arXiv:2602.01021v1 [cond-mat.stat-mech] 1 Feb 2026

优先连接树的叶子

Harrison Hartle[1], * 和 P. L. Krapivsky[1, 2, †]
[1] *Santa Fe Institute, Santa Fe, New Mexico 87501*
[2] *Department of Physics, Boston University, Boston, Massachusetts 02215, USA*

我们根据普通度（邻居数量），并结合叶度（作为叶节点的邻居数量）信息，对大型优先连接树的极限统计量进行了局部概率描述。完整描述是联合度-叶度分布 $n_{k,\,\ell}$，我们通过其对应的多元生成函数推导出了该分布。根据$n_{k,\,\ell}$我们获得了叶度分布 m_ℓ，以及不同度下受保护顶点（叶度为零的非叶节点）所占的比例 $n_{k,\,0}$，以及许多其他结果。我们还研究了联合度-叶度经验计数 $N_{k,\,\ell}$的涨落与集中性。尽管我们的主要发现针对优先连接树，但我们提出的方法具有很强的普适性，不仅能够刻画众多现有模型，还有助于开发易于处理的新模型。我们进一步通过分析另外两个模型中的$n_{k,\,\ell}$ 展示了该方法：随机递归树和基于重定向的模型。

I. 引言

对真实图和随机图的研究常将度用作顶点中心性的关键量化指标 [1]。度分布 $\{n_k\}_{k\geq 1}$ 决定了图的诸多性质 [2] ，并在真实网络中得到广泛考察 [3],；这些网络往往呈现出高度右偏的度统计[4], ，其中包括幂律能够提供有用描述的情形 [5]。幂律的存在已在许多情形中得到估计，并由多种理想化机制加以解释 [6, 7]。幂律尾网络的典型机制模型是增长模型，例如优先连接（PA）。PA的最简形式是生长随机树，其连接概率与度成正比 [8, 9]。PA模型在随机图理论和网络科学中都是受到广泛研究的课题 [10–12]。早期发现包括精确的度分布 [13, 14] 及相关的自平均 [15], 、流行病阈值的消失 [16], 、伊辛临界温度的发散[17], ，以及对直径 [18], 、度相关性 [19, 20], 和按深度分层的度分布 [21]的刻画。

尽管优先连接树的度统计已得到详尽刻画，但一个密切相关的方面仍未得到研究：叶节点（度为 1 的顶点）的统计特征 [22], ，尤其是叶度分布；顶点的叶度是与其相连的叶节点数量 [23]。与被普遍研究的度分布不同，叶度分布几乎从未在任何模型或真实图数据中得到考察 [24]。叶度分布的重要性源于叶节点在树 [25] 及其他稀疏图 [26]中的大量存在及其独特作用。叶节点是图中最外层的边界点，在真实系统中具有自然的解释。例如，叶节点表示运输网络中的终端单元 [27], 、系统发育树中的现存或已灭绝物种 [28], ，以及传染树中不会传播疾病的感染个体 [29]。叶节点还引出了秩的定义（到最近叶节点的距离） [30], ：叶节点的秩为 0，叶节点的邻居的秩为 1，而 ≥ 2 其余由受保护顶点组成的部分 p 的秩则为 [31–33, 36, 37]。

近期研究表明，某些模型的叶度分布 $\{m_\ell\}_{\ell\geq 0}$ [34] 存在封闭递推关系，其中 m_ℓ 表示叶度为 ℓ 的顶点比例的极限值。具体而言，这些模型包括随机递归树（RRT）、基于叶度的优先连接模型，以及这两类模型的无标记统计变体 [35]。然而，原始优先连接树的 $\{m_\ell\}_{\ell\geq 0}$ 并不存在封闭递推关系，因为在生长过程中，影响叶统计量演变的不仅有叶度，还有度。这种对度的依赖使得优先连接中的幂律尾度分布能够得到封闭递推关系 [8, 9], ，进而推动了网络科学基础领域的诸多发展[1, 24]。一个自然的问题是，叶度统计量是否也具有重尾特征。

优先连接中不存在封闭递推关系 $\{m_\ell\}_{\ell\geq 0}$ ，因此需要更广泛、更全面的描述。为恢复并拓展度分布和叶度分布，我们考虑度与叶度的联合分布$n_{k,\,\ell}$ 。我们发现，优先连接存在一种封闭且易于处理的双指标递推关系，它编码了 $n_{k,\,\ell}$ 的所有取值。求得 $n_{k,\,\ell}$ 后，不仅可以得到$m_\ell = \sum_{k=\ell+1}^{\infty} n_{k,\,\ell}$，而且我们发现它确实具有重尾特征（$m_\ell \sim \ell^{-3}$），还可以计算其他感兴趣的量。例如，我们得到受保护比例 $p = 0.039\,447\ldots$，以及受保护顶点中的度分布；$n_{k,\,0} \simeq k^{-3}2^{-k}$。类似的计算也可用于相关的树生长模型；参见附录A、D 以及第V节。我们着重研究优先连接树，但我们的方法可推广到更一般的稀疏随机图；本研究凸显了一系列尚待解决的理论问题和有待进一步探究的领域。

本文结构如下。在第II节，我们

* hhartle@santafe.edu
† pkrapivsky@gmail.com

描述我们的方法并呈现主要发现。我们在正文中完全聚焦于优先连接，但对RRT进行了详细分析，见附录A，并给出一个基于重定向的模型，见附录D。在第III–IV节，我们推导优先连接树的主要结果。具体而言，在第IV节，我们刻画随机涨落，并证明广延性与渐近自平均。这确保非随机的极限比例$n_{k,\ell}$对优先连接树存在，我们在第III节通过生成函数得到。来自第IV节结果的一些技术推导置于附录B–C。在第V节，我们简要总结。

II. 方法与主要结果

我们考虑一棵含有 N 个顶点、不断生长的随机树 G_N。其顶点 $j = 1, \ldots\ldots, N$ 按到达顺序依次编号。顶点 j 的邻居数，即度，记为 k_j。叶节点是满足 $k_j = 1$ 的顶点。与 j 相邻的叶节点数记为 ℓ_j，称为 j 的叶度。除非 j 是星形图中的中心顶点（此时 $k_j = \ell_j = N-1$），否则对于所有树 G_N 中的所有顶点 j，不等式 $\ell_j < k_j$ 均成立。具有 $k_j = k$ 且满足 $\ell_j = \ell$ 的顶点数 $N_{k,\ell}$ 是一个随机量。广延性和渐近自平均意味着，当 $N \to \infty$ 时，$\frac{1}{N}N_{k,\ell} \to n_{k,\ell}$ 依概率收敛到非随机的极限比例，这为我们的分析提供了依据。普通度分布和叶度分布由以下联合分布确定：

$$n_k = \sum_{\ell=0}^{k-1} n_{k,\ell}, \qquad m_\ell = \sum_{k=\ell+1}^{\infty} n_{k,\ell}. \tag{1}$$

除归一化条件 $\sum_{0\le\ell<k<\infty} n_{k,\ell} = 1$ 外，比例 $n_{k,\ell}$ 还满足矩条件

$$\sum_{k\ge1} k n_k = \sum_{0\le\ell<k<\infty} k n_{k,\ell} = 2, \tag{2a}$$

$$\sum_{\ell\ge0} \ell m_\ell = \sum_{0\le\ell<k<\infty} \ell n_{k,\ell} = n_1. \tag{2b}$$

含有 N 个顶点的树的边数为 $N-1$，总度是边数的两倍，即 $2(N-1)$，由此得到（2a）。方程（2b）表明，平均叶度是渐近叶节点比例 $n_1 := n_{1,0}$，即 $N_{1,0}/N$ 的极限值，因为叶度总和等于叶子数量 $N_1 := N_{1,0}$。在下文中，我们还将使用相关的生成函数$m(z) = \sum_{\ell\ge0} z^\ell m_\ell$和 $n(y) = \sum_{k\ge1} y^k n_k$，以及

$$g(y,z) = \sum_{0\le\ell<k<\infty} y^k z^\ell n_{k,\ell}, \tag{3}$$

编码联合分布 $n_{k,\ell}$。根据构造，$g(1,1) = 1$，$g(1,z) = m(z)$，且 $g(y,1) = n(y)$。

其他随之而来的有用性质包括 $\partial_y g(1,1) = 2$、$\partial_z g\,1,1 = n_1$ $\partial^2_{yz} g\,1,1 = \langle k\ell\rangle$ ( )、( ) 等。我们还定义

$$n_k(z) = \sum_{\ell=0}^{k-1} z^\ell n_{k,\ell}, \quad m_\ell(y) = \sum_{k=\ell+1}^{\infty} y^k n_{k,\ell}, \tag{4}$$

其极限值 $n_k(1) = n_k$, $m_\ell(1) = m_\ell$，并且

$$\sum_{k\ge1} y^k n_k(z) = \sum_{\ell\ge0} z^\ell m_\ell(y) = g(y,z). \tag{5}$$

有些量用$n_k(y)$ 或 $m_\ell(z)$ 表示，比用 $g(y,z)$ 表示更简便。例如，作为度的函数的平均叶度，$\ell(k)$，可表示为

$$\bar\ell(k) = \frac{1}{n_k}\left.\frac{dn_k(z)}{dz}\right|_{z=1}. \tag{6}$$

此外，$g(y,0) = \sum_k y^k n_{k,0}$ 描述了受保护顶点的度统计——即没有任何叶节点作为邻居的非叶节点。总体受保护比例 $p = m_0 - n_1$ 也可表示为

$$p = \sum_{k\ge2} n_{k,0} = m(0) - m'(1) = g(1,0) - \partial_z g(1,1). \tag{7}$$

此外，受保护顶点的平均度为

$$\bar k_p = \frac{\sum_{k\ge2} k n_{k,0}}{\sum_{k\ge2} n_{k,0}} = \frac{\partial_y g(1,0) - n_1}{m_0 - n_1}. \tag{8}$$

因此，通过求得多元生成函数$g(y,z)$，便可运用标准方法计算出许多感兴趣的性质 [38, 39]。

我们的主要结果（第 III 节）针对最简单情形下的优先连接（PA）树：基于普通度的优先连接，即连接概率与度成正比 k。在此模型中，联合分布满足以下递推关系

$$(k-1)n_{k-1,\ell-1} - (2+k+\ell)n_{k,\ell} \tag{9}$$

$$+(\ell+1)n_{k,\ell+1} + 2\delta_{k,1}\delta_{\ell,0} = 0, \tag{10}$$

其中，后一个克罗内克δ项反映了新引入顶点的特殊作用，这些顶点的度为$k = 1$，叶度为 $\ell = 0$。可以将递推关系（9）改写为生成函数的偏微分方程（PDE）$g(y,z)$

$$y(1-yz)\frac{\partial g(y,z)}{\partial y} - (1-z)\frac{\partial g(y,z)}{\partial z} + 2g(y,z) = 2y, \tag{11}$$

其解具有积分表示

$$g(y,z) = 4y\int_0^1 \frac{u^2}{2 - y[(1-u)^2 + z(1-u^2)]}du. \tag{12}$$

由此，我们可以计算优先连接树中许多感兴趣的量。叶度分布由生成函数 $m(z) = g(1,z)$ 推导得到

$$m_\ell = 4\int_0^1 \frac{u^2}{1+2u-u^2}\left(1 - \frac{2u}{1+2u-u^2}\right)^\ell du \tag{13}$$

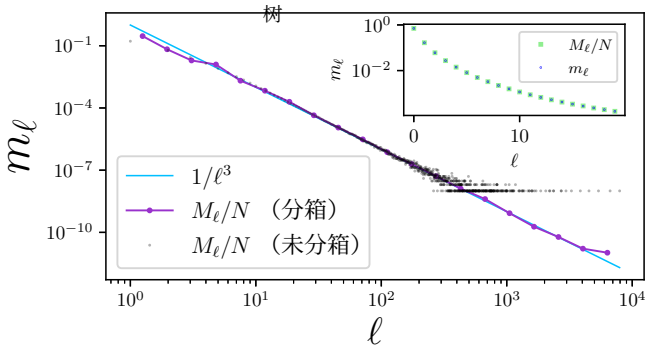


图 1. 叶度分布 M_ℓ/N 大型优先连接树（$N = 10^8$）及其理论值的对比 m_ℓ （式（13））。分散的半透明点表示M_ℓ/N的实际值，紫色点线表示其对数分箱结果；蓝线为 ℓ^{-3}。插图：比较 M_ℓ/N （方块）与 m_ℓ （圆点）在 ℓ较小取值时的情况。

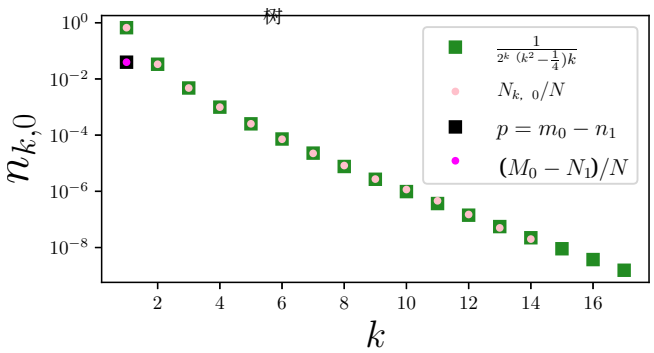


图 2. 大型优先连接树中度为 k 、叶度为 0 的顶点比例$N_{k,\,0}/N$ （粉色圆点），与$n_{k,\,0}$ 时的式（15）（绿色方块）进行比较。图中还展示了 $k = 1$ 处的解析值 p （黑色方块）以及测得的受保护比例 P/N （洋红色圆点）。

其渐近形式为 $m_\ell \sim 1/\ell^3$ 当 $\ell \gg 1$时。见图 1。由式（13）在 $\ell = 0$处，我们得到 m_0，从而得到受保护顶点的比例 $p = m_0 - n_1 = m_0 - \frac{2}{3}$

$$p = \frac{12\ \mathrm{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}} - \frac{14}{3} - 4\log 2 = 0.039\,447\ldots, \tag{14}$$

与大型优先连接树的数值模拟结果（图2）高度吻合。度为 k 的顶点中，比例为 $n_{k,\,0}$ 的顶点受到保护（若 $k > 1$），其

$$n_{k,0} = \frac{1}{2^k(k^2 - \frac{1}{4})k}. \tag{15}$$

代数 k^{-3} 项对呈现度分布特征的尾部$n_k = {}_{k\ k+1}{}^{4}{}_{()(k+2)}$ 有所贡献，但占主导地位的贡献是指数型的。精确行为（15）也与模拟结果一致（图 2）。受保护顶点的平均度

$$\bar{k}_p = \frac{\partial_y g(1,0) - \frac{2}{3}}{p} = 2.202\,493\,667\ldots \tag{16}$$

略大于受保护顶点的最小度 2。我们没有发现先前研究在优先连接树中得到过 p，也没有发现任何模型得到过 $\{n_{k,0}\}_{k\geq 2}$ 或 k_p。我们还得到了

$$n_k(z) = 2^{2-k}\int_0^1 t^2[(1-t)^2 + z(1-t^2)]^{k-1}dt, \tag{17}$$

可按 z 的幂展开，得到

$$n_{k,\ell} = \frac{\binom{k-1}{\ell}}{2^{k-2}}\int_0^1 u^2(1-u)^{2(k-1)-\ell}(1+u)^\ell du, \tag{18}$$

对于任意 k，ℓ 使得 $0 \leq \ell < k < \infty$。表I中显示的数值摘自（18）。将其特化为

（18）中的最小叶度 $\ell = 0$，得到（15）；而在相反的极端情况下，$\ell = k - 1$，我们得到

$$n_{k,k-1} = \frac{(k-1)!\sqrt{\pi}}{2^k\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)}. \tag{19}$$

我们还证明，典型枢纽（即度较高的顶点）的邻居中，叶节点和非叶节点的数量大致相等。更准确地说，我们证明，随着 $k \to \infty$，ℓ 集中在 $k/2$ 附近，其相对标准差随 $1/\sqrt{k}$趋于零。由此得到猜想：以概率 $\ell_{\max}/k_{\max} \to 1/2$，其中 $\ell_{\max}$ 和 $k_{\max}$ 分别表示叶度和度的最大值。事实上，在大小为 $N = 10^8$的优先连接树中，我们发现度最高的顶点同时也是叶度最高的顶点，并且 $\ell_{\max}/k_{\max} \approx 0.498\,806$。

k \ ℓ	0	1	2	3	4	5	6	7
1	$\frac{2}{3}$							
2	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{15}$						
3	$\frac{1}{210}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{4}{105}$					
4	$\frac{1}{1008}$	$\frac{1}{168}$	$\frac{23}{1680}$	$\frac{4}{315}$				
5	$\frac{1}{3960}$	$\frac{7}{3960}$	$\frac{47}{9240}$	$\frac{29}{3960}$	$\frac{16}{3465}$			
6	$\frac{1}{13728}$	$\frac{1}{1716}$	$\frac{41}{20592}$	$\frac{19}{5148}$	$\frac{1093}{288288}$	$\frac{16}{9009}$		
7	$\frac{1}{43680}$	$\frac{3}{14560}$	$\frac{1}{1232}$	$\frac{29}{16016}$	$\frac{235}{96096}$	$\frac{309}{160160}$	$\frac{32}{45045}$	
8	$\frac{1}{130560}$	$\frac{1}{13056}$	$\frac{193}{565760}$	$\frac{25}{28288}$	$\frac{139}{95744}$	$\frac{4761}{3111680}$	$\frac{10889}{11202048}$	$\frac{32}{109395}$

