\rho_{11}+n_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{18}\\ 0 & \frac{1}{3}\rho_{22}+n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{27} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{33}+n_1 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{36} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{44}+n_2 & \frac{1}{3}\rho_{45} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{54} & \frac{1}{3}\rho_{55}+n_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{63} & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{66}+n_2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\rho_{72} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{77}+n_1 & 0\\ \frac{1}{3}\rho_{81} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{88}+n_2\end{pmatrix}, \tag{26}$$

其中 $n_1=\frac{1}{6}(\rho_{44}+\rho_{66}+\rho_{88}$ $\rho_{11}+\rho_{33}+\rho_{55}+\rho_{77}$ $-\rho_{22}+$ $)$ 和 $n_2=\frac{1}{6}(\quad)$。当量子态 $\tau^2_{AB|C}$ 满足以下不等式时，它是纠缠的

$$|\rho_{18}|^2>P^2_{a,-}\qquad or\qquad |\rho_{27}|^2>P^2_{a,+}, \tag{27}$$

or

$$|\rho_{36}|^2>P^2_{b,-}\qquad or\qquad |\rho_{45}|^2>P^2_{b,+}, \tag{28}$$

其中

$$\begin{aligned}P^2_{a,-}=&\frac{9}{4}\rho_{44}\rho_{55}+\frac{3}{4}(\rho_{11}\rho_{44}+\rho_{33}\rho_{44}+\rho_{44}\rho_{77}\\&+\rho_{22}\rho_{55}+\rho_{55}\rho_{66}+\rho_{55}\rho_{88})+\frac{1}{4}(\rho_{11}\rho_{22}\\&+\rho_{11}\rho_{66}+\rho_{11}\rho_{88}+\rho_{22}\rho_{33}+\rho_{33}\rho_{66}\\&+\rho_{33}\rho_{88}+\rho_{22}\rho_{77}+\rho_{66}\rho_{77}+\rho_{77}\rho_{88}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P^2_{a,+}=&\frac{9}{4}\rho_{33}\rho_{66}+\frac{3}{4}(\rho_{22}\rho_{33}+\rho_{33}\rho_{44}+\rho_{33}\rho_{88}\\&+\rho_{11}\rho_{66}+\rho_{55}\rho_{66}+\rho_{66}\rho_{77})+\frac{1}{4}(\rho_{11}\rho_{22}\\&+\rho_{11}\rho_{44}+\rho_{11}\rho_{88}+\rho_{22}\rho_{55}+\rho_{44}\rho_{55}\\&+\rho_{55}\rho_{88}+\rho_{22}\rho_{77}+\rho_{44}\rho_{77}+\rho_{77}\rho_{88}),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P^2_{b,-} = &\frac{9}{4}\rho_{22}\rho_{77} + \frac{3}{4}(\rho_{11}\rho_{22} + \rho_{22}\rho_{33} + \rho_{22}\rho_{55} \\
&+ \rho_{44}\rho_{77} + \rho_{66}\rho_{77} + \rho_{77}\rho_{88}) + \frac{1}{4}(\rho_{11}\rho_{44} \\
&+ \rho_{11}\rho_{66} + \rho_{11}\rho_{88} + \rho_{33}\rho_{44} + \rho_{33}\rho_{66} \\
&+ \rho_{33}\rho_{88} + \rho_{44}\rho_{55} + \rho_{55}\rho_{66} + \rho_{55}\rho_{88}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P^2_{b,+} = &\frac{9}{4}\rho_{11}\rho_{88} + \frac{3}{4}(\rho_{11}\rho_{22} + \rho_{11}\rho_{44} + \rho_{11}\rho_{66} \\
&+ \rho_{33}\rho_{88} + \rho_{55}\rho_{88} + \rho_{77}\rho_{88}) + \frac{1}{4}(\rho_{22}\rho_{33} \\
&+ \rho_{33}\rho_{44} + \rho_{33}\rho_{66} + \rho_{22}\rho_{55} + \rho_{44}\rho_{55} \\
&+ \rho_{55}\rho_{66} + \rho_{22}\rho_{77} + \rho_{44}\rho_{77} + \rho_{66}\rho_{77}).
\end{aligned} \tag{29}
$$

因此，根据式（23）—（29），从 C 到 AB 的量子导引为

$$
\begin{aligned}
S^{C\to AB} = max\{&0, 4(|\rho_{18}|^2 - P^1_{a,-}), 4(|\rho_{27}|^2 - P^1_{a,+}), \\
&4(|\rho_{36}|^2 - P^1_{b,-}), 4(|\rho_{45}|^2 - P^1_{b,+})\}
\end{aligned} \tag{30}
$$

而从 AB 到 C 的量子导引描述为

$$
\begin{aligned}
S^{AB\to C} = max\Big\{&0, \frac{16}{3}(|\rho_{18}|^2 - P^2_{a,-}), \frac{16}{3}(|\rho_{27}|^2 - P^2_{a,+}), \\
&\frac{16}{3}(|\rho_{36}|^2 - P^2_{b,-}), \frac{16}{3}(|\rho_{45}|^2 - P^2_{b,+})\Big\}.
\end{aligned} \tag{31}
$$

在此，系数 4 和 $\frac{16}{3}$ 设定为确保最大纠缠态的量子导引达到 1。

同理，我们可以推导出从 A 到 BC、从 BC 到 A、从 B 到 CA 以及从 CA 到 B 的量子导引为

$$
\begin{aligned}
S^{A\to BC} = max\{&0, 4(|\rho_{18}|^2 - T^1_{a,-}), 4(|\rho_{27}|^2 - T^1_{b,-}), \\
&4(|\rho_{36}|^2 - T^1_{b,+}), 4(|\rho_{45}|^2 - T^1_{a,+})\},
\end{aligned} \tag{32}
$$

$$
\begin{aligned}
S^{BC\to A} = max\Big\{&0, \frac{16}{3}(|\rho_{18}|^2 - T^2_{a,-}), \frac{16}{3}(|\rho_{27}|^2 - T^2_{b,-}), \\
&\frac{16}{3}(|\rho_{36}|^2 - T^2_{b,+}), \frac{16}{3}(|\rho_{45}|^2 - T^2_{a,+})\Big\},
\end{aligned} \tag{33}
$$

$$
\begin{aligned}
S^{B\to CA} = max\{&0, 4(|\rho_{18}|^2 - Q^1_{a,+}), 4(|\rho_{27}|^2 - Q^1_{b,+}), \\
&4(|\rho_{36}|^2 - Q^1_{a,-}), 4(|\rho_{45}|^2 - Q^1_{b,-})\},
\end{aligned} \tag{34}
$$

$$
\begin{aligned}
S^{CA\to B} = max\Big\{&0, \frac{16}{3}(|\rho_{18}|^2 - Q^2_{a,+}), \frac{16}{3}(|\rho_{27}|^2 - Q^2_{b,+}), \\
&\frac{16}{3}(|\rho_{36}|^2 - Q^2_{a,-}), \frac{16}{3}(|\rho_{45}|^2 - Q^2_{b,-})\Big\}.
\end{aligned} \tag{35}
$$

$T^1_{a,\pm}$, $T^1_{b,\pm}$, $T^2_{a,\pm}$, $T^2_{b,\pm}$, $Q^1_{a,\pm}$, $Q^1_{b,\pm}$,$Q^2_{a,\pm}$, $Q^2_{b,\pm}$ 其显式形式及详细讨论请参见附录 A 和 B。

在实际中，量子导引可分为三种不同类型：(i) 无向导引，即量子态在所有方向上的可导引性均为零；(ii) 双向导引，即量子态在两个相反方向上均可被导引；(iii) 单向导引，即量子态只能在一个方向上被导引。最后一种情形体现了量子导引固有的不对称性。为了量化这种方向偏差，光学模式 I、J 与模式 K 之间的导引不对称性定义为

$$
S^{\Delta}_{IJ|K} = \left|S^{K\to IJ} - S^{IJ\to K}\right|. \tag{36}
$$

史瓦西黑洞中的三体量子导引

现在，我们考虑史瓦西时空中的三体量子导引。假设粒子 Alice、Bob 和 Charlie 最初在史瓦西黑洞的渐近平坦区域共享以下 GHZ态，可表示为

$$
|\phi\rangle_{ABC} = \alpha|000\rangle + \sqrt{1-\alpha^2}|111\rangle, \tag{37}
$$

