arXiv:2602.01036v1 [math.PR] 1 Feb 2026

SU伯努利渗流中的超集中与混沌

VAN QUYET NGUYEN

摘要。 我们研究超临界伯努利渗流中的化学距离，其定义在 $\mathbb{Z}^d$上。近期，Dembin [Dem22]证明了化学距离的方差呈次线性，这一现象如今称为超集中。本文证明了这一现象与配置受到微小扰动时测地线呈现的混沌行为等价，从而在伯努利渗流背景下证实了 Chatterjee 关于异常涨落与混沌之间关系的一般原理。我们的方法依托于有效半径的一个动力学版本，并对 [CN25], 最初提出的概念加以改进，以衡量某条权重可能为无限的边所产生的共同影响。结合格动物理论中的方法，这一思路使我们能够根据原始测地线与扰动后测地线之间的重叠，量化各边的总共影响。

1. 引言

1.1. 模型与主要结果。伯努利渗流是描述流体在多孔介质中传播的一个著名模型。该模型由 Broadbent 和 Hammersley 在 1957 [BH57] 中提出，并已成为研究最为广泛的概率模型之一。设 $d \geq 2$，并令 $(\mathbb{Z}^d, \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d))$ 表示这样一个图，其中 $\mathbb{Z}^d$ 是整数格点的集合，而 $\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)$ 是 $\mathbb{Z}^d$ 中欧几里得范数下的最近邻点对集合。给定参数 $p \in [0,1]$，每条边 $e \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)$ 独立于其他边的状态，随机地以概率 p 被保留（开放），否则被删除（闭合）。渗流理论主要关注渗流图的连通分量（簇）的几何性质

$$\mathcal{G}_p := (\mathbb{Z}^d, \{e \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d) : e \text{ is open}\}),$$

由开放边构成的子图。该模型最重要的特征是一个简单的相变：存在一个非平凡的 临界密度 $p_c(d) \in (0,1)$，使得几乎必然存在唯一的无限开放簇$\mathcal{C}_\infty$，当 $p > p_c(d)$；而当 $p < p_c(d)$ 时，所有开放簇都是有限的。关于该主题的综述，可参见 [Gri89、DC18] 。在本文中，我们关注化学距离，即渗流图中的图距离，其中$p > p_c(d)$。

对于任意集合 A、B、$U \subset \mathbb{Z}^d$，我们定义

$$\mathrm{D}_U(A, B) := \inf\{|\gamma| : x \in A、\ y \in B、\ \gamma \text{ 是从 } x \text{ 到 } y \text{、位于 } U\}.$$ 内的一条开放最近邻路径

当 $U = \mathbb{Z}^d$ 时，我们将 $\mathrm{D}_{\mathbb{Z}^d}$ 简记为 D。我们注意到，只要两点不属于同一个开放簇，它们之间的化学距离就是无限的。为了解决这个问题，我们考虑如下正则化版本：对于每个 $z \in \mathbb{Z}^d$，记 $[z]$ 为 $\mathcal{C}_\infty$ 中距 z 最近的点（按 $\|\cdot\|_\infty$-距离衡量），若出现并列，则采用确定性破同分规则。这个点称为 z 的正则化点。然后，我们定义

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^d, \quad \tilde{\mathrm{D}}(x,y) := \mathrm{D}([x],[y]) = \inf\{|\gamma| : \gamma \text{ is an open nearest-neighbor path from } [x] \text{ to } [y]\}.$$

˜D 的一阶增长D 由 Garet 和 Marchand 描述 [GM04]：对于任意 $p > p_c(d)$，存在一个函数μ_p： $\mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ 使得，

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{\mathrm{D}}(0, \lfloor nx \rfloor)}{n} = \mu_p(x) \quad \text{a.e and in } L^1, \tag{1.1}$$

其中 $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示下取整函数。值 $\mu_p(x)$称为时间常数。此外，对于所有 $p_0 > p_c(d)$ [CD22, CNN24]，该时间常数关于 $p \in [p_0, 1]$ 是Lipschitz连续的。自然，下一个值得关注的问题˜是化学距离的涨落和偏差。自20世纪90年代以来，D的大偏差已得到深入研究，例如参见 [AP96, GM07, DN22]。至于涨落，Dembin 建立了目前关于化学距离方差的最佳上界（[Dem22, 定理 1.1]）：存在一个正常数C，使得

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{Z}^d, \quad \mathrm{Var}(\tilde{\mathrm{D}}(0, nx)) \leq C \frac{n}{\log n}. \tag{1.2}$$

V.Q. Nguyen：数学研究所，越南科学技术院，越南河内市 Cau Giay 区 Hoang Quoc Viet 街 18 号，nvquyet@math.ac.vn。

这一现象被 Chatterjee称为超集中 Cha14]。粗略而言，超集中指的是随机对象表现出的集中程度显著强于经典集中技术所预测的情形。事实上，经典不等式（如 Efron–Stein 不等式或 Poincaré估计）通常只能给出方差量级为线性（因而并非最优）的上界。超集中现象的一些典型例子见 [BKS03，DHS15，Cha23，DG24]。在物理学文献中，超集中通常通过涨落指数来研究，而混沌的存在也已被研究多年，但很大程度上停留在启发式层面。例如，Fisher 和 Huse 的开创性研究 [FH91], Mézard[Méz90], Zhang [Zha87] 表明，在随机环境中的定向聚合物背景下，“超集中意味着混沌”。自旋玻璃模型领域中，Bray 和 Moore [BM87] 以及 McKay、Berger 和 Kirkpatrick [MBK82]等人的研究也是这一研究方向上其他有影响力且广为引用的贡献。

混沌的首个严格数学理论由 Chatterjee 提出 [Cha08，Cha09，Cha14]，他指出，在某些高斯无序系统中，超集中与混沌密切相关。在这一框架下，如果对能量景观施加微小扰动就会大幅改变系统的基态，那么便称该系统具有混沌性。受这项工作的启发，Ganguly 和 Hammond [GH24] 在布朗最后通路渗流这一可解模型中的典型例子里，确立了一个尖锐相变，并精确指出从稳定性到混沌转变的临界点。然而，这些论文中的分析方法本质上依赖于高斯情形。后来，Bordenave、Lugosi、Zhivotovskiy [BLZ20]在 Wigner矩阵的最大特征向量中，以及 Ahlberg、Deijfen、Sfragara [ADS23]在满足边权重有限二阶矩假设的首次通过渗流中，将这一联系推广到了高斯环境之外。尽管证明超集中的常见方法依赖于超压缩不等式，但揭示混沌却为大幅改善非可解模型中的方差上界提供了一条出人意料的途径；例如，参见 [BSS]。本文的主要目的是展示伯努利渗流中化学距离也存在类似的联系。因此，结合（1.2），我们认为，伯努利渗流中确实存在这种有趣的混沌现象。

我们将伯努 利渗流视为首次通过渗流，其独立同分布权重为 $(\omega_e)_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}$ 定义为 s

$$\omega_e = \begin{cases} 1, & \text{with probability } p; \\ \infty, & \text{with probability } 1-p. \end{cases}$$

我们强调，在这种首次通过渗流中，有限二阶矩假设不再成立。对每个 $e \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)$，令 ω_e'为 ω_e 的一个独立副本。令 $(U_e)_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}$ 为一组独立随机变量，且各变量均在区间 $[0,1]$上均匀分布。对于 $t \in [0,1]$，我们定义一族动态权重 $(\omega_e(t))_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}$ 如下

$$\omega_e(t) := \begin{cases} \omega_e & \text{if } U_e \geq t; \\ \omega_e' & \text{if } U_e < t, \end{cases}$$

也就是说， $\omega_e(t)$ 是通过以概率 t对 ω_e 进行重新抽样得到的。注意，对于所有 $t \geq 0$， $\omega_e(t)$ 的分布与 ω_e 相同，其中$\mathbb{P}(\omega_e(t) = 1) = p$ 。令 $\mathcal{C}_\infty^t$ 表示 t-噪声环境中的唯一无限簇。我们将相对于 t-噪声环境 $(\omega_e(t))_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}$ 定义化学距离如下

$$\tilde{\mathrm{D}}^t(x,y) := \mathrm{D}^t([x]_t,[y]_t),$$

其中，对所有的 $z \in \mathbb{Z}^d$，正则化点 $[z]_t$ 表示在 $\mathcal{C}_\infty^t$ 中与 z 距离（按 $\|\cdot\|_\infty$-距离）最近的点；若存在多个这样的点，则按确定性破同分规则选取。令 $\tilde{\pi}^t(0,\ nx)$ 为 ˜$\mathrm{D}^t(0,\ nx)$ 的测地线。若测地线有多种选择，则将它们的交集定义为 $\tilde{\pi}^t(0,\ nx)$。为方便起见，我们将 $\tilde{\pi}^0(0,\ nx)$ 简写为 $\tilde{\pi}(0,\ nx)$。令 $\vec{p}_c(d)$ 为 $\mathbb{Z}^d$ 上的有向键渗流临界点，并注意到 $p_c(d) <\vec{p}_c(d)$。从现在起，我们假设

$$p_c(d) < p < \vec{p}_c(d), \tag{BK}$$

这称为 Berg–Kesten 条件。在此假设下，根据命题 2.11，存在 $c \in (0,\ 1)$使得

$$cn \leq \mathbb{E}[|\tilde{\pi}(0,nx)|] \leq c^{-1}n.$$

˜若存在一个序列 $t_n \to 0$ （当 $n \to \infty$ 时），使得下式成立，则称 $\mathrm{D}(0,\ nx)$ 的测地线是混沌的

$$\mathbb{E}[|\tilde{\pi}(0,nx) \cap \tilde{\pi}^{t_n}(0,nx)|] = o(n).$$

粗略地说，这意味着对边状态中一个很小的 t 比例进行重新抽样后，属于原测地线的边里只有一个趋于零的比例仍保留在重新抽样后构型的测地线中。

我们的第一个结果建立了化学距离的方差与两条测地线之间重叠的动力学行为之间的联系。

定理 1.1。 存在一个正的常数 C，使得对于所有 $n \geq 1$ 和 $x \in \mathbb{Z}^d$,

$$\frac{1}{C}\int_0^1 \mathbb{E}[|\tilde{\pi}(0,nx) \cap \tilde{\pi}^t(0,nx)|]dt - C(\log n)^{d+8} \leq \mathrm{Var}(\tilde{\mathrm{D}}(0,nx)), \tag{1.3}$$

并且对于所有 $\alpha > 0$,

$$\mathrm{Var}(\tilde{\mathrm{D}}(0,nx)) \leq C\alpha^2 \int_0^1 \mathbb{E}[|\tilde{\pi}(0,nx) \cap \tilde{\pi}^t(0,nx)|]dt + Ce^{-\alpha/C}n + C(\log n)^{2d+6}. \tag{1.4}$$

因此，当 $n \to \infty$ 时，我们得到

$$\mathrm{Var}(\tilde{\mathrm{D}}(0,nx)) = o(n) \iff \exists t_n \to 0,\ \mathbb{E}[|\tilde{\pi}(0,nx) \cap \tilde{\pi}^{t_n}(0,nx)|] = o(n).$$

对于任意 $t \geq 0$，定义

$$\mathrm{Corr}(\tilde{\mathrm{D}}(0,nx), \tilde{\mathrm{D}}^t(0,nx)) := \frac{\mathrm{Cov}(\tilde{\mathrm{D}}(0,nx), \tilde{\mathrm{D}}^t(0,nx))}{\mathrm{Var}(\tilde{\mathrm{D}}(0,nx))}.$$

下一个结果刻画了化学距离的稳定机制和混沌机制 .