表 I. $n_{k,\ell}$ 在优先连接树中。值$n_{k,\ell}$ 是有理数，这一点从比例的积分表示（18）中并不明显，但可由定义递推关系式（9）得出。在表中，我们展示$n_{k,\ell}$，其中 $0 \leq \ell < k \leq 8$。

为了超越确定性近似，我们认识到 $N_{k,\,\ell}$ 是随机变量，而且这些随机变量并非统计独立。在

第 IV节中，我们证明了量 $N_{k,\,\ell}$ 在若干个 k，ℓ取值下具有广延性和渐近自平均性，并刻画了它们的相关性。当度 k 和 ℓ 保持有限且 $N\to\infty$时，这些性质成立；优先连接树的最大度按 $\sqrt{N}$ 标度增长，因此在该范围内，N_k 显然不具有广延性（根据定义，$N_{k_{\max}}\approx 1$）。先前的研究已证明，在 $0<k<N^{1/15}$ [40] 范围内，度计数 $\{N_k\}_{k\geq 1}$ 具有集中性。

在第IV节中，我们具体分析了 N_1，N_2 和$N_{2,\,1}$。叶子数量 N_1 满足一个封闭随机方程，因此我们能够相当全面地理解这个随机变量。随机变量 N_2与 N_1相关，但这一对变量（N_1，N_2）满足一个封闭随机方程。类似地，变量组（N_1，$N_{2,\,1}$）也满足一个封闭随机方程。在这些情形下，我们确立了联合正态性和集中性的基本性质；我们猜想，对于所有 k，ℓ，$N_{k,\,\ell}$ 都具有这些性质。所有这些量的主导行为都与N呈线性关系，这证实了广延性和渐近自平均性，也表明它们可能具有渐近多元正态性。

特别是，我们关于平均值 $\langle N_1\rangle$、$\langle N_2\rangle$ 以及方差 $\mathbb{V}[N_1]$、$\mathbb{V}[N_2]$的精确结果表明

$$P_N(N_1)\simeq\sqrt{\frac{9}{2\pi N}}\exp\left\{-\frac{9(N_1-\frac{2}{3}N)^2}{2N}\right\},\tag{20a}$$

$$P_N(N_2)\simeq\sqrt{\frac{90}{23\pi N}}\exp\left\{-\frac{90(N_2-\frac{1}{6}N)^2}{23N}\right\}.\tag{20b}$$

在附录B中，我们推导出叶子数量的高斯分布，见式（20a）。推导式（20b）更具挑战性，因为 N_2 的演化取决于N_1。关于（N_1，N_2）的封闭随机方程使我们能够确立 P_N（N_1，N_2），即变量对（N_1，N_2）的联合概率分布。我们推导出协方差 $\langle\!\langle N_1N_2\rangle\!\rangle=\langle N_1N_2\rangle-\langle N_1\rangle\langle N_2\rangle$。概率分布 P_N（N_1，N_2）预计渐近呈高斯分布

$$P_N(N_1,N_2)\simeq\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2700}{17N^2}}\exp\left\{-\frac{\Phi(N_1,N_2)}{2N}\right\}\tag{21a}$$

with

$$\begin{aligned}\Phi(N_1,N_2)&=\frac{345}{17}\left(N_1-\frac{2N}{3}\right)^2+\frac{300}{17}\left(N_2-\frac{N}{6}\right)^2\\&+\frac{480}{17}\left(N_1-\frac{2N}{3}\right)\left(N_2-\frac{N}{6}\right)\end{aligned}\tag{21b}$$

由平均值 $\langle N_1\rangle$和$\langle N_2\rangle$、方差 $\mathbb{V}[N_1]$ 和 $\mathbb{V}[N_2]$以及协方差$\langle\!\langle N_1N_2\rangle\!\rangle$的主导渐近行为确定。

同时考虑度和叶度时，最简单的非平凡类别是度为2、叶度为1的顶点，其数量为 $N_{2,\,1}$。每当一个到达顶点连接到一个叶节点时，就会产生一个这样的顶点。我们计算 $N_{2,\,1}$ 的平均值和方差，这表明其具有渐近高斯形式

$$P_N(N_{2,1})\simeq\sqrt{\frac{300}{49N\pi}}\exp\left\{-\frac{300(N_{2,1}-\frac{2}{15}N)^2}{49N}\right\}.\tag{22}$$

这对 $(N_1,\,N_{2,\,1})$ 满足一个封闭随机方程，我们利用该方程确定协方差$\langle\!\langle N_1N_{2,\,1}\rangle\!\rangle$。概率分布 $P_N(N_1,\,N_{2,\,1})$ 预期渐近服从高斯分布，形式为

$$P_N(N_1,N_{2,1})\simeq\frac{45\sqrt{2}}{\pi N\sqrt{97}}\exp\left[-\frac{\Psi(N_1,N_{2,1})}{2N}\right],\tag{23}$$

其中 $\Psi(N_1,\,N_{2,\,1})$ 由平均值 $\langle N_1\rangle$和$\langle N_{2,\,1}\rangle$、方差 $\langle\!\langle N_1^2\rangle\!\rangle$和$\langle\!\langle N_{2,\,1}^2\rangle\!\rangle$以及协方差$\langle\!\langle N_1N_{2,\,1}\rangle\!\rangle$的主导渐近行为确定。这些结果拓展了先前关于优先连接树 [40]及相关稀疏随机图 [41]中若干重要量的正态性和自平均性的研究。

在附录A中，我们通过分析随机递归树（RRT）或均匀连接模型，进一步展示了本文所提出的方法。两者 $n_k=2^{-k}$ [42]和 $m_\ell=\gamma\,(\ell+1,\,1/\Gamma\,(\ell+1)$ [34] 此前均已得到；其联合分布满足

$$n_{k-1,\ell-1}-(2+\ell)n_{k,\ell}+(\ell+1)n_{k,\ell+1}+\delta_{k,1}\delta_{\ell,0}=0,\tag{24}$$

从而得到关于 $g(y,\,z)$ 的偏微分方程，即

$$(1-z)\frac{\partial g(y,z)}{\partial z}-(2-xy)g(y,z)=y.\tag{25}$$

式（25）的解具有积分表示

$$g(y,z)=y\int_0^1 e^{-y(1-v)(1-z)}v^{1-y}dv\tag{26}$$

由此我们恢复出已知的生成函数$n(y)$和 $m(z)$、分布 $\{n_k\}_{k\geq 1}$ 和 $\{m_\ell\}_{\ell\geq 0}$，以及已知的受保护比例 $p=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$ [32]。除此之外，我们还得到了度与叶度相关性$\langle k\ell\rangle=7/4$、按度分层的受保护比例$(n_{k,\,0})_{k\geq 2}$、受保护节点的平均度 $k_p\approx 0.266$、条件均值 $\bar{\ell}(k)=2-3(2/3)^k$，以及当度取较大值时，给定度的叶度分布趋于均值为 2 的泊松分布。我们还得到了关于 $n_{k,\,\ell}$ 的一个精确但繁琐的表达式，以及由此产生的结果，例如 $n_{k,\,k-1}$。

最后，在附录 D 中，我们分析了参考文献 [43]，中最近提出的一个模型，其中推导出了关于与$n_{k,\ell}$ 等价的联合分布的双指标递推关系。用$n_{k,\ell}$ 表示时，该递推关系变为

$$\begin{aligned}(2\ell+1)n_{k,\ell}&=(\ell-1)n_{k-1,\ell-1}+(\ell+1)n_{k,\ell+1}\\&+\tfrac{1}{2}(\delta_{k,1}\delta_{\ell,0}+\delta_{k,2}\delta_{\ell,1}).\end{aligned}\tag{27}$$

尽管该模型是在双参数模型的极限参数范围内得到的，但我们指出，它有一个自然且自成一体的定义。从一棵大小为 3 的树开始，对每个到达顶点 $j=4,\,\ldots\ldots,\,N$，依次应用以下连接规则：

- 均匀随机地选择一个叶节点 i 。
- Attach to i with probability $\frac{1}{2}$; else to its neighbor.

通过这一机制，连接到非叶节点的连接概率与叶度成正比，因此受保护顶点永远不会被连接。基于叶节点的描述自然适用；对式（27）求和 $k > \ell$ ，可得到叶度分布的封闭递推关系：

$$(2\ell+1)m_\ell = (\ell-1)m_{\ell-1} + (\ell+1)m_{\ell+1} + \frac{\delta_{\ell,0}+\delta_{\ell,1}}{2}, \tag{28}$$

正如我们在第 $n_{k,\ell}$ 节所示，也可以不借助$n_{k,\ell}$直接推导出这一结果。由式（28）可得叶度分布的生成函数$m(z)$（见第 D 3b 节），提取系数后，可得任意 m_ℓ $\ell = 0$、1、2、.....对应的结果；值得注意的结果包括 p 与 m_1 竟然相等，且它们的值为：

$$p = m_1 = \frac{1 + e\,\mathrm{Ei}(-1)}{2} = 0.201\,826\ldots, \tag{29}$$

其中 $\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x} t^{-1}e^t dt$ 为指数积分；此外，叶度分布具有拉伸指数尾部：

$$m_\ell \sim \ell^{-1}e^{-2\sqrt{\ell}}. \tag{30}$$

求出 $n_{k,\ell}$，进而求出 n_k 和$n_{k,0}$，是一项颇具挑战的工作。在附录 D4c 中，我们推导出 $g(y,\ z)$ 的一个（冗长的）表达式，进而得到 $g(y,1)$ 和 $g(y,0)$，但无法通过解析方法确定它们的展开系数。尽管如此，我们还是通过精确数值求解双指标递推关系式（27），考察了 n_k ，并通过模拟验证了结果。

III. 优先连接

在本节中，我们推导优先连接（PA）的概率生成函数 $g(y,\ z)$、 $m(z)$、 $m_\ell(y)$ 和 $n_k(z)$，并重新得到已知的 $n(y)$。我们得到了联合分布 $n_{k,\ell}$ 和叶度分布 m_ℓ的显式公式。我们还得到了受保护比例 p、受保护度比例 $(n_{k,0})_{k\geq 2}$以及条件均值 $\ell(k)$，并展示了相应的集中现象。我们首先推导优先连接中$n_{k,\ell}$的递推关系，以及由此得到的 $g(y,\ z)$ 的偏微分方程及其解。

A. 多变量生成函数

根据优先连接过程，连接到度为 k 且叶度为ℓ 的顶点的概率为$kN_{k,\ell}/\sum_{k',\ell'} k'N_{k',\ell'} = kN_{k,\ell}/2(N-1)$。直接附着会导致 $k \to k+1$ 和 $\ell \to \ell+1$，而附着到作为叶节点的邻居则会导致 $\ell \to \ell-1$（但不会影响度； $k \to k$）。因此，

$$\begin{aligned}\frac{dN_{k,\ell}}{dN} &= \frac{(k-1)N_{k-1,\ell-1}}{2(N-1)} + \frac{(\ell+1)N_{k,\ell+1}}{2(N-1)} - \frac{kN_{k,\ell}}{2(N-1)} \\ &\quad - \frac{\ell N_{k,\ell}}{2(N-1)} + \delta_{k,1}\delta_{\ell,0}.\end{aligned} \tag{31}$$

在广延标度和渐近自平均条件下，$dN_{k,\ell}/dN$ 趋近于强度极限比例$n_{k,\ell}$。因此，我们得到递推关系

$$\begin{aligned}n_{k,\ell} &= \frac{(k-1)n_{k-1,\ell-1}}{2} + \frac{(\ell+1)n_{k,\ell+1}}{2} - \frac{kn_{k,\ell}}{2} \\ &\quad - \frac{\ell n_{k,\ell}}{2} + \delta_{k,1}\delta_{\ell,0},\end{aligned} \tag{32}$$

它可化简为式（9）。边界条件为$n_{k,-1} = 0$、 $n_{\infty,\ell} = 0$和$n_{q,q} = 0$。因此，非零比例$n_{k,\ell} > 0$ 对应于满足 $0 \leq \ell < k < \infty$的项。

生成函数 $g(y,\ z) = \sum_{0\leq\ell<k<\infty} n_{k,\ell}y^k z^\ell$ 将关于n_k的ℓ 双指标递推转化为关于 $g(y,\ z)$ 的偏微分方程（PDE）。我们将方程（9）乘以 $z^\ell y^k$，对所有 $0 \leq \ell < k < \infty$求和，得到所述的方程（11）。在推导过程中，我们使用了由 g的定义得到的恒等式：

$$\begin{aligned}\sum_{k>\ell\geq 0} kn_{k,\ell}\,y^k z^\ell &= y\partial_y g \\ \sum_{k>\ell\geq 0} \ell n_{k,\ell}\,y^k z^\ell &= z\partial_z g, \\ \sum_{k>\ell\geq 0} (k-1)n_{k-1,\ell-1}\,y^k z^\ell &= y^2 z\partial_y g, \\ \sum_{k>\ell\geq 0} (\ell+1)n_{k,\ell+1}\,y^k z^\ell &= \partial_z g,\end{aligned} \tag{33}$$

其中 $\partial_z := \frac{\partial}{\partial z}$ 以及 $\partial_y := \frac{\partial}{\partial y}$。我们应用特征线法来求解关于 $g(y,\ z)$ 的偏微分方程。首先将偏微分方程改写为

$$y(1-yz)\partial_y g - (1-z)\partial_z g + 2g = 2y, \tag{34}$$

特征线 $y(z)$ 满足

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{y(1-yz)}{1-z}, \tag{35}$$

由此

$$y(z) = -\frac{2(1-z)}{z^2+2C}. \tag{36}$$

沿特征线，

$$\frac{dg}{dz} - \frac{2g}{1-z} = \frac{4}{z^2+2C}. \tag{37}$$

积分因子 $(1-z)^2$ 给出

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z)^2 g(z)\right] = \frac{4(1-z)^2}{z^2+2C}, \tag{38}$$

由此可以写出积分解

$$g(y,z)=\frac{1}{(1-z)^2}\int_1^z\frac{4(1-t)^2}{t^2+2C}\,dt, \tag{39}$$

其中 $C=-z^2/2-(1-z)/y$。因此

$$g(y,z)=\frac{4y}{(1-z)^2}\int_1^z\frac{(1-t)^2}{y(t^2-z^2)-2(1-z)}\,dt. \tag{40}$$

这个生成函数是许多后续结果的来源。

在某些计算中，使用变量代换将（40）改写为另一种形式很方便。令 $u=(1-t)/(1-z)$，可得

$$g(y,z)=4y\int_0^1\frac{u^2}{2-y[(1-u)^2+z(1-u^2)]}\,du. \tag{41}$$

可以验证， $g(y,z)$ 具有编码归一化和矩约束所需的性质：

$$\begin{aligned} g(1,1)&=1,\\ \partial_y g(1,1)&=2,\\ \partial_z g(1,1)&=2/3. \end{aligned} \tag{42}$$

按 y 的幂展开以得到$n_k(z)$ 的积分公式很简单，随后按z展开幂级数以得到n_k、ℓ的表达式也很简单；参见第IIID 节和III F节。

B. 度与叶度生成函数 ions

我们首先考虑叶度分布。将（41）特化为 $y=1$，得到生成函数$m(z)=g(1,z)$:

$$m(z)=4\int_0^1\frac{u^2}{2-(1-u)^2-z(1-u^2)}\,du. \tag{43}$$

可以用反正切、对数以及 $1-z$的幂显式求出积分，但 $m(z)$ 的积分形式更方便。按 z 的幂展开，可得 m_ℓ作为 z^ℓ 的系数。将（43）改写为

$$m(z)=4\int_0^1\frac{u^2}{1+2u-u^2}\frac{1}{1-\frac{z(1-u^2)}{1+2u-u^2}}\,du \tag{44}$$

并按 z 的幂展开，得到

$$m_\ell=4\int_0^1\frac{u^2}{1+2u-u^2}\left(\frac{1-u^2}{1+2u-u^2}\right)^\ell du, \tag{45}$$

等价于式（13）。分数 $m_0=m(0)=g(1,0)$ 因此为

$$\begin{aligned} m_0&=4\int_0^1\frac{u^2}{1+2u-2u^2}\,du\\ &=\frac{12\ \mathrm{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}-4(1+\log 2), \end{aligned} \tag{46}$$

从而得到式（14）。在 $\ell=1,2$，我们有

$$\begin{aligned} m_1&=11\sqrt{2}\,\mathrm{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-8(1+\log 2)=0.165\,778\ldots\\ m_2&=\frac{67\sqrt{2}}{4}\,\mathrm{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{25}{2}-12\log 2=0.060\,279\ldots \end{aligned}$$

依此类推。 m_ℓ 在 ℓ 的一些较高取值下的数值为

$$\begin{aligned} m_3&=0.027\,253\ldots\\ m_4&=0.014\,147\ldots\\ m_5&=0.008\,098\ldots\\ m_6&=0.004\,989\ldots\\ m_7&=0.003\,255\ldots\\ m_8&=0.002\,224\ldots\\ m_9&=0.001\,578\ldots\\ m_{10}&=0.001\,156\ldots \end{aligned} \tag{47}$$