其中 $0 < \alpha < 1$。随后，我们设定 Alice 始终处于渐近平坦区域，而 Bob 和 Charlie 则在黑洞事件视界附近活动。因此，根据式 (12)，式 (37) 可改写为

$$
\begin{aligned}
|\phi\rangle_{ABbCc} = &\frac{\alpha}{e^{-\frac{\omega}{T}}+1}|00000\rangle + \frac{\alpha}{e^{\frac{\omega}{T}}+1}|01111\rangle \\
&+ \frac{\alpha}{\sqrt{e^{-\frac{\omega}{T}} + e^{\frac{\omega}{T}} + 2}}(|00011\rangle + |01100\rangle) \\
&+ \sqrt{1-\alpha^2}|11111\rangle,
\end{aligned} \tag{38}
$$

其中，$\alpha = (e^{-\frac{\omega}{T}}+1)^{-\frac{1}{2}}$和 $\beta = (e^{\frac{\omega}{T}}+1)^{-\frac{1}{2}}$、$B$和$C$ 表示局域于黑洞事件视界外的费米子，而 b 和 c 则对应于事件视界内的反费米子。请注意，Anti-Bob 和 Anti-Charlie 对应于位于事件视界内的相关反粒子。

通常，Alice 观测费米子 A，而 Bob 和 Charlie 则监测黑洞视界外的费米子 B 和 C。相应地，Anti-Bob 和 Anti-Charlie 在视界内观测反费米子 b 和 c。由于黑洞内部与外部之间存在因果隔离，Alice、Bob 和 Charlie 无法获取事件视界内的量子信息。因此，我们将外部费米模式（A、B、C）归类为可访问，将内部反费米模式（b、c）归类为不可访问。

现在，我们探讨包括物理可访问模式和不可及模式在内的所有可能情形。具体而言，包括以下三种情形：(1) 三个物理可访问模式；(2) 两个物理可访问模式；(3) 一个物理可访问模式。

A. 三个物理可访问模式

我们首先考察涉及三个物理可访问模式的情形，即费米子 A、B 和 C。对式(38)中的不可及模式 b 和 c 进行迹运算后，我们得到约化态

$$\begin{aligned}\rho_{ABC}^{H} =& \frac{\alpha^2}{(e^{-\frac{\omega}{T}}+1)^2}|000\rangle\langle 000| + \frac{\alpha^2}{(e^{\frac{\omega}{T}}+1)^2}|011\rangle\langle 011| \\ &+ \frac{\alpha^2}{e^{-\frac{\omega}{T}}+e^{\frac{\omega}{T}}+2}(|001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010|) \\ &+ \frac{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{e^{-\frac{\omega}{T}}+1}(|000\rangle\langle 111| + |111\rangle\langle 000|) \\ &+ (1-\alpha^2)|111\rangle\langle 111|.\end{aligned} \tag{39}$$

与量子态 ρ_{ABC}^{H}对应的密度矩阵形式为

$$\rho_{ABC}^{H} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{18} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{81} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{88} \end{pmatrix}, \tag{40}$$

where $a_{11} = \frac{\alpha^2}{(e^{-\frac{\omega}{T}}+1)^2}$, $a_{22} = a_{33} = \frac{\alpha^2}{e^{-\frac{\omega}{T}}+e^{\frac{\omega}{T}}+2}$, $a_{44} = \frac{\alpha^2}{(e^{\frac{\omega}{T}}+1)^2}$, $a_{88} = (1-\alpha^2)$, $a_{18} = a_{81} = \frac{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{e^{-\frac{\omega}{T}}+1}$.

利用式 (30–35)，我们推导出从 C 到 AB、从 AB 到 C、从 A 到 BC、从 BC 到 A、从 B 到 CA 以及从 CA 到 B 的量子导引，结果如下：

$$S_H^{C\to AB} = max\left\{0, 4|a_{18}|^2\right\}, \tag{41}$$

$$\begin{aligned}S_H^{AB\to C} =& max\left\{0, \frac{16}{3}\left[|a_{18}|^2 - (a_{11}+a_{33})\right.\right. \\ &\left.\left.\cdot\left(\frac{1}{4}a_{22}+\frac{3}{4}a_{44}+\frac{1}{4}a_{88}\right)\right]\right\},\end{aligned} \tag{42}$$

$$S_H^{A\to BC} = max\left\{0, 4\left(|a_{18}|^2 - \frac{1}{2}a_{22}a_{33}\right)\right\}, \tag{43}$$

$$\begin{aligned}S_H^{BC\to A} =& max\left\{0, \frac{16}{3}\left[|a_{18}|^2 - \frac{3}{4}a_{33}a_{88}\right.\right. \\ &\left.\left.-\frac{1}{4}\left(a_{11}+a_{22}+a_{44}\right)a_{88}\right]\right\},\end{aligned} \tag{44}$$

$$S_H^{B\to CA} = max\left\{0, 4|a_{18}|^2\right\}, \tag{45}$$

$$\begin{aligned}S_H^{CA\to B} =& max\left\{0, \frac{16}{3}\left[|a_{18}|^2 - (a_{33}+a_{44}+a_{88})\right.\right. \\ &\left.\left.\cdot\left(\frac{1}{4}a_{11}+\frac{3}{4}a_{22}\right)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{46}$$

通过上述公式，我们发现可导引性与霍金温度 T 有关。具体而言，黑洞的霍金辐射会对可导引性产生影响。因此，在史瓦西时空框架下，$1\to 2$ 量子导引与 $2\to 1$ 量子导引并不相同，从而揭示了导引不对称性的存在。为量化导引不对称性的程度，我们推导出如下表达式：

$$\begin{aligned}S_{AB|C}^{\Delta} &= \left|S_H^{C\to AB} - S_H^{AB\to C}\right|, \\ S_{BC|A}^{\Delta} &= \left|S_H^{A\to BC} - S_H^{BC\to A}\right|, \\ S_{CA|B}^{\Delta} &= \left|S_H^{B\to CA} - S_H^{CA\to B}\right|.\end{aligned} \tag{47}$$

图 1 描述了三体态 ρ_{ABC}^{H} 的量子导引和导引不对称性随黑洞霍金温度 T的变化关系，其中 $\omega = 1$固定，参数 α取三个不同的值： $\alpha = \frac{1}{4}$、 $\alpha = \frac{1}{2}$ $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 1 和 。图中第一行和第二行分别展示了 $S_H^{A\to BC}$和 $S_H^{BC\to A}$（第一行），以及 $S_H^{B\to CA}$和 $S_H^{CA\to B}$（第二行）随霍金温度 T的变化。随着霍金温度 T 升高， $S_H^{A\to BC}$、 $S_H^{BC\to A}$、 $S_H^{B\to CA}$和$S_H^{CA\to B}$均呈单调下降趋势，表明霍金效应抑制了量子导引。值得注意的是， $S_H^{BC\to A}$呈现出“突然死亡现象”，而$S_H^{A\to BC}$则持续存在，未随着霍金温度 T升高而完全消失。对于 $S_H^{CA\to B}$，在 $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$处会出现突然死亡现象；而当 $\alpha = \frac{1}{4}$ 和 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时，则逐渐衰减至零。相比之下， $S_H^{B\to CA}$在整个参数范围内始终保持非零。这表明存在一个临界量子转变：由于霍金诱导的退相干，导引由双向导引演化为单向导引。当系统从双向导引转变为单向导引时，导引不对称性达到最大值。该最大不对称性精确地划分了黑洞时空中双向导引区域与单向导引区域之间的相边界。

对于图 1 的底行，量子导引 $S_H^{C\to AB}$和$S_H^{AB\to C}$随霍金温度 T升高而单调下降，但其渐近值仍大于零，这表明量子关联未被完全抑制。此外，从图 1 可以看出，在霍金温度 T固定时，量子导引随参数 α 单调增加，且 $1\to 2$ 量子导引强度始终高于 $2\to 1$ 量子导引。

因此，我们得出结论：黑洞的霍金效应会抑制完全可访问情形下的量子导引。在 [52], 中，作者得出结论：相对论运动中的乌鲁效应会削弱 GHZ态的量子导引，这进一步印证了我们的结果。对于二部态， [50], 中的作者得出结论：量子导引首先经历了下降——

