arXiv:2602.01014v1 [math.CV] 1 Feb 2026

关于具有预定极点的有理函数的不等式

N. A. Rather[1],Tanveer Bhat[2], 和 Danish Rashid Bhat[3]

Abstract. 设 $\Re_n$ 为所有形如 $r(z) = p(z)/w(z)$，的有理函数组成的集合，其中 $p(z)$是次数至多为 n 的多项式，且 $w(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - a_j)$，$|a_j| > 1$ 当 $1 \leq j \leq n$时。在本文中，我们针对具有固定极点和受限零点的有理函数建立了一些结果。所得结果推广并改进了关于有理函数的一些已知不等式，同时也推广并改进了一些多项式不等式。

关键词： 有理函数、多项式、不等式。**数学学科分类（2020）**： 30A10、30C10、30C15。

1. 引言

设 P_n 表示次数至多为 n 的所有复多项式构成的类，并设 $D_{k-} = \{z : |z| < k\}$，$D_{k+} = \{z : |z| > k\}$ 以及 $T_k = \{z : |z| = k\}$。对于 $a_j \in \mathbb{C}$、 $j = 1$，2，.....，n，记

$$w(z) := \prod_{j=1}^{n}(z - a_j), \qquad B(z) := \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1 - \overline{a_j}z}{z - a_j}\right)$$

and

$$\Re_n := \Re_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left\{\frac{p(z)}{w(z)}; p \in P_n\right\}.$$

那么， $\Re_n$是所有极点可能位于 a_1、 a_2、.....、 a_n且在无穷远处极限有限的有理函数的集合。显然， $B(z) \in \Re_n$ 且 $|B(z)| = 1$ ，其中 $z \in T_1$. 。此外，对于定义在 T_1上的任意复值函数 f，我们令 $\|f\| = \sup_{z\in T_1}|f(z)|$，这就是 f 在 T_1. 上的切比雪夫范数。本文中，我们假设所有极点 a_j、 $j = 1$、2、.....、 n 都位于 D_{1+}中。

若 $p \in P_n$，则关于在 T_1上用 $\|p\|$ 估计 $\|p'\|$ 的问题，我们有以下著名结果，称为伯恩斯坦不等式 [3]。

定理A。若 $p \in P_n$，则

$$\|p'\| \leq n\|p\| \tag{1}$$

等号成立当且仅当 p（z） $= \lambda z^n$，其中 $\lambda \neq 0$ 为复数。

对于在 D_{1-}, 内没有零点的一类多项式，不等式(1)可以改进。在这一方向上，Erd¨os提出了猜想，后来 Lax [5] 证明了如下结果:

定理 B. 若 $p \in P_n$ 在开单位圆盘 D_{1-}内没有零点，则

$$\|p'\| \leq \frac{n}{2}\|p\| \tag{2}$$

等号对于所有零点都位于 T_1.上的那些多项式成立

Malik [6] 研究了在半径为 k，的圆内没有零点的多项式类，并证明了定理 B 的以下推广。

定理C。 若 $p \in P_n$ 在开单位圆盘 D_{k-}内没有零点， $k \geq 1$，则

$$\|p'\| \leq \frac{n}{1+k}\|p\|. \tag{3}$$

该结果是最佳的，且当 $p(z) = (z+k)^n$. 时等号成立

Li、Mohapatra 和 Rodriguez [4] 将伯恩斯坦不等式 (1) 推广到 $r \in \Re_n$ 带有指定极点的有理函数，并将 z^n 替换为布拉施克乘积 $B(z)$。 此外，他们还证明了以下结果：

定理D。 若 $r \in \Re_n$，则对 $z \in T_1$，

$$|r'(z)| \leq |B'(z)||r||. \tag{4}$$

当 $u \in T_1$. 时， $r(z) = uB(z)$ 在 (4) 中等号成立

对于 $\Re_n$ 具有受限零点的有理函数，他们 [4] 还证明了以下结果：

定理E。 设 $r \in \Re_n$ 的所有零点都在 $T_1 \cup D_{1+}$中，则对于 $z \in T_1$，有

$$|r'(z)| \leq \frac{1}{2}|B'(z)|\,\|r\|. \tag{5}$$

当 $r(z) = uB(z) + v$ 且 $u, v \in T_1$.时，(5) 中的等号成立

作为定理E的推广，Aziz和Zargar [1] 得到了以下结果：

Th定理F。 设 $r \in \Re_n$ 的所有零点都在 $T_k \cup D_{k+}$中， $k \geq 1$，则对于 $z \in T_1$，有

$$|r'(z)| \leq \frac{1}{2}\left\{|B'(z)| - \frac{n(k-1)}{(k+1)} - \frac{|r(z)|^2}{\|r\|^2}\right\}\|r\|. \tag{6}$$