即使对于单个大型图，这些结果也与模拟数据吻合良好（图1）。令 $z=1$，得到

$$n(y)=g(y,1)=2y\int_0^1\frac{u^2}{1-y(1-u)}du. \tag{48}$$

计算该积分可得

$$n(y)=3-\frac{2}{y}-2\left(1-\frac{1}{y}\right)^2\log(1-y). \tag{49}$$

按 y 的幂展开，第 k 项系数为

$$n_k=\frac{4}{k(k+1)(k+2)}, \tag{50}$$

这就是著名解 [8, 13, 14]。

C. 优先连接中的受保护顶点

对于受保护度比例 $\{n_{k,0}\}_{k\geq 1}$，相应的生成函数 $g(y,0)=\sum_{k\geq 1}n_{k,0}y^k$。利用 (40) 我们得到

$$g(y,0)=2y\int_0^1\frac{t^2}{1-(y/2)(1-t)^2}\,dt, \tag{51}$$

将其改写为

$$g(y,0)=4\int_0^1\frac{t^2}{(1-t)^2}\frac{(y/2)(1-t)^2}{1-(y/2)(1-t)^2}\,dt. \tag{52}$$

将此生成函数按 y 的幂展开，并利用 $\int_0^1 t^2(1-t)^{2k-2}\,dt=1/(4k^3-k)$，我们得到前述结果 (15)。

优先连接中受保护顶点的平均度为

$$\bar{k}_p=\frac{\sum_{k\geq 2}kn_{k,0}-\frac{2}{3}}{p}=2.202\,493\,667\ldots, \tag{53}$$

其中 $\sum_{k\geq 2}kn_{k,0}=\frac{4}{3}-\sqrt{2}\,\mathrm{arcsinh}(1)$ 可直接利用方程（15）计算。

D. 生成函数 $n_k(z)$ 和 $m_\ell(y)$

将 $g\,(y,\ z)$ 按 y^k $(k\geq 1)$ 的幂展开，或按z^ℓ $(\ell\geq 0)$ 的幂展开，分别得到 $n_k\,(z)$ 或 $m_\ell\,(y)$ 。为得到$m_\ell\,(y)$ ，我们首先将（40）改写为

$$g(y,z)=4y\int_0^1\frac{t^2}{2-(1-t)^2y}\frac{1}{1-\frac{(1-t^2)zy}{2-(1-t)^2y}}\,dt,$$

然后利用几何级数得到 in

$$m_\ell(y)=4y^{1+\ell}\int_0^1\frac{t^2}{2-(1-t)^2y}\left(\frac{(1-t^2)}{2-(1-t)^2y}\right)^\ell dt. \tag{54}$$

由 $m_\ell(y)$，可得 $m_\ell=$ 极限$_{y\to 1}\,m_\ell(y)$；也可以通过按 $n_{k,\ \ell}$ 的幂展开来得到 y。类似地，将式（40）改写为

$$\begin{aligned}g(y,z)&=2y\int_0^1\frac{t^2}{1-[(1-t)^2+z(1-t^2)](y/2)}\,dt\\&=\frac{y^{q+1}}{2^{q-1}}\int_0^1 t^2\sum_{q=0}^{\infty}[(1-t)^2+z(1-t^2)]^q\,dt,\end{aligned} \tag{55}$$

由此提取出

$$n_k(z)=2^{2-k}\int_0^1 t^2[(1-t)^2+z(1-t^2)]^{k-1}\,dt. \tag{56}$$

$n_{k,\ell}$ 的值可以通过将 $n_k(z)$ 按 z的幂展开得到；参见第 IIIF节。

E. 固定度顶点的叶度均值和方差

在此，我们推导度固定为 k 的顶点的叶度的均值和方差。我们还探讨具有 $k\gg 1$ 的顶点的叶度集中性。（类似的集中现象曾在文献 [35]，中被猜想过，不过是在叶节点大量增殖的情形下，其中 $\ell/k\to 1$，且 $k\gg 1$。）

根据定义

$$\bar\ell(k)=\frac{\sum_{\ell=0}^{k-1}\ell n_{k,\ell}}{n_k}=\left.\frac{n_k'(z)}{n_k(z)}\right|_{z=1} \tag{57}$$

计算得

$$\bar\ell(k)=1+\frac{k}{2}-\frac{6}{k+3}. \tag{58}$$

$k\gg 1$ 时的平均叶度比因此表现为

$$\frac{\bar\ell(k)}{k}=\frac{1}{2}+O(1/k). \tag{59}$$

其次，我们评估

$$\begin{aligned}\langle\ell(\ell-1)\rangle_k&:=\sum_{\ell\geq 0}\ell(\ell-1)\frac{n_{k,\ell}}{n_k}=\frac{1}{n_k}\left.\frac{d^2n_k(z)}{dz^2}\right|_{z=1}\\&=\frac{(k-2)(k-1)(48+13k+k^2)}{4(k+3)(k+4)}.\end{aligned} \tag{60}$$

固定 k 下 ℓ 的方差为

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[\ell|k]&=\langle\ell^2\rangle_k-\bar\ell(k)^2=\langle\ell(\ell-1)\rangle_k+\bar\ell(k)-\bar\ell(k)^2\\&=\frac{(k-1)k(18+13k+k^2)}{4(k+3)^2(k+4)}.\end{aligned} \tag{61}$$

在大 k 时展开可得

$$\mathbb{V}[\ell|k]=\frac{k}{4}+\frac{1}{2}-\frac{12}{k}+O(1/k^2). \tag{62}$$

因此，度为 $k\gg 1$ 的顶点的叶度集中在 $k/2$ 附近。我们预期会出现类似于第 IV 节中所描述的正态涨落。更确切地说，概率分布 $\Pi(\ell|k):=n_{k,\ \ell}/n_k$ 预计将收敛到高斯形式

$$\Pi(\ell|k)\simeq\sqrt{\frac{2}{\pi k}}\exp\left\{-\frac{2(\ell-\frac{1}{2}k)^2}{k}\right\} \tag{63}$$

在极限 $k\to\infty$ 中。

F. 来自 $n_k(z)$ 的比例$n_{k,\ \ell}$

我们概述了（第 IIID 节）从 $g(y,z)$ 推导 $n_{k,\ell}$ 的几种方法，得到显式公式。其一是将 $n_k(z)$ 按 z 的幂展开。我们写作

$$\begin{aligned}n_k(z)&=2^{2-k}\int_0^1 u^2[(1-u)^2+z(1-u^2)]^{k-1}du\\&=\sum_{\ell=0}^{k-1}\frac{\binom{k-1}{\ell}}{2^{k-2}}z^\ell\int_0^1 u^2(1-u)^{2(k-1-\ell)}(1-u^2)^\ell du\end{aligned}$$

由此我们推导出所述公式（18）。在（18）中取 $\ell=0$ 和 $\ell=k-1$，得到 $n_{k,\ \ell}$；在极端情形下，式（15）和（19）。由（19）可得近星形结构顶点所占的总比例：

$$\sum_{k\geq 1}n_{k,k-1}=4-\pi=0.858\,407\,346\,\ldots \tag{64}$$

类似地，在（18）中取 $\ell=1$，得到

$$n_{k,1}=\frac{k+2}{2^k(k^2-\frac{1}{4})k}. \tag{65}$$

对偶公式

$$n_{k,k-2}=\frac{(k-1)!}{2^k}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)}+\frac{3\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)}-\frac{4}{k!}\right] \tag{66}$$

由（18）可知，此结论在 $\ell=k-2$ 时成立。（65）和（66）对所有 $k\geq 2$ 均成立。在附录A 中，我们对 RRT 给出了类似的分析。

IV. 优先连接中的渐近自平均

这项工作的基础是，当 $N\to\infty$ 时，随机优先连接树中变量 $\{N_{k,\ell}\}$的广延性和自平均性。$N_{k,\ell}/N$ 依概率收敛到非随机极限值，由此可以构造$n_{k,\ell}$之间的递推关系。在本节中，我们通过多种情形展示这些收敛性质。当 k 和 ℓ 保持有限时，平均值$\langle N_{k,\ell}\rangle$和方差 $\mathbb{V}[N_{k,\ell}]=\langle N_{k,\ell}^2\rangle-\langle N_{k,\ell}\rangle^2$ 均随 N 线性增长：

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1}\begin{bmatrix}\langle N_{k,\ell}\rangle\\ \mathbb{V}[N_{k,\ell}]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n_{k,\ell}\\ \chi_{k,\ell}\end{bmatrix}. \tag{67}$$

由于优先连接过程具有马尔可夫性质，我们预期，对于任意固定的 k 和 ℓ，$P_N(N_{k,\ell})$在 $N\to\infty$极限下趋于高斯分布：

$$P_N(N_{k,\ell})\simeq\frac{1}{\sqrt{2\pi N\chi_{k,\ell}}}\exp\left\{-\frac{(N_{k,\ell}-Nn_{k,\ell})^2}{2N\chi_{k,\ell}}\right\}. \tag{68}$$

平均值和方差是前两个累积量。更高阶累积量也预计会与N呈线性缩放。例如

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1}\langle\langle N_k^p\rangle\rangle=\kappa_k^{(p)}. \tag{69}$$

当 k 保持有限时。回顾累积量的定义，我们可以将（69）重写为

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1}\log\left\langle e^{xN_k(N)}\right\rangle=\sum_{p\geq1}\kappa_k^{(p)}\frac{x^p}{p!}. \tag{70}$$

随机量 N_i 和 N_j 彼此相关。相关性由二元累积量生成函数刻画，该函数也预计会与 N呈线性缩放：

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1}\log\left\langle e^{xN_i+yN_j}\right\rangle=\sum_{p,q\geq1}\kappa_{ij}^{(p,q)}\frac{x^p\,y^q}{p!\,q!}. \tag{71}$$

我们不对这些结果进行完全一般性的证明。我们仅限于 $k=1$ 和 $k=2$。不过，分析可以扩展到更高阶的 k。聚焦于纯度分布，我们确认平均值 $\langle N_k\rangle$和协方差 $\langle\langle N_iN_j\rangle\rangle$ 与 N呈线性缩放

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1}\begin{bmatrix}\langle N_k\rangle\\ \langle\langle N_iN_j\rangle\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n_k\\ \sigma_{ij}\end{bmatrix}. \tag{72}$$

对于 $k\leq2$ 和 $i,j\leq2$。协方差由 $\langle\langle N_iN_j\rangle\rangle=\langle N_iN_j\rangle-\langle N_i\rangle\langle N_j\rangle$定义，归一化协方差也可以另写为 $\sigma_{ij}=\kappa_{ij}^{(1,1)}$。我们确定归一化协方差

$$\sigma_{11}=\frac{1}{9},\quad \sigma_{22}=\frac{23}{180},\quad \sigma_{12}=\sigma_{21}=-\frac{4}{45}. \tag{73}$$

我们确认了 N_1的叶子总数量的累积量随 N 呈线性增长。在这种情况下，我们确定累积量生成函数。

类似地，我们还分析了（N_1、$N_{2,1}$）的联合分布。N_1 的方差参数保持不变，而（N_1、$N_{2,1}$）的协方差 $\sigma_{1,(2,1)}=\sigma_{(2,1),1}$ 以及 $N_{2,1}$ 的方差 $\sigma_{(2,1),(2,1)}$ 确定为

$$\sigma_{1,(2,1)}=\sigma_{(2,1),1}=-\frac{1}{18},\quad \sigma_{(2,1),(2,1)}=\frac{49}{600}. \tag{74}$$

第 IV A 节和第 IV B 节的一些结果可从参考文献 [44], 中提取；该文研究了同一优先连接模型中、但初始条件不同的涨落。

A. 叶子数量

优先连接树中的叶节点总数 $N_{1,0}=N_1$ 按照随机方程变化

$$N_1(N+1)=\begin{cases}N_1 & \text{prob } \frac{N_1}{2(N-1)},\\ N_1+1 & \text{prob } 1-\frac{N_1}{2(N-1)},\end{cases} \tag{75}$$

当 $N\geq2$ 时。（为避免混淆，我们用 N_1 代替 $N_1(N)$。）

当 $N=2$ 和 $N=3$ 时，叶节点总数是确定量，即 $N_1(2)=N_1(3)=2$；当 $N\geq4$ 时则是随机量。例如，

$$N_1(4)=\begin{cases}2 & \text{prob } \frac{1}{2}\\ 3 & \text{prob } \frac{1}{2}\end{cases}. \tag{76}$$

取平均（75），得到

$$\langle N_1(N+1)\rangle=\left[1-\frac{1}{2(N-1)}\right]\langle N_1\rangle+1. \tag{77}$$

求解此递推关系，并满足初始条件$\langle N_1(3)\rangle=2$，得到

$$\langle N_1\rangle=\frac{2}{3}(N-1)+\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(N-\frac{3}{2})}{\Gamma(N-1)}. \tag{78}$$

类似地，可得到二阶矩的递推关系，

$$\begin{aligned}\langle N_1^2(N+1)\rangle &=\left[1-\tfrac{1}{N-1}\right]\langle N_1^2\rangle\\ &\quad+\left[2-\tfrac{1}{2(N-1)}\right]\langle N_1\rangle+1,\end{aligned} \tag{79}$$

求解时满足条件 $\langle N_1^2(3)\rangle=4$，得到

$$\begin{aligned}\langle N_1^2\rangle&=\frac{(4N-3)(N-1)}{9}\\ &\quad+\frac{16}{9\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(N-\frac{1}{2})}{\Gamma(N-1)}-\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(N-\frac{3}{2})}{\Gamma(N-1)}.\end{aligned} \tag{80}$$

结合（78）和（80），我们得到方差

$$\mathbb{V}[N_1] = \frac{N-1}{9} - \frac{20}{9\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(N-\frac{3}{2})}{\Gamma(N-1)} + \frac{16}{9\pi}\left[\frac{\Gamma(N-\frac{3}{2})}{\Gamma(N-1)}\right]^2. \tag{81}$$

由（78）可得$n_1 = \frac{2}{3}$，而（81）给出$\sigma_{11} = \frac{1}{9}$。

叶子数量遵循封闭的随机递推关系（75），因此有望严谨地推导出高斯分布，或许还可以证明 N_1 的所有累积量均呈线性增长，并计算出所有 $\kappa^{(p)}$。随机方程（75）导出以下递推关系

$$P_{N+2}(N_1) = \left(1 - \frac{N_1-1}{2N}\right) P_{N+1}(N_1-1) + \frac{N_1}{2N} P_{N+1}(N_1) \tag{82}$$

概率分布 $P_N(N_1)$。在附录B中，我们证明当 $N \gg 1$ 时，该解趋近于高斯形式（20a）。

要找到对所有 $N \geq 3$都成立的（82）的精确解颇具挑战。我们已成功确定累积量生成函数的主导行为。（这一结果远强于证明该分布渐近高斯。）在附录C中，我们证明

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \log\left\langle e^{xN_1(N)}\right\rangle = \log\frac{(e^x-1)^2}{2(e^x-1-x)}. \tag{83}$$

展开方程（83）右侧，并将结果与方程（70）右侧比较，可得 $\kappa_1^{(1)} = n_1 = \frac{2}{3}$ 和 $\kappa_1^{(2)} = \sigma_{11} = \frac{1}{9}$，并确定更高阶累积量。在表II中，我们列出了接下来的八个归一化累积量。

p	3	4	5	6	7	8	9	10
$\kappa_1^{(p)}$	$-\frac{1}{135}$	$-\frac{2}{135}$	$\frac{1}{567}$	$\frac{68}{8505}$	$-\frac{1}{1215}$	$-\frac{32}{3645}$	$\frac{307}{610425}$	$\frac{4492}{280665}$

表 II. $\kappa_1^{(p)}$ $3 \leq p \leq 10$的归一化累积量。

B. 二度顶点的数量

度为二的顶点总数 N_2 服从随机方程

$$N_2(N+1) = \begin{cases} N_2 - 1 & \text{prob } \frac{N_2}{N-1}, \\ N_2 + 1 & \text{prob } \frac{N_1}{2(N-1)}, \\ N_2 & \text{prob } 1 - \frac{N_1+2N_2}{2(N-1)}. \end{cases} \tag{84}$$

我们必须确定 n_2 和 σ_{22} 以便为 $P(N_2;\ N)$ 提供高斯近似。对 (84) 取平均后，我们得到

$$\langle N_2(N+1)\rangle = \left[1 - \frac{1}{N-1}\right]\langle N_2\rangle + \frac{\langle N_1\rangle}{2(N-1)}, \tag{85}$$

将 (78) 代入 (85)，我们得到关于$\langle N_2\rangle$ 的递推关系，并在满足 $\langle N_2(3)\rangle = 1$ 的条件下求解，得到$N \geq 3$,

$$\langle N_2\rangle = \frac{N-1}{6} + \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(N-\frac{3}{2})}{\Gamma(N-1)}. \tag{86}$$

由此我们得到已知的归一化平均值 $n_2 = \frac{1}{6}$。类似地，我们求得二阶矩的递推关系。注意，

$$N_2(N+1)^2 = N_2^2 + \begin{cases} -2N_2+1 & \text{prob } \frac{N_2}{N-1}, \\ 2N_2+1 & \text{prob } \frac{N_1}{2(N-1)}, \\ 0 & \text{prob } 1 - \frac{N_1+2N_2}{2(N-1)}. \end{cases} \tag{87}$$