定理 1.2。 设 $\hat{t}_n := \mathrm{Var}(\mathrm{D}(0,nx))\ n$。那么存在一个正常数 C，使得对于所有 $0 < \beta < 1/\hat{t}_n$ 和$x \in \mathbb{Z}^d$,

(i)（稳定机制）如果 $\frac{t_n}{\hat{t}_n} \leq \beta$，则

$$\mathrm{Corr}(\tilde{\mathrm{D}}(0,nx), \tilde{\mathrm{D}}^{t_n}(0,nx)) \geq 1 - C\beta.$$

(ii)（混沌机制）如果 $\frac{t_n}{\hat{t}_n} \geq \beta$，则

$$\mathbb{E}[|\tilde{\pi}(0,nx) \cap \tilde{\pi}^{t_n}(0,nx)|] \leq C\left(\frac{n}{\beta} + (\log n)^{d+8}\right).$$

因此，如果 $t_n \to 0$ 且 $t_n \log n \to \infty$ 当 $n \to \infty$ 时，则

$$\mathbb{E}[|\tilde{\pi}(0,nx) \cap \tilde{\pi}^{t_n}(0,nx)|] = o(n).$$

上述相变在临界序列 $\hat{t}_n$ 附近呈现出一个清晰的窗口。在混沌机制中，如果 $\hat{t}_n \gg t_n$，则有

$$\mathbb{E}[|\tilde{\pi}(0,nx) \cap \tilde{\pi}^{t_n}(0,nx)|] = o(n).$$

在稳定机制中，而如果 $t_n \ll \hat{t}_n$，则

$$\mathrm{Corr}(\tilde{\mathrm{D}}(0,nx), \tilde{\mathrm{D}}^{t_n}(0,nx)) \geq 1 - o(1).$$

~在这种机制下，我们称化学距离 D(0，nx) 是噪声稳定的。类比首次通过渗流，~我们预期，在混沌机制下，化学距离 D(0，nx) 是噪声敏感 的（这是一个相反的概念），即对于 $\hat{t}_n \gg t_n$,

$$\mathrm{Corr}(\tilde{\mathrm{D}}(0,nx), \tilde{\mathrm{D}}^{t_n}(0,nx)) = o(1). \tag{1.5}$$

噪声敏感性是在布尔函数的背景下，由 Benjamini、Kalai 和 Schramm 在开创性工作中提出的 [BKS99], ，它描述了这样一种现象：在两个高度相关的输入下，输出渐近地变得相互独立。从谱理论的角度来看，噪声敏感性和超集中对应于傅里叶质量集中在谱的高端。因此，这种联系为超集中与混沌之间的等价性提供了证据。每当（1.5）成立时，就会得到更强的转变，如 [GH24、BLZ20], 所示，其含义是稳定机制和混沌机制都涉及同一个对象（化学距离）。然而，对于首次通过渗流或超临界伯努利渗流等增长模型，目前尚未证明这种噪声敏感性；在这些模型中，基态取实数值，而非布尔值。

注 1.3. 在定理 1.1 的证明中，假设 (BK) 仅用于获得动力重叠的一个一致下界（见 (1.19)）。这个下界使我们能够消除方差上界中的某些衰减误差项。如果我们能够建立动力重叠的一个足够精确的下界，那么关系式 (1.3) 和 (1.4) 无需多对数误差项仍然成立。

1.2. 证明概要。 固定 $M := M(n) = \lfloor (\log n)^2 \rfloor$。我们考虑首次截断通道渗流模型，其中边权重族 $\tau := (\tau_e)_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}$ 是原始权重 ω 的 M-截断版本。换言之，$(\tau_e)_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}$ 是服从如下分布的独立同分布随机变量

$$F_M := p\delta_1 + (1-p)\delta_M,$$

其中，δ_a 是集中于 a处的狄拉克测度。对于任意集合 $A \subset \mathbb{Z}^d$，我们将首次截断通行时间记为

$$\mathrm{T}_{A,M}(x,y) := \inf\left\{\sum_{e\in\gamma}\tau_e : \gamma \text{ is a self-avoiding path from } x \text{ to } y \text{ inside } A\right\}, \tag{1.6}$$

按照约定，当 $A = \mathbb{Z}^d$时，我们简记为 T_M。我们还定义

$$\tilde{\mathrm{T}}_M(x,y) := \mathrm{T}_M([x],[y]).$$

对于 $t\in[0,1]$，我们定义一族 t-噪声环境 $\tau(t) = (\tau_e(t))_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}$，作为边权重 $\omega(t)$的 M-截断版本，即对每个 $e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)$,

$$\tau_e(t) = \mathbb{I}(U_e \geq t)\tau_e + \mathbb{I}(U_e < t)\tau'_e,$$

其中，$\tau' := (\tau'_e)_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}$是 ω'的 M-截断版本。我们还将 $\tau(t)$噪声环境中的首次截断通行时间记为 T^t_M，并且

$$\tilde{\mathrm{T}}^t_M(x,y) := \mathrm{T}^t_M([x]_t,[y]_t),$$

回顾一下，对于所有 $z\in\mathbb{Z}^d$，$[z]_t$ 表示 z在 $\mathcal{C}^t_\infty$中的最近点。令 $\tilde{\pi}^t_M(0,nx)$为$\tilde{\mathrm{T}}^t_M(0,nx)$的测地线，约定 $\tilde{\pi}_M(0,nx) := \tilde{\pi}^0_M(0,nx)$。若测地线不唯一，则定义 $\tilde{\pi}^t_M(0,nx)$为所有此类测地线的交集。我们还用 $\mathbb{G}^t_M([x]_t,[y]_t)$表示 $\tilde{\mathrm{T}}^t_M(x,y)$的所有测地线构成的集合。

我们的证明基于首次截断通行时间 $\tilde{\mathrm{T}}_M$ 在 t 中一致地逼近 $\tilde{\mathrm{T}}$ 时间。首先，我们逼近化学距离 $\tilde{\mathrm{T}}$。接下来，我们通过将方差表示为相应各边的动力学协同影响，推导出 T_M 的动力学方差不等式。该表示使我们能够将问题归结为估计单条边关于 T_M 在时刻 t 的共同影响。为共同影响以及化学距离与首次截断通行时间之间的差异同时得到上界，其主要想法是利用有效半径的动力学版本来控制重新抽样边权所产生的影响。最后，我们应用相依环境中的格动物理论，来处理 $\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)$ 中所有边的总重新抽样代价。现在我们更详细地描述这一提纲。

步骤 1：**用首次截断通行时间逼近化学距离**。我们将如下控制测地线之间重叠的差异：

$$\forall t\geq 0,\quad \mathbb{E}[||\tilde{\pi}(0,nx)\cap\tilde{\pi}^t(0,nx)| - |\tilde{\pi}_M(0,nx)\cap\tilde{\pi}^t_M(0,nx)||] = \mathcal{O}(\exp(-M^{3/4})). \tag{1.7}$$

接下来，我们旨在证明

$$\forall t\geq 0,\quad |\operatorname{Var}(\tilde{\mathrm{D}}^t(0,nx)) - \operatorname{Var}(\tilde{\mathrm{T}}^t_M(0,nx))| = \mathcal{O}(\exp(-M^{3/4})). \tag{1.8}$$

设 $\omega^1 := (\omega^1_e)_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}$ 和 $\omega^2 := (\omega^2_e)_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}$ 是 ω,ω' 的两个独立副本。设 $\tau^1 := (\tau^1_e)_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}$ 和$\tau^2 := (\tau^2_e)_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}$ 分别是 ω^1 和 ω^2 的 M- 截断版本。那么，τ^1 和 τ^2 是 τ,τ' 的两个独立$\tilde{}$副本。我们将边 e 关于 $\mathrm{D}(0,nx)$ 和 $\mathrm{T}_M(0,nx)$ 的离散导数定义为

$$\begin{aligned}
\nabla_e^{\omega_e,\omega_e^1}\tilde{\mathrm{D}}(0,nx) &:= \tilde{\mathrm{D}}(0,nx)\circ\sigma_e^{\omega_e}(\omega) - \tilde{\mathrm{D}}(0,nx)\circ\sigma_e^{\omega_e^1}(\omega),\\
\nabla_e^{\omega_e,\omega_e^2}\tilde{\mathrm{D}}^t(0,nx) &:= \tilde{\mathrm{D}}^t(0,nx)\circ\sigma_e^{\omega_e}(\omega(t)) - \tilde{\mathrm{D}}^t(0,nx)\circ\sigma_e^{\omega_e^2}(\omega(t));\\
\nabla_e^{\tau_e,\tau_e^1}\tilde{\mathrm{T}}_M(0,nx) &:= \tilde{\mathrm{T}}_M(0,nx)\circ\sigma_e^{\tau_e}(\tau) - \tilde{\mathrm{T}}_M(0,nx)\circ\sigma_e^{\tau_e^1}(\tau),\\
\nabla_e^{\tau_e,\tau_e^2}\tilde{\mathrm{T}}^t_M(0,nx) &:= \tilde{\mathrm{T}}^t_M(0,nx)\circ\sigma_e^{\tau_e}(\tau(t)) - \tilde{\mathrm{T}}^t_M(0,nx)\circ\sigma_e^{\tau_e^2}(\tau(t)),
\end{aligned}$$

其中，对于任意向量 $X := (X_e)_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}$，算子 $\sigma^a_e(X)$ 表示将坐标 X_e 替换为 a 后得到的配置 X。接下来，我们定义相应的协导数：

$$\Delta_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t) := \nabla_e^{\omega_e,\omega_e^1}\tilde{\mathrm{D}}(0,nx)\nabla_e^{\omega_e,\omega_e^2}\tilde{\mathrm{D}}^t(0,nx),\quad \Delta_e(\tilde{\mathrm{T}}_M,\tilde{\mathrm{T}}^t_M) := \nabla_e^{\tau_e,\tau_e^1}\tilde{\mathrm{T}}_M(0,nx)\nabla_e^{\tau_e,\tau_e^2}\tilde{\mathrm{T}}^t_M(0,nx).$$