当 $z = 1$ 满足以下条件时，(6) 中的等号成立

$$r(z) = \left(\frac{z+k}{z-a}\right)^n, \quad B(z) = \left(\frac{1-az}{z-a}\right)^n, \quad a > 1,\ k \geq 1.$$

有理函数之间双向的众多不等式构成了几何函数论经典内容的重要部分。这些不等式是多项式不等式的推广，在逼近论领域发挥着关键作用。近年来，许多文章发表了关于这一主题的研究，彰显了其重要性（例如，参见 [7],[8],[9],[10]）。

2. 主要结果

本节首先给出定理 E 和 F 的若干推广与改进。然后，作为这些结果的应用，我们得到一些关于 Erd¨os-Lax [5] 和 Malik [6] 已知多项式不等式的新颖而优雅的推广与改进。我们先给出定理 F 的以下推广与改进。

定理 1. 假设 $r \in \Re_n$ 的所有零点都在 $T_k \cup D_{k+}$, $k \geq 1$; 也就是说， $r(z) = p(z)/w(z)$ 其中 $p(z) = c_n \prod_{j=1}^{n}(z - z_j)$ $c_n \neq 0, |z_j| \geq k \geq 1$。那么，对于所有 $z \in T_1$，除去 $r(z)$ 的零点以及 $|\beta| \leq 1$,

$$\left|\frac{zr'(z)}{r(z)} + \frac{\beta}{1+k}|B'(z)|\right| \leq \frac{1}{2}\left\{|B'(z)| - \frac{n|r(z)|^2}{\|r\|^2}\frac{(k-1)}{(k+1)} - \frac{2|r(z)|^2}{\|r\|^2}\left(\frac{n}{k+1} - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+|z_j|} - \frac{Re(\beta)}{(1+k)}|B'(z)|\right)\right\}\frac{\|r\|}{|r(z)|}. \tag{7}$$

在 $\beta = 0$ 的情形下，不等式 7 是紧的，等号成立于

$$r(z) = \left(\frac{z+k}{z-a}\right)^n, \quad B(z) = \left(\frac{1-az}{z-a}\right)^n, \quad at \quad z = 1, \quad a > 1, \quad k \geq 1 \quad and \quad \beta = 0.$$

注 1. 在 $k = 1$，定理 1 可立即推出定理E的以下推广与改进。

推论 1. 假设 $r \in \Re_n$ 的所有零点均在 $T_1 \cup D_{1+}$；也就是说， $r(z) = p(z)/w(z)$ 其中 $p(z) = {}_n c_n \prod (z - z_j)$ $c_n \neq 0, |z_j| \geq 1$。那么对所有 $z \in T_1$，除 $r(z)$ 的零点以及 $|\beta| \leq 1, {}_{j=1}$之外，

$$\left| \frac{zr'(z)}{r(z)} + \frac{\beta}{2}|B'(z)| \right| \leq \frac{1}{2} \left\{ |B'(z)| - \frac{2|r(z)|^2}{\|r\|^2} \left(\frac{n}{2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+|z_j|} - \frac{Re(\beta)}{2}|B'(z)| \right) \right\} \frac{\|r\|}{|r(z)|}. \tag{8}$$

当 $\beta = 0$ 时，不等式 *8* 是尖锐的，且等号在以下情况下成立

$$r(z) = \left(\frac{z+1}{z-a} \right)^n, \quad B(z) = \left(\frac{1-az}{z-a} \right)^n, \quad at \quad z = 1, \quad a > 1 \quad and \quad \beta = 0.$$

注 2. 尽管定理 1 推广并改进了定理 F，但式 (7) 给出的界要求预先知道 $r(z)$ 的所有零点。由于计算零点并非总是易事，因此在 $r(z)$ 的零点未指定的情形下，人们可能希望得到这样一个结果：它不依赖于 $r(z)$ 的零点，而是取决于 $p(z)$ 在 $r(z) = p(z)/w(z)$ 中的一些系数。下面的结果正是为此而设。