Thus

$$\langle N_2^2(N+1)\rangle = \left[1 - \frac{2}{N-1}\right]\langle N_2^2\rangle + \frac{\langle N_1N_2\rangle}{N-1} + \frac{\langle N_1\rangle + 2\langle N_2\rangle}{2(N-1)}. \tag{88}$$

递推关系（88）并未闭合——其中包含尚未知的关联函数 $\langle N_1N_2\rangle$。为推导该关联函数的控制方程，我们结合（75）和（84），发现 N_1N_2必须始终变化，其中 N_1（N+1）N_2（N+1）等于

$$\begin{cases} (N_1+1)(N_2-1) & \text{prob } \frac{N_2}{N-1}, \\ N_1(N_2+1) & \text{prob } \frac{N_1}{2(N-1)}, \\ (N_1+1)N_2 & \text{prob } 1 - \frac{N_1+2N_2}{2(N-1)}, \end{cases} \tag{89}$$

对其取平均，得到适用于 $N \geq 3$ 的 $\langle N_1N_2\rangle$递推关系：

$$\langle N_1N_2\rangle_{N+1} = \left[1 - \frac{3}{2(N-1)}\right]\langle N_1N_2\rangle + \left[1 - \frac{1}{N-1}\right]\langle N_2\rangle + \frac{\langle N_1^2\rangle}{2(N-1)}. \tag{90}$$

与（88）不同，递推关系（90）是封闭的，因为我们已经知道 $\langle N_2\rangle$和$\langle N_1^2\rangle$。将（80）和（86）代入（90），并在 $\langle N_1$（3）N_2（3）$\rangle = 2$ 的条件下求解所得的非齐次递推关系，得到

$$\langle N_1N_2\rangle = \frac{(5N-9)(N-1)}{45} + \frac{10}{9\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(N-\frac{1}{2})}{\Gamma(N-1)} - \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(N-\frac{3}{2})}{\Gamma(N-1)} + \frac{47}{30\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(N-\frac{5}{2})}{\Gamma(N-1)}. \tag{91}$$

结合使用（91）、（78）和（86），我们计算协方差 $\langle\langle N_1N_2\rangle\rangle = \langle N_1N_2\rangle - \langle N_1\rangle\langle N_2\rangle$，得到

$$\langle\langle N_1N_2\rangle\rangle = -\frac{4(N-1)}{45} - \frac{13}{9\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(N-\frac{3}{2})}{\Gamma(N-1)} + \frac{47}{30\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(N-\frac{5}{2})}{\Gamma(N-1)} - \frac{16}{9\pi}\left[\frac{\Gamma(N-\frac{3}{2})}{\Gamma(N-1)}\right]^2. \tag{92}$$

由此得到 $\sigma_{12}=\sigma_{21}=-\frac{4}{45}$。

将（78）、（86）和（91）代入（88），并求解满足$\langle N_2^2(3)\rangle=1$的所得非齐次递推关系，可得

$$\langle N_2^2\rangle=\frac{(5N+18)(N-1)}{180}+\frac{2}{45\sqrt{\pi}}\frac{(10N^2-30N+83)\Gamma(N-\frac{5}{2})}{\Gamma(N-1)}. \tag{93}$$

因此，方差为

$$\mathbb{V}[N_2]=\frac{23(N-1)}{180}-\frac{16}{9\pi}\left[\frac{\Gamma(N-\frac{3}{2})}{\Gamma(N-1)}\right]^2+\frac{2}{45\sqrt{\pi}}\frac{(5N+58)\Gamma(N-\frac{5}{2})}{\Gamma(N-1)}, \tag{94}$$

由此可推得方差呈线性增长，因而具有自平均性，其方差参数为

$$\sigma_{22}=\frac{23}{180}, \tag{95}$$

从而得到预期的渐近分布（20b）。由于 N_2 与 N_1相关，分布P_N（N_1，N_2）比 P_N（N_2）和 P_N（N_1）提供了全面得多的描述。预期的 P_N（N_1，N_2）的渐近形式是一个二元高斯分布，其形式由均值和协方差决定。强度协方差矩阵为

$$\Sigma_2=\begin{bmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}\\ \sigma_{21}&\sigma_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{9}&-\frac{4}{45}\\ -\frac{4}{45}&\frac{23}{180}\end{bmatrix}, \tag{96}$$

从而得到所述结果（21a）。

推广到更高阶的 k 原则上很直接，但计算繁琐。例如，当 $k=3$时，由于存在相关性，最好再次考虑三元组（N_1，N_2，N_3）。我们已知 Σ_2，见（96）。因此，需要计算 σ_{13}，σ_{23}，σ_{33}，以获得 P_N（N_1，N_2，N_3）的显式渐近形式。RRT 中的类似结果也支持这一预期：在 RRT 中，$\{N_k\}_{k\geq 0}$ 的多元正态性已得到证明，包括对协方差 [45]的完整刻画。

在表 III中，我们展示了 N_2 的前五个归一化累积量。这些累积量的计算放在附录 C。

q	1	2	3	4	5	6
$\kappa_2^{(q)}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{23}{180}$	$\frac{13}{189}$	$-\frac{251}{37800}$	$-\frac{445}{6237}$	$-\frac{9790117}{170270100}$

表 III. $\kappa_2^{(q)}$ 关于 $q\leq 6$的归一化累积量。

C. 后叶顶点 $N_{2,\,1}$ 的数目

度为 $k=2$ 的顶点，其叶度为 $\ell=0$ 或 $\ell=1$。唯一的例外是顶点数为 $N=3$的图，此时中心顶点的 $k=\ell=2$。因此，我们考虑 $N\geq 4$ 范围内的演化，其中$N_{2,\,2}=0$。我们将考察范围限定为$N_{2,\,1}$，并注意到$N_{2,\,0}=N_2-N_{2,\,1}$。所有成为非叶节点的顶点都会经过度为 2、叶度为 1 的状态。随机演化方程

$$N_{2,1}(N+1)=\begin{cases}N_{2,1}-1 & \text{prob } \frac{N_{2,1}}{N-1},\\ N_{2,1}+1 & \text{prob } \frac{N_1-N_{2,1}}{2(N-1)},\\ N_{2,1} & \text{prob } 1-\frac{N_1+N_{2,1}}{2(N-1)}\end{cases} \tag{97}$$

的推导与（84）类似；见图 3。对（97）取平均，我们得到

$$\langle N_{2,1}(N+1)\rangle=\left(1-\frac{3}{2(N-1)}\right)\langle N_{2,1}\rangle+\frac{\langle N_1\rangle}{2(N-1)}. \tag{98}$$

在条件$\langle N_{2,\,1}(4)\rangle=1$下求解递推关系（98），对 $N\geq 4$ 得到，

$$\langle N_{2,1}\rangle=\frac{2(N-1)}{15}+\frac{2(N-\frac{2}{5})\Gamma(N-\frac{5}{2})}{3\sqrt{\pi}\Gamma(N-1)}. \tag{99}$$

在得到$\langle N_{2,\,1}^2\rangle$之前，我们先求得所需的关联函数$\langle N_1N_{2,\,1}\rangle$。我们首先通过考察（$N_1$，$N_{2,\,1}$）如何共同演化来写出随机形式（见图 3）。即，

$$N_1(N+1)N_{2,1}(N+1)=\begin{cases}(N_1+1)(N_{2,1}-1) & \text{prob } \frac{N_{2,1}}{N-1},\\ N_1(N_{2,1}+1) & \text{prob } \frac{N_1-N_{2,1}}{2(N-1)},\\ (N_1+1)N_{2,1} & \text{prob } 1-\frac{N_1+2N_{2,1}}{2(N-1)},\\ N_1N_{2,1} & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{100}$$

取平均后得到该关联函数的递推关系

$$\langle N_1(N+1)N_{2,1}(N+1)\rangle=\left(1-\frac{2}{N-1}\right)\langle N_1N_{2,1}\rangle+\left(1-\frac{1}{N-1}\right)\langle N_{2,1}\rangle+\frac{\langle N_1^2\rangle}{2(N-1)}. \tag{101}$$

边界条件为 $\langle N_1(4)N_{2,1}(4)\rangle=2$，来自线图 L_4 的$_{1\,2}$ 概率，其中 $N_1=2$ 与$N_{2,1}=2$（否则我们得到星形图，且$N_{2,\,1}=0$）。我们求解得到

$$\langle N_1N_{2,1}\rangle=\frac{(8N-13)(N-1)}{90}+\frac{(28N^2-60N+38)\Gamma(N-\frac{5}{2})}{45\sqrt{\pi}\Gamma(N-1)}, \tag{102}$$

由此，协方差为

$$\langle\langle N_1N_{2,1}\rangle\rangle=\langle N_1N_{2,1}\rangle-\langle N_1\rangle\langle N_{2,1}\rangle \tag{103}$$
$$=-\frac{N-1}{18}-\frac{16(5N-2)\Gamma(N-\frac{3}{2})^2}{\pi\Gamma(N-1)^2}-\frac{8\Gamma(N-\frac{3}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(N-1)}.$$

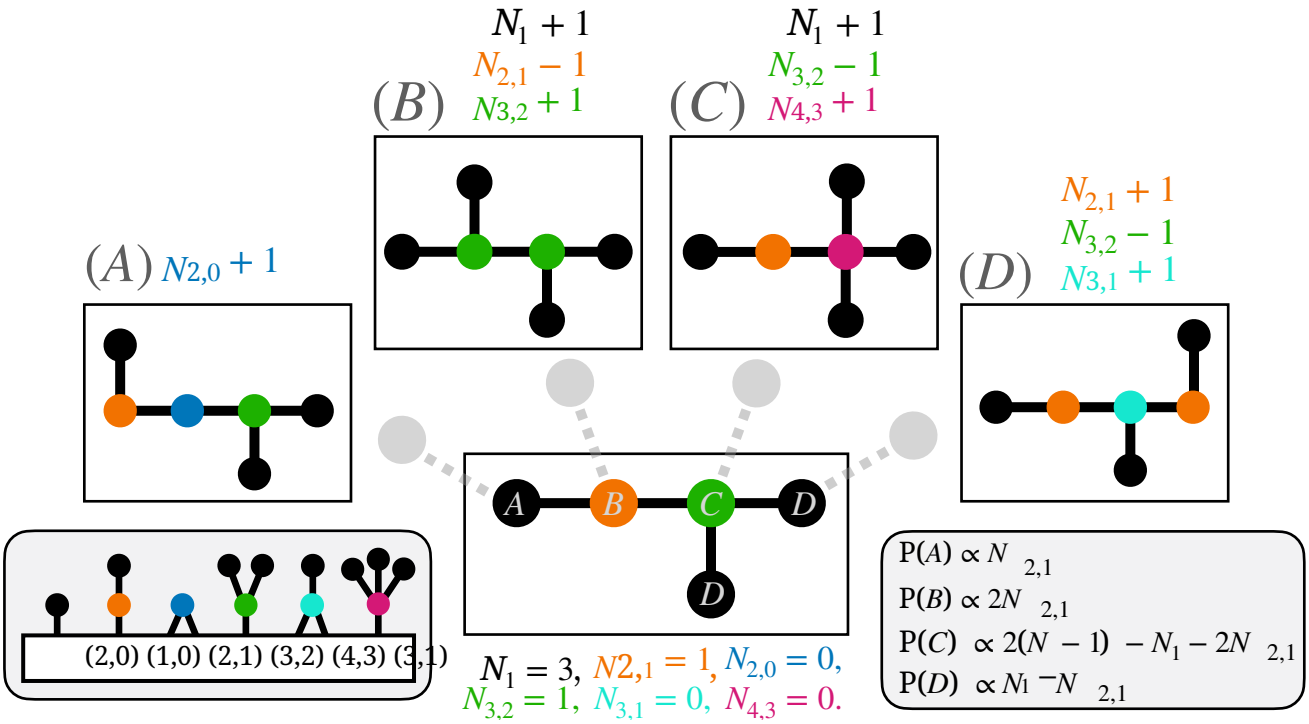


图3. 与$N_{2,1}$相关的四种转变类型，由图中所示5顶点树里标记为A、B、C和D的四种结构上不同的连接选项加以例示。带虚线边的灰色顶点表示不同的附着可能性。（附着到标记为 D 的两个顶点中的任一个都会产生相同的结构结果。）标记为(A)、(B)、(C)和(D)的面板展示了每种可能附着所得到的树。从左到右：(A) 描绘了附着到其中一个$N_{2,1}$ 顶点 j 的叶邻居，且$(k_j, \ell_j) = (2, 1)$，(B) 描绘了直接连接到这些$N_{2,1}$ 顶点之一，(C) 描绘了非叶连接，但并非连接到$N_{2,1}$之一，(D) 描绘了附着到一个与非叶 j 相邻的叶节点，且$(k_j, \ell_j) \neq (2, 1)$。颜色表示左下框中所示的$(k_i, \ell_i)$：黑色表示(1,0)，橙色表示(2, 1)，蓝色表示(2, 0)，绿色表示(3, 2)，青色表示(3, 1)，红色表示(4,3)。这些可能性在优先连接树中的概率权重显示于右下框；优先连接树的实际概率通过除以总度 $\sum_j k_j = \sum_{k\geq 1} kN_k = 2(N-1)$得到。

因此，强度协方差参数为

$$\sigma_{1,(2,1)} = -\frac{1}{18}. \tag{104}$$

同样，我们推导出$\langle N_{2\text{的}1}^2 \rangle$ 递推关系，它取决于上面关于$\langle N_1 N_{2\text{的方程}1} \rangle$ ，也取决于先前推导出的 $\langle N_1 \rangle$ 和$\langle N_{2,1} \rangle$。根据式（$N_{2,\ 1}$（$N+1$），97的平均行为为

$$\langle N_{2,1}^2(N+1) \rangle = \left(1 - \frac{3}{N-1}\right) \langle N_{2,1}^2 \rangle + \frac{\langle N_1 N_{2,1} \rangle}{N-1} + \frac{\langle N_{2,1} \rangle + \langle N_1 \rangle}{2(N-1)}. \tag{105}$$

利用式（78）、（99）和（103）求解 $\langle N_1 \rangle$、$\langle N_{2,\ 1} \rangle$和$\langle N_1 N_{2,\ 1} \rangle$，我们可以求得上述结果，但需满足边界

条件：$\langle N_{2\ 1}^2\ 4\ \rangle = 2$ L_4 L_N $N = 4$ $\frac{1}{2}$ − $G_4 =$. ( )，根据（大小为 的线图）的概率。解为

$$\langle N_{2,1}^2 \rangle = \frac{4(N-1)^2}{225} + \frac{147(N-1)}{1800} + \frac{(40N^2 + 34N - 20)\Gamma(N - \frac{5}{2})}{225\sqrt{\pi}\Gamma(N-1)}, \tag{106}$$

由此可得方差为

$$\langle N_{2,1}^2 \rangle - \langle N_{2,1} \rangle^2 = \frac{49(N-1)}{600} - \frac{4(5N-2)^2\Gamma(N-\frac{5}{2})^2}{225\pi\Gamma(N-1)^2} + \frac{18(5N-2)\Gamma(N-\frac{5}{2})}{225\sqrt{\pi}\Gamma(N-1)}, \tag{107}$$

其对应的强度参数为

$$\sigma_{(2,1),(2,1)} = \frac{49}{600}. \tag{108}$$

因此我们预期

$$P_N(N_{2,1}) \simeq \frac{10}{7}\sqrt{\frac{3}{N\pi}}\exp\left\{-\frac{300(N_{2,1}-\frac{2}{15}N)^2}{49N}\right\}, \tag{109}$$

以及 $(N_1,\ N_{2,\ 1})$ 的联合正态性，其强度协方差矩阵为

$$\Sigma_{1,(2,1)} = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,(2,1)} \\ \sigma_{1,(2,1)} & \sigma_{(2,1),(2,1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{18} & \frac{49}{600} \end{bmatrix}. \tag{110}$$

我们猜想的联合分布在主导阶上具有二元高斯形式

$$P_N(N_1, N_{2,1}) \simeq \frac{\exp\left[-\frac{1}{2N}\langle\nu|\Sigma^{-1}_{1,(2,1)}|\nu\rangle\right]}{2\pi N\sqrt{\det(\Sigma_{1,(2,1)})}}, \tag{111}$$

其中 $\langle\nu| = [N_1 - \frac{2}{3}N, N_{2,1} - \frac{2}{15}N]$。计算矩阵 $\Sigma_{1,\ (2,1)}$（110）所给出的行列式和逆矩阵，可得

$$P_N(N_1, N_{2,1}) \simeq \frac{45\sqrt{2}}{\pi N\sqrt{97}}\ \exp\left[-\frac{\Psi(N_1, N_{2,1})}{2N}\right], \tag{112}$$

with

$$\begin{aligned}\Psi(N_1, N_{2,1}) = &\frac{1323}{97}\left(N_1 - \frac{2}{3}N\right)^2 \\ &+ \frac{1800}{97}\left(N_1 - \frac{2}{3}N\right)\left(N_{2,1} - \frac{2}{15}N\right) \\ &+ \frac{1800}{97}\left(N_{2,1} - \frac{2}{15}N\right)^2.\end{aligned} \tag{113}$$