对这些量取期望，分别得到边 e 关于化学距离和时刻 t 的首次截断通行时间的协同影响。对于所有 $t \geq 0$，我们旨在估计边的相应总共影响之差：

$$\left| \sum_{e \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{E}\left[\Delta_e(\tilde{\mathrm{D}}, \tilde{\mathrm{D}}^t)\right] - \sum_{e \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{E}\left[\Delta_e(\tilde{\mathrm{T}}_M, \tilde{\mathrm{T}}_M^t)\right] \right| = \mathcal{O}(\exp(-M^{3/4})). \tag{1.9}$$

通常，可以通过证明 $\tilde{\mathrm{D}}^t(0, nx)$ 和 $\tilde{\mathrm{T}}_M^t(0, nx)$ 以压倒性概率拥有相同的测地线来确立这些差异。为此，我们在第2.2小节引入有效动态半径 $(R^0_{,e}{}^t)_{e \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}$ 的概念。粗略地说，对于一条位于 $\tilde{\mathrm{T}}_M^t(0, nx)$ 测地线上的边 e，数量 $R^0_{,e}{}^t$ 控制着围绕 e 的开放绕行路径长度，从而量化了对 $\tau_e(t)$ 进行重新抽样对 $\tilde{\mathrm{T}}_M^t(0, nx)$ 的影响。此外，这些有效动态半径还具有两个有用的性质（见命题 2.6）：

(a) 首先，它们具有相对局部的依赖性，即存在一个正的常数 $C_* = C_*(p, d)$，使得事件 $\{R_e^{0,t} \leq \ell\}$ 仅取决于盒子 $\Lambda_{C_*\ell}(e)$ 内边的权重。(b) 其次，它们满足指数小的尾概率：$\mathbb{P}(R^0_{,e}{}^t \geq \ell) \leq \exp(-c\ell)$，对所有 $1 \leq \ell \leq \exp(cM)$ 均成立。

在事件 $\{\forall \gamma \in \mathbb{G}_M^t([0]_t, [nx]_t)\ \forall e \in \gamma\colon\ R^0_{,e}{}^t \leq M^{3/4}\}$ 发生时（该事件以压倒性概率成立），我们推得，任意 γ of $\tilde{\mathrm{T}}_M^t(0, nx)$ 的测地线都是开放的（即仅由权重为1的边组成），因此也是 $\tilde{\mathrm{D}}^t(0, nx)$ 的测地线。

步骤 2：截断通行时间的动态方差不等式。我们的目标是证明以下：

定理 1.4。存在某个常数 $C > 0$，使得对于所有 $n > 1$ 和 $x \in \mathbb{Z}^d$,

$$\frac{1}{C} \int_0^1 \mathbb{E}[|\tilde{\pi}_M(0, nx) \cap \tilde{\pi}_M^t(0, nx)|]dt - C(\log n)^{d+8} \leq \mathrm{Var}(\tilde{\mathrm{T}}_M(0, nx)), \tag{1.10}$$

并且对于所有 $\alpha > 0$,

$$\mathrm{Var}(\tilde{\mathrm{T}}_M(0, nx)) \leq C\alpha^2 \int_0^1 \mathbb{E}[|\tilde{\pi}_M(0, nx) \cap \tilde{\pi}_M^t(0, nx)|]dt + C\exp(-\alpha/C)n + C(\log n)^{2d+6}, \tag{1.11}$$

其中，函数 $\mathbb{E}[|\tilde{\pi}_M(0, nx) \cap \tilde{\pi}_M^t(0, nx)|]$ 关于 t 单调不增。

我们的证明受到 [ADS23]中关于边权分布具有有限二阶矩的首次通过渗流的协方差表示的启发。高斯情形下的一种相关表述，是 Chatterjee 在首次严格建立超集中与混沌之间联系时的核心工具 [Cha14]。类似的布尔函数协方差公式，在研究临界渗流的噪声敏感性时也发挥着重要作用 [TV23]。在本研究中，我们对这一表示加以改造，以分析边权分布具有无界支撑（允许取无限值）时的协同影响。更准确地说，我们将时刻 t 的动态协方差与总共影响联系起来，如下所示。对每个 $t \in [0, 1]$，都有

$$\mathrm{Cov}(\tilde{\mathrm{D}}(0, nx), \tilde{\mathrm{D}}^t(0, nx)) = \int_t^1 \sum_{e \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{E}\left[\Delta_e(\tilde{\mathrm{D}}, \tilde{\mathrm{D}}^s)\right] ds. \tag{1.12}$$

因此，我们得到

$$\mathbb{E}[(\tilde{\mathrm{D}}(0, nx) - \tilde{\mathrm{D}}^t(0, nx))^2] = 2\int_0^t \sum_{e \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{E}\left[\Delta_e(\tilde{\mathrm{D}}, \tilde{\mathrm{D}}^s)\right] ds. \tag{1.13}$$

类似地,

$$\mathrm{Cov}(\tilde{\mathrm{T}}_M(0, nx), \tilde{\mathrm{T}}_M^t(0, nx)) = \int_t^1 \sum_{e \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{E}\left[\Delta_e(\tilde{\mathrm{T}}_M, \tilde{\mathrm{T}}_M^s)\right] ds, \tag{1.14}$$

通过简单计算，我们可以将其改写为

$$\mathbb{E}\left[\Delta_e(\tilde{\mathrm{T}}_M, \tilde{\mathrm{T}}_M^t)\right] = p(1-p)\mathbb{E}\left[\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M, \tilde{\mathrm{T}}_M^t)\right], \quad \mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M, \tilde{\mathrm{T}}_M^t) := \nabla_e^{M,1}\tilde{\mathrm{T}}_M(0, nx)\nabla_e^{M,1}\tilde{\mathrm{T}}_M^t(0, nx). \tag{1.15}$$

定理1.4 可由（1.14）和（1.15）以及以下关于总共影响的上下界推出：存在一个常数 $C > 0$，使得对所有 $t \geq 0$,

$$\sum_{e \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{E}\left[\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M, \tilde{\mathrm{T}}_M^t)\right] \geq \frac{1}{C}\mathbb{E}[|\tilde{\pi}_M(0, nx) \cap \tilde{\pi}_M^t(0, nx)|] - C(\log n)^{d+8}, \tag{1.16}$$

and

$$\forall \alpha>0,\quad \sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}\mathbb{E}\left[\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M,\tilde{\mathrm{T}}_M^t)\right]\le C\alpha^2\mathbb{E}\left[|\tilde\pi_M(0,nx)\cap\tilde\pi_M^t(0,nx)|\right]+C\exp(-\alpha/C)n+C(\log n)^{2d+6}. \tag{1.17}$$

下界（1.16）较为直接，它源于一个关键观察： $\tilde{\mathrm{T}}_M^t(0,nx)$ 只取整数值。对于上界（1.17），在正则化点 $[0]$, $[nx]$ 和 $[0]_t$, $[nx]_t$ 在闭合边 e时保持不变，且 e 不接近这些点中任何一个的事件上，借助有效动态半径这一工具，我们可以推出

$$0\le \mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M,\tilde{\mathrm{T}}_M^t)\mathbb{I}(\omega_e=\omega_e(t)=1)\le(\hat R_e^{0,t})^2\mathbb{I}(e\in\tilde\pi_M(0,nx)\cap\tilde\pi_M^t(0,nx)),$$

其中

$$\hat R_e^{0,t}:=C_*R_e^{0,t}\wedge M.$$

因此，我们可以将时刻 t 的总共影响上界估计为

$$\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}\mathbb{E}\left[\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M,\tilde{\mathrm{T}}_M^t)\right]\le C\mathbb{E}\left[\sum_{e\in\tilde\pi_M(0,nx)\cap\tilde\pi_M^t(0,nx)}(\hat R_e^{0,t})^2\right]+C(\log n)^{2d+6}. \tag{1.18}$$

我们当前的目标是估计边重采样的总成本，或测地线重叠上的有效动态半径之和（式（1.18）右侧）。利用有效动态半径的性质 (a) 和 (b)，应用**格动物理论**，可得

$$\forall\alpha>0,\quad \mathbb{E}\left[\sum_{e\in\tilde\pi_M(0,nx)\cap\tilde\pi_M^t(0,nx)}(\hat R_e^{0,t})^2\right]\le C\alpha^2\mathbb{E}[|\tilde\pi_M(0,nx)\cap\tilde\pi_M^t(0,nx)|]+C\exp(-\alpha/C)n.$$

1.3. **通过定理1.1 和1.2 以及定理1.4的证明。**

定理*1.1*的证明。对于 (i)，利用定理1.4 以及 (1.8)、(1.7)，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\tilde{\mathrm{D}}(0,nx))&\ge\mathrm{Var}(\tilde{\mathrm{T}}_M(0,nx))-\mathcal{O}(\exp(-M^{3/4}))\\&\ge c\int_0^1\mathbb{E}[|\tilde\pi_M(0,nx)\cap\tilde\pi_M^t(0,nx)|]dt-\mathcal{O}((\log n)^{d+8})\\&\ge c\int_0^1\mathbb{E}[|\tilde\pi(0,nx)\cap\tilde\pi^t(0,nx)|]dt-\mathcal{O}((\log n)^{d+8}),\end{aligned}$$

对于某个常数 $c>0$。对于 (ii)，由定理1.4 以及 (1.8)、(1.7) 可知，存在一个常数 $C>0$使得对于所有 $\alpha>0$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\tilde{\mathrm{D}}(0,nx))&\le\mathrm{Var}(\tilde{\mathrm{T}}_M(0,nx))+\mathcal{O}(\exp(-M^{3/4}))\\&\le C\alpha^2\int_0^1\mathbb{E}[|\tilde\pi_M(0,nx)\cap\tilde\pi_M^t(0,nx)|]dt+C\exp(-\alpha/C)n+C(\log n)^{2d+6}\\&\le C\alpha^2\int_0^1\mathbb{E}[|\tilde\pi(0,nx)\cap\tilde\pi^t(0,nx)|]dt+C\exp(-\alpha/C)n+C(\log n)^{2d+6}+\alpha^2\mathcal{O}(\exp(-M^{3/4})).\end{aligned}$$