推论 2. 假设 $r \in \Re_n$ 的所有零点都在 $T_k \cup D_{k+}$, $k \geq 1$；也就是说， $r(z) = p(z)/w(z)$ 其中 $p(z) = {}_n c_n \prod (z - z_j) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$, $c_n \neq 0, |z_j| \geq k \geq 1$。那么，对于所有 $z \in T_1$，但不包括 $r(z)_{j=1}$ 的零点以及 $|\beta| \leq 1$,

$$\left| \frac{zr'(z)}{r(z)} + \frac{\beta}{1+k}|B'(z)| \right| \leq \frac{1}{2} \left\{ |B'(z)| - \frac{n|r(z)|^2}{\|r\|^2} \frac{(k-1)}{(k+1)} - \frac{2|r(z)|^2}{(k+1)\|r\|^2} \left(\frac{|c_0| - k^n|c_n|}{|c_0| + k^n|c_n|} - Re(\beta)\ |B'(z)| \right) \right\} \frac{\|r\|}{|r(z)|}. \tag{9}$$

不等式 *9* 在 $\beta = 0$ 的情形下是最佳的，且等号成立于

$$r(z) = \left(\frac{z+k}{z-a} \right)^n, \quad B(z) = \left(\frac{1-az}{z-a} \right)^n, \quad at \quad z = 1, \quad a > 1, \quad k \geq 1 \quad and \quad \beta = 0.$$

推论 2 的证明。 根据不等式 7，我们有

$$\begin{aligned}
\left| \frac{zr'(z)}{r(z)} + \frac{\beta}{1+k}|B'(z)| \right| &\leq \frac{1}{2} \left\{ |B'(z)| - \frac{n|r(z)|^2}{\|r\|^2} \frac{(k-1)}{(k+1)} - \frac{2|r(z)|^2}{\|r\|^2} \left(\frac{n}{(k+1)} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+|z_j|} - \frac{Re(\beta)}{(1+k)}|B'(z)| \right) \right\} \frac{\|r\|}{|r(z)|} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ |B'(z)| - \frac{n|r(z)|^2}{\|r\|^2} \frac{(k-1)}{(k+1)} - \frac{2|r(z)|^2}{\|r\|^2} \left(-\frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{n} \frac{k-|z_j|}{1+|z_j|} - \frac{Re(\beta)}{(1+k)}|B'(z)| \right) \right\} \frac{\|r\|}{|r(z)|} \\
&\leq \frac{1}{2} \left\{ |B'(z)| - \frac{n|r(z)|^2}{\|r\|^2} \frac{(k-1)}{(k+1)} - \frac{2|r(z)|^2}{\|r\|^2} \left(-\frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{n} \frac{k-|z_j|}{k+|z_j|} - \frac{Re(\beta)}{(1+k)}|B'(z)| \right) \right\} \frac{\|r\|}{|r(z)|} \\
&\leq \frac{1}{2} \left\{ |B'(z)| - \frac{n|r(z)|^2}{\|r\|^2} \frac{(k-1)}{(k+1)} - \frac{2|r(z)|^2}{\|r\|^2} \left(-\frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{n} \frac{1-\frac{|z_j|}{k}}{1+\frac{|z_j|}{k}} - \frac{Re(\beta)}{(1+k)}|B'(z)| \right) \right\} \frac{\|r\|}{|r(z)|}.
\end{aligned} \tag{10}$$

在不等式 (10) 中应用引理 4，并注意到 $\frac{|z_j|}{k} \geq 1$, $j = 1, 2, \cdots, n$，我们得到

$$\begin{aligned}
\left| \frac{zr'(z)}{r(z)} + \frac{\beta}{1+k}|B'(z)| \right| &\leq \frac{1}{2} \left\{ |B'(z)| - \frac{n|r(z)|^2}{||r||^2} \frac{(k-1)}{(k+1)} - \frac{2|r(z)|^2}{\|r\|^2} \left(-\frac{1}{k+1} \times \frac{1 - \prod_{j=1}^{n} \frac{|z_j|}{k}}{1 + \prod_{j=1}^{n} \frac{|z_j|}{k}} - \frac{Re(\beta)}{(1+k)}|B'(z)| \right) \right\} \frac{\|r\|}{|r(z)|} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ |B'(z)| - \frac{n|r(z)|^2}{\|r\|^2} \frac{(k-1)}{(k+1)} - \frac{2|r(z)|^2}{\|r\|^2} \left(-\frac{1}{k+1} \times \frac{k^n|c_n| - |c_0|}{k^n|c_n| + |c_0|} - \frac{Re(\beta)}{(1+k)}|B'(z)| \right) \right\} \frac{\|r\|}{|r(z)|}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{|B'(z)| - \frac{n|r(z)|^2}{\|r\|^2}\frac{(k-1)}{(k+1)} - \frac{2|r(z)|^2}{(k+1)\|r\|^2}\left(\frac{|c_0|-k^n|c_n|}{|c_0|+k^n|c_n|} - Re(\beta)\ |B'(z)|\right)\right\}\frac{\|r\|}{|r(z)|}.$$