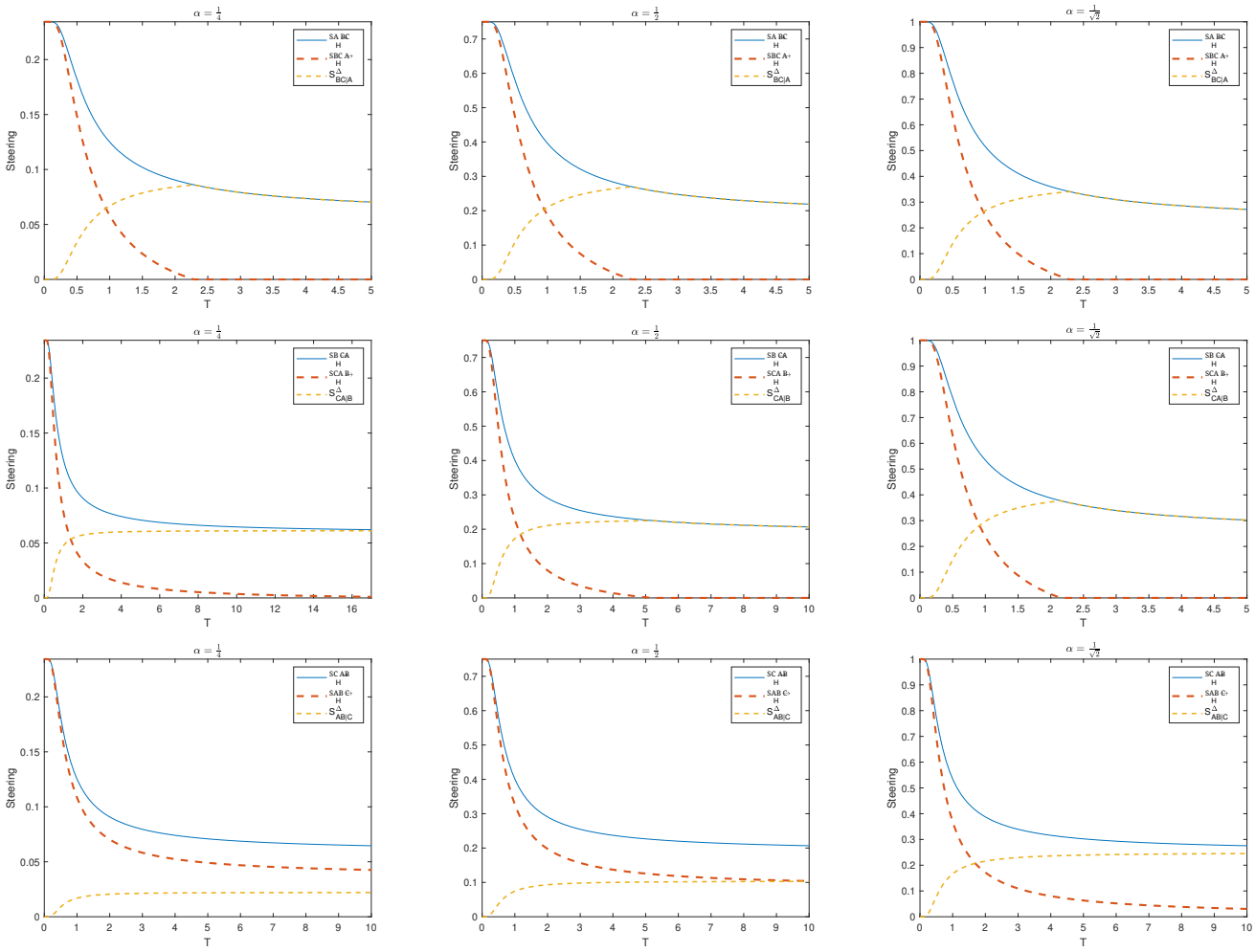


图 1：在固定 $\omega = 1$ 的情况下，ρ^H_{ABC} 的量子导引和导引不对称性随黑洞霍金温度 T 的变化关系，以及参数 α 的三种不同取值：$\alpha = \frac{1}{4}$、$\alpha = \frac{1}{2}$ 和 $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$。

随后趋近于一个非零渐近值。这一结论与图1最后一行所示结果相似。相比之下，前两行中的 $2 \to 1$ 量子导引最终会衰减至零。

不可及模式 b 和可访问模式 C 求迹，我们得到

$$\begin{aligned}\rho^H_{ABc} = &\frac{\alpha^2}{(e^{-\frac{\omega}{T}}+1)^2}|000\rangle\langle 000| + \frac{\alpha^2}{(e^{\frac{\omega}{T}}+1)^2}|011\rangle\langle 011| \\ &+ \frac{\alpha^2}{e^{-\frac{\omega}{T}}+e^{\frac{\omega}{T}}+2}(|001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010|) \\ &+ \frac{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{e^{-\frac{\omega}{T}}+e^{\frac{\omega}{T}}+2}}(|001\rangle\langle 110| + |110\rangle\langle 001|) \\ &+ (1-\alpha^2)|110\rangle\langle 110|.\end{aligned} \tag{48}$$

B. 两个物理可访问模式

让我们考虑这样一种情形：其中包含两个物理可访问模式：费米子 A、B，以及一个反费米子 c。由式 (38)，对

与量子态 ρ^H_{ABc} 对应的密度矩阵形式为

$$\rho_{ABc}^{H}=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{27} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{72} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{77} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{49}$$

where $b_{11}=\frac{\alpha^2}{(e^{-\frac{\omega}{T}}+1)^2}$, $b_{22}=b_{33}=\frac{\alpha^2}{e^{-\frac{\omega}{T}}+e^{\frac{\omega}{T}}+2}$, $b_{44}=\frac{\alpha^2}{(e^{\frac{\omega}{T}}+1)^2}$, $b_{77}=(1-\alpha^2)$, $b_{27}=b_{72}=\frac{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{e^{-\frac{\omega}{T}}+e^{\frac{\omega}{T}}+2}}$.

然后，利用方程 30 - 35，我们推导出从 c 到 AB、从 AB 到 c、从 A 到 Bc、从 Bc 到 A、从 B 到 cA 以及从 cA 到 B 的量子导引，结果为

$$S_H^{c\to AB}=max\left\{0,4|b_{27}|^2\right\}, \tag{50}$$

$$\begin{aligned} S_H^{AB\to c}=max\Bigg\{0,\frac{16}{3}\Big[|b_{27}|^2-(b_{22}+b_{44}) \\ \cdot\left(\frac{1}{4}b_{11}+\frac{3}{4}b_{33}+\frac{1}{4}b_{77}\right)\Big]\Bigg\}, \end{aligned} \tag{51}$$

$$S_H^{A\to Bc}=max\left\{0,4(|b_{27}|^2-\frac{1}{2}b_{11}b_{44})\right\}, \tag{52}$$

$$\begin{aligned} S_H^{Bc\to A}=max\Bigg\{0,\frac{16}{3}\Bigg[|b_{27}|^2-\frac{3}{4}b_{44}b_{77} \\ -\frac{1}{4}\left(b_{11}+b_{22}+b_{33}\right)b_{77}\Bigg]\Bigg\}, \end{aligned} \tag{53}$$

$$S_H^{B\to cA}=max\left\{0,4|b_{27}|^2\right\}, \tag{54}$$

$$\begin{aligned} S_H^{cA\to B}=max\Bigg\{0,\frac{16}{3}\Big[|b_{27}|^2-(b_{33}+b_{44}+b_{77}) \\ \cdot\left(\frac{3}{4}b_{11}+\frac{1}{4}b_{22}\right)\Big]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{55}$$

根据式（36），我们可以得到导引不对称性

$$\begin{aligned} S_{AB|c}^{\Delta}&=\left|S_H^{c\to AB}-S_H^{AB\to c}\right|, \\ S_{Bc|A}^{\Delta}&=\left|S_H^{A\to Bc}-S_H^{Bc\to A}\right|, \\ S_{cA|B}^{\Delta}&=\left|S_H^{B\to cA}-S_H^{cA\to B}\right|. \end{aligned} \tag{56}$$