我们预计，任意一组度-叶度计数 $N_{k,\ \ell}(G)$ 也具有类似的多元正态性。类似结果已刻画了优先连接树 [15] 和 RRT [45] 中的度统计。

V. 讨论

在本研究中，我们引入了联合度-叶度分布 $n_{k,\ \ell}$ 作为描述稀疏图的实用指标，并提供了通过对增长随机树背景下的递推关系进行多元生成函数分析来求得 $n_{k,\ \ell}$ 的方法。具体而言，我们分析了$n_{k,\ \ell}$ 经典优先连接树 [9] 和 RRT [42]。这些量也可以在更广泛的模型族和真实世界数据中加以考察。事实上，任何树增长模型、稀疏随机图模型或稀疏真实世界图数据集，都可能具有非平凡的联合度-叶度统计量。过去的一些研究中也出现过与$n_{k,\ \ell}$ 类似的量。例如，在各向同性完全重定向模型 [46], 中，对于 $k > 1$，量 $c_{k,\ \ell}$ 被定义为度为 k 且叶度为 ℓ的非叶节点 的极限比例。在该模型中，一个指数 $\mu \approx 0.566$ 刻画了非叶节点的反常次线性增长：$N - N_1 \sim N^{\mu}$；研究表明，$\mu = \langle\ell/k\rangle$ 当 ℓ，k 以概率 $c_{k,\ \ell}$抽取。第二个例子是近期的预印本参考文献 [43], ，其中提出了一种基于非线性重定向的 [47] 模型；在参数极限区域内，得到了关于$n_{k,\ \ell}$的递推关系，不过索引方式有所不同。我们在附录 D中考察了该模型，并在分析联合分布之前，先证明仅基于叶度的描述可以方便地应用。

我们的重点是优先连接树，该树已得到广泛研究 [15]。早期研究刻画了度分布，发现其尾部呈三次幂律衰减 $n_k \sim 4k^{-3}$ [9, 40]。此后，人们还刻画了许多度以外的性质，例如直径 [18], 特征值谱 [48], 、顶点到根的距离性质 [49], 、最近邻度相关性 [19], 等。人们还研究了优先连接的诸多扩展形式，通常通过调整偏好函数加以区分；例如，采用加性偏移 [14], 、非线性 [19], 、年龄依赖性 [50], 、个体化适应度 [51], 以及三元闭包 [52]。本研究通过求得联合分布 $n_{k,\ell}$（18）、叶度分布 m_ℓ（13）、受保护比例 p（14）、按度分层的受保护比例 n_k0（15）、关于 N_1, N_2 和 $N_2$1 的涨落结果，以及它们的多元组合（第四节），补充了此前对优先连接的刻画。我们选择聚焦于优先连接，不仅是为了推进上述研究，也将其作为一种适用范围更广的方法的案例研究。来自 $g(y, z)$ 的这些结果以及联合分布$n_{k,\ell}$ ，给出了优先连接中许多关注属性的精确值；这些属性比 $n_{k,\ell}$ 更为粗粒度，即 $\{m_\ell\}_{\ell\geq 0}$, p 和 $\{n_{k,0}\}_{k\geq 2}$；据我们所知，在优先连接中尚无更直接的方法可用于求得这些量。

除了叶节点之外，我们的技术还可以扩展到其他量；也可以应用于树以外的数据结构。例如，在新到达节点连接到 $m > 1$ 已有顶点的增长模型中，度为m的顶点与叶节点类似；我们可以追踪给定节点拥有多少个度为m的邻居的统计量。扩展到高阶网络 [53], （例如超图和单纯复形）也是可行的；对于超图，可以将仅涉及一条超边的顶点视为“叶节点”。请注意，即使采用对叶节点最严格的定义（度为 1 且仅有一条二元边的顶点），高阶网络也可能呈现非平凡的叶统计量。尤其值得关注的是高阶增长模型 [54, 55]中的叶统计量。我们强调的第二个方向，是考察本文所采用的描述性分析如何促成具有新机制的相应模型的构建——也就是说，这些机制能够通过所引入的描述性工具加以处理。例如，在叶度分布受到关注之后，人们提出了基于叶度的移位线性优先连接 [34], ；与经典的基于度的移位线性优先连接相比，它呈现出更广泛的行为范围 [35]。

与本文这项具体工作更为接近的，是对n_k、ℓ 相关模型的分析。移位线性优先连接模型 [8]构成了一个单参数族，其连接速率与 $k+\delta$ 成正比。叶度分布并不满足封闭递推关系，与本文研究的优先连接树（$\delta=0$）一样。类似地，最近提出的基于叶节点的优先连接模型（以概率 $\propto \ell_j + a$连接到 j，其中 $a>0$） [34] ，其度分布也不存在封闭递推关系 n_k。不过，我们预计联合分布n_k、ℓ 是可处理的，并可由此得到n_k 。值得关注的特殊情况包括$a=1$，其中 $m_\ell \sim e^{-2\sqrt{g\ell}}$ 且 g 为黄金比例；以及 $a=1-1/\sqrt{3}$，其中 $m_\ell \sim \ell^{-3}$。附录D所考虑的模型也存在同样的情况：n_k、ℓ满足封闭递推关系，但 n_k则不满足。无标号随机图中的联合度-叶度分布也值得关注，包括增长模型 [35]和静态系综 [56–59]。

更广泛地说，我们预计，本文所发展的方法、基于叶节点的描述和模型机制，可应用于随机图理论以及现实世界的图数据建模。在现实世界网络中，叶节点常常发挥着独特的功能作用，例如流网络中的源与汇 [27] 以及系统发育树中的观测物种 [60]。叶节点的统计量很容易从数据中测量；值得关注的是：(i) 使用叶节点相关检验统计量，通过传统模型（例如基于度的优先连接）进行建模——将采用本文方法获得的模型理论值与之比较——例如，检验 $\ell(k)$ 真实网络与模型网络中的差异；此外还有 (ii) 使用基于叶节点的统计机制对真实网络进行建模，例如基于叶度的优先连接 [34]，参考文献中的重定向模型。 [43] 附录D中讨论了无标记的叶对称树增长 [35], 以及许多其他尚待研究的可能机制。

[1] A.-L. Barab´asi, 《网络科学》，《皇家学会哲学汇刊 A 辑》371，20120375（2013）。[2] M. Molloy 和 B. Reed, 《具有给定度序列的随机图的临界点》，随机结构与算法 6，161（1995）。[3] M. Newman, *Networks: An Introduction*（牛津大学出版社，纽约，2010）。[4] I. Voitalov、P. van der Hoorn、R. van der Hofstad 和 D. Krioukov, 《精心构建的无标度网络》，《物理评论研究》1，033034（2019）。[5] A. Broido 和 A. Clauset, 《无标度网络很罕见》，《自然通讯》10，1017（2019）。[6] M. E. J. Newman, 《幂律、帕累托分布和齐夫定律》，《当代物理学》46，323（2005）。[7] A. Clauset、C. Shalizi 和 M. E. J. Newman, 《经验数据中的幂律分布》，《SIAM 评论》51，661（2009）。[8] H. A. Simon, 《一类偏斜分布函数》，《生物计量学》42，425（1955）。[9] A.-L. Barab´asi 和 R. Albert, 《随机网络中标度的涌现》，《科学》286，509（1999）。[10] S. N. Dorogovtsev 和 J. F. F. Mendes, *Evolution of networks: From biological nets to the Internet and WWW*（牛津大学出版社，牛津，英国，2003）。[11] R. van der Hofstad, *Random graphs and complex net-works*（剑桥大学出版社，剑桥，英国，2016）。[12]A. Frieze 和 M. Karo´nski, *Introduction to RandomGraphs*（剑桥大学出版社，剑桥，英国，2016）。[13] P. L. Krapivsky、S. Redner 和 F. Leyvraz, 《增长型随机网络的连通性》，《物理评论快报》85，4629（2000）。[14] S. N. Dorogovtsev、J. F. F. Mendes 和 A. N. Samukhin, 《具有优先连接的生长网络结构》，《物理评论快报》85，4633（2000）。[15] B. Bollob´as 和 O. Riordan, 《无标度随机图的数学结果》，载于 *Handbook of graphs and networks: from the genome to the internet*，由……编 S. Bornholdt 和 H. G. Schuster（Wiley-VCH Verlag，2003）第 1–34 页。[16] R. Pastor-Satorras 和 A. Vespignani, 复杂网络中的流行病动力学与地方性流行状态，物理评论 E 63，066117（2001）。[17] G. Bianconi，Barab´asi-Albert 网络上伊辛模型的平均场解，物理快报 A 303，166（2002）。[18] B. Bollob´as 和 O. Riordan，无标度随机图的直径，《组合数学》24，5（2004）。[19] P. L. Krapivsky 和 S. Redner，增长型随机网络的组织，物理评论 E 63，066123（2001）。[20] Z. Nikoloski、N. Deo 和 L. Kucera，无标度图的度相关性，见 *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science DMTCS Proceedings* 2005 ，（）。

[21] E. Ben-Naim 和 P. L. Krapivsky，优先连接网络中的分层，《物理学杂志 A：数学与理论》42，475001（2009）。[22] R. Diestel, *Graph Theory*（施普林格，海德堡，2017）。[23] J. Lin、H. Liu 和 L. You，图中叶度至多为 k 的生成树的紧条件，《离散应用数学》374，97（2025）。[24] S. N. Dorogovtsev 和 J. F. F. Mendes, *The Natureof Complex Networks*（牛津大学出版社，牛津，英国，2022）。[25] M. Drmota, *Random Trees*（施普林格，维也纳，2009）。[26] B. Bollob´as 和 O. Riordan, 稀疏图：度量与随机模型，《随机结构与算法》39，1（2011）。[27] G. B. West、J. H. Brown 和 B. J. Enquist，生物学中异速标度定律起源的一般模型，《科学》276，122（1997）。[28] C. Bachmaier、U. Brandes 和 B. Schlieper，绘制系统发育树，见 *Algorithms and Computation*，X. Deng 和 D.-Z. Du 编（施普林格，柏林海德堡，柏林，海德堡，2005）第 1110–1121 页。[29] A. Pastore y Piontti、M. Gomes、N. Samay、N. Perra 和 A. Vespignani，全球流行病的感染树，《网络科学》2，132–137（2014）。[30] M. B´ona 和 B. Pittel，随机递增平面树：按距叶节点的距离对顶点进行渐近计数

，《应用概率进展》49，850（2017）。[31] L. Devroye 和 S. Janson，一些随机树中的保护节点与边缘子树，《电子概率通讯》19，1（2014）。[32] H. M. Mahmoud 和 M. D. Ward，随机递归树中保护节点的渐近性质，《应用概率》52，290（2015）。[33] M. B´ona，k–二叉搜索树中的受保护顶点，《应用数学进展》53，1（2014）。[34] H. Hartle 和 P. L. Krapivsky，增长随机树中叶节点的统计特性，arXiv:2511.04085（2025）。[35] H. Hartle、B. Klein、D. Krioukov 和 P. L. Krapivsky，增长型无标号网络，arXiv:2509.17200（2025）。[36] R. R. X. Du 和 H. Prodinger，数字搜索树中保护节点的注记，《应用数学快报》25，1025（2012）。[37] L. Devroye 和 S. Janson，一些随机树中的保护节点与边缘子树，《电子概率通讯》19，1（2014）。[38] H. S. Wilf，*generatingfunctionology*（CRC 出版社，纽约，2005）。[39] P. Flajolet 和 R. Sedgewick，*Analytic Combinatorics*（剑桥大学出版社，剑桥，英国，2009）。[40] B. Bollob´as、O. Riordan、J. Spencer 和 G. Tusn´ady，无标度随机图过程的度序列，《随机结构与算法》18，279（2001）。[41] S. Janson，给定顶点度数的随机图中的渐近正态性，《随机结构与算法》56，1070（2020）。[42] P. L. Krapivsky、S. Redner 和 E. Ben-Naim，*A Kinetic View of Statistical Physics*（剑桥大学出版社，剑桥，英国，2010）。[43] T. Zhao、B. Maga、P. Dionigi、G. ´Odor、K. Soni、A. Sa-lova、B. Hao、M. Ab´ert 和 I. A. Kov´acs，量子优先连接，arXiv:2512.22542（2025）。[44] P. L. Krapivsky 和 S. Redner，增长网络中的有限性与涨落，《物理学杂志 A》35，9517（2002）。[45] S. Janson，随机递归树中的渐近度分布，《随机结构与算法》26，69（2005）。[46] P. L. Krapivsky 和 S. Redner，涌现的网络模块性，《统计力学杂志》2017，073405（2017）。[47] P. L. Krapivsky 和 S. Redner，重定向生长网络的奥妙，《印度物理学杂志》98，3777（2024）。[48] O. Arizmendi 和 E. Dominguez，Barab´asi–Albert 树是低能树，《墨西哥数学学会公报》28，72（2022）。[49] Z. Katona，无标度树的宽度，《应用概率》42，839（2005）。[50] Y. Wu、T. Z. J. Fu 和 D. M. Chiu，考虑老化效应的广义优先连接，《信息计量学》8，650 2014（）。[51] G. Bianconi 和 A.-L. Barab´asi，演化网络中的竞争与多重标度，EPL 54，436（2001）。[52] P. Holme 和 B. Kim，具有可调聚类的无标度网络生长，物理评论 E 65，026107（2002）。[53] G. Bianconi，*Higher-order networks*（剑桥大学出版社，剑桥，英国，2021）。[54] P. L. Krapivsky，随机递归超图，《物理学杂志 A》56，195001（2023）。[55] S. M. Oh、Y. Lee 和 B. Kahng，探索具有高阶相互作用的复杂系统生长，arXiv:2410.06279（2024）。[56] A. J. Schwenk，对称群循环指标的渐近评估，《离散数学》18，71（1977）。[57] T. -Luczak，《如何处理无标记随机图》，《图论杂志》15，303（1991）。[58] J. Paton、H. Hartle、H. Stepanyants、P. van der Hoorn 和 D. Krioukov，《有标记与无标记网络的熵》，《物理评论E》106，054308（2022）。[59] O. Evnin 和 D. Krioukov，《无标号网络中的系综不等价与相变》，《物理评论快报》134，207401（2025）。[60] A. Rieux 和 F. Balloux，《从末端校准系统发育树中进行推断：综述与实用指南》，《分子生态学》25，1911（2016）。[61] P. L. Krapivsky、S. Redner 和 E. Ben-Naim，*A Kinetic View of Statistical Physics*（剑桥大学出版社，剑桥，英国，2010）。[62] C. M. Bender 和 S. A. Orszag，*Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I. Asymptotic Methods and Perturbation Theory*（施普林格，纽约，1999）。[63] H. M. Mahmoud 和 M. D. Ward，《随机递归树中受保护节点的渐近性质》，《应用概率》52，290（2015）。[64] C. Holmgren 和 S. Janson，《二叉搜索树和随机递归树边缘树函数的极限定律》，《电子概率学杂志》20，1（2015）。[65] R. L. Graham、D. E. Knuth 和 O. Patashnik，*Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*（艾迪生-韦斯利，雷丁，马萨诸塞州，1994）。

附录 A：随机递归树

在本附录中，我们分析随机递归树（RRTs）中度与叶度的联合分布。RRTs 通过最简单的随机生长过程生成：顶点逐个加入，每个新顶点都附着到一个从现有顶点中均匀随机选出的顶点上 [3, 11, 12, 24, 61]。与我们对优先连接的处理类似，我们推导出 $n_{k,\,\ell}$ 的递推关系及其对应的偏微分方程$g(y,\ z)$，并求解该方程，随后通过分析 $g(y,\ z)$得到许多结果。

对于 RRT，每个现有顶点被连接到的概率均为 $1/N$，因此，一个度为k 、叶度为ℓ 的顶点被连接到的概率为 $N_{k,\,\ell}/N$，而其叶邻居被连接到的概率为 $\ell N_{k,\,\ell}/N$。（事实上，这也得出了总叶连接概率：$\sum_{0\le\ell<k<\infty}\ell N_{k,\,\ell}/N = N_1/N$。）此外，每次发生连接都会新增一个叶节点。因此，$N_{k,\,\ell}$的变化规律为

$$\frac{dN_{k,\ell}}{dN} = \frac{N_{k-1,\ell-1}}{N} - \frac{N_{k,\ell}}{N} + \frac{(\ell+1)N_{k,\ell+1}}{N} - \frac{\ell N_{k,\ell}}{N} + \delta_{k,1}\delta_{\ell,0}, \tag{A1}$$

由此我们推导出 $n_{k,\,\ell}$ 的递推关系：

$$(\ell+2)n_{k,\ell} = n_{k-1,\ell-1} + (\ell+1)n_{k,\ell+1} + \delta_{k,1}\delta_{\ell,0}. \tag{A2}$$

对 ℓ 求和，我们得到度分布的递推关系，$2n_k = n_{k-1} + \delta_{k,\,1}$，该递推关系具有众所周知的解 $n_k = 2^{-k}$。值得注意的是，该求和