□

至此完成推论 2 的证明。

注3. F 或 $k=1$, 推论 2 给出定理E的如下推广与改进。

推论3. 设 $r \in \Re_n$ 的所有零点均位于 $T_1 \cup D_{1+}$; 即 $r(z) = p(z)/w(z)$ 且 $p(z) = c_n \prod (z-z_j) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$, $c_n \neq 0, |z_j| \geq 1$。则对所有 $z \in T_1$, 除$j=1 r(z)$ 与 $|\beta| \leq 1$的零点外,

$$\left|\frac{zr'(z)}{r(z)} + \frac{\beta}{2}|B'(z)|\right| \leq \frac{1}{2}\left\{|B'(z)| - \frac{|r(z)|^2}{\|r\|^2}\left(\frac{|c_0|-|c_n|}{|c_0|+|c_n|} - Re(\beta)\ |B'(z)|\right)\right\}\frac{\|r\|}{|r(z)|}. \tag{11}$$

不等式*11*在 $\beta = 0$ 的情形下是精确的，且等号成立于

$$r(z) = \left(\frac{z+1}{z-a}\right)^n, \quad B(z) = \left(\frac{1-az}{z-a}\right)^n, \quad at \quad z=1, \quad a>1 \quad and \quad \beta = 0.$$

作为定理A的一个应用，我们接下来给出关于在开圆盘 D_{k-}, $k \geq 1$.内无零点的多项式的定理C的如下推广与改进

$_n$推论 4. </style}若 在开单位圆盘内没有零点 ,, 即 (z) $= c_n \prod(z-z_j) = {}^{j=1} c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$, $c_n \neq 0$, $|z_j| \geq k \geq 1$, $j = 1, 2, \cdots, n$。则对于 $z \in T_1$ 和 $|\beta| \leq 1$,

$$\left|zp'(z) + \frac{n\beta}{1+k}p(z)\right| \leq \frac{\|p\|}{2}\left\{n - \frac{2}{(k+1)}\left(\frac{n(k-1)}{2} + \frac{|c_0|-k^n|c_n|}{|c_0+k^n|c_n|} - n\ Re(\beta)\right)\frac{|p(z)|^2}{\|p\|^2}\right\}.$$

推论4的证明. </style}取 () ($_{z)\ w(z)}$，其中 $w(z) = (z-\alpha)^n\ \alpha > k \geq 1$, 使得 $B(z) = \left(\frac{1-\alpha z}{z-\alpha}\right)_n$,由推论 2 可得

$$\left|\frac{zr'(z)}{r(z)} + \frac{\beta}{1+k}|B'(z)|\right| \leq \frac{1}{2}\left\{|B'(z)| - \frac{n|r(z)|^2}{\|r\|^2}\frac{(k-1)}{(k+1)} - \frac{2|r(z)|^2}{(k+1)\|r\|^2}\left(\frac{|c_0|-k^n|c_n|}{|c_0|+k^n|c_n|} - Re(\beta)\ |B'(z)|\right)\right\}\frac{\|r\|}{|r(z)|}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{|B'(z)| - \frac{2}{(k+1)}\left(\frac{n(k-1)}{2} + \frac{|c_0|-k^n|c_n|}{|c_0|+k^n|c_n|} - Re(\beta)\ |B'(z)|\right)\frac{|r(z)|^2}{\|r\|^2}\right\}\frac{\|r\|}{|r(z)|}. \tag{12}$$