注意， $\mathbb{E}[|\tilde\pi(0,nx)\cap\tilde\pi^t(0,nx)|]=\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}\mathbb{E}[\mathbb{I}(e\in\tilde\pi(0,nx))\mathbb{I}(e\in\tilde\pi^t(0,nx))]$。将引理 A.1 应用于 $f=\mathbb{I}(e\in\tilde\pi(0,nx))$，可得 $\mathbb{E}[|\tilde\pi(0,nx)\cap\tilde\pi^t(0,nx)|]$ 关于 t 单调不增。由命题 2.11，存在常数c'、$C'>0$，使得对于所有 $t\ge0$,

$$\mathbb{E}[|\tilde\pi(0,nx)\cap\tilde\pi^t(0,nx)|]\ge\mathbb{E}[|\tilde\pi(0,nx)\cap\tilde\pi^1(0,nx)|]\ge\sum\mathbb{P}(e\in\tilde\pi(0,nx)\ e\in\tilde\pi^1(0,nx))^{e\in\Lambda_{C'n}}$$

$$\begin{aligned}&=\sum_{e\in\Lambda_{C'n}}(\mathbb{P}(e\in\tilde\pi(0,nx)))^2\ge\frac{1}{|\Lambda_{C'n}|}\left(\sum_{e\in\Lambda_{C'n}}\mathbb{P}(e\in\tilde\pi(0,nx))\right)^2\\&\ge\frac{1}{|\Lambda_{C'n}|}\left(\mathbb{E}\left[\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}\mathbb{I}(e\in\tilde\pi(0,nx))\mathbb{I}(\tilde\pi(0,nx)\subset\Lambda_{C'n})\right]\right)^2\\&\ge\frac{1}{|\Lambda_{C'n}|}(\mathbb{E}[|\tilde\pi(0,nx)|\mathbb{I}(\tilde\pi(0,nx)\subset\Lambda_{C'n})])^2\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{|\Lambda_{C'n}|}(\mathbb{E}[|\tilde{\pi}(0,nx)|] - \mathbb{E}[|\tilde{\pi}(0,nx)|\mathbb{I}(\tilde{\pi}(0,nx) \not\subset \Lambda_{C'n})])^2$$
$$\geq c'n^{2-d}, \tag{1.19}$$

其中，最后一个不等式用到了

$$\mathbb{E}[|\tilde{\pi}(0,nx)|\mathbb{I}(\tilde{\pi}(0,nx) \not\subset \Lambda_{C'n})] \leq (\mathbb{E}[|\tilde{\pi}(0,nx)|^2]\mathbb{P}(\tilde{\pi}(0,nx) \not\subset \Lambda_{C'n}))^{1/2} = o(1),$$

如引理 2.1、2.4 所示。因此，

$$\mathrm{Var}(\tilde{\mathrm{D}}(0,nx)) \leq 2C\alpha^2 \int_0^1 \mathbb{E}[|\tilde{\pi}(0,nx) \cap \tilde{\pi}^t(0,nx)|]dt + C\exp(-\alpha/C)n + C(\log n)^{2d+6},$$

正如所需。 □

定理 *1.2* 的证明。 对于稳定机制，由（1.9）、（1.13）、（1.15）、（1.17）可知，对于 n 足够大

$$\mathbb{E}\Big[(\tilde{\mathrm{D}}(0,nx) - \tilde{\mathrm{D}}^t(0,nx))^2\Big] \overset{(1.13)}{=} 2\int_0^t \sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{E}\left[\Delta_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^s)\right] ds$$
$$\overset{(1.9)}{\leq} 2\int_0^t \sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{E}\left[\Delta_e(\tilde{\mathrm{T}}_M\tilde{\mathrm{T}}^s_M)\right] ds + t\mathcal{O}(\exp(-M^{3/4}))$$
$$\overset{(1.15),(1.17)}{\leq} 2C\alpha^2\int_0^t \mathbb{E}[|\tilde{\pi}_M(0,nx) \cap \tilde{\pi}^s_M(0,nx)|]ds + 2C\exp(-\alpha/C)tn + 2Ct(\log n)^{2d+6} + t\mathcal{O}(\exp(-M^{3/4}))$$
$$\leq C'tn, \tag{1.20}$$

对于某个常数 $C' > 0$。 ˜这里，最后一行用到了 $\mathbb{E}[|\tilde{\pi}_M(0,\ nx)|] \leq \mathbb{E}[\mathrm{T}_M(0,\ nx)] = \mathcal{O}(n)$。因此 e,

$$\mathrm{Corr}(\tilde{\mathrm{D}}(0,nx),\tilde{\mathrm{D}}^t(0,nx)) = \frac{\mathrm{Cov}(\tilde{\mathrm{D}}(0,nx),\tilde{\mathrm{D}}^t(0,nx))}{\mathrm{Var}(\tilde{\mathrm{D}}(0,nx))} = 1 - \frac{\mathbb{E}[(\tilde{\mathrm{D}}(0,nx) - \tilde{\mathrm{D}}^t(0,nx))^2]}{2\,\mathrm{Var}(\tilde{\mathrm{D}}(0,nx))}$$
$$\geq 1 - \frac{C'nt}{\mathrm{Var}(\tilde{\mathrm{D}}(0,nx))} \geq 1 - C'\beta, \tag{1.21}$$

对任意满足 $t := t_n$ 的序列 $^{t_n}_{\hat{t}_n} \leq \beta$，均成立。接下来，我们证明当 t较大时处于混沌机制。由（1.7）、（1.9）、（1.12）、（1.15）、（1.16），可得

$$\mathrm{Var}(\tilde{\mathrm{D}}(0,nx)) \overset{(1.12)}{=} \int_0^1 \sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{E}\left[\Delta_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t)\right] dt \overset{(1.9)}{\geq} \int_0^t \sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{E}\left[\Delta_e(\tilde{\mathrm{T}},\tilde{\mathrm{T}}^s_M)\right] ds - t\mathcal{O}(\exp(-M^{3/4}))$$
$$\overset{(1.15)}{=} p(1-p)\int_0^t \sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{E}\left[\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M,\tilde{\mathrm{T}}^s_M)\right] ds - t\mathcal{O}(\exp(-M^{3/4}))$$
$$\overset{(1.16)}{\geq} c\int_0^t \mathbb{E}[|\tilde{\pi}_M(0,nx) \cap \tilde{\pi}^s_M(0,nx)|]ds - t\mathcal{O}((\log n)^{d+8})$$
$$\overset{(1.7)}{\geq} c\int_0^t \mathbb{E}[|\tilde{\pi}(0,nx) \cap \tilde{\pi}^s(0,nx)|]ds - t\mathcal{O}((\log n)^{d+8})$$
$$\geq ct\mathbb{E}[|\tilde{\pi}(0,nx) \cap \tilde{\pi}^t(0,nx)|] - t\mathcal{O}((\log n)^{d+8}).$$

这意味着存在一个常数 $c > 0$，使得

$$\mathbb{E}[|\tilde{\pi}(0,nx) \cap \tilde{\pi}^t(0,nx)|] \leq c^{-1}(\mathrm{Var}(\tilde{\mathrm{D}}(0,nx))/t + (\log n)^{d+8}) \leq c^{-1}(n/\beta + (\log n)^{d+8}),$$

对任意满足 $^{t_n}_{\hat{t}_n} \geq \beta$ 的序列 $t{:=}\ t_n$，均成立。 □

1.4. **文章结构与若干记号。** 本文组织如下。第 2 节介绍证明所需的主要内容。第 3 节和 4 节利用第 2 节中准备的内容，分别证明步骤 1 和步骤 2。在附录中，我们给出协方差的动力学公式以及测地线相交下界的证明。本节最后介绍全文将使用的一些记号。

- 整数区间。给定一个整数 $\ell \geq 1$，我们记作 $[\ell] := \{1,2,\ldots,\ell\}$。
- 度量。我们分别用 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_2$ 表示 l_1, l_∞, l_2 范数。

• 盒子及其边界。设 $x \in \mathbb{Z}^d$ 与 $\ell > 0$，我们将用 $\Lambda_\ell(x) := x + [-\ell, \ell]^d \cap \mathbb{Z}^d$ 表示以 $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$ 为中心、半径为 ℓ 的盒子。为方便起见，我们将 $\Lambda_\ell(0)$简记为 $\Lambda_\ell = [-\ell, \ell]^d$。我们将 $\Lambda_\ell(x)$的边界定义为 $\partial\Lambda_\ell(x) := \Lambda_\ell(x) \setminus \Lambda_{\ell-1}(x)$。

• $\mathbb{Z}^d$-路径和 $\mathbb{Z}^d$-路径集合。对于任意 $\ell \geq 1$，我们称序列 $\gamma = (v_0、\dots\dots、v_\ell)$ 为一条 $\mathbb{Z}^d$-路径，若对所有$i \in [\ell]$, $\|v_i - v_{i-1}\|_1 = 1$均成立。γ 的长度为 ℓ，记作 $|\gamma|$。对于 $1 \leq i < j \leq \ell$，我们用 $\gamma_{v_i,\ v_j}$ 表示从 v_i 到 v_j的 γ 的子路径。此外，若对于 $i \neq j$，$v_i \neq v_j$，则称 γ 为自避的。此后，我们将简而言之，用路径代替自避的 $\mathbb{Z}^d$-路径。对于任意路径 γ，我们分别用 $\mathbf{s}(\gamma)$，$\mathbf{e}(\gamma)$ 表示 γ 的起点和终点。给定 $U \subset \mathbb{Z}^d$，令 $\mathcal{P}(U)$ 为 U 中所有路径构成的集合。

• 开放路径、开放簇和穿越簇。给定参数为 p 的伯努利渗流 $\mathbb{Z}^d$，令$\mathcal{G}_p = (\mathbb{Z}^d,\ \{e \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)\colon\ e$ 为开放$\})$。如果一条路径的所有边都是开放的，则称该路径为开放路径。开放簇是 $\mathcal{G}_p$ 的极大连通分支。若一个开放簇 $\mathcal{C}$ 穿越盒子 Λ，则对所有 d 方向，在 $\mathcal{C} \cap \Lambda$ 中都存在一条开放路径，连接 Λ 的两个相对面。

• 开放连接。给定 $A, B, U \subset \mathbb{Z}^d$，我们记 $A \overset{U}{\longleftrightarrow} B$ 如果 U 内存在一条开放路径连接A 与 B，否则为。对于 $U = \mathbb{Z}^d$，为简便起见，我们省略符号 $\mathbb{Z}^d$。

• 直径。对于 $A \subset \mathbb{Z}^d$ 和 $1 \leq i \leq d$，定义

$$\mathrm{diam}_i(A) = \max_{x,y \in A} |x_i - y_i|,$$

因此，我们将 $\mathrm{diam}(A)$ 记为 A 的直径，定义为

$$\mathrm{diam}(A) = \max_{1 \leq i \leq d} \mathrm{diam}_i(A).$$

• 测地线。给定 $\{x, y\} \subset U \subset \mathbb{Z}^d$，如果 π 是 U 内连接 x 与 y 的开放路径，且满足 $|\pi| = \mathrm{D}_U(x,\ y)$，则我们将 $\mathrm{D}_U(x,\ y)$ 中 π 与 y 之间的路径称为测地线。若 η 是 U 内连接 x 与 y 的路径，且满足 $\mathrm{T}(\eta) = \mathrm{T}_{U,\ M}(x,\ y)$，则我们也将 $\mathrm{T}_{U,\ M}(x,\ y)$ 中 η 与 y 之间的路径称为测地线。