在图2中，我们绘制了三体态 ρ_{ABc}^{H} 的量子导引及其不对称性随黑洞霍金温度 T的变化，保持 $\omega=1$ 不变，同时使 α $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 2 $S_H^{A\to Bc}$ $\frac{1}{4}$,在三个代表性取值之间变化：和。图的第一行绘制了和 $S_H^{Bc\to A}$随霍金温度 T的变化，而第二行显示了 $S_H^{B\to cA}$和 $S_H^{cA\to B}$的相应行为。随着霍金温度 T升高，$S_H^{A\to Bc}$和 $S_H^{B\to cA}$逐渐上升并随后趋于饱和，而 $S_H^{Bc\to A}$和 $S_H^{cA\to B}$ 始终保持为零。关键的是，$S_{Bc|A}^{\Delta}=S_H^{A\to Bc}$和 $S_{cA|B}^{\Delta}=S_H^{B\to cA}$在该阶段。关联函数中观测到的不对称性证实，在当前实验条件下，该系统经历单向量子导引。在图2的底行中，$S_H^{c\to AB}$随霍金温度 T单调增加，而 $S_H^{AB\to c}$对 T 表现出非单调依赖，其特征是先上升后逐渐下降。这表明量子系统从无向（$T\to 0$）量子导引转变为双向量子导引。此外，如图2所示，当霍金温度 T 保持不变时，量子导引（不包括 $S_H^{AB\to c}$）随参数 α单调增长。

因此，如图2所示，我们得出结论：霍金效应对量子导引具有双重影响：它不仅增强量子导引 $S_H^{AB\to c}$，还会在特定参数条件下导致其受到抑制。同时，对于除 $S_H^{AB\to c}$之外的导引，霍金效应表现出净增强作用。

C. 一个物理可访问模

我们分析最后一种情形，其中只有一个物理可访问模：费米子粒子 A，以及反费米子粒子 b 和 c。通过利用式（38）对可访问模式 B和 C 进行偏迹，我们得到

$$\begin{aligned} \rho_{Abc}^{H}=&\frac{\alpha^2}{(e^{-\frac{\omega}{T}}+1)^2}|000\rangle\langle 000|+\frac{\alpha^2}{(e^{\frac{\omega}{T}}+1)^2}|011\rangle\langle 011| \\ &+\frac{\alpha^2}{e^{-\frac{\omega}{T}}+e^{\frac{\omega}{T}}+2}(|001\rangle\langle 001|+|010\rangle\langle 010|) \\ &+\frac{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{e^{\frac{\omega}{T}}+1}(|011\rangle\langle 100|+|100\rangle\langle 011|) \\ &+(1-\alpha^2)|100\rangle\langle 100|. \end{aligned} \tag{57}$$

与量子态 ρ_{ABc}^{H} 对应的密度矩阵形式为

$$\rho_{ABc}^{H}=\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{54} & c_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{58}$$

where $c_{11}=\frac{\alpha^2}{(e^{-\frac{\omega}{T}}+1)^2}$, $c_{22}=c_{33}=\frac{\alpha^2}{e^{-\frac{\omega}{T}}+e^{\frac{\omega}{T}}+2}$, $c_{44}=\frac{\alpha^2}{(e^{\frac{\omega}{T}}+1)^2}$, $c_{55}=(1-\alpha^2)$, $c_{45}=c_{54}=\frac{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{e^{\frac{\omega}{T}}+1}$.

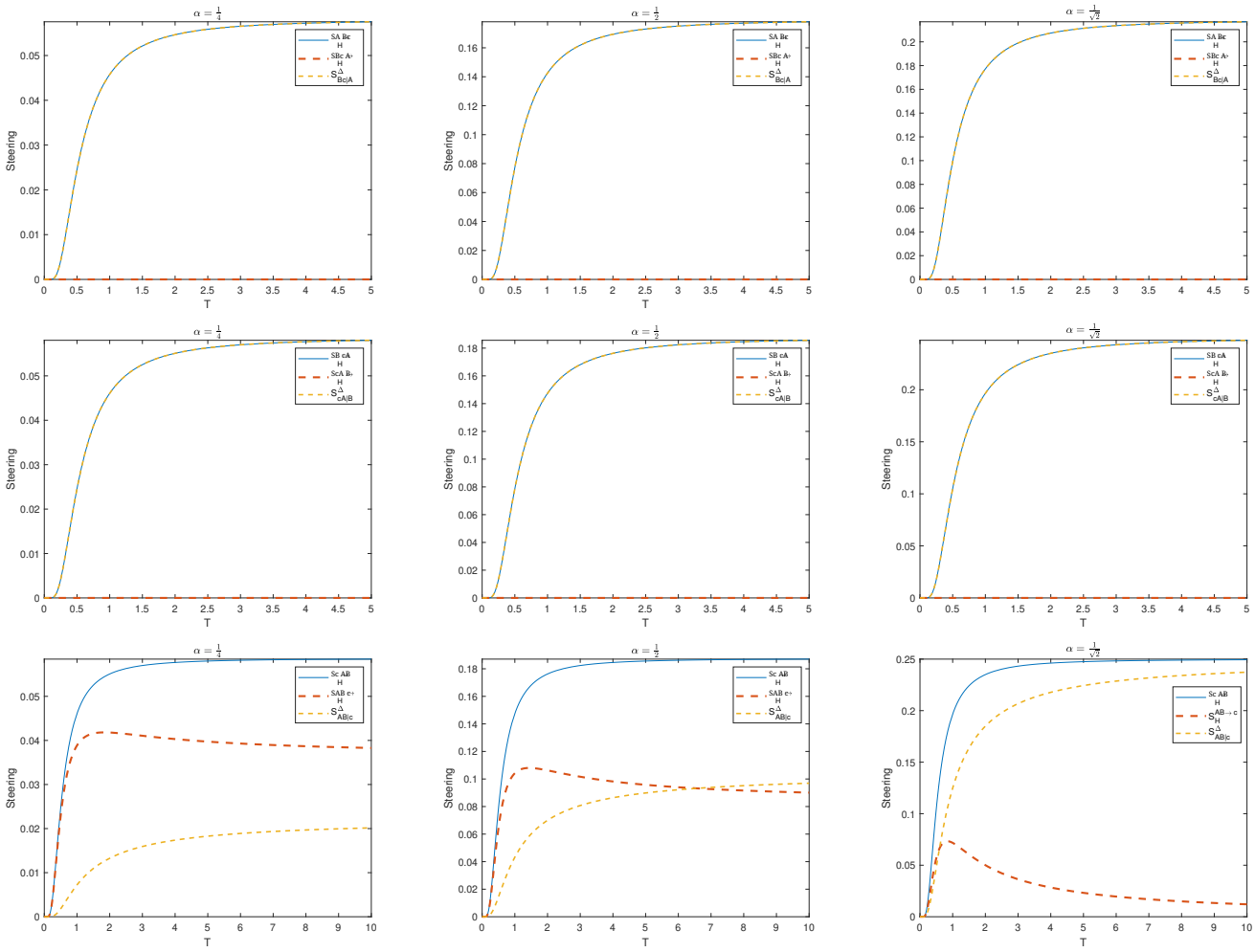


图2： ρ_{ABc}^{H}的量子导引和导引不对称性作为黑洞霍金温度 T的函数，其中 $\omega=1$固定，参数 α取三个不同值： $\alpha=\frac{1}{4}$、 $\alpha=\frac{1}{2}$和 $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$。

根据式（30）—（35），我们可以得到从 c 到 Ab、从 A 到 bc 以及从 b 到 cA 的量子导引分别为

$$S_H^{c\to Ab}=max\left\{0,4|c_{45}|^2\right\}, \tag{59}$$

$$S_H^{Ab\to c}=max\left\{0,\frac{16}{3}\left[|c_{45}|^2-(c_{22}+c_{44})\cdot\left(\frac{3}{4}c_{11}+\frac{1}{4}c_{33}+\frac{1}{4}c_{55}\right)\right]\right\}, \tag{60}$$

$$S_H^{A\to bc}=max\left\{0,4(|c_{45}|^2-\frac{1}{2}c_{22}c_{33})\right\}, \tag{61}$$

$$S_H^{bc\to A}=max\left\{0,\frac{16}{3}\left[|c_{45}|^2-\frac{3}{4}c_{22}c_{55}-\frac{1}{4}\left(c_{11}+c_{33}+c_{44}\right)c_{55}\right]\right\}, \tag{62}$$

$$S_H^{b\to cA}=max\left\{0,4|c_{45}|^2\right\}, \tag{63}$$

$$S_H^{cA\to b}=max\left\{0,\frac{16}{3}\left[|c_{45}|^2-(c_{11}+c_{22}+c_{55})\cdot\left(\frac{3}{4}c_{33}+\frac{1}{4}c_{44}\right)\right]\right\}. \tag{64}$$