假设 $\|r\| = |r(e^{i\theta})| = |{}^{p}{}_{(w}\ {}^{e^{i\psi_0}}{}_{e^{i\psi_0}}(,$ 对于 $\psi_0 \in [0, 2\pi)$, 不等式（12）可写为

$$\left|z\left(\frac{p'(z)}{p(z)} - \frac{n}{(z-\alpha)}\right) + \frac{\beta}{1+k}|B'(z)|\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\left\{|B'(z)| - \frac{2}{(k+1)}\left(\frac{n(k-1)}{2} + \frac{|c_0-k^n|c_n|}{|c_0|+k^n|c_n|} - Re(\beta)\ |B'(z)|\right)\frac{|p(z)|^2}{|p(e^{i\psi_0})|^2}\left|\frac{e^{i\psi_0}-\alpha}{z-\alpha}\right|^{2n}\right\}\frac{|p(e^{i\psi_0}|}{|e^{i\psi_0}-\alpha|^n}\frac{|z-\alpha|^n}{|p(z)|}. \tag{13}$$

由于这对每个 $\alpha > 1$ 都成立，在不等式（13）中令 $\alpha \to \infty$，并注意到对于 $z \in T_1$, $|B'(z)| \to |nz| = n$ 当 $\alpha \to \infty$ 时，我们得到

$$\left|zp'(z) + \frac{n\beta}{1+k}p(z)\right| \leq \frac{1}{2}\left\{|B'(z)| - \frac{2}{(k+1)}\left(\frac{n(k-1)}{2} + \frac{|c_0-k^n|c_n|}{|c_0|+k^n|c_n|} - Re(\beta)\ |B'(z)|\right)\frac{|p(z)|^2}{|p(e^{i\psi_0})|^2}\right\}|p(e^{i\psi_0}|$$
$$\leq \frac{\|p\|}{2}\left\{n - \frac{2}{(k+1)}\left(\frac{n(k-1)}{2} + \frac{|c_0-k^n|c_n|}{|c_0|+k^n|c_n|} - Re(\beta)\ |B'(z)|\right)\frac{|p(z)|^2}{\|p\|^2}\right\}.$$

至此完成推论4的证明。 □

注 4. 对于 $k=1$，推论 4 给出了定理 B 的如下推广与改进。

推论 5。 如果 $p \in P_n$ 在开单位圆盘 D_1内没有零点，即 $p(z)=c_n\prod(z-z_j) = c_0+c_1z+\cdots+c_nz^n$, $c_n \neq 0$, $|z_j| \geq 1$, $j=1,2,\cdots,n$。那么对于 $z \in T_1$ 和 $|\beta| \leq 1$,

$$\left|zp'(z)+\frac{n\beta}{2}p(z)\right| \leq \frac{\|p\|}{2}\left\{n-\left(\frac{|c_0|-|c_n|}{|c_0+|c_n|}-n\ Re(\beta)\right)\frac{|p(z)|^2}{\|p\|^2}\right\}.$$

3. 引理

为证明我们的结果，我们需要以下引理。第一个引理出自 Aziz 和 Zargar [1]。**引理 1**。 如果 $z \in T_1$，那么

$$Re\left(\frac{zw'(z)}{w(z)}\right)=\frac{n-|B'(z)|}{2},$$

其中 $w(z) = \prod(z-a_j)$。

以下两个引理归功于 Li、Mohapatra 和 Rodrigues [4]。

引理 2。如果 $z \in T_1$，那么

$$z\frac{B'(z)}{B(z)}=|B'(z)|.$$

引理 3。 如果 $r \in \Re_n$ 且 $r^*(z)=B(z)r\left(\frac{1}{z}\right)$，那么对于 $z \in T_1$，我们有

$$\left|(r^*(z))'\right|+|r'(z)| \leq |B'(z)|\,\|r\|.$$

引理 4。 如果 $\langle\zeta_j\rangle_{j=1}^{\infty}$ 是一个实数序列，使得 $\zeta_j \geq 1$, $j \in \mathbb{N}$，那么

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1-\zeta_j}{1+\zeta_j} \leq \frac{1-\prod_{j=1}^{n}\zeta_j}{1+\prod_{j=1}^{n}\zeta_j} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