本文中，符号 c、C 均表示不同的正常数，其取值可能随行而变化。

2. 主要结果证明所需的工具

2.1. 超临界渗流的预备知识。 本小节回顾超临界伯努利渗流中关于化学距离和穿越簇的一些具体结果。

引理 2.1 。 [Pis96，定理 2] 存在一个常数 $c > 0$ 使得对于所有 $z \in \mathbb{Z}^d$ 以及 $\ell > 0$,

$$\mathbb{P}(\|z - [z]\|_\infty \geq \ell) \leq c^{-1} \exp(-c\ell^{d-1}). \tag{2.1}$$

引理 2.2。 [Gri89，定理 8。18] 存在一个常数 $c > 0$ 使得对于所有 $\ell > 0$,

$$\mathbb{P}(0 \longleftrightarrow \partial\Lambda_\ell, 0 \not\longleftrightarrow \infty) \leq c^{-1} \exp(-c\ell).$$

引理 2.3. [Gri89，定理 7。68] 存在一个常数 $c > 0$ 使得对所有 $\ell > 0$,

$$\mathbb{P}(\Lambda_\ell \textit{ has an open crossing cluster}) \geq 1 - c^{-1} \exp(-c\ell).$$

引理 2.4. [GM09，推论 2.2，引理 2。3] 存在 ρ，$c > 0$ 使得对所有 $z \in \mathbb{Z}^d$ 和 $\ell \geq \rho\|z\|_\infty$,

$$\max\{\mathbb{P}(\infty > \mathrm{D}(0, z) \geq \ell), \mathbb{P}(\tilde{\mathrm{D}}(0, z) \geq \ell)\} \leq c^{-1} \exp(-c\ell). \tag{2.2}$$

因此，存在一个常数 $C > 0$，使得对所有 $\ell \geq C\|z\|_\infty$,

$$\max\{\mathbb{P}(|\gamma| \geq \ell), \mathbb{P}(|\eta| \geq \ell)\} \leq C \exp(-\ell/C),$$

其中 γ 是 $\tilde{}\mathrm{D}(0、\ z)$ 的测地线，且 η 是 γ 与从 0 到 [0的 $\mathbb{Z}^d$-最短路径的并集].

引理 2.5. [Gri89，引理 7。104] 对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个常数 $c > 0$ 使得对所有 $\ell > 0$,

$$\mathbb{P}(\ \exists$直径至少为 $\varepsilon\ell$ 的两个不相交开放簇，位于 $\Lambda_\ell) \leq c^{-1} \exp(-c\ell)$。

2.2. 通过有效动态半径得到的共同影响界。在 [CN25], 中，我们引入了有效半径这一概念，用以衡量重新抽样单条边的状态时，截断通行时间发生的变化。本文中，我们将这一概念推广到动态情形，旨在控制重新抽样某条给定边的权重时，原始截断通行时间 T_M 与 t-噪声截断通行时间 T^t_M 之间的共同影响（见 (2.4)）。本质上，有效动态半径相当于一种简单的一步重整化过程，使我们能够以最优代价构造一条绕过 e 的开放绕行路径。通过分析这些半径的性质，包括局部依赖和轻尾衰减分布，我们可以利用格动物理论界定重新抽样边所需的总成本。令 $t \geq 0$。我们将原始环境 $\tau = (\tau_e)_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}$ 和 t-噪声环境 $\tau(t) = (\tau_e(t))_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}$ 中的首次截断通行渗流耦合起来。我们称边 e 在环境 $\tau(t) = (\tau_e(t))_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}$ 中是 t-开放（权重为 1）或 t-闭合（权重为 M）。我们用某个确定性规则打破平局，并固定边 $e = (x_e, y_e)$ 对所有 $e \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)$ 的一种表示。给定 $N \geq 1$ 和 $e \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)$，现在定义 $\Lambda_N(e) := \Lambda_N(x_e)$，并

$$\mathrm{A}_N(e) := \Lambda_{3N}(e) \setminus \Lambda_N(e).$$

我们定义 $A \subset \mathbb{Z}^d$ 中 t-开放路径的集合为

$$\mathbb{O}^t(u, v; A) := \{\gamma \in \mathcal{P}(A) : \mathbf{s}(\gamma) = u, \mathbf{e}(\gamma) = v,\ \gamma \text{ is } t\text{-open}\}; \quad \mathbb{O}^t(A) := \bigcup_{u,v\in A} \mathbb{O}^t(u, v; A).$$

对于 $u, v \in \mathbb{Z}^d$和 $A \subset \mathbb{Z}^d$，我们将T^t_M的所有测地线的集合记为

$$\mathbb{G}^t_M(u, v; A) := \{\gamma \in \mathcal{P}(A) : \mathbf{s}(\gamma) = u, \mathbf{e}(\gamma) = v; \mathrm{T}^t_M(\gamma) := \mathrm{T}^t_{A,M}(u, v)\}, \quad \mathbb{G}^t_M(A) := \cup_{u,v\in A}\mathbb{G}^t_M(u, v; A),$$

其中我们回顾，$\mathbf{s}(\gamma)$与$\mathbf{e}(\gamma)$分别是 γ的起始顶点与终止顶点。此外，将修正测地线的集合定义为

$$\mathbb{H}^t_M(u, v; A) := \Big\{\gamma \in \mathcal{P}(A) : \mathbf{s}(\gamma) = u, \mathbf{e}(\gamma) = v, \exists\, \pi \in \mathbb{G}^t_M(A) : \gamma \setminus \pi \text{ is } t\text{-open}\Big\},$$
$$\mathbb{H}^t_M(A) := \bigcup_{u,v\in A} \mathbb{H}^t_M(u, v; A),$$

并约定空路径是 t-开放的（特别地，$\mathbb{G}^t_M(A)$ $\mathbb{O}^t(A) \subset \mathbb{H}^t_M(A)$）。换言之，$\mathbb{H}^t_M(u, v; A)$是 A内部从 u到 v的路径集合，由用t-开放路径替换测地线的若干段而构成。当 $A = \mathbb{Z}^d$时，我们分别简记为 $\mathbb{G}^t_M(u, v)$ $\mathbb{G}^t_M$与 $\mathbb{H}^t_M(u, v)$ $\mathbb{H}^t_M$。若路径 $\gamma \subset \mathrm{A}_N(e)$连接 $\partial\Lambda_N(e)$与 $\partial\Lambda_{3N}(e)$，则称其为$\mathrm{A}_N(e)$的穿越路径。令 $\mathscr{C}(\mathrm{A}_N(e))$为$\mathrm{A}_N(e)$的所有穿越路径的集合。给定 $N \geq 1$、 $C_* \geq 4$ 和 $e \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)$，令

$$\mathcal{V}^t_N(e) := \{\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{H}^t_M(\Lambda_{C_*N}(e)) \cap \mathscr{C}(\mathrm{A}_N(e)) : \mathrm{D}^t_{\mathrm{A}_N(e)}(\gamma_1, \gamma_2) \leq C_*N\};$$
$$\mathcal{W}^t_N(e) := \{\forall\, x, y \in \Lambda_{3N}(e) \text{ with } \mathrm{D}^t_{\Lambda_{3N}(e)}(x, y) < \infty :\ \mathrm{D}^t_{\Lambda_{4N}(e)}(x, y) \leq C_*N\}.$$

对于每个 $e \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)$，我们现在将 e 的有效动态半径 定义为

$$R^{0,t}_e := \inf\{N \geq 1 : \mathcal{V}^0_N(e) \cap \mathcal{W}^0_N(e) \cap \mathcal{V}^t_N(e) \cap \mathcal{W}^t_N(e) \text{ occurs}\}.$$

粗略地说，对于每个 $s \in \{0, t\}$，$_e{}^t$ 是能使任意 e 穿越路径在 $\mathrm{A}_N(e)$ 内绕过 e 的最小半径，且绕行路径 s-开放，穿越路径中 s-闭合边的数量不多。下面的命题给出了有效动态半径的一些重要性质。此外，给定原路径中的一条边 e，我们可以基于这条路径构造一条避开 e 的新路径。

命题 2.6。 存在常数 $C_* = C_*(p, d) \geq 4$ 以及 $c = c(p, d) > 0$，使得以下结论对所有$t \geq 0$均成立。

(i) 对所有 $e \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)$ 和 $\ell \geq 1$，事件 $\{R^{0,t}_e = \ell\}$ 仅取决于 $\Lambda_{C_*\ell}(e)$ 中任意边的状态。*(ii)* 对所有 $e \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)$，

$$\mathbb{P}(R^{0,t}_e \geq \ell) \leq c^{-1}\exp(-c\ell), \quad \forall \ell \leq \exp(cM).$$

(iii) 令 $x, y \in \mathbb{Z}^d$ 和 $\gamma \in \mathbb{H}^s_M(x, y)$，其中 $s \in \{0, t\}$。假设 $e \in \gamma$，使得 $x, y \notin \Lambda_{3R^{0,}{}_e{}^t}(e)$。那么存在另一条连接 x 与 y 的路径 η_e，满足：*(iii-a)* $\eta_e \cap \Lambda_{R^{0,}{}_e{}^t}(e) = \varnothing$，且 $\eta_e \setminus \gamma$ 仅由 s-开放边组成；*(iii-b)* $|\eta_e \setminus \gamma| \leq C_*R^{0,}{}_e{}^t$。

证明。该命题的证明由 [CN25、命题 2.6 和 2.7] 得出。我们注意到，$\{R^{0,t}_e = \ell\}$仅取决于事件族 $\{\mathcal{V}^0_N(e)\ \mathcal{W}^0_N(e)\ \mathcal{V}^t_N(e)\ \mathcal{W}^t_N(e)\}_{1\leq N\leq \ell}$。因此，(i) 可由以下事实得出：对于所有 $t \geq 0$ 和 $1 \leq N \leq \ell$，$\mathcal{V}^t_N(e)$ 和 $\mathcal{W}^t_N(e)$ 都关于 Λ_{C_*N} 内的任意边权重可测。

为证明 (ii)，我们注意到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_e^{0,t} \geq \ell) &\leq \mathbb{P}(\{\mathcal{V}_{\ell-1}^0(e) \cap \mathcal{W}_{\ell-1}^0(e) \cap \mathcal{V}_{\ell-1}^t(e) \cap \mathcal{W}_{\ell-1}^t(e)\}^c) \\ &\leq \mathbb{P}(\{\mathcal{V}_{\ell-1}^0(e) \cap \mathcal{W}_{\ell-1}^0(e)\}^c) + \mathbb{P}(\{\mathcal{V}_{\ell-1}^t(e) \cap \mathcal{W}_{\ell-1}^t(e)\}^c).\end{aligned}$$