根据式（36），我们有

$$\begin{aligned}S_{AB|c}^{\Delta}&=\left|S_H^{c\to Ab}-S_H^{Ab\to c}\right|,\\ S_{Bc|A}^{\Delta}&=\left|S_H^{A\to bc}-S_H^{bc\to A}\right|,\\ S_{cA|B}^{\Delta}&=\left|S_H^{b\to cA}-S_H^{cA\to b}\right|.\end{aligned} \tag{65}$$

在图3中，我们展示了三体态 ρ_{Abc}^{H} 的量子导引和导引不对称性随黑洞霍金温度 T变化的情况。分析在固定 $\omega=1$的条件下进行，并令 α 取三个特征值：

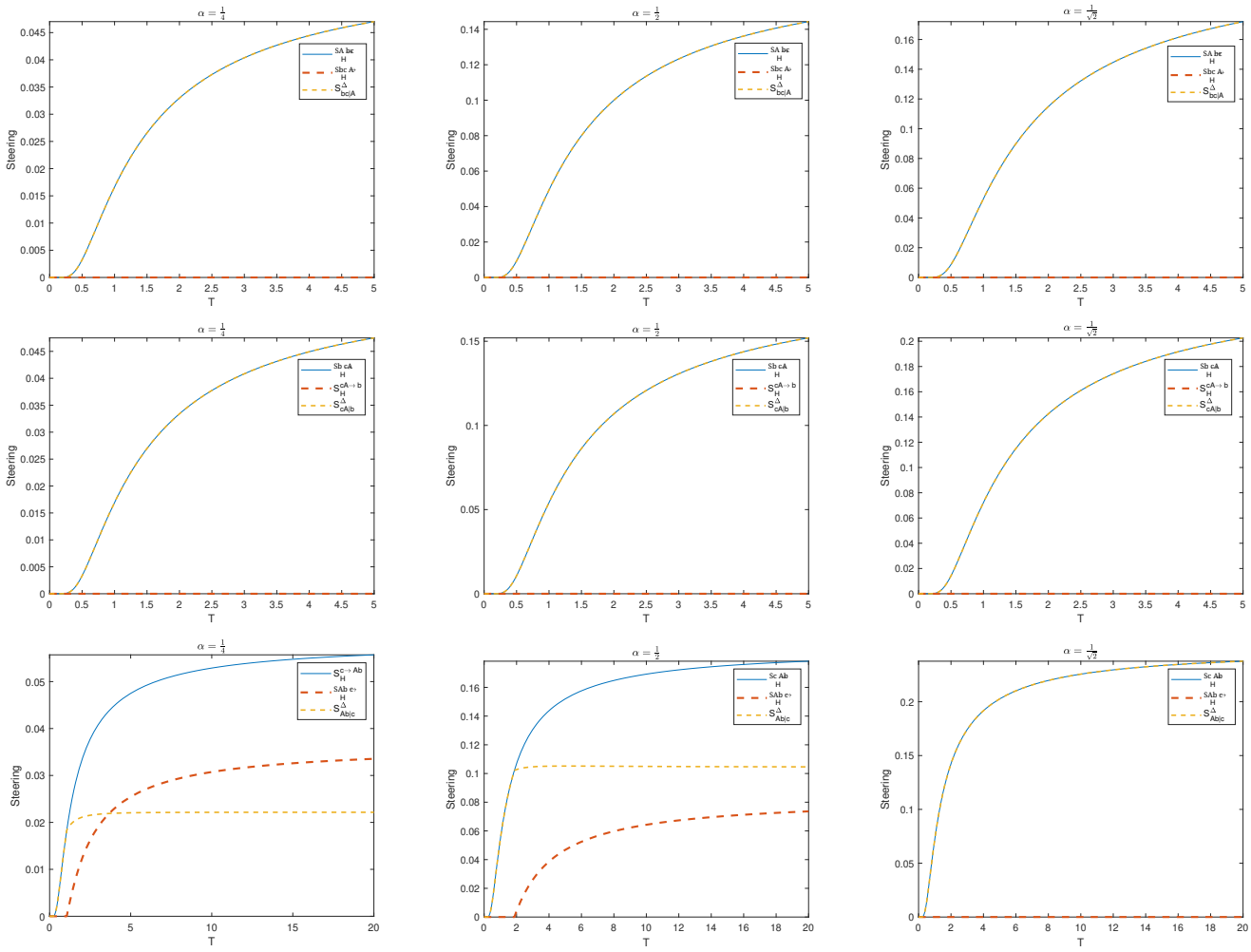


图3：当 $\omega = 1$ 固定时， ρ^{H}_{Abc} 的量子导引和导引不对称性随黑洞霍金温度 T 变化的函数关系，其中参数 α 取三个不同值：$\alpha = \frac{1}{4}$、$\alpha = \frac{1}{2}$ 和 $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$。

1 4、1 2 和 $\frac{1}{\sqrt{2}}$。图3的前两行在量子导引及其不对称性的变化趋势方面与图2定性一致。接下来，我们分析图3底行所示的量子导引参数 $S_H^{c\to Ab}$ 和 $S_H^{Ab\to c}$ 随霍金温度 T 的变化。值得注意的是，当 $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，观察到的趋势与前两行一致；而 $\alpha = \frac{1}{4}$ 和 $\alpha = \frac{1}{2}$ 则呈现出不同的行为模式。当 $\alpha = \frac{1}{4}$（$\alpha = \frac{1}{2}$）时， $S_H^{c\to Ab}$ 和 $S_H^{Ab\to c}$ 均单调增加，并随霍金温度 T 升高而呈现“突然产生”现象。值得注意的是，对于 $T \to 0$， $S_H^{c\to Ab}$ 和 $S_H^{Ab\to c}$ 均为零；随着霍金温度 T 升高，参数 $S_H^{c\to Ab}$ 比参数 $S_H^{Ab\to c}$ 更早开始从零增长。换言之，这表明量子导引发生了顺序相变：随着霍金温度升高，导引从无向导引转变为单向导引，随后转变为双向导引。

此外，从图3可见，在只有一个物理可访问模的情形下，霍金效应增强了三方系统中的量子导引。在 [50]，对物理不可访问的量子导引进行研究后，作者发现，随着霍金温度 T 升高，量子导引 $S^{A\to\bar{B}}$ 和 $S^{\bar{B}\to A}$ 最初从零逐渐增长，并呈现“突然产生”现象。这与我们的一些结果相似。

结论

我们研究了霍金辐射对嵌入史瓦西黑洞中的三方系统内量子导引和导引不对称性的影响。在本文中，假设一种时空构型：Alice 位于渐近平坦时空区域，而 Bob 和 Charlie 则在史瓦西黑洞的事件视界附近运行。随后，我们系统地探讨了所有可设想的情形，包括物理可访问模式和不可及模式，并具体分析了三种情形：(i) 三个物理可访问模式，(ii) 两个物理可访问模式，以及 (iii) 一个物理可访问模式。

，涵盖物理可访问模式和不可及模式，并具体分析了三种情形：(i) 三个物理可访问模式，(ii) 两个物理可访问模式，以及 (iii) 一个物理可访问模式。

在第一种情形下，霍金效应会扰乱量子导引。此外，当系统从双向导引转变为单向导引时，导引不对称性达到最大值，这恰好标志着黑洞时空中双向导引与单向导引区域之间的相边界。我们还将本文研究的费米子三方导引与以往研究的双方导引进行了比较。先前研究表明，费米子双方导引不会出现“猝死”现象 [50], ，而玻色子导引在退化过程中会发生“猝死” [61, 62]。我们的结果表明，导引$S_H^{BC\to A}$和$S_H^{CA\to B}$会出现“猝死”现象，而其他四种导引构型则不会出现这种行为。

在第二种情形下，霍金效应对量子导引产生双重影响。具体而言，它不仅会增强导引 $S_H^{AB\to c}$，还会在满足特定参数条件时使其受到抑制。同时，除 $S_H^{AB\to c}$以外的其他导引类型总体上都会受到霍金效应的增强。在第三种情形下，我们的分析表明，霍金效应会显著增强量子导引。