证明。 该结论由对 n进行归纳法即可轻松得出。因此，我们省略细节。 □

我们需要的最后一个引理归功于 Aziz 和 Shah [2]。

引理5。 如果 $r \in \Re_n$ 和 r 的所有 n 零点都位于 $T_k \cup D_{k-}$、 $k \leq 1$中，那么对于 $z \in T_1$,

$$|r'(z)| \geq \frac{1}{2}\left\{|B'(z)|+\frac{n(1-k)}{(1+k)}\right\}|r(z)|.$$

4. Proofs of the theorems

定理 1 的证明。 由于 $r \in \Re_n$，且 $r(z)$ 的所有零点都位于 $T_k \cup D_{k+}$， $k \geq 1$。令 z_1, z_2, ..., z_n为 $r(z) = p_{(z)\,w(z)}$的 n 个零点，其中 $p(z) = c_n\prod_{j=1}^{n}(z-z_j)$; $|z_j| \geq k \geq 1$, $j=1$, 2, ..., n。于是，对于 $|\beta| \leq 1$ 以及所有满足 $r(z) \neq 0$ 的 $z \in T_1$，有

$$\begin{aligned} Re\left\{\frac{zr'(z)}{r(z)}+\frac{\beta}{1+k}|B'(z)|\right\} &= Re\left\{\frac{zr'(z)}{r(z)}\right\}+\frac{|B'(z)|}{1+k}Re\{\beta\} \\ &= Re\left\{\frac{zp'(z)}{p(z)}-\frac{zw'(z)}{w(z)}\right\}+\frac{|B'(z)|}{1+k}Re\{\beta\} \end{aligned}$$

$$= Re\left\{\frac{zp'(z)}{p(z)}\right\} - Re\left\{\frac{zw'(z)}{w(z)}\right\} + \frac{|B'(z)|}{1+k}Re\left\{\beta\right\}.$$

利用引理 1，对于 $|\beta| \leq 1$ 以及所有满足 $r(z) \neq 0$ 的 $z \in T_1$，有

$$Re\left\{\frac{zr'(z)}{r(z)} + \frac{\beta}{1+k}|B'(z)|\right\} = Re\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{z}{z-z_j}\right\} - \left\{\frac{n-|B'(z)}{2}\right\} + \frac{|B'(z)|}{1+k}Re\left\{\beta\right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} Re\left\{\frac{z}{z-z_j}\right\} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{2Re(\beta)}{1+k}\right\}|B'(z)|. \tag{14}$$

容易验证，对于 $z \in T_1$ 和 $|z_j| \geq k \geq 1$,

$$Re\left\{\frac{z}{z-z_j}\right\} \leq \frac{1}{1+|z_j|}.$$

将此代入不等式（14），对于 $|\beta| \leq 1$ 且对所有 $z \in T_1$，，其中 $r(z) \neq 0$,

$$Re\left\{\frac{zr'(z)}{r(z)} + \frac{\beta}{1+k}|B'(z)|\right\} \leq \sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{1}{1+|z_j|}\right\} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{2Re(\beta)}{1+k}\right\}|B'(z)|. \tag{15}$$

现在，若 $r^*(z) = B(z)r(\frac{1}{z})$，则对于 $|\beta| \leq 1$且对所有 $z \in T_1$，其中 $r(z) \neq 0$，我们有

$$\left|\frac{(r^*(z))'}{\overline{r(z)}} - \frac{\overline{\beta}}{1+k}|B'(z)|\right|^2 = \left|\frac{1}{\overline{r(z)}}\left(zB'(z)\overline{r(z)} - B(z)\overline{zr'(z)}\right) - \frac{z\overline{\beta}B'(z)}{(1+k)}\right|^2$$

$$= \left|\frac{zB'(z)}{B(z)}\frac{\overline{r(z)}}{\overline{r(z)}} - \frac{B(z)\overline{zr'(z)}}{B(z)\overline{r(z)}} - \frac{z\overline{\beta}B'(z)}{B(z)(1+k)}\right|^2 \quad \because |B(z)| = 1 \text{ for } z \in T_1. \tag{16}$$

根据引理 2，方程（16）给出：对于 $|\beta| \leq 1$ 且对所有 $z \in T_1$，，其中 $r(z) \neq 0$ ，

$$\left|\frac{(r^*(z))'}{\overline{r(z)}} - \frac{\overline{\beta}}{1+k}|B'(z)|\right|^2 = \left||B'(z)| - \left(\frac{\overline{zr'(z)}}{\overline{r(z)}} + \frac{|B'(z)|\,\overline{\beta}}{(1+k)}\right)\right|^2$$

$$= \left||B'(z)| - \left(\frac{zr'(z)}{r(z)} + \frac{|B'(z)|\,\beta}{(1+k)}\right)\right|^2$$

$$= |B'(z)|^2 + \left|\frac{zr'(z)}{r(z)} + \frac{|B'(z)|\,\beta}{(1+k)}\right|^2 - 2|B'(z)|\,Re\left\{\frac{zr'(z)}{r(z)} + |B'(z)|\frac{\beta}{1+k}\right\}. \tag{17}$$