证明过程沿用 [CN25，命题 2。6] 可知，存在常数 $C_* = C_*(p,d) \geq 4$ 和 $c = c(p,d) \in (0,1)$，使得对所有 $t \geq 0$ 和 $\ell \geq 2$,

$$\mathbb{P}(\{\mathcal{V}_{\ell-1}^t(e) \cap \mathcal{W}_{\ell-1}^t(e)\}^c) \leq c^{-1}\exp(-c\ell).$$

结合这些估计，我们得到 (ii)。(iii) 的证明与 [CN25，命题 2。7]相同。 □

从现在起，我们固定常数 C_*，取自命题2.6。现在，我们通过截断有效动态半径，估计在时刻 t 对一条边进行重新抽样对首次截断通行时间的共同影响。我们将由 $\mathcal{C}_\infty^t \setminus e$构成的无限簇记为 $\mathcal{C}^{t,e}_\infty$，它几乎必然唯一。令 $[z]_t^e$ 表示关闭e时 z 的正则化点，即 $[z]_t^e$ 是 z 在 $\mathcal{C}^{t,e}_\infty$中距离最近的点，并用某个确定性破同分规则处理平局。为简便起见，我们简记为$\mathcal{C}^{0,e}_\infty := \mathcal{C}^e_\infty$ 和 $[z]_0^e = [z]^e$。对任意 $t \geq 0$，定义

$$\mathcal{Q}_e^t := \{[0]_t = [0]_t^e, [nx]_t =, [nx]_t^e\}.$$

事件 $\mathcal{Q}_e^t$ 表明，在关闭边 e时，正则化点 $[0]_t$ 和 $[nx]_t$ 保持不变。

命题 2.7. 在事件 $\{\mathcal{Q}_e^0 \cap \mathcal{Q}_e^t\}$上，如下结论成立。

(i)

$$\mathbb{I}(e \in \tilde{\pi}_M(0,nx) \cap \tilde{\pi}_M^t(0,nx)) \leq \mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M, \tilde{\mathrm{T}}_M^t); \tag{2.3}$$

(ii)

$$0 \leq \mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M, \tilde{\mathrm{T}}_M^t)\mathbb{I}(\tau_e = \tau_e(t) = 1) \leq (3M\mathbb{I}(\mathcal{U}_e^0 \cup \mathcal{U}_e^t) + (\hat{R}_e^{0,t})^2)\mathbb{I}(e \in \tilde{\pi}_M(0,nx) \cap \tilde{\pi}_M^t(0,nx)), \tag{2.4}$$

其中对于 $s \in \{0,t\}$,

$$\mathcal{U}_e^s := \left\{3R_e^{0,t} \geq \min(\|e-[0]_s\|_\infty, \|e-[nx]_s\|_\infty)\right\}, \quad \hat{R}_e^{0,t} := C_* R_e^{0,t} \wedge M.$$

证明. 假设事件 $\{\mathcal{Q}_e^0 \cap \mathcal{Q}_e^t\}$ 发生。则对于 $s \in \{0,t\}$，当边 e被关闭时（$\tau_e = M$），正则化点 $[0]_s$ 和 $[nx]_s$ 保持不变，因此 $\nabla^{M,1}_e \tilde{\mathrm{T}}^s_M(0,nx)$是非负的。注意 $\tilde{\mathrm{T}}^s_M(0,nx)$始终在 $\mathbb{N}$中取值。因此，若 $e \in \tilde{\pi}^s_M(0,nx)$，则 e是$\mathrm{T}^s_M(0,nx)$的关键边，即当翻转 τ_e的值时，$\tilde{\mathrm{T}}^s_M(0,nx)$的值会发生显著改变，从而对所有 $s \in \{0,t\}$,

$$\tilde{\mathrm{T}}^s_M(0,nx) \circ \sigma_e^M \geq \tilde{\mathrm{T}}^s_M(0,nx) \circ \sigma_e^1 + 1.$$

这意味着在事件 $\{\mathcal{Q}_e^0 \cap \mathcal{Q}_e^t\}$ 上，

$$\mathbb{I}(e \in \tilde{\pi}_M(0,nx)) \leq \nabla_e^{M,1}\tilde{\mathrm{T}}_M(0,nx), \quad \mathbb{I}(e \in \tilde{\pi}_M^t(0,nx)) \leq \nabla_e^{M,1}\tilde{\mathrm{T}}_M^t(0,nx).$$

将此不等式两边相乘，我们得到（2.3）。

进一步假设 e是 s-开放的（即 $\tau_e(s) = 1$）且 $e \notin \tilde{\pi}^s_M(0,nx)$，则关闭 $e(\tau_e(s) = M)$ 对测地线没有影响，因此 $\nabla^{M,1}_e \tilde{\mathrm{T}}^s_M(0,nx) = 0$。因此，

$$0 \leq \nabla_e^{M,1}\tilde{\mathrm{T}}^s_M(0,nx)\mathbb{I}(\tau_e(s) = 1) \leq \nabla_e^{M,1}\tilde{\mathrm{T}}^s_M(0,nx)\mathbb{I}(e \in \tilde{\pi}^s_M(0,nx)). \tag{2.5}$$

我们仍需估计（2.5）的右端。若 $e \in \tilde{\pi}^s_M(0,nx)$，则显然

$$\nabla_e^{M,1}\tilde{\mathrm{T}}^s_M(0,nx) \leq M. \tag{2.6}$$

设 γ为 $\mathrm{T}^s_M(0,nx)$ 的测地线，并用某些确定性规则打破平局。若 $e \in \tilde{\pi}^s_M(0,nx) \subset \gamma$且 $\{\mathcal{U}^s_e\}^c$发生，则 $[0]_s$与 $[nx]_s$都不属于 $\Lambda_{3R^0_e,\iota}(e)$。将命题 2.6 (iii) 应用于 $\gamma \in \mathbb{G}^s_M([0]_s,[nx]_s) \subset \mathbb{H}^s_M([0]_s,[nx]_s)$ 与 $e \in \gamma$，则存在 $[0]_s$与 $[nx]_s$之间的另一条路径 η_e，使得

$$\nabla_e^{M,1}\tilde{\mathrm{T}}^s_M(0,nx) \leq \mathrm{T}^s_M(\eta_e) \setminus \gamma = |\eta_e \setminus \gamma| \leq C_* R_e^{0,t}.$$

结合最后三个估计，我们得到，对所有 $s \in \{0,t\}$,

$$0 \leq \nabla_e^{M,1}\tilde{\mathrm{T}}^s_M(0,nx)\mathbb{I}(\tau_e(s) = 1) \leq (\mathbb{I}(\mathcal{U}^s_e)M + \hat{R}_e^{0,t})\mathbb{I}(e \in \tilde{\pi}^s_M(0,nx)).$$

因此，在事件 $\{\mathcal{Q}_e^0 \cap \mathcal{Q}_e^t\}$ 上，我们有

$$\begin{aligned}0 \leq \nabla_e^{M,1}\tilde{\mathrm{T}}_M(0,nx)\nabla_e^{M,1}\tilde{\mathrm{T}}^t_M(0,nx)\mathbb{I}(\tau_e = \tau_e(t) = 1) \\ \leq (\mathbb{I}(\mathcal{U}_e^0)M + \hat{R}_e^{0,t})(\mathbb{I}(\mathcal{U}_e^t)M + \hat{R}_e^{0,t})\mathbb{I}(e \in \tilde{\pi}_M(0,nx) \cap \tilde{\pi}^t_M(0,nx))\end{aligned}$$

$$\leq (3\mathbb{I}(\mathcal{U}_e^0 \cup \mathcal{U}_e^t)M^2 + (\hat{R}_e^{0,t})^2)\mathbb{I}(e \in \tilde{\pi}_M(0, nx) \cap \tilde{\pi}_M^t(0, nx)),$$

如所要求的。 □

2.3. **格动物的估计**。 为了控制边重采样的总成本，我们旨在估计随机路径上有效动态半径之和。尽管这些半径并不独立，但它们的依赖关系相对局部。利用相依环境中的格动物理论（例如，参见 [CN19, DHJ+20]），我们可以推导出这些半径之和的一个上界。

令 $\mathcal{P}_L$ 表示所有从 0 出发且满足 $|\gamma| \leq L$ 的路径 γ 的集合。给定 $A > 0$ 和 $N \in \mathbb{N}$，若一组伯努利随机变量 $(I_{e,N})_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}$ 满足以下条件，则称其为 AN- 相依：对于所有 $e \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)$，变量 $I_{e,N}$ 与随机变量 $(I_{e',N})_{e'\notin\mathcal{E}(\Lambda_{AN}(e))}$ 相互独立。每条路径 $\gamma \in \mathcal{P}_L$ 称为大小至多为 L 的格动物。边权重 $(I_{e,N})_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}$ 的贪心格动物问题旨在估计最大大小至多为 L 的任意路径的最大权重。具体而言，我们定义

$$\forall \gamma \in \mathcal{P}_L, \quad \Gamma(\gamma) := \sum_{e\in\gamma} I_{e,N}, \quad \Gamma_{L,N} := \max_{\gamma\in\mathcal{P}_L} \Gamma(\gamma).$$

引理 2.8. [CN19，引理 2.6] 设 $A > 0$、$N \in \mathbb{N}$ 以及一族 AN-相依的伯努利随机变量 $(I_{e,N})_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}$。存在一个依赖于 A、d 的正常数 C，使得对所有 $L \in \mathbb{N}$，

$$\mathbb{E}[\Gamma_{L,N}] \leq CLN^d q_N^{1/d}, \quad \textit{where} \quad q_N := \sup_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{E}[I_{e,N}].$$

因此，我们可以如下用任意随机路径的大小来控制其总权重。

引理 2.9. [CN25，引理 3.3] 设 $A > 0$ 与 $(X_e)_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}$ 为一族非负随机变量，使得对所有 $e \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)$ 与 $N \in \mathbb{N}$，

$$\textit{the event } \{N-1 \leq X_e < N\} \textit{ is independent of } (X_{e'})_{e'\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)\setminus\Lambda_{AN}(e))}. \tag{2.7}$$

我们定义 $q_N := \sup_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{P}(N-1 \leq X_e < N)$。设 $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 为一个满足

$$B := \sum_{N=1}^{\infty} (f_*(N))^2 N^{d+1} q_N^{1/d} < \infty, \quad \textit{where} \quad f_*(N) := \sup_{N-1\leq x<N} f(x). \tag{2.8}$$

存在 $C = C(A, B) > 0$，使得对任意 $L \geq 1$ 以及与 $(X_e)_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}$ 处于同一概率空间、从 0 出发的任意随机路径 γ，

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{e\in\gamma} f(X_e)\right)^2\right] \leq CL^2 + C\sum_{\ell=L} \ell^2(\mathbb{P}(|\gamma| = \ell)^{1/2}. \tag{2.9}$$

应用引理 2.9 于 $X_e = \hat{R}^{0,t}_e$、$A = 2C_*$ 和 $f(x) = x^2$，由于条件（2.7）和（2.8）分别由命题 2.6 的 (i) 和 (ii) 得出，因此有以下结果。