有趣的是，在所考虑的三种情形中，$1 \to 2$ 导引强度始终高于 $2 \to 1$ 导引强度。我们的研究显著丰富了黑洞时空中三体量子导引的理论框架。这些发现对于推进弯曲时空中的量子导引研究具有重要意义，并为该领域的进一步探索提供了新的见解和理论基础。

本研究获得国家自然科学基金委员会资助，项目编号为 12204137 和 12564048；同时获得海南省自然科学基金资助，项目编号为 125RC744，并得到海南院士工作站的支持。

[1] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, Phys. Rev. 47, 777 (1935). [2] E. Schr¨odinger, Math. Proc. Cambr. Philos. Soc. 31, 555 (1935). [3] E. Schr¨odinger, Math. Proc. Cambr. Philos. Soc. 32, 446 (1936). [4] H.M. Wiseman, S.J. Jones, A.C. Doherty, Phys. Rev. Lett. 98, 140402 (2007). [5] S.P. Walborn, A. Salles, R.M. Gomes, F. Toscano, P.H. SoutoRibeiro, Phys. Rev. Lett. 106, 130402 (2011). [6] M. Navascu´és, D. P´erez-Garc´ıa, Phys. Rev. Lett. 109, 160405 2012( ). [7] P. Skrzypczyk, M. Navascu´es, D. Cavalcanti, Phys. Rev. Lett. 112, 180404 (2014). [8] X. Deng, Y. Xiang, C. Tian, G. Adesso, Q. He, Q. Gong, X. Su, C. Xie, K. Peng, Phys. Rev. Lett. 118, 230501 (2017). [9] R.V. Nery, M.M. Taddei, R. Chaves, L. Aolita, Phys. Rev. Lett. 120, 140408 (2018). [10] R.V. Nery, M.M. Taddei, P. Sahium, S.P. Walborn, L. Aolita, G.H. Aguilar, Phys. Rev. Lett. 124, 120402 (2020). [11] S. Designolle, V. Srivastav, R. Uola, N.H. Valencia, W. McCutcheon, M. Malik, N. Brunner, Phys. Rev. Lett. 126, 200404 (2021). [12] Y.N. Chen, C.M. Li, N. Lambert, S.L. Chen, Y. Ota, G.Y. Chen, F. Nori, Phys. Rev. A 89, 032112 (2014). [13] I. Kogias, A.R. Lee, S. Ragy, G. Adesso, Phys. Rev. Lett. 114, 060403 (2015). [14] C. Ren, H.Y. Su, H. Shi, J. Chen, Phys. Rev. A 97, 032119 2018( ). [15] A.G. Maity, S. Datta, A.S. Majumdar, Phys. Rev. A 96, 052326 2018( ). [16] D.J. Saunders, S.J. Jones, H.M. Wiseman, G.J. Pryde, Nat. Phys. 6, 845 (2010). [17] S. Wollmann, N. Walk, A.J. Bennet, H.M. Wiseman, G.J. Pryde, Phys. Rev. Lett. 116, 160403 (2016). [18] Y. Xiao, X.J. Ye, K. Sun, J.S. Xu, C.F. Li, G.C. Guo, Phys. Rev. Lett. 118, 140404 (2017). [19] C. Branciard, E.G. Cavalcanti, S.P. Walborn, V. Scarani, H.M. Wiseman, Phys. Rev. A 85, 010301 (2012). [20] V. H¨andchen, T. Eberle, S. Steinlechner, A. Samblowski, T. Franz, R.F. Werner, R. Schnabel, Nat. Photon. 6, 596 (2012). [21] S. Armstrong, M. Wang, R.Y. Teh, Q. Gong, Q. He, J. Janousek, H.A. Bachor, M.D. Reid, P.K. Lam, Nat. Phys. 11, 167 (2015). [22] N. Tischler, F. Ghafari, T.J. Baker, S. Slussarenko, R.B. Patel, M.M. Weston, S. Wollmann, L.K. Shalm, V.B. Verma, S.W. Nam, H.C. Nguyen, H.M. Wiseman, G.J. Prydel, Phys. Rev. Lett. 121, 100401 (2018). [23] Y. Fan, C. Jia, L. Qiu, Phys. Rev. A 106, 012433 (2022). [24] K. Schwarzschild, Sitzungsberichte der k¨oniglich preussischen Akademie der Wissenschaften, 189 (1916). [25] S.W. Hawking, Nature 248, 30 (1974). [26] S.W. Hawking, Commun. Math. Phys. 43, 199 (1975). [27] S.W. Hawking, Phys. Rev. D 14, 2460 (1976). [28] L. Bombelli, R.K. Koul, J. Lee, R.D. Sorkin, Phys. Rev. D 34, 373 (1986). [29] 事件视界望远镜合作组, Astrophys. J. Lett. 875, L1 (2019). [30] 事件视界望远镜合作组, Astrophys. J. Lett. 875, L2 (2019). [31] 事件视界望远镜合作组, Astrophys. J. Lett. 875, L3 (2019). [32] 事件视界望远镜合作组, Astrophys. J. Lett. 875, L4 (2019). [33] 事件视界望远镜合作组, Astrophys. J. Lett. 875, L5 (2019). [34] 事件视界望远镜合作组, Astrophys. J. Lett. 875, L6 (2019). [35] 事件视界望远镜合作组, Astrophys.

J. Lett. 930, L17（2022年）。[36] I. Fuentes-Schuller, R.B. Mann, Phys. Rev. Lett. 95, 120404 2005（）。[37] Q. Pan, J. Jing, Phys. Rev. D 78, 065015（2008年）。[38] J. Wang, Q. Pan, S. Chen, J. Jing, Phys. Lett. B 677, 186 2009（）。[39] J. Wang, Q. Pan, J. Jing, Phys. Lett. B 692, 202（2010年）[40] B. Nasr Esfahani, M. Shamirzaie, M. Soltani, Phys. Rev. D 84, 025024（2011年）。[41] S. Bhattacharya, N. Joshi, Phys. Rev. D 105, 065007（2022年）[42] S.M. Wu, H.S. Zeng, Eur. Phys. J. C 82, 4 （ 2022 年）。[43] L.J. Li, F. Ming, X.K. Song, L. Ye, D. Wang, Eur. Phys. J. C 82, 726（2022年）。[44] T. Zhang, X. Wang, S.M. Fei, Eur. Phys. J. C 83, 607（2023年）。[45] G.W. Mi, X. Huang, S.M. Fei, T. Zhang, Eur. Phys. J. C 85, 354（2025年）。[46] W.C. Qiang, G.H. Sun, Q. Dong, S.H. Dong, Phys. Rev. A 98, 022320（2018年）。[47] A.J. Torres-Arenas, Q. Dong, G.H. Sun, W.C. Qiang, S.H. Dong, Phys. Lett. B 789, 93（2019年）。[48] A.R.P. Moreira, A. Bouzenada, S.H. Dong, G.H. Sun, F. Ahmed, Eur. Phys. J. C 85, 1067（2025年）。[49] D. Das, S. Sasmal, S. Roy, Phys. Rev. A 99, 052109（2019年）。[50] S.M. Wu, H.S. Zeng, Eur. Phys. J. C 82, 716（2022年）。[51] Z. Chen, S.M. Fei, Entropy 24, 1297（2022年）。[52] S.H. Shang ， S.M. Wu, Eur. Phys. J. C 85, 790（2025年）。[53] D.R. Brill, J.A. Wheeler, Rev. Mod. Phys. 29, 465（1957年）。[54] E. Mart´ın-Mart´ınez, L. J. Garay, and J. Le´on, Phys. Rev. D 82, 064006（2010年）。[55] S. Xu, X. K. Song, J. D. Shi, and L. Ye, Phys. Rev. D。89, 065022 (2014)。[56] J.L. Jing, Phys. Rev. D 70 065004 (2004)。[57] T. Damoar, R. Ruffini, Phys. Rev. D 14, 332 (1976) [58] S.M. Barnett, P.M. Radmore, 牛津大学出版社，纽约 (1997)。[59] J. Wang, Q. Pan, J. Jing, 《物理年鉴》325, 1190 (2010)。[60] S.M. Wu, X.W. Teng, J.X. Li, S.H. Li, T.H. Liu, and J.C. Wang, 《物理快报B》848, 138334 (2024)。[61] J. Wang, H. Cao, J. Jing, H. Fan, Phys. Rev. D 93, 125011 2016( )。[62] J. Wang, J. Jing, H. Fan, 《物理年鉴》Berlin 530, 1700261 (2018)。