将不等式（15）代入（17），对于 $|\beta| \leq 1$ 且对所有 $z \in T_1$，其中 $r(z) \neq 0$,

$$\left|\frac{(r^*(z))'}{\overline{r(z)}} - \frac{\overline{\beta}}{1+k}|B'(z)|\right|^2 \geq |B'(z)|^2 + \left|\frac{zr'(z)}{r(z)} + \frac{|B'(z)|\,\beta}{(1+k)}\right|^2 - 2|B'(z)|\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+|z_j|} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{2Re(\beta)}{1+k}\right\}|B'(z)|\right\}$$

$$= \left|\frac{zr'(z)}{r(z)} + \frac{|B'(z)|\,\beta}{(1+k)}\right|^2 - 2|B'(z)|\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+|z_j|} - \frac{n}{2} + \frac{Re(\beta)}{1+k}|B'(z)|\right\}.$$

等价地，对于 $|\beta| \leq 1$ 以及所有 $z \in T_1$，其中 $r(z) \neq 0$，有

$$\left\{\left|\frac{z(r'(z)}{r(z)} + \frac{\beta}{1+k}|B'(z)|\right|^2 - 2|B'(z)|\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+|z_j|} - \frac{n}{2} + \frac{Re(\beta)}{1+k}|B'(z)|\right\}\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left|\frac{(r^*(z))'}{\overline{r(z)}} - \overline{\beta}\frac{B'(z)}{1+k}\right|. \tag{18}$$

由于 $r(z)$ 的所有零点都位于 $T_k \cup D_{k+}$， $k \geq 1$，因此 $r^*(z)$ 的所有零点都位于 $T_k \cup D_{\frac{1}{k}-}$; $\frac{1}{k} \leq 1$。于是，对 $r^*(z)$ 应用引理5，可得对于 $z \in T_1$，其中 $r(z) \neq 0$,

$$\begin{aligned}\left|(r^*(z))'\right| &\geq \frac{1}{2}\left\{|B'(z)| + \frac{n\left(1-\frac{1}{k}\right)}{1+\frac{1}{k}}\right\}|r^*(z)| \\ &\geq \frac{|B'(z)|}{k+1}\ |r^*(z)| \quad \text{for } k \geq 1.\end{aligned}$$

这意味着对于 $|\beta| \leq 1$，并利用事实 $|r^*(z)| = |r(z)|$，对于 $z \in T_1$，其中 $r(z) \neq 0$ ，

$$\left|(r^*(z))'\right| \geq \frac{|\beta||B'(z)|}{k+1}\ |r(z)|.$$

鉴于此，在等式 (18) 右侧选择 β 的辐角，使得

$$\left|\frac{(r^*(z))'}{\overline{r(z)}} - \overline{\beta}\frac{B'(z)}{1+k}\right| = \left|\frac{(r^*(z))'}{r(z)}\right| - |\beta|\ \frac{|B'(z)|}{1+k},$$

由不等式 (18) 可得，对于 $|\beta| \leq 1$，且对所有 $z \in T_1$，其中 $r(z) \neq 0$,

$$\left\{\left|\frac{zr'(z)}{r(z)} + \frac{\beta}{1+k}|B'(z)|\right|^2 - 2|B'(z)|\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+|z_j|} - \frac{n}{2} + \frac{Re(\beta)}{1+k}|B'(z)|\right\}\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left|\frac{(r^*(z))'}{r(z)}\right| - |\beta|\ \frac{|B'(z)|}{1+k}.$$

结合引理 3 可得

$$|r'(z)| + |r(z)|\left\{\left|\frac{z(r'(z)}{r(z)} + \frac{\beta}{1+k}|B'(z)|\right|^2 - 2|B'(z)|\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{1+|z_j|} - \frac{n}{2} + \frac{Re\beta}{1+k}|B'(z)|\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \|r\|\ |B'(z)| - \frac{|\beta|}{1+k}|B'(z)|\ |r(z)|.$$