推论 2.10。 存在一个常数 $C > 0$，使得对于所有的 $t \geq 0$、$L \geq 1$ 以及随机路径 γ，若它们从0出发，且与 $(R^{0,t}_e)_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}$ 处于同一概率空间中，

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{e\in\gamma} (\hat{R}_e^{0,t})^2\right)^2\right] \leq CL^2 + C\sum_{\ell=L} \ell^2(\mathbb{P}(|\gamma| = \ell)^{1/2}. \tag{2.10}$$

2.4. **测地线相交的下界**。 本小节旨在证明，测地线相交的规模为 n 量级。

Pro命题 2.11。 假设 (BK) 成立。则存在一个常数 $c > 0$ 使得 t

$$\mathbb{E}[|\tilde{\pi}(0, nx)|] \geq cn. \tag{2.11}$$

该结果的证明采用区块重抽样策略，其关键要素是在 [Jac24，定理 1]中得到的测地线长度下界。这一控制依赖于 [Jac25]中提出的模式概念。粗略地说，我们构造一种模式，使得测地线在边数意义下并非最优，然后考察它穿过该模式平移版本的次数。为使论述简洁，命题2.11的证明留待附录。

3. 首次截断通行时间的动力学方差不等式

3.1. 方差的动力学公式。 令 $0 < \ell < L \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$。我们强调， L 可能非常大，并且可以是 ∞。对于 $p \in (p_c(d), 1)$，我们在 $\{\ell, L\}$ 上定义分布 G_p，其为

$$G_p := p\delta_\ell + (1-p)\delta_L,$$

其中， δ_L 表示在 L处的狄拉克δ分布。令 E 为至多可数的指标集。对于每个 $e \in E$，令 σ_e^a: $\{\ell, L\}^{|E|} \to \{\ell, L\}^{|E|}$ 表示将坐标 e 的值改为 $a \in \{\ell, L\}$的算子。令$X = (X_e)_{e\in E}$ 为一族具有共同分布 G_p的独立同分布随机变量。对于任意实值函数f: $\{\ell, L\}^{|E|} \to \mathbb{R}$，我们将 f 在一条边 e 处的离散导数定义为

$$\nabla_e^{a,b} f(X) := f \circ \sigma_e^a(X) - f \circ \sigma_e^b(X), \quad a, b \in \{\ell, L\},$$

它度量了 f（X）在坐标 X_e 从 a 切换为 b时，其值的变化。在 [CNN24], 中，我们使用了以下马古利斯-鲁索公式这一关键工具，以断言时间常数的利普希茨连续性。

引理3.1。 [CNN24，引理2。1] 假设 E 是有限的。令 f: $\{\ell, L\}^{|E|} \to \mathbb{R}$ 为满足下述条件的函数： $f(X)$ 可积。则有

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{E}[f(X)]}{\mathrm{d}p} = \sum_{e\in E} \mathbb{E}[\nabla_e^{\ell,L} f(X)], \quad \nabla_e^{\ell,L} f(X) := f \circ \sigma_e^\ell(X) - f \circ \sigma_e^L(X).$$

现在我们要证明该公式的动态版本。令 $X' = (X'_e)_{e\in E}$ 为 $X = (X_e)_{e\in E}$ 的一个独立副本，其坐标独立同分布。令 $U = (U_e)_{e\in E}$ 为一族取值于区间 $[0, 1]$, 上的独立同分布均匀随机变量，且与 X 和 X' 独立。给定某个 $(t_e)_{e\in E} \in [0, 1]^{|E|}$，定义 $X((t_e)_{e\in E}) = (X_e(t_e))_{e\in E}$ 为 X 的 $(t_e)_{e\in E}$-噪声权重，定义如下:

$$\forall e \in E, \quad X_e(t_e) = \mathbb{I}(U_e \geq t_e)X_e + \mathbb{I}(U_e < t_e)X'_e,$$

也就是说， $X((t_e)_{e\in E})$ 可通过对 X 的每个坐标 $e \in E$ 独立地以概率 t_e 重新抽样得到。当对所有 e 都有 $t_e = t_{e'} = t$， $e' \in E$ 时，我们简写为 $X(t)$，而不写作 $X(t, \ldots, t)$。令 f: $\{\ell, L\}^{|E|} \to \mathbb{R}$ 为实值函数。令 $X^1 = (X_e^1)_{e\in E}$ 和 $X^2 = (X_e^2)_{e\in E}$ 为两族相互独立的独立同分布随机变量，具有共同分布 G_p，且与 X 和 X' 独立。下式给出了函数 f 的动态协方差与其各坐标的共同影响之间的表示关系。

引理 3.2. 对于任意函数 $f \in L^2(G_p^{|E|})$，我们有

$$\mathrm{Cov}(f(X), f(X(t))) = \int_t^1 \sum_{e\in E} \mathbb{E}\left[\nabla_e^{X_e,X_e^1} f(X) \nabla_e^{X_e,X_e^2} f(X(s))\right] ds. \tag{3.1}$$

此外，协方差 方差 $\mathrm{Cov}(f(X)\ f(X(t)))$ 关于 $t \in [0, 1$ 非负且单调不增].

我们将 这些引理的证明见附录 A。现在我们给出式（3.1中期望的显式公式).

引理 3.3. 对于任意函数 $f \in L^2(G_p^{|E|})$，我们有

$$\forall e \in E, \quad \mathbb{E}\left[\nabla_e^{X_e,X_e^1} f(X) \nabla_e^{X_e,X_e^2} f(X(t))\right] = p(1-p)\mathbb{E}\left[\nabla_e^{L,\ell} f(X) \nabla_e^{L,\ell} f(X(t))\right].$$

此外，函数 $t \to \mathbb{E}\left[\nabla_e^{X_e,X_e^1} f(X)\ \nabla_e^{X_e,X_e^2} f(X(t))\right]$ 是非负且非递增的。

证明。 通过直接计算，我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\nabla_e^{X_e,X_e^1} f(X) \nabla_e^{X_e,X_e^2} f(X(t))\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\nabla_e^{X_e,X_e^1} f(X) \nabla_e^{X_e,X_e^2} f(X(t)) \mathbb{I}(X_e^1 > X_e^2)\right] + \mathbb{E}\left[\nabla_e^{X_e,X_e^1} f(X) \nabla_e^{X_e,X_e^2} f(X(t)) \mathbb{I}(X_e^1 < X_e^2)\right] + \\
&\qquad + \mathbb{E}\left[\nabla_e^{X_e,X_e^1} f(X) \nabla_e^{X_e,X_e^2} f(X(t)) \mathbb{I}(X_e^1 = X_e^2)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\nabla_e^{X_e,L} f(X) \nabla_e^{X_e,\ell} f(X(t)) \mathbb{I}(X_e^1 = \ell, X_e^2 = L)\right] + \mathbb{E}\left[\nabla_e^{X_e,\ell} f(X) \nabla_e^{X_e,L} f(X(t)) \mathbb{I}(X_e^1 = L, X_e^2 = \ell)\right] \\
&\qquad + \mathbb{E}\left[\nabla_e^{X_e,X_e^1} f(X) \nabla_e^{X_e,X_e^2} f(X(t)) \mathbb{I}(X_e^1 = X_e^2)\right].
\end{aligned}$$

由于 X_e 只取两个值 ℓ和 L，因此第一项和第二项为零。对于第三项，我们改写为

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\nabla_e^{X_e,X_e^1} f(X) \nabla_e^{X_e,X_e^2} f(X(t)) \mathbb{I}(X_e^1 = X_e^2)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\nabla_e^{X_e,\ell} f(X) \nabla_e^{X_e,\ell} f(X(t)) \mathbb{I}(X_e^1 = X_e^2 = \ell)\right] + \mathbb{E}\left[\nabla_e^{X_e,L} f(X) \nabla_e^{X_e,L} f(X(t)) \mathbb{I}(X_e^1 = X_e^2 = L)\right]
\end{aligned}$$

$= \mathbb{E}\left[\nabla_e^{L,\ell} f(X) \nabla^{L,\ell}_{e} f(X(t)) \mathbb{I}(X_e^1 = X_e^2 = \ell,\ X_e = L)\right] + \mathbb{E}\left[\nabla_e^{L,\ell} f(X) \nabla^{L,\ell}_{e} f(X(t)) \mathbb{I}(X_e^1 = X_e^2 = L,\ X_e = \ell)\right] = p(1-p)\mathbb{E}\left[\nabla_e^{L,\ell} f(X) \nabla^{L,\ell}_{e} f(X(t))\right].$

注意到函数 $t \to \mathbb{E}\left[\nabla_e^{L,\ell} f(X) \nabla^{L,\ell}_{e} f(X(t))\right]$ 是非增的，这可通过将引理 A.1 应用于 $h = \nabla^{L,\ell}_{e} f$ 得出。结论随之成立。 □

结合引理 3.2 与引理 3.3 可得如下协方差的动力学公式。

命题 3.4. 对于任意函数 $f \in L^2(G_p^{|E|})$，对于任意 $t \geq 0$，有：

$$\mathrm{Cov}(f(X), f(X(t))) = p(1-p) \int_t^1 \sum_{e \in E} \mathbb{E}\left[\nabla_e^{L,\ell} f(X) \nabla_e^{L,\ell} f(X(s))\right] ds.$$

最后，这个命题直接推出以下首次截断通行时间的动力学公式。

命题 3.5. 对于任意 $t \geq 0$,

$$\mathrm{Cov}(\tilde{\mathrm{T}}_M(0, nx), \tilde{\mathrm{T}}_M^t(0, nx)) = p(1-p) \int_t^1 \sum_{e \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{E}\left[\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M, \tilde{\mathrm{T}}_M^s)\right] ds. \tag{3.2}$$

3.2. **定理 1.4 的证明。** 鉴于命题 3.5，定理1.4 将直接由以下关于总共影响的下界和上界推出。

命题 3.6。 存在一个常数 $C > 0$，使得对所有 $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[|\tilde{\pi}_M(0, nx) \cap \tilde{\pi}_M^t(0, nx)|\right] - C \log^{d+8} n \leq \sum_{e \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{E}\left[\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M, \tilde{\mathrm{T}}_M^t)\right], \tag{3.3}$$

且对所有 $\alpha > 0$,

$$\sum_{e \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{E}\left[\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M, \tilde{\mathrm{T}}_M^t)\right] \leq C\alpha^2 \mathbb{E}\left[|\tilde{\pi}_M(0, nx) \cap \tilde{\pi}_M^t(0, nx)|\right] + Ce^{-\frac{\alpha}{C}} n + C(\log n)^{2d+6}. \tag{3.4}$$

此外，函数 $\mathbb{E}\left[|\tilde{\pi}_M(0,\ nx) \cap \tilde{\pi}_M^t(0,\ nx)|\right]$ 关于 t 单调不增。