附录A：A 到 BC 及 BC 到 A 的量子导引

由于 $\rho_{ABC}=\rho_X$，我们可以推导出

$$\rho_{BCA}=\begin{pmatrix}\rho_{11}&0&0&0&0&0&0&\rho_{18}\\0&\rho_{55}&0&0&0&0&\rho_{45}&0\\0&0&\rho_{22}&0&0&\rho_{27}&0&0\\0&0&0&\rho_{66}&\rho_{36}&0&0&0\\0&0&0&\rho_{63}&\rho_{33}&0&0&0\\0&0&\rho_{72}&0&0&\rho_{77}&0&0\\0&\rho_{54}&0&0&0&0&\rho_{44}&0\\\rho_{81}&0&0&0&0&0&0&\rho_{88}\end{pmatrix}. \quad (66)$$

因此，根据式（18），我们得到，与 ρ_{BCA} 相关联的导引密度矩阵 $\tau^1_{BC|A}$ 可精确表示为

$$\tau^1_{BC|A}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{11}+g_1&0&0&0&0&0&0&\frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{18}\\0&\frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{55}+g_1&0&0&0&0&\frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{45}&0\\0&0&\frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{22}+g_2&0&0&\frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{27}&0&0\\0&0&0&\frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{66}+g_2&\frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{36}&0&0&0\\0&0&0&\frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{63}&\frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{33}+g_3&0&0&0\\0&0&\frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{72}&0&0&\frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{77}+g_3&0&0\\0&\frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{54}&0&0&0&0&\frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{44}+g_4&0\\\frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{81}&0&0&0&0&0&0&\frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{88}+g_4\end{pmatrix}, \quad (67)$$

其中 $g_1=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$（$\rho_{11}+\rho_{55}$）、$g_2=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$（$\rho_{22}+\rho_{66}$）、$g_3=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$（$\rho_{33}+\rho_{77}$）以及 $g_4=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$（$\rho_{44}+\rho_{88}$）。量子态 $\tau^1_{BC|A}$ 满足以下不等式时即为纠缠态

$$|\rho_{18}|^2>T^1_{a,-}\qquad or\qquad |\rho_{27}|^2>T^1_{b,-}, \quad (68)$$

or

$$|\rho_{36}|^2>T^1_{b,+}\qquad or\qquad |\rho_{45}|^2>T^1_{a,+}, \quad (69)$$

其中

$$\begin{aligned}T^1_{a,\pm}=&\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}\rho_{22}\rho_{77}+\frac{2\mp\sqrt{3}}{2}\rho_{33}\rho_{66}\\&+\frac{1}{2}(\rho_{22}\rho_{33}+\rho_{66}\rho_{77}),\\T^1_{b,\pm}=&\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}\rho_{11}\rho_{88}+\frac{2\mp\sqrt{3}}{2}\rho_{44}\rho_{55}\\&+\frac{1}{2}(\rho_{11}\rho_{44}+\rho_{55}\rho_{88}).\end{aligned} \quad (70)$$

因此，可以辨识出从 A 到 BC 的量子导引。由此，我们得出导引密度矩阵 $\tau^2_{BC|A}$

$$\tau^2_{BC|A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\rho_{11}+h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{18}\\ 0 & \frac{1}{3}\rho_{55}+h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{45} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{22}+h_1 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{27} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{66}+h_2 & \frac{1}{3}\rho_{36} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{63} & \frac{1}{3}\rho_{33}+h_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{72} & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{77}+h_2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\rho_{54} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{44}+h_1 & 0\\ \frac{1}{3}\rho_{81} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{88}+h_2\end{pmatrix}, \tag{71}$$

其中 $h_1=\frac{1}{6}\big(\rho_{11}+\rho_{22}+\rho_{33}+\rho_{44}-\rho_{55}+\rho_{66}+\rho_{77}+\rho_{88}\big)$ 且 $h_2=\frac{1}{6}\big(\rho_{11}+\rho_{22}+\rho_{33}+\rho_{44}+\rho_{55}-\rho_{66}-\rho_{77}-\rho_{88}\big)$。当量子态 $\tau^2_{BC|A}$ 满足以下不等式时，它是纠缠态

$$|\rho_{18}|^2>T^2_{a,-}\qquad or\qquad |\rho_{27}|^2>T^2_{b,-}, \tag{72}$$

or

$$|\rho_{36}|^2>T^2_{b,+}\qquad or\qquad |\rho_{45}|^2>T^2_{a,+}, \tag{73}$$

其中

$$\begin{aligned}T^2_{a,-}=&\frac{9}{4}\rho_{33}\rho_{66}+\frac{3}{4}(\rho_{11}\rho_{66}+\rho_{22}\rho_{66}+\rho_{44}\rho_{66}\\&+\rho_{33}\rho_{55}+\rho_{33}\rho_{77}+\rho_{33}\rho_{88})+\frac{1}{4}(\rho_{11}\rho_{55}\\&+\rho_{11}\rho_{77}+\rho_{11}\rho_{88}+\rho_{22}\rho_{55}+\rho_{22}\rho_{77}\\&+\rho_{22}\rho_{88}+\rho_{44}\rho_{55}+\rho_{44}\rho_{77}+\rho_{44}\rho_{88}),\\ T^2_{b,-}=&\frac{9}{4}\rho_{44}\rho_{55}+\frac{3}{4}(\rho_{11}\rho_{55}+\rho_{22}\rho_{55}+\rho_{33}\rho_{55}\\&+\rho_{44}\rho_{66}+\rho_{44}\rho_{77}+\rho_{44}\rho_{88})+\frac{1}{4}(\rho_{11}\rho_{66}\\&+\rho_{11}\rho_{77}+\rho_{11}\rho_{88}+\rho_{22}\rho_{66}+\rho_{22}\rho_{77}\\&+\rho_{22}\rho_{88}+\rho_{33}\rho_{66}+\rho_{33}\rho_{77}+\rho_{33}\rho_{88}),\\ T^2_{b,+}=&\frac{9}{4}\rho_{11}\rho_{88}+\frac{3}{4}(\rho_{11}\rho_{55}+\rho_{11}\rho_{66}+\rho_{11}\rho_{77}\\&+\rho_{22}\rho_{88}+\rho_{33}\rho_{88}+\rho_{44}\rho_{88})+\frac{1}{4}(\rho_{22}\rho_{55}\\&+\rho_{22}\rho_{66}+\rho_{22}\rho_{77}+\rho_{33}\rho_{55}+\rho_{33}\rho_{66}\\&+\rho_{33}\rho_{77}+\rho_{44}\rho_{55}+\rho_{44}\rho_{66}+\rho_{44}\rho_{77}),\\ T^2_{a,+}=&\frac{9}{4}\rho_{22}\rho_{77}+\frac{3}{4}(\rho_{22}\rho_{55}+\rho_{22}\rho_{66}+\rho_{22}\rho_{88}\\&+\rho_{11}\rho_{77}+\rho_{33}\rho_{77}+\rho_{44}\rho_{77})+\frac{1}{4}(\rho_{11}\rho_{55}\\&+\rho_{11}\rho_{66}+\rho_{11}\rho_{88}+\rho_{33}\rho_{55}+\rho_{33}\rho_{66}\\&+\rho_{33}\rho_{88}+\rho_{44}\rho_{55}+\rho_{44}\rho_{66}+\rho_{44}\rho_{88}).\end{aligned} \tag{74}$$

对应于 ρ_{BCA} 的表达式可以精确写为

因此，根据式（68）—（74），从 A 到 BC 的量子导引为

$$\begin{aligned}S^{A\to BC}=&max\left\{0,4(|\rho_{18}|^2-T^1_{a,-}),4(|\rho_{27}|^2-T^1_{b,-}),\right.\\&\left.4(|\rho_{36}|^2-T^1_{b,+}),4(|\rho_{45}|^2-T^1_{a,+})\right\},\end{aligned}$$

从 BC 到 A 的量子导引为

$$\begin{aligned}S^{BC\to A}=&max\left\{0,\frac{16}{3}(|\rho_{18}|^2-T^2_{a,-}),\frac{16}{3}(|\rho_{27}|^2-T^2_{b,-}),\right.\\&\left.\frac{16}{3}(|\rho_{36}|^2-T^2_{b,+}),\frac{16}{3}(|\rho_{45}|^2-T^2_{a,+})\right\}.\end{aligned}$$