由此可得，对于 $|\beta| \leq 1$，且对所有 $z \in T_1$，其中 $r(z) \neq 0$,

$$\begin{aligned}\left\{\left|\frac{z(r'(z)}{r(z)} + \frac{\beta}{1+k}|B'(z)|\right|^2 - 2|B'(z)|\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+|z_j|} - \frac{n}{2} + \frac{Re\beta}{1+k}|B'(z)|\right)\right\}^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{||r||}{|r(z)|}|B'(z)| - \left(\left|\frac{zr'(z)}{r(z)}\right| + \frac{|\beta|}{1+k}|B'(z)|\right) \\ &\leq \frac{\|r\|}{|r(z)|}|B'(z)| - \left|\frac{zr'(z)}{r(z)} + \frac{\beta}{1+k}|B'(z)|\right|.\end{aligned}$$

经过直接计算可得,

$$\left|\frac{z(r'(z)}{r(z)} + \frac{\beta}{1+k}|B'(z)|\right| \leq \frac{\|r(z)\|}{2|r(z)|}\left\{|B'(z)| - \frac{n|r(z)|^2}{\|r\|^2} + \frac{2|r(z)|^2}{\|r\|}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+|z_j|} + \frac{Re(\beta)}{1+k}|B'(z)|\right)\right\}.$$

上述不等式等价于

$$\begin{aligned}\left|\frac{z(r'(z)}{r(z)} + \frac{\beta}{1+k}|B'(z)|\right| \leq \frac{\|r(z)\|}{2|r(z)|}\Bigg\{&|B'(z)| - \frac{n|r(z)|^2}{\|r\|^2}\left(1 - \frac{2}{k+1}\right) - \frac{n|r(z)|^2}{\|r\|^2}\frac{2}{k+1} \\ &+ \frac{2|r(z)|^2}{\|r\|^2}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+|z_j|} + \frac{Re(\beta)}{1+k}|B'(z)|\right)\Bigg\}.\end{aligned}$$

由此可得，对于 $|\beta| \leq 1$ 以及所有 $z \in T_1$，其中 $r(z) \neq 0$,

$$\left|\frac{z(r'(z)}{r(z)} + \frac{\beta}{1+k}|B'(z)|\right| \leq \frac{||r(z)||}{2|r(z)|}\left\{|B'(z)| - \frac{n|r(z)|^2}{||r||^2}\frac{(k-1)}{(k+1)} - \frac{2|r(z)|^2}{\|r\|^2}\left(\frac{n}{k+1} - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+|z_j|} - \frac{Re(\beta)}{k+1}|B'(z)\right)\right\}.$$

定理 1 的证明至此完成。 □

References

[1] A. Aziz 和 B.A. Zargar，具有指定极点的有理函数的一些性质，《加拿大数学公报》42 (1999) 417–426。[2] A. Aziz 和 W.M. Shah，具有指定极点和受限零点的有理函数的一些性质，《巴尔干数学》（新辑）18 (2004) 33–40。[3] S. Bernstein，关于多项式导数的界限，《巴黎科学院数学报告》190 (1930)，338–340。[4] Xin Li、R. N. Mohapatra 和 R. S. Rodriguez，具有指定极点的有理函数的 Bernstein型不等式，《伦敦数学学会杂志》51 (1995) 523–531。[5] P. D. Lax，证明 P. Erdős 关于多项式的导数的一个猜想，《美国数学学会公报》50，509–513 (1944)。[6] M. A. Malik，关于多项式的导数，《伦敦数学学会杂志》（第2辑）1，57–60 (1969)。[7] N. A. Rather、A. Iqbal、I. Dar，具有指定极点的有理函数的不等式，《数学札记》114 (3)，593–607。[8] N. A. Rather、M. S. Wani、I. Dar，具有指定极点和受限零点的有理函数的增长估计，《非线性分析与应用国际期刊》13 (1)，247–252。[9] N. A. Rather、M. S. Wani、A. A. Bhat，关于具有指定极点的有理函数增长的一些不等式，《非线性分析与应用国际期刊》14 (1)，717–722。[10] N. A. Rather、M. S. Wani、I. Dar，关于具有指定极点的有理函数的不等式，《乌拉尔数学杂志》8 (2)，143–152。

[1]Department of Mathematics, University of Kashmir, Srinagar-190006, India*Email address*:
[1]dr.narather@gmail.com, [2]Tanveerbhat054@gmail.com, [3]danishmath1904@gmail.com