对 k 求和也会得到封闭递推关系 [34]

$$(\ell+2)m_\ell = m_{\ell-1} + (\ell+1)m_{\ell+1} + \delta_{\ell,0}, \tag{A3}$$

其解为

$$m_\ell = \frac{\gamma(\ell+1,1)}{\Gamma(\ell+1)}. \tag{A4}$$

为确定联合度分布，我们再次使用生成函数（式（3））， 并将递推关系（A2）改写为偏微分方程

$$(1-z)\frac{\partial g}{\partial z} - (2-yz)g + y = 0. \tag{A5}$$

我们寻求如下形式的解

$$g(y,z) = (1-z)^{y-2}e^{yz}f(y,z), \tag{A6}$$

积分因子满足（A5）的齐次形式，因此试探解（A6）将（A5）化简为

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -y(1-z)^{1-y}e^{-yz}, \tag{A7}$$

对（A7）积分可得

$$g(y,z) = y(1-z)^{y-2}e^{yz}\int_z^1 dw\,(1-w)^{1-y}e^{-yw},$$

将其变换为

$$g(y,z) = y\int_0^1 (1-t)^{1-y}e^{-y(1-z)t}dt. \tag{A8}$$

等价地，将积分变量变换为 v =1 − t,

$$g(y,z) = y\int_0^1 v^{1-y}e^{-y(1-z)(1-v)}dv, \tag{A9}$$

如式（26）所述。可以验证归一化条件和矩条件

$$\begin{aligned} g(1,1) &= 1,\\ \partial_y g(1,1) &= 2,\\ \partial_y g(1,1) &= 1/2. \end{aligned} \tag{A10}$$

1. $n_k(z)$ and $n_{k,\ell}$

现在，我们通过将 $n_k(z)$ 按 z 的幂展开，在得到将 $g(y,\ z)$ 按 y 的幂展开的$n_k(z)$ 后，继续推导$n_{k,\ \ell}$ 的积分表达式。我们写成

$$g(y,z) = y\int_0^1 e^{-y[(1-v)(1-z)+\log v]}v\,dv \tag{A11}$$

并将其展开以求出

$$n_k(z) = \int_0^1 \frac{[-(1-v)(1-z)-\log v]^{k-1}}{(k-1)!}\,v\,dv. \tag{A12}$$

按 z 的幂展开，我们得到

$$n_{k,\ell} = \int_0^1 \frac{(1-v)^\ell[v-1-\log v]^{k-1-\ell}}{\ell!(k-1-\ell)!}\,v\,dv. \tag{A13}$$

比例 $n_{k、\ \ell}$ 是有理数。这一性质从式（A13）的精确公式中并不能立即看出，但它源于递推关系（A2）的结构。

2. 特殊情况

将式（A13）特化到 $\ell = k-1$，我们可推得近星形结构顶点所占的比例

$$n_{k,k-1} = \frac{1}{(k+1)!}. \tag{A14}$$

近星形结构所占的顶点总比例为

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_{k,k-1} = e-2 = 0.718\,281\ldots \tag{A15}$$

类似地，我们计算

$$n_{k,k-2} = \frac{H_k}{k!} - \frac{2k}{(k+1)!} \tag{A16}$$

其中 H_k 是第 k个调和数。

¯平均叶度 $\ell(k)$ 在度固定的顶点中的k 由一般公式（6）给出，另见（57），对于 RRT 则变为 $\bar{\ell}(k)$ = $2^k n_k'(z)|_{z=1}$ 。利用（A12）可得

$$\begin{aligned} \bar{\ell}(k) &= \frac{2^k}{(k-2)!}\int_0^1 (-\log v)^{k-2}\,(1-v)\,v dv\\ &= 2-3\left(\frac{2}{3}\right)^k, \end{aligned} \tag{A17}$$

在 $k\to\infty$极限下，该值趋于饱和；度较大的顶点，其邻居中平均有两个叶节点。这与优先连接（PA）形成对比，在大k 极限下， $\bar{\ell}(k)\simeq \frac{k}{2}$ 。叶度的条件¯分布，即该量

$$P_\infty(\ell) = \lim_{k\to\infty}\frac{n_{k,\ell}}{n_k}, \tag{A18}$$

服从均值为 2 的泊松分布：

$$P_\infty(\ell) = \frac{2^\ell e^{-2}}{\ell!}. \tag{A19}$$

可以从 $n_{k,\ \ell}$ 的精确积分表示（A13）出发，提取在 ℓ 保持不变时的 $k\to\infty$ 极限行为，从而推导出（A19）。另一种推导方法基于直接计算 q 阶矩$[d^q n_k\ (z)\ /dz^q]_{z=1}$，并证明它在 $k\to\infty$ 极限下收敛于 2^q 。还有一种推导方法基于

将（A18）代入（A2），回顾 $n_k = 2^{-k}$，并得到递推关系

$$(\ell+2)P_\infty(\ell) = 2P_\infty(\ell-1) + (\ell+1)P_\infty(\ell+1) \quad \text{(A20)}$$

求解后得到 $e^{-2}2^\ell/\ell!$，振幅由归一化确定。这与 $m_\ell = \gamma(\ell+1,\ 1)/\ell!$ 不同，后者涵盖所有顶点，其中大多数并非高度数顶点。

3. RRT 中受保护的顶点

由 $g(y,\ z)$ 可立即得到叶度为零的顶点的渐近比例：

$$m_0 = g(1,0) = e^{-1}\int_0^1 e^v dv = 1 - \frac{1}{e}, \quad \text{(A21)}$$

由此得到众所周知的受保护比例 $p = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$。受保护顶点按度分层的比例也值得关注；对于 $k \geq 2$，我们有

$$n_{k,0} = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^1 (v - 1 - \log v)^{k-1} v dv, \quad \text{(A22)}$$

这也重现了$n_{1,\ 0} = n_1 = 1/2$。为确定大 k 渐近行为，我们作变量代换，$v = e^{-u}$使得 $dv = -e^{-u}du$，$v = 0 \Rightarrow u = \infty$，$v = 1 \Rightarrow u = 0$，并将方程（A22）改写为

$$\begin{aligned} n_{k,0} &= \frac{1}{(k-1)!}\int_0^\infty (u - 1 + e^{-u})^{k-1} e^{-2u} du \\ &\simeq \frac{1}{(k-1)!}\int_1^\infty du\, e^{-2u}(u-1)^{k-1} = \frac{e^{-2}}{2^k}, \end{aligned} \quad \text{(A23)}$$

也得到

$$\lim_{k\uparrow\infty} \frac{n_{k,0}}{n_k} = e^{-2} = 0.135\,335\ldots; \quad \text{(A24)}$$

因此，$k \gg 1$ 处受保护顶点的比例仅略高于总体受保护比例；差值为 $e^{-2} - p \approx 0.003\,214$。此外，我们还可以求得 RRT 中受保护顶点的平均度：

$$\begin{aligned} \bar{k}_p &= \frac{\partial_y g(1,0) - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{e}} = \frac{\mathrm{Ei}(1) - \gamma}{\frac{e}{2} - 1} - 1 \\ &= 2.669\,596\,248\ldots \end{aligned} \quad \text{(A25)}$$

这明显大于 PA 中受保-护顶点的平均度，$k_p \approx 2.20$（式（16））。

4. 相关性

为计算 $\langle k\ell\rangle$，我们使用公式

$$\langle k\ell\rangle = \left.\frac{\partial^2 g(y,z)}{\partial y \partial z}\right|_{y=z=1}. \quad \text{(A26)}$$

由 g 的积分表示，我们有

$$\frac{\partial^2 g(y,z)}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left[y\int_0^1 v^{1-y} e^{-y(1-z)(1-v)} dv\right]$$

在 $y = z = 1$ 处计算导数，得

$$\langle k\ell\rangle = \int_0^1 (2 - \log v)(1-v)dv = \frac{7}{4}. \quad \text{(A27)}$$

与 $\langle k\rangle\langle\ell\rangle = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ 比较。

附录 B：（20a）的推导

我们记 $F(N_1,\ N) \equiv P(N_1;\ N+1)$，于是（82）变为

$$\begin{aligned} F(N_1, N+1) \ &= \ \left(1 - \frac{N_1 - 1}{2N}\right) F(N_1 - 1, N) \\ &+ \ \frac{N_1}{2N} F(N_1, N). \end{aligned} \quad \text{(B1)}$$

我们将 $N \gg 1$ 和 $N_1 \gg 1$ 视为连续变量，并将（B1）展开为泰勒级数，保留到二阶导数项（很快就会明白，这已经足够）

$$\frac{\partial F}{\partial N} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial N^2} = \left(1 - \frac{N_1}{2N}\right)\left(-\frac{\partial F}{\partial N_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial N_1^2}\right) + \frac{F}{2N}.$$

我们使用变量来代替 N_1

$$\xi = \frac{N_1 - \frac{2}{3}N}{\sqrt{N}}. \quad \text{(B2)}$$

在这些新变量下，函数 $\Phi(\xi,\ N) = F(N_1,\ N)$ 在主导阶满足方程

$$N\frac{\partial \Phi}{\partial N} = \xi\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{1}{9}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2}\Phi. \quad \text{(B3)}$$

在推导（B3）时，我们用到了

$$\frac{\partial}{\partial N} \to \frac{\partial}{\partial N} - \left(\frac{2}{3\sqrt{N}} + \frac{\xi}{2N}\right)\frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial N_1} \to \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{\partial}{\partial \xi}.$$

（B3）的解为 $\Phi = CN^{-1/2}e^{-9\xi^2/2}$。回顾（B2），并确定振幅 C 以确保归一化，我们得到（20a）。

附录 C：N_1 和 N_2的累积量

为推导叶子数量的累积生成函数(83)，我们使用该数量的随机演化方程(75)，并得到

$$\left\langle e^{xN_1(N+1)}\right\rangle = e^x\left\langle e^{xN_1}\right\rangle + \frac{1 - e^x}{2(N-1)}\left\langle N_1 e^{xN_1}\right\rangle. \quad \text{(C1)}$$

下文中，我们再次用 N_1 代替 $N_1(N)$；只有当顶点数量为 $N+1$时，我们才使用完整记法。将(C1)改写为以下形式会更方便

$$\left\langle e^{xN_1(N+1)}\right\rangle = e^x\left\langle e^{xN_1}\right\rangle + \frac{1-e^x}{2(N-1)}\frac{d\left\langle e^{xN_1}\right\rangle}{dx}. \quad \text{(C2)}$$

前两个累积量，即平均值和方差，其首项与 $N-1$成正比，而次级项在大 $N^{-1/2}$ 极限下趋于零，参见（78）和（81）。因此，我们定义（归一化的）累积量生成函数如下：

$$Q(x) = \lim_{N\to\infty}\frac{\log\left\langle e^{xN_1}\right\rangle}{N-1}, \quad \text{(C3)}$$

我们将（C2）改写为一个常微分方程（ODE）

$$e^Q = e^x + \frac{1-e^x}{2}\frac{dQ}{dx}. \quad \text{(C4)}$$

变换 $u(x) = e^{-Q(x)}$ 将（C4）改写为一个线性（非齐次）微分方程，我们在条件 $u(0) = 1$ 对应于 $Q(0) = 0$下求解。再回到 $Q(x)$，得到

$$Q(x) = \log\frac{(e^x-1)^2}{2(e^x-1-x)}, \quad \text{(C5)}$$

由此得到所述结果（83）。

现在我们概述随机变量 N_1 和 N_2 的累积量计算。针对这对变量 (N_1, N_2) 的随机演化方程给出

$$\begin{aligned}\left\langle e^{xN_1(N+1)+yN_2(N+1)}\right\rangle &= \left\langle\frac{N_2}{N-1}e^{x(N_1+1)+y(N_2-1)}\right\rangle \\ &+ \left\langle\frac{N_1}{2(N-1)}e^{xN_1+y(N_2+1)}\right\rangle \\ &- \left\langle\frac{N_1+2N_2}{2(N-1)}e^{x(N_1+1)+yN_2}\right\rangle \\ &+ \left\langle e^{x(N_1+1)+yN_2}\right\rangle. \quad \text{(C6)}\end{aligned}$$

我们将方程（C6）的右端（RHS）改写为

$$\begin{aligned}\text{RHS} &= e^x\left\langle e^{xN_1+yN_2}\right\rangle + \frac{e^{x-y}-e^x}{N-1}\frac{\partial}{\partial y}\left\langle e^{xN_1+yN_2}\right\rangle \\ &+ \frac{e^y-e^x}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left\langle e^{xN_1+yN_2}\right\rangle, \quad \text{(C7)}\end{aligned}$$

并使用二元累积量生成函数

$$Q(x,y) = \lim_{N\to\infty}\frac{\log\left\langle e^{xN_1+yN_2}\right\rangle}{N-1}. \quad \text{(C8)}$$

将（C6）–（C7）化为非线性偏微分方程

$$e^Q = e^x + \frac{e^y-e^x}{2}\frac{\partial Q}{\partial x} + \left(e^{x-y}-e^x\right)\frac{\partial Q}{\partial y}. \quad \text{(C9)}$$

进行变换

$$u(x,y) = e^{-Q(x,y)}, \quad \text{(C10)}$$

我们将（C9）改写为一个线性非齐次偏微分方程

$$\frac{e^{y-x}-1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \left(e^{-y}-1\right)\frac{\partial u}{\partial y} + e^{-x} = u. \quad \text{(C11)}$$

一阶偏微分方程是双曲型的，可通过特征线法求解。在此，我们从一个变换开始会比较方便

$$\eta = \log(e^y-1), \qquad v(x,\eta) = e^\eta u(x,y), \quad \text{(C12)}$$

将（C11）改写为

$$\frac{1-e^{-x}(e^\eta+1)}{2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = e^{\eta-x}. \quad \text{(C13)}$$

现在，特征线由一个常微分方程定义

$$\frac{dx}{d\eta} = \frac{1-e^{-x}(e^\eta+1)}{2}, \quad \text{(C14)}$$

对其积分可得

$$e^x = 1 - e^\eta + 2Ce^{\frac{\eta}{2}}. \quad \text{(C15)}$$

特征线由 C 参数化。沿每条特征线，方程（C13）变为一个常微分方程

$$\frac{dv}{d\eta} = e^{\eta-x} = \frac{e^\eta}{1-e^\eta+2Ce^{\frac{\eta}{2}}}. \quad \text{(C16)}$$

对（C16）积分可得

$$\begin{aligned}v &= \frac{2C}{\sqrt{C^2+1}}\tanh^{-1}\left(\frac{C+e^{\frac{\eta}{2}}}{\sqrt{C^2+1}}\right) \\ &- \log\left[1-e^\eta+2Ce^{\frac{\eta}{2}}\right] + F(C),\end{aligned}$$

其中积分“常数” $F(C)$ 随特征线而变。要求 $u = v/(e^y-1)$ 在 $y\to 0$ 极限下不发散，由此确定积分常数：

$$\begin{aligned}v &= 2c\left[\tanh^{-1}\left(\frac{C+e^{\frac{\eta}{2}}}{\sqrt{C^2+1}}\right) - \tanh^{-1}(c)\right] \\ &- \log\left[1-e^\eta+2Ce^{\frac{\eta}{2}}\right], \quad c = \frac{C}{\sqrt{C^2+1}}. \quad \text{(C17)}\end{aligned}$$

回到原始变量后，我们得到解的参数表示：

$$u = \frac{2c\left[\tanh^{-1}\left(\frac{C+\sqrt{e^y-1}}{\sqrt{C^2+1}}\right) - \tanh^{-1}(c)\right] - x}{e^y-1}, \quad \text{(C18)}$$

with

$$C = \frac{e^x+e^y-2}{2\sqrt{e^y-1}}, \quad \text{(C19a)}$$

$$c = \frac{2\sqrt{e^y-1}\,(e^y+e^x-2)}{2e^{x+y}+e^{2x}+e^{2y}-4e^x}. \quad \text{(C19b)}$$

由于在C18–(C19)中的精确参数解存在明显的奇异性，因此从中提取累积量并不容易，奇异点位于$x, y) = (0,0)$。可以采用一种朴素的方法，通过代入展开式来计算低阶累积量

$$Q(x,y) = \sum_{p,q\geq 1} \kappa_{12}^{(p,q)} \frac{x^p\, y^q}{p!\, q!} \tag{C20}$$

代入（C9）。令一阶项相等，我们得到

$$\kappa_{12}^{(1,0)} = n_1 = \frac{2}{3}, \quad \kappa_{12}^{(0,1)} = n_2 = \frac{1}{6}.$$

令二阶项相等，我们得到归一化方差和协方差

$$\kappa_{12}^{(2,0)} = \frac{1}{9}, \quad \kappa_{12}^{(1,1)} = -\frac{4}{45}, \quad \kappa_{12}^{(0,2)} = \frac{23}{180}.$$

在三阶，我们得到 $\kappa_{12}^{(3,0)} = \kappa_1^{(3)} = -\frac{1}{135}$，并获得三个新的归一化累积量

$$\begin{aligned} \kappa_{12}^{(2,1)} &= \lim_{N\to\infty} \frac{\langle\langle N_1^2 N_2\rangle\rangle}{N} = \frac{7}{270}, \\ \kappa_{12}^{(1,2)} &= \lim_{N\to\infty} \frac{\langle\langle N_1 N_2^2\rangle\rangle}{N} = -\frac{46}{945}, \\ \kappa_{12}^{(0,3)} &= \kappa_2^{(3)} = \lim_{N\to\infty} \frac{\langle\langle N_2^3\rangle\rangle}{N} = \frac{13}{189}. \end{aligned} \tag{C21}$$