这里，将系数 4 和 16 3 设定为确保最大纠缠态的量子导引达到 1。

附录 B：从 B 到 CA 以及从 CA 到 B 的量子导引

由于 $\rho_{ABC}=\rho_X$，我们可以得到

$$\rho_{CAB}=\begin{pmatrix}\rho_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{18}\\ 0 & \rho_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{36} & 0\\ 0 & 0 & \rho_{55} & 0 & 0 & \rho_{45} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \rho_{77} & \rho_{27} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \rho_{72} & \rho_{22} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \rho_{54} & 0 & 0 & \rho_{44} & 0 & 0\\ 0 & \rho_{63} & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{66} & 0\\ \rho_{81} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{88}\end{pmatrix}. \tag{75}$$

因此，由式 (20) 可得， ρ_{CAB} 的导引密度矩阵 $\tau^1_{CA|B}$ 可明确写为

$$\tau^1_{CA|B}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{11}+i_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{18} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{33}+i_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{36} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{55}+i_2 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{77}+i_2 & \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{27} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{72} & \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{22}+i_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{54} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{44}+i_3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{63} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{66}+i_4 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{81} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_{88}+i_4 \end{pmatrix}, \quad (76)$$

其中 $i_1=\frac{3-\sqrt{3}}{6}(\rho_{11}+\rho_{33})$、$i_2=\frac{3-\sqrt{3}}{6}(\rho_{55}+\rho_{77})$、$i_3=\frac{3-\sqrt{3}}{6}(\rho_{22}+\rho_{44})$，以及 $i_4=\frac{3-\sqrt{3}}{6}(\rho_{66}+\rho_{88})$。若量子态 $\tau^1_{BC|A}$ 满足以下不等式，则其为纠缠态

$$|\rho_{18}|^2>Q^1_{a,+} \qquad or \qquad |\rho_{27}|^2>Q^1_{b,+}, \quad (77)$$

or

$$|\rho_{36}|^2>Q^1_{a,-} \qquad or \qquad |\rho_{45}|^2>Q^1_{b,-}, \quad (78)$$

其中

$$\begin{aligned} Q^1_{a,\pm}=&\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}\rho_{22}\rho_{77}+\frac{2\mp\sqrt{3}}{2}\rho_{44}\rho_{55} \\ &+\frac{1}{2}(\rho_{22}\rho_{55}+\rho_{44}\rho_{77}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^1_{b,\pm}=&\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}\rho_{11}\rho_{88}+\frac{2\mp\sqrt{3}}{2}\rho_{33}\rho_{66} \\ &+\frac{1}{2}(\rho_{11}\rho_{66}+\rho_{33}\rho_{88}). \end{aligned} \quad (79)$$

因此，B 到 CA 的量子导引得到了证实。随后，我们确定，与 ρ_{CAB} 相关联的导引密度矩阵 $\tau^2_{CA|B}$ 可准确表示为

$$\tau^2_{CA|B}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\rho_{11}+j_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{18} \\ 0 & \frac{1}{3}\rho_{33}+j_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{36} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{55}+j_1 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{77}+j_2 & \frac{1}{3}\rho_{27} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{72} & \frac{1}{3}\rho_{22}+j_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{54} & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{44}+j_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\rho_{63} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{66}+j_1 & 0 \\ \frac{1}{3}\rho_{81} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\rho_{88}+j_2 \end{pmatrix}, \quad (80)$$

其中 $j_1=\frac{1}{6}(\rho_{44}+\rho_{77}+\rho_{88}$ $\rho_{11}+\rho_{22}+\rho_{55}+\rho_{66}$ $-\rho_{33}+$) 和 $j_2=\frac{1}{6}($ $)$。当量子态 $\tau^2_{BC|A}$ 满足以下不等式时，它是纠缠的

$$|\rho_{18}|^2>Q^2_{a,+} \qquad or \qquad |\rho_{27}|^2>Q^2_{b,+}, \quad (81)$$

or

$$|\rho_{36}|^2>Q^2_{a,-} \qquad or \qquad |\rho_{45}|^2>Q^2_{b,-}, \quad (82)$$

其中

$$\begin{aligned} Q^2_{a,+}=&\frac{9}{4}\rho_{22}\rho_{77}+\frac{3}{4}(\rho_{11}\rho_{77}+\rho_{55}\rho_{77}+\rho_{66}\rho_{77} \\ &+(\rho_{22}\rho_{33}+\rho_{22}\rho_{44}+\rho_{22}\rho_{88})+\frac{1}{4}(\rho_{11}\rho_{33} \\ &+\rho_{11}\rho_{44}+\rho_{11}\rho_{88}+\rho_{33}\rho_{55}+\rho_{44}\rho_{55} \\ &+\rho_{55}\rho_{88}+\rho_{33}\rho_{66}+\rho_{44}\rho_{66}+\rho_{66}\rho_{88}), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Q^2_{b,+} =& \frac{9}{4}\rho_{11}\rho_{88} + \frac{3}{4}(\rho_{11}\rho_{33} + \rho_{11}\rho_{44} + \rho_{11}\rho_{77} \\
&+ \rho_{22}\rho_{88} + \rho_{55}\rho_{88} + \rho_{66}\rho_{88}) + \frac{1}{4}(\rho_{22}\rho_{33} \\
&+ \rho_{22}\rho_{44} + \rho_{22}\rho_{77} + \rho_{33}\rho_{55} + \rho_{44}\rho_{55} \\
&+ \rho_{55}\rho_{77} + \rho_{33}\rho_{66} + \rho_{44}\rho_{66} + \rho_{66}\rho_{77}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q^2_{a,-} =& \frac{9}{4}\rho_{44}\rho_{55} + \frac{3}{4}(\rho_{33}\rho_{55} + \rho_{55}\rho_{77} + \rho_{55}\rho_{88} \\
&+ (\rho_{11}\rho_{44} + \rho_{22}\rho_{44} + \rho_{44}\rho_{66}) + \frac{1}{4}(\rho_{11}\rho_{33} \\
&+ \rho_{11}\rho_{77} + \rho_{11}\rho_{88} + \rho_{22}\rho_{33} + \rho_{22}\rho_{77} \\
&+ \rho_{22}\rho_{88} + \rho_{33}\rho_{66} + \rho_{66}\rho_{77} + \rho_{66}\rho_{88}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q^2_{b,-} =& \frac{9}{4}\rho_{33}\rho_{66} + \frac{3}{4}(\rho_{11}\rho_{33} + \rho_{22}\rho_{33} + \rho_{33}\rho_{55} \\
&+ \rho_{44}\rho_{66} + \rho_{66}\rho_{77} + \rho_{66}\rho_{88}) + \frac{1}{4}(\rho_{11}\rho_{44} \\
&+ \rho_{11}\rho_{77} + \rho_{11}\rho_{88} + \rho_{22}\rho_{44} + \rho_{22}\rho_{77} \\
&+ \rho_{22}\rho_{88} + \rho_{44}\rho_{55} + \rho_{55}\rho_{77} + \rho_{55}\rho_{88}).
\end{aligned} \tag{83}
$$

此外，根据式（77）—（83），从 B 到 CA 的量子导引为

$$
\begin{aligned}
S^{B\to CA} =& max\left\{0, 4(|\rho_{18}|^2 - Q^1_{a,+}), 4(|\rho_{27}|^2 - Q^1_{b,+}),\right. \\
&\left. 4(|\rho_{36}|^2 - Q^1_{a,-}), 4(|\rho_{45}|^2 - Q^1_{b,-})\right\},
\end{aligned}
$$

且从 CA 到 B 的量子导引为

$$
\begin{aligned}
S^{CA\to B} =& max\left\{0, \frac{16}{3}(|\rho_{18}|^2 - Q^2_{a,+}), \frac{16}{3}(|\rho_{27}|^2 - Q^2_{b,+}),\right. \\
&\left. \frac{16}{3}(|\rho_{36}|^2 - Q^2_{a,-}), \frac{16}{3}(|\rho_{45}|^2 - Q^2_{b,-})\right\}.
\end{aligned}
$$

这里，将系数 4 和 $\frac{16}{3}$ 设定为该值，以确保最大纠缠态的量子导引达到 1。