继续到 6^{th} 阶，我们得到汇集于表IV的结果。第一列构成所公布的结果，见表III。

q \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{135}$	$-\frac{2}{135}$	$\frac{1}{567}$	$\frac{68}{8505}$
1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{4}{45}$	$\frac{7}{270}$	$\frac{17}{1890}$	$-\frac{337}{28350}$	$-\frac{71}{17010}$	
2	$\frac{23}{180}$	$-\frac{46}{945}$	$-\frac{1}{175}$	$\frac{43}{2025}$	$-\frac{151}{85050}$		
3	$\frac{13}{189}$	$\frac{2}{675}$	$-\frac{1817}{56700}$	$\frac{102727}{9355500}$			
4	$-\frac{251}{37800}$	$\frac{7466}{155925}$	$-\frac{388301}{16372125}$				
5	$-\frac{445}{6237}$	$\frac{1713926}{42567525}$					
6	$-\frac{9790117}{170270100}$						

表 IV。归一化二元累积量 $\kappa_{12}^{(p,q)}$ 直至五阶 $p+q \leq 6$。归一化累积量$\kappa_{12}^{(p,0)} = \kappa_1^{(p)}$ 是 N_1 的累积量。归一化累积量 $\kappa_{12}^{(0,q)} = \kappa_2^{(q)}$ 是 N_2 的累积量。

附录 D：恒定重定向模型

一篇近期预印本 [43]研究了具有重定向机制 [47]的增长树模型。在每个增长步骤中，都会为每个顶点 i指定一个附着权重 w_i，并且附着到顶点 i 的概率为 $w_i/\sum_v w_v$，其中求和遍历所有顶点 v。我们考虑文献 [43], 中的一种模型，名为恒定重定向 （CR），该模型有参数 $\alpha \in \mathbb{R}$ 和 $r \in [0,1]$。从机制上说，该模型会按与 k_t^α成正比的概率选取一个随机“目标”顶点 t，其中 k_t是顶点 t当前的度。随后，以概率 $1-r$直接将目标 t 附着上去；否则（概率为 r），附着会“重定向”至 t的一个随机邻居。这使得顶点 i的附着权重 w_i为

$$w_i(\alpha, r) = (1-r)k_i^\alpha + r\sum_{j\sim i} k_j^{\alpha-1}, \tag{D1}$$

其中 $j \sim i$表示 i的邻居 j。非线性参数 $\alpha = -\infty$取极端值$r = \frac{1}{2}$ 的模型具有有趣的性质，并且它也作为参考文献[43]中引入的另一模型的极限情形而出现。

在本附录中，我们展示如何利用本文及近期工作 [34, 35]中发展的方法来分析参数为$(\alpha, r) = (-\infty, 1/2)$的模型。我们首先推导叶度$(m_\ell)_{\ell\geq 0}$ 的封闭递推关系并求解。联合分布$n_{k,\ell}$的递推方程已在 [43], 中导出，我们用它来推导联合分布的若干性质。

1. 极限情形 $\alpha = -\infty$, $r = \frac{1}{2}$

对于 $r = \frac{1}{2}$ 的CR 模型，我们重新定义权重 $w_i \to 2w_i$。记 $w_i(\alpha) = w_i(\alpha, 1/2)$，则有

$$w_i(\alpha) = k_i^\alpha + \sum_{j\sim i} k_j^{\alpha-1}. \tag{D2}$$

节点 i 的连接概率为

$$p_i(\alpha) = \frac{w_i(\alpha)}{\sum_v w_v(\alpha)} = \frac{k_i^\alpha + \sum_{j\sim i} k_j^{\alpha-1}}{\sum_v \left(k_v^\alpha + \sum_{j\sim v} k_j^{\alpha-1}\right)} \tag{D3}$$

当 $\alpha = -\infty$ 时，只剩下满足 $k_i = 1$ 的项：

$$w_i(-\infty) = \delta_{1,k_i} + \ell_i. \tag{D4}$$

将这个 w_i 对 i 求和，得到 $2N_1$，因为每个叶节点都恰好被每一项计数一次。因此

$$p_i = \frac{\delta_{1,k_i} + \ell_i}{2N_1}. \tag{D5}$$

由于 $k_i = 1$ 总是意味着 $\ell_i = 0$，连接概率也可以表示为

$$p_i = \frac{1}{2N_1} \times \begin{cases} 1, & k_i = 1, \\ \ell_i, & k_i > 1. \end{cases} \tag{D6}$$

因此， p_i 对于所有 i 为受保护的 $k_i > 1$，$\ell_i = 0$ 均趋于零。这些附着权重与文献 [34] 中的基于叶节点的优先连接模型在 $a = 0$极限下相同，但叶节点除外；在本模型中，叶节点的权重设为 1。作为简单示例，表V展示了 $k \leq 6$ 时顶点的附着权重。

k \ ℓ	0	1	2	3	4	5		
1	1							
2	0	1						
3	0	1	2					
4	0	1	2	3				
5	0	1	2	3	4			
6	0	1	2	3	4	5		

表 V. 度为$k_i = k$ 且叶度为 $\ell_i = \ell$ 的顶点在 $\alpha = -\infty, r = \frac{1}{2}$ 时的附着权重；附着概率为$\frac{1}{2N_1}\times$所示数值。除了区分受保护顶点与叶节点外，权重仅取决于叶度 ℓ (式(D6))。叶节点的权重为 1，非叶节点 i 的权重为 ℓ_i，总计为 $2N_1$。

2. 叶节点总数

由于附着权重仅取决于叶度（ $\ell = 0$处除外，见表 V），我们预计可以用 $(n_1,\ p,\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ \ldots\ldots)$ 对系统作出简洁而非平凡的描述。在 $N = 3$ 之后的每次到达中，生成一个叶节点的概率恰好为 $\frac{1}{2}$，因为总会有一个叶节点被选中。因此，在任意 $N \geq 3$ ，叶节点总数的精确分布均为二项分布：

$$\mathbb{P}(\, N_1(G_N) = L\,) = \frac{1}{2^{N-3}}\binom{N-3}{L-2}, \tag{D7}$$

这意味着 $n_1 = \frac{1}{2}$ 。根据对$N_1(G_N)$的完整描述，我们可以直接观察到广延性和自平均性。

3. 叶度分布

接下来我们考察按叶度分层的计数（M_ℓ）$_{\ell\geq 0}$，其中 $M_0 = N_1 + P$。假设广延性和自平均性成立，我们考察极限比例 p_ℓ （m_ℓ）$_{\ell\geq 0}$。我们首先在第 D3a 节中，通过得到一个递推关系来确定 m_ℓ 在任意 $\ell \geq 0$ 处作为 p的函数。 p_ℓ 的值由归一化唯一确定；在后续章节（第 D3b 节）中，我们通过生成函数 [38]，显式得到 p_ℓ ，并通过 WKB 方法 [62]考察 m_ℓ 的尾部行为。

a. *Leafdegree recurrence*

现在我们得到描述 P 和 $(M_\ell)_{\ell\geq 1}$如何演化的方程；我们先从 P开始，其中 P/N 收敛到极限受保护比例 p_0。每当叶度为1的顶点被连接时，就会产生新的受保护顶点。连接机制确保只有叶节点或叶节点的邻居可以被连接，而受保护顶点不能。因此 dP/dN 没有损失项，特别是，

$$\frac{dP}{dN} = \frac{M_1}{2N_1} \simeq \frac{M_1}{N}, \tag{D8}$$

因此得到这个不同寻常的等式 $m_1 = p_0$。图4 展示了模型的一个样本，并突出显示了受保护顶点和叶度为1的顶点。这两类顶点的渐近丰度相等， $m_1 = p_0$，这是一个独特的特征，在其他已知受保护顶点比例的模型中并不存在 [30, 33, 37, 63, 64]。

接下来我们考察 M_ℓ $\ell \geq 1$，并特别注意 $\ell = 1$，因为每当一个叶节点附着到（概率为 1/2）时， M_1 就增加1；但当一个叶度为2的顶点的某个叶节点被附着时，它会增加2。相应地，当直接附着或叶附着发生在具有 $\ell = 1$ 的顶点上时， M_1 就会减少。因此

$$\frac{dM_1}{dN} = \frac{M_2 - M_1}{N_1} + \frac{1}{2}, \tag{D9}$$

从而得到 $m_1 = 2m_2 - 2m_1 + \frac{1}{2}$，与$m_1 = p_0$ 结合后得到

$$m_2 = \frac{3p_0}{2} - \frac{1}{4}. \tag{D10}$$

对于 $\ell \geq 2$， M_ℓ 的变化率遵循一个共同的模式： M_ℓ 通过附着到叶度为$\ell-1$的顶点，或附着到其邻居的叶度为 $\ell+1$ 的叶节点而增长。类似地，当发生直接连接，或附着到叶度为ℓ 的顶点上的叶节点时， M_ℓ会减少。在 $N \to \infty$ 极限下，这导致

$$(\ell+1)m_{\ell+1} - (1+2\ell)m_\ell + (\ell-1)m_{\ell-1} = 0,\ \ell \geq 2. \tag{D11}$$

总之，$(m_\ell)_{\ell\geq 0}$ 因此满足

$$\begin{aligned} &m_0 = p_0 + \frac{1}{2}, \quad m_1 = p_0, \quad m_2 = \frac{3p_0}{2} - \frac{1}{4}, \\ &m_\ell = \left(2 - \frac{1}{\ell}\right) m_{\ell-1} - \left(1 - \frac{2}{\ell}\right) m_{\ell-2}, \quad \ell \geq 3. \end{aligned} \tag{D12}$$

我们在下文中通过生成函数（第 D 3b节）得到 p_0 。我们注意到， p_0 由归一化条件唯一确定 $\sum_{\ell\geq 0} m_\ell(p_0) = 1$，并且 p_0 可以通过求解归一化条件的截断版本，以任意精度进行数值近似。方程（D12）可以合并（令 $m_{-1} = 0$），得到一个不显式依赖于 p_0的递推关系：

$$\begin{aligned} (1+2\ell)m_\ell = {} & (\ell+1)m_{\ell+1} \\ & + (\ell-1)m_{\ell-1} + \frac{\delta_{\ell,1} + \delta_{\ell,0}}{2},\ \ell \geq 0. \end{aligned} \tag{D13}$$

令 $m(z) = \sum_{\ell\geq 0} m_\ell z^\ell$，式（D13）可改写为

$$\begin{aligned} m(z) + 2\sum_\ell \ell m_\ell z^\ell = {} & \sum_\ell (\ell+1)m_{\ell+1} z^\ell \\ & + \sum_\ell (\ell-1)m_{\ell-1} z^\ell + \frac{1+z}{2} \end{aligned} \tag{D14}$$

由此我们得到一个常微分方程

$$(1-z)^2 \frac{dm(z)}{dz} - m(z) + \frac{1+z}{2} = 0. \tag{D15}$$

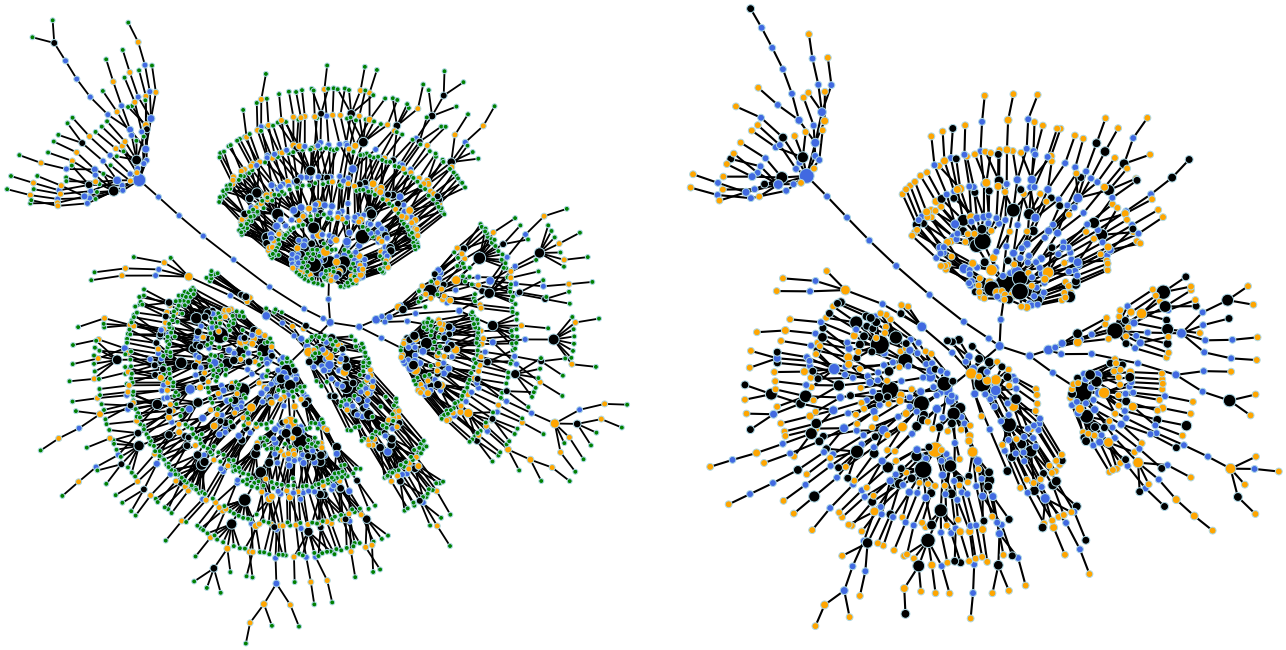


图 4. CR 模型中含有 $\alpha = -\infty$、 $r = \frac{1}{2}$ 的一棵随机树。左：完整大小的树，包含 $N = 2000$ 个顶点；颜色分别表示叶节点（绿色，$N_1 = 1016$）、叶度为1的顶点（橙色， $M_1 = 394$）和受保护顶点（蓝色， $P = 386$）。右：由所有非叶节点构成的子图，颜色标记相同。

我们分析式（D15）在第D3 b 节中，以得到叶度分布（m_ℓ）$_{\ell\geq 0}$ 和受保护比例p。由于附着过程依赖于叶度而非度，度分布（n_k）$_{k\geq 1}$ 并不满足封闭方程。然而，利用第II节所述的主要方法，我们可以依靠联合度-叶度分布$n_{k,\,\ell}$ 它确实满足封闭递推关系

$$\begin{aligned}(2\ell+1)n_{k,\ell} \;&=\; (\ell-1)n_{k-1,\ell-1} + (\ell+1)n_{k,\ell+1} \\ &+\; \frac{1}{2}(\delta_{k,1}\delta_{\ell,0} + \delta_{k,2}\delta_{\ell,1}).\end{aligned} \tag{D16}$$

度的取值范围为 $0 \leq \ell < k$。度为 k 且叶度为 ℓ的顶点数$N_{k,\,\ell}$ 是一个随机量，但我们猜想它具有广延性和渐近自平均性。这意味着其依概率收敛具有如下形式：$\frac{1}{N}N_{k,\,\ell} \to n_{k,\,\ell}$ 当 $N \to \infty$ 时；这一行为是我们分析的基础。更强的猜想是随机变量 $\{N_{k,\ell}\}$服从正态分布，至少在 $0 \leq \ell < k < N^{1/15}$ [40] 范围内如此，正如已证明的，对于 RRT 中的 $(N_k)_{k\geq 1}$ [45]。确定该模型中度分布的可能性，类似于推导优先连接树中的$m_\ell \sim \ell^{-3}$ （以及精确的公式（13））， 如（第IIIB节）所示；在这两种情况下，联合分布$n_{k,\,\ell}$ 都满足封闭递推关系，但 (n_k, m_ℓ) 中只有一个满足。（与 RRT 不同，RRT 中 n_k 和m_ℓ 都满足封闭递推关系 [34]。）

b. Leafdegree distribution

求解方程（D15），并满足 $m(1) = 1$ 可得

$$\begin{aligned}m(z) &= \int_0^{1-z} \frac{dw}{2w^2}\,(2-w)\,\exp\left[\frac{1}{1-z} - \frac{1}{w}\right] \\ &= 1 + \frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{2}\,\mathrm{Ei}\left(\frac{-1}{1-z}\right),\end{aligned} \tag{D17}$$

其中 $\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}dt$ 是指数积分。将（D17）特化到 $z = 0$， 得到

$$m_0 = 1 + \frac{e\mathrm{Ei}(-1)}{2}. \tag{D18}$$

如第 D3 a 节所示，受保护顶点的比例等于叶度为一的顶点比例，因此

$$p = m_1 = \frac{1 + e\mathrm{Ei}(-1)}{2} = 0.201\,826\ldots. \tag{D19}$$

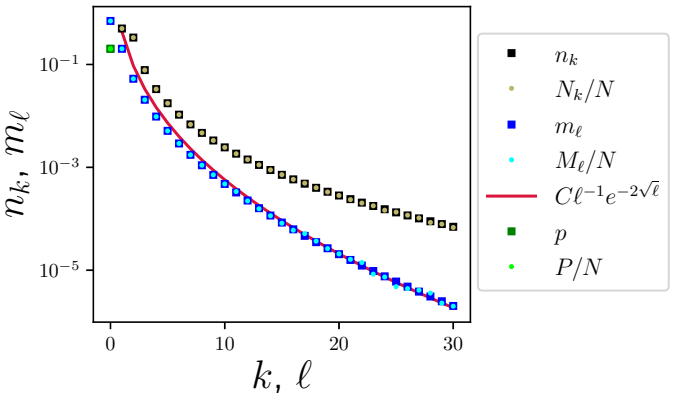


图 5. CR 模型在 $\alpha = -\infty$ 和 $r = \frac{1}{2}$ 处的叶度分布与度分布，如文献 [43]所考虑。精确的m_ℓ （蓝色方块）、数值比例 M_ℓ/N 在大小为 $N = 10^7$ 的单棵随机树中（青色圆圈），以及 WKB 渐近式（D22）（红色曲线）。粗略估计的系数 $C \approx 3.2$ 无法由 WKB 方法解析确定。此外还显示：精确度分布n_k （黑色方块）和数值比例 N_k/N （米色圆圈），以及精确与数值受保护比例 p 和 P/N （分别为深绿色方块和浅绿色圆圈）。

将（D17）展开为 z 的更高次幂，可得

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{1}{2} + \frac{3e\,\mathrm{Ei}(-1)}{4} = 0.052\,739\ldots \\ m_3 &= \frac{2}{3} + \frac{13e\,\mathrm{Ei}(-1)}{12} = 0.020\,623\ldots \\ m_4 &= \frac{11}{12} + \frac{73e\,\mathrm{Ei}(-1)}{48} = 0.009\,721\ldots \\ m_5 &= \frac{5}{4} + \frac{167e\,\mathrm{Ei}(-1)}{80} = 0.005\,124\ldots \end{aligned} \tag{D20}$$

等等。从生成函数（D17）提取叶度分布的尾部需要一些功夫，因此我们转而依赖 WKB 方法 [62]，它使我们能够在相差一个乘性常数的精度下推出该尾部。递推关系（D11）的形式表明，应寻求形如 $m_\ell = \ell^{-1}e^{-S(\ell)}$ 的解，当 $\ell \gg 1$时。将此试探解代入（D11），我们得到

$$e^{S(\ell)-S(\ell+1)} + e^{S(\ell)-S(\ell-1)} = 2 + \ell^{-1} \tag{D21}$$

将指数展开，然后对 $S(\ell) - S(\ell \pm 1)$ 作泰勒级数展开，可得 $\frac{dS}{d\ell} = \frac{1}{\sqrt{\ell}} + \frac{3}{8\ell^2} + \ldots$ 由此 $S = 2\sqrt{\ell} + O(1)$。因此

$$m_\ell \simeq C\,\ell^{-1}\,e^{-2\sqrt{\ell}} \tag{D22}$$

振幅 C 无法通过 WKB 方法确定。图5 展示了渐近公式（D22），并将其与 m_ℓ 的精确值以及 M_ℓ/N 在从模型中抽样得到的一棵大树中的经验值并列展示。

c. *Moments of leafdegree distribution*

考虑如下定义的降阶乘：

$$\ell^{\underline{b}} = \prod_{k=0}^{b-1}(\ell - k) = \ell(\ell-1)\cdots(\ell-b+1). \tag{D23}$$

分布 m_ℓ 的相应下降阶乘矩为$\mu_b = \langle \ell^{\underline{b}} \rangle$。对于生成函数 $m(z)$，有如下恒等式：

$$\left.\frac{d^b m}{dz^b}\right|_{z=1} = \langle \ell(\ell-1)\cdots(\ell-b+1)\rangle = \mu_b, \tag{D24}$$

从而可以确定叶度分布的下降阶乘矩。将方程 (D17) 改写为

$$m(z) = 1 - \frac{1-z}{2}\int_0^\infty \frac{du}{1+(1-z)u}\,e^{-u} \tag{D25}$$

简化了生成函数在 $z = 1$处的导数计算。可得

$$\mu_b = \langle \ell^{\underline{b}} \rangle = \frac{b!(b-1)!}{2} \tag{D26}$$

对所有整数 $b \geq 0$均成立。标准矩 $\langle \ell^j \rangle$可由下降阶乘矩推导得到。前三个标准矩为

$$\langle \ell \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle \ell^2 \rangle = \frac{3}{2}, \quad \langle \ell^3 \rangle = \frac{19}{2}. \tag{D27}$$

一般而言，恒等式

$$\ell^b = \sum_{j=0}^{b} \left\{ {b \atop j} \right\} \ell^{\underline{j}} \tag{D28}$$

利用第二类斯特林数 $\left\{ {b \atop j} \right\}$ [65]，我们可以通过下降矩来表示标准矩

$$\langle \ell^b \rangle = \sum_{j=0}^{b} \left\{ {b \atop j} \right\} \langle \ell^{\underline{j}} \rangle = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{b} \left\{ {b \atop j} \right\} j!(j-1)! \tag{D29}$$

可以发现，叶度分布的标准矩是除以 2 的奇整数：

$$\begin{aligned} 2\langle \ell^4 \rangle &= 231, \\ 2\langle \ell^5 \rangle &= 4\,651, \\ 2\langle \ell^6 \rangle &= 140\,103, \\ 2\langle \ell^7 \rangle &= 5\,900\,539, \\ 2\langle \ell^8 \rangle &= 331\,082\,391, \\ 2\langle \ell^9 \rangle &= 23\,873\,276\,971, \\ 2\langle \ell^{10} \rangle &= 2\,151\,075\,108\,903. \end{aligned} \tag{D30}$$

4. 联合分布

递推关系（D16）可以通过将度信息纳入相应的叶度递推关系式（D13）而得出，同时注意到：(i) 直接附着会同时增加叶度和度；(ii) 附着到相邻叶节点会降低叶度；(iii)$k=2$ 和 $k=1$ 分别对应于 $\ell=1$和 $\ell=0$处的源项。也可以像参考文献 [43]中那样，运用类似于第III节和附录A中的推理直接推导出来。递推关系（D16）比优先连接树和 RRT 的递推关系（式（9）和（24））更难分析。因此，我们先讨论一些特殊情况。

a. *Small and large ℓ*

近星形结构的比例 $n_{k,k-1}$ 满足

$$(2k-1)n_{k,k-1}=(k-2)n_{k-1,k-2} \tag{D31}$$

当 $k\geq 3$ 时。求解满足 $n_{2,1}=\frac{1}{6}$ 的 (D31)，得

$$n_{k,k-1}=\frac{(k-2)!}{2\,(2k-1)!!}\,,\qquad k\geq 2. \tag{D32}$$

因此，近星形结构（包括叶节点，$n_{1,0}=\frac{1}{2}$）的总比例为

$$\sum_{k\geq 1} n_{k,k-1}=\frac{3}{2}-\frac{\pi}{4}=0.714\,501\,836\,\ldots \tag{D33}$$

比例 $n_{k,k-2}$ 满足

$$\begin{aligned}(2k-3)n_{k,k-2} &= (k-3)n_{k-1,k-3}+(k-1)n_{k,k-1}\\ &= (k-3)n_{k-1,k-3}+\frac{(k-1)!}{2\,(2k-1)!!}\end{aligned}$$

当 $k\geq 4$ 时。该递推关系有显式解；$n_{k,k-3}$ 也类似，但表达式会变得越来越复杂。

在相反的极端情形下，当叶度较小时，可以将$n_{k,\,\ell}$ 通过受保护顶点的按度分层比例$n_{k,\,0}$ 来表示：

$$\begin{aligned}
n_{k,1} &= n_{k,0}, && (k\geq 2), && \text{(D34a)}\\
n_{k,2} &= \tfrac{3}{2}n_{k,0}, && (k\geq 3), && \text{(D34b)}\\
n_{k,3} &= \tfrac{5}{2}n_{k,0}-\tfrac{1}{3}n_{k-1,0}, && (k\geq 4), && \text{(D34c)}\\
n_{k,4} &= \tfrac{35}{8}n_{k,0}-\tfrac{4}{3}n_{k-1,0}, && (k\geq 5)。 && \text{(D34d)}
\end{aligned}$$

等等。第一个关系式 $n_{k,1}=n_{k,0}$ 可以求和，从而重新得到不寻常的关系式 $m_1=p$，但它是一个强得多的结论：对于度 k 的任意取值，受保护比例都等于叶度为1的比例。

b. *Exact joint distribution values from recurrence*

可以直接根据递推关系 (D16) 确定 n_k、ℓ 的精确值。$k\leq 6$ 时的 n_k、ℓ 值列于表 VI 中。为了针对选定的最大索引 k^* 高效地构造所有 $0\leq\ell<k\leq k^*$ 对应的 n_k、ℓ，我们利用以下事实：在公式 (D16) 中，n_k、ℓ 只依赖于 n_{k-1}、$\ell-1$、n_k、$\ell+1$ 和 ℓ。将 $n_{1,\,0}=\frac{1}{2}$ 以及 $n_{2,\,0}=n_{2,\,1}=\frac{1}{6}$ 视为已知量后，算法按 $k=3$、……、k^* 的升序计算 n_k、ℓ 中的各项，并且在每个 k 处，按降序遍历 ℓ 的取值（$\ell=k-1$、$k-2$、……、0），同时施加边界条件 $n_{k,\,k}=n_{k,\,-1}=0$。具体而言，计算顺序为 n_3、2、n_3、1、n_3、0、n_4、3、n_4、2、……、n_{k^*}、0。该顺序确保在计算 n_k、ℓ 时，n_{k-1}、$\ell-1$ 和 n_k、$\ell+1$ 均已计算完毕（或属于边界项）。

利用n_k、ℓ的值，精确的度分布n_k 可通过求和得到。见表VII中 n_k在 $k\leq 7$处的结果。 n_k 的值与比例 N_k/N 在由该模型生成的大型随机树中吻合良好；见图5。直观上，n_k 似乎与类似于式（D22）的拟合伸指数衰减相符。

k \ ℓ	0	1	2	3	4	5
1	$\frac{1}{2}$					
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$				
3	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{30}$			
4	$\frac{32}{4725}$	$\frac{32}{4725}$	$\frac{16}{1575}$	$\frac{1}{105}$		
5	$\frac{1384}{496125}$	$\frac{1384}{496125}$	$\frac{692}{165375}$	$\frac{52}{11025}$	$\frac{1}{315}$	
6	$\frac{777088}{573024375}$	$\frac{777088}{573024375}$	$\frac{388544}{191008125}$	$\frac{93992}{38201625}$	$\frac{2416}{1091475}$	$\frac{4}{3465}$

表 VI。数值 $n_{k\,\ell}$ $k=1$ 6 $\ell=0\ldots k-1$ $n_{k\,\ell}$ ……，以及，，。每个，均通过直接求解双指标递推关系方程（D16）（见第 D 4 b节）得出。

k	1	2	3	4	5	6	7
n_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{90}$	$\frac{157}{4725}$	$\frac{8759}{496125}$	$\frac{6059588}{573024375}$	$\frac{19626289636}{2867986996875}$

表 VII。度分布 n_k 对于 $k\leq 7$，由 $n_k=\sum_{\ell=0}^{k-1} n_{k,\,\ell}$，其中 $n_{k,\,\ell}$ 按照第 D4 b节精确计算。

c. *Bivariate generating function*

利用生成函数

$$g(y,z)=\sum_{0\leq\ell<k<\infty} y^k z^\ell n_{k,\ell}, \tag{D35}$$

我们将递推关系（D16）改写为

$$(1-2z+yz^2)\,\frac{\partial g}{\partial z}-g+\frac{y+y^2z}{2}=0. \tag{D36}$$

因子 $1-2z+yz^2$ 在该区间内为负

$$z_* < z < 1, \qquad z_* = \frac{1-\sqrt{1-y}}{y}. \tag{D37}$$

在该区域，解为

$$g = -\int_{z_*}^{z} dw\, \frac{y+y^2 w}{2(1-2w+yw^2)}\, e^{F(y,z)-F(y,w)}, \tag{D38}$$

其中我们简记

$$F(y,z) = \frac{1}{\sqrt{1-y}}\, \tanh^{-1}\left(\frac{1-yz}{\sqrt{1-y}}\right). \tag{D39}$$

度分布。取 $z=1$ 这一特例，我们得到

$$\sum_{k\geq 1} y^k n_k = -\frac{e^{F(y,1)}}{2}\int_{z_*}^{1} dw\, \frac{y+y^2 w}{1-2w+yw^2}\, e^{-F(y,w)}, \tag{D40}$$

with

$$e^{F(y,1)} = \exp\left[\frac{\tanh^{-1}\sqrt{1-y}}{\sqrt{1-y}}\right]. \tag{D41}$$

展开右端（D40），并求出度分布的显式通式，似乎是不可能的。

受保护度分布。我们回顾，$(n_{k,0})_{k\geq 1}$ 由 $g(y,0)$ 生成。因此取 $z=0$ 极限，式（D38），我们有

$$\sum_{k\geq 1} y^k n_{k,0} = \frac{e^{F(y,0)}}{2}\int_{0}^{z_*} dw\, \frac{y+y^2 w}{1-2w+yw^2}\, e^{-F(y,w)}, \tag{D42}$$

with

$$F(y,0) = \frac{1}{\sqrt{1-y}}\, \tanh^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-y}}\right). \tag{D43}$$

与式（D40）类似，求出系数 $n_{k,0}$（由式（D42））似乎难以处理。

d. *Descending moments of joint distribution*

人们还希望计算度分布的矩，以及涉及度分布和叶度分布的混合矩。如下文所示，这些矩可以通过递推关系求得。还可以推导出类似于叶度矩的通式（D26），其中度是固定的。

为确定这些矩，我们使用生成函数（3）），并利用生成函数的控制方程（D36）计算这些矩，从而避免使用难以处理的精确解（方程（D38））。计算依赖于以下恒等式

$$\langle k^{\underline{a}}\, \ell^{\underline{b}}\rangle = \partial_y^a \partial_z^b g|_{y=z=1},$$

对所有整数 a an . hen ≥ 0 b 这些恒等式与 (D24) 一致。注意，将 ∂_y 应用于方程 (D36)，并令 $y=z=1$ 即可得回 $\langle k\rangle = 2$。二阶下降矩为

$$\langle k(k-1)\rangle = 7, \quad \langle k\ell\rangle = 3, \quad \langle \ell(\ell-1)\rangle = 1. \tag{D44}$$

类似的计算可得三阶下降矩

$$\langle k^{\underline{3}}\rangle = 135, \quad \langle k^{\underline{2}}\,\ell\rangle = 45, \quad \langle k\,\ell^{\underline{2}}\rangle = 17, \quad \langle \ell^{\underline{3}}\rangle = 6 \tag{D45}$$

以及四次下降矩

$$\begin{aligned}
\langle k(k-1)(k-2)(k-3)\rangle &= \langle k^{\underline{4}}\rangle = 9048,\\
\langle k(k-1)(k-2)\ell\rangle &= \langle k^{\underline{3}}\,\ell\rangle = 2262,\\
\langle k(k-1)\ell(\ell-1)\rangle &= \langle k^{\underline{2}}\,\ell^{\underline{2}}\rangle = 664,\\
\langle k\ell(\ell-1)(\ell-2)\rangle &= \langle k\,\ell^{\underline{3}}\rangle = 216,\\
\langle \ell(\ell-1)(\ell-2)(\ell-3)\rangle &= \langle \ell^{\underline{4}}\rangle = 72.
\end{aligned} \tag{D46}$$

e. *Recurrences for descending moments*

将 ∂_z^b 应用于方程（D36），并令 $y=z=1$，即可得到一个递推关系。求解该递推关系，可恢复已知的矩族（D26）。为确定

$$\nu_b = \langle k\ell^{\underline{b}}\rangle = \langle k\,\ell\cdots(\ell-b+1)\rangle = \partial_y \partial_z^b g|_{y=z=1},$$

我们将 $\partial_y \partial_z^b$ 应用于方程（D36），令 $y=z=1$，从而得到一个非齐次递推关系

$$\nu_b = b(b-1)\nu_{b-1} + b(b-1)\mu_{b-1} + 2b\mu_b + \mu_{b+1}, \tag{D47}$$

对于 $b\geq 2$。回顾（D26），将（D47）化简为

$$\nu_b = b(b-1)\nu_{b-1} + \frac{(1+3b+b^2)(b-1)!b!}{2} \tag{D48}$$

对于 $b\geq 2$，我们应在“边界”条件 $\nu_1 = \langle k\ell\rangle = 3$ 下求解。其解为

$$\nu_b = \frac{(b^2+5b+3)(b-1)!(b+1)!}{6}. \tag{D49}$$

下面的矩族

$$\lambda_b = \langle k^{\underline{2}}\ell^{\underline{b}}\rangle = \langle k(k-1)\,\ell\cdots(\ell-b+1)\rangle = \partial_y^2 \partial_z^b g|_{y=z=1}$$

随后可以确定。类似于（D47），可得

$$\lambda_b = b(b-1)\lambda_{b-1} + 2b(b-1)\nu_{b-1} + 4b\nu_b + 2\nu_{b+1}. \tag{D50}$$

将此方程与（D49）结合可得

$$\lambda_b = b(b-1)\lambda_{b-1} + \frac{(b^4+12b^3+45b^2+60b+23)(b!)^2}{3},$$

在 $\lambda_1 = \langle k(k-1)\ell\rangle = 45$ 条件下求解，可得

$$\lambda_b = \frac{\Lambda(b)}{90}\,(b-1)!b!, \tag{D51}$$

其中，我们简写 $\Lambda(b)$ 表示该多项式

$$5b^6+87b^5+530b^4+1395b^3+1580b^2+633b-180.$$