本小节余下部分将用于证明命题 3.6。我们先给出一个引理，它为首次截断通行时间相对于改变正则化点的边的总共影响提供上界。

引理 3.7。

$$\sum_{e \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{E}\left[|\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M, \tilde{\mathrm{T}}_M^t)| \mathbb{I}(\{\mathcal{Q}_e^0 \cap \mathcal{Q}_e^t\}^c)\right] = \mathcal{O}(\log^{d+8} n). \tag{3.5}$$

证明。 我们注意到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M, \tilde{\mathrm{T}}_M^t)| \mathbb{I}(\{\mathcal{Q}_e^0 \cap \mathcal{Q}_e^t\}^c)\right] \leq\ & \mathbb{E}\left[|\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M, \tilde{\mathrm{T}}_M^t)| \mathbb{I}(\{\mathcal{Q}_e^0\}^c \cap \mathcal{Q}_e^t)\right] + \mathbb{E}\left[|\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M, \tilde{\mathrm{T}}_M^t)| \mathbb{I}(\mathcal{Q}_e^0 \cap \{\mathcal{Q}_e^t\}^c)\right] \\ & + 2\mathbb{E}\left[|\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M, \tilde{\mathrm{T}}_M^t)| \mathbb{I}(\{\mathcal{Q}_e^0\}^c \cap \{\mathcal{Q}_e^t\}^c)\right].\end{aligned} \tag{3.6}$$

根据（2.5）和（2.6），我们有

$$\mathbb{E}\left[|\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M, \tilde{\mathrm{T}}_M^t)| \mathbb{I}(\{\mathcal{Q}_e^0\}^c \cap \mathcal{Q}_e^t)\right] \leq M\mathbb{E}\left[|\nabla_e^{M,1} \tilde{\mathrm{T}}_M| \mathbb{I}(\{\mathcal{Q}_e^0\}^c)\right],$$

and

$$\mathbb{E}\left[|\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M, \tilde{\mathrm{T}}_M^t)| \mathbb{I}(\mathcal{Q}_e^0 \cap \{\mathcal{Q}_e^t\}^c)\right] \leq M\mathbb{E}\left[|\nabla_e^{M,1} \tilde{\mathrm{T}}_M^t| \mathbb{I}(\{\mathcal{Q}_e^t\}^c)\right] = M\mathbb{E}\left[|\nabla_e^{M,1} \tilde{\mathrm{T}}_M| \mathbb{I}(\{\mathcal{Q}_e^0\}^c)\right].$$

此外，由柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M, \tilde{\mathrm{T}}_M^t)| \mathbb{I}(\{\mathcal{Q}_e^0\}^c \cap \{\mathcal{Q}_e^t\}^c)\right] &\leq \left(\mathbb{E}\left[|\nabla_e^{M,1} \tilde{\mathrm{T}}_M|^2 \mathbb{I}(\{\mathcal{Q}_e^0\}^c)\right] \mathbb{E}\left[|\nabla_e^{M,1} \tilde{\mathrm{T}}_M^t|^2 \mathbb{I}(\{\mathcal{Q}_e^t\}^c)\right]\right)^{1/2} \\ &= \mathbb{E}\left[|\nabla_e^{M,1} \tilde{\mathrm{T}}_M|^2 \mathbb{I}(\{\mathcal{Q}_e^0\}^c)\right].\end{aligned}$$

注意 即如果 $\tau_e = M$ 那么闭合边 e 不会影响正则化点，因此

$$\mathbb{I}(\{\mathcal{Q}_e^0\}^c) = \mathbb{I}(\{\mathcal{Q}_e^0\}^c) \mathbb{I}(\tau_e = 1) + \mathbb{I}(\{\mathcal{Q}_e^0\}^c) \mathbb{I}(\tau_e = M) = \mathbb{I}(\{\mathcal{Q}_e^0\}^c) \mathbb{I}(\tau_e = 1).$$

将这一结论与上述界结合起来，我们得到

$$\mathbb{E}\left[|\operatorname{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M, \tilde{\mathrm{T}}_M^t)|\mathbb{I}(\{\mathcal{Q}_e^0 \cap \mathcal{Q}_e^t\}^c)\right] \le 4M\mathbb{E}\left[|\nabla_e^{M,1}\tilde{\mathrm{T}}_M|^2\mathbb{I}(\tau_e = 1)\mathbb{I}(\{\mathcal{Q}_e^0\}^c)\right]. \tag{3.7}$$

为处理右端，我们定义

$$\kappa_e := \mathrm{T}_M([0]^e, [nx]^e) - \mathrm{T}_M([0], [nx]).$$

由于 $\nabla^{M,1}_e \tilde{\mathrm{T}}_M\mathbb{I}(\tau_e = 1) = \kappa_e\mathbb{I}(\tau_e = 1)$，我们有

$$\mathbb{E}\left[|\nabla_e^{M,1}\tilde{\mathrm{T}}_M|^2\mathbb{I}(\tau_e = 1)\mathbb{I}(\{\mathcal{Q}_e^0\}^c)\right] \le \mathbb{E}[(\kappa_e)^2\mathbb{I}(\{\mathcal{Q}_e^0\}^c)]. \tag{3.8}$$

由独立性，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\kappa_e)^4] \le 8(\mathbb{E}[(\mathrm{T}_M([0]^e, [nx]^e))^4] + \mathbb{E}[(\mathrm{T}_M([0], [nx]))^4]) &\le 8(\mathbb{E}[(\mathrm{D}([0]^e, [nx]^e))^4] + 8\mathbb{E}[(\mathrm{D}([0], [nx]))^4]) \\ &\le \frac{8}{1-p}\mathbb{E}[(\mathrm{D}([0]^e, [nx]^e))^4\mathbb{I}(\omega_e = \infty)] + 8\mathbb{E}[(\mathrm{D}([0], [nx]))^4] \\ &\le 8\frac{2-p}{1-p}n^4.\end{aligned}$$

如果 $\{[0] \neq [0]^e\}$（分别为 $\{[nx] \neq [nx]^e\}$），那么 $[0]$（分别为 $[nx]$）属于 x_e 或 y_e 中的 $\mathcal{G}_p \setminus e$一个有限开放簇，记作 $\mathcal{C}([0], e)$（分别为 $\mathcal{C}([nx], e)$）。根据引理 2.2，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\mathcal{Q}_e^0\}^c) &\le \mathbb{P}([0] \neq [0]^e) + \mathbb{P}([nx] \neq [nx]^e) \\ &\le \mathbb{P}([0] \notin \Lambda_{\|e\|_\infty/2}) + \mathbb{P}(\infty > |\mathcal{C}([0], e)| \ge \|e\|_\infty/2) \\ &\qquad + \mathbb{P}([nx] \notin \Lambda_{\|e-nx\|_\infty/2}(nx)) + \mathbb{P}(\infty > |\mathcal{C}([nx], e)| \ge \|e - nx\|_\infty/2) \\ &\le c^{-1}\exp(-c\min(\|e\|_\infty, \|e - nx\|_\infty),\end{aligned} \tag{3.9}$$

对于某个较小的常数 $c > 0$。如果 $\min(\|e\|_\infty, \|e - nx\|_\infty) \ge 10(\log n)/c$，那么当 n 足够大时

$$\mathbb{E}[(\kappa_e)^2\mathbb{I}(\{\mathcal{Q}_e^0\}^c)] \le \exp(-c\min(\|e\|_\infty, \|e - nx\|_\infty)/2). \tag{3.10}$$

假设 $\min(\|e\|_\infty, \|e - nx\|_\infty) \le 10(\log n)/c$。我们进一步假设 $\|e - nx\|_\infty \le 10(\log n)/c$。其余情况 $\|e\|_\infty \le 10(\log n)/c$ 可用类似方法处理。根据三角不等式，

$$\mathrm{T}_M([0], x_e) - \mathrm{T}_M(x_e, [nx]^e) \le \mathrm{T}_M([0], [nx]^e)) \le \mathrm{T}_M([0], x_e) + \mathrm{T}_M(x_e, [nx]^e).$$

注意，$\mathrm{T}_M([0], [nx]) = \mathrm{T}_M([0], x_e) + \mathrm{T}_M(x_e, [nx])$。因此，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\kappa_e)^2\mathbb{I}([0] = [0]^e, [nx] \neq [nx]^e)] &\le \mathbb{E}[(\mathrm{T}_M(x_e, [nx]^e) + \mathrm{T}_M(x_e, [nx]))^2] \\ &\le 2\frac{1}{1-p}\mathbb{E}[(\mathrm{T}_M(x_e, [nx]))^2\mathbb{I}(\tau_e = M)] + 2(\mathbb{E}[(\mathrm{T}_M(x_e, [nx]))^2] \\ &\le \frac{2(2-p)}{1-p}\mathbb{E}[(\mathrm{T}_M(x_e, [nx]))^2] \\ &\le \frac{4(2-p)}{1-p}(\mathbb{E}[(\mathrm{T}_M(x_e, nx))^2] + \mathbb{E}[(\mathrm{T}_M(nx, [nx]))^2]) = \mathcal{O}((\log n)^6),\end{aligned}$$

这意味着，如果 $\|e - nx\|_\infty \le 10(\log n)/c$ 那么根据 (3.9)，

$$\mathbb{E}[(\kappa_e)^2\mathbb{I}(\{\mathcal{Q}_e^0\}^c)] \le \mathbb{E}[(\kappa_e)^2\mathbb{I}([0] \neq [0]^e)] + \mathbb{E}[(\kappa_e)^2\mathbb{I}([0] = [0]^e, [nx] \neq [nx]^e)] = \mathcal{O}((\log n)^6).$$

将此与 (3.10) 结合可得

$$\begin{aligned}\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{E}[(\kappa_e)^2\mathbb{I}(\{\mathcal{Q}_e^0\}^c)] \le &\sum_{e:\min(\|e\|_\infty, \|e-nx\|_\infty)\ge 10(\log n)/c} \exp(-c\min(\|e\|_\infty, \|e - nx\|_\infty)/2) \\ &+ \sum_{e:\min(\|e\|_\infty, \|e-nx\|_\infty)\le 10(\log n)/c} \mathcal{O}((\log n)^6) \\ &= \mathcal{O}((\log n)^{d+6}).\end{aligned}$$

将该估计与（3.8）和（3.7结合起来，即可得到所需结果。 □

命题 3.6 的证明。为方便起见，固定 $t \geq 0$ 并令 $\eta^{0,t} := \tilde{\pi}_M(\mathbf{0}, nx) \cap \tilde{\pi}^t_M(\mathbf{0}, nx)$ 为随机边子集。对于下界（3.3），利用命题 2.7 (i)，可得

$$\begin{aligned}\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{E}\left[\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M, \tilde{\mathrm{T}}^t_M)\mathbb{I}(\mathcal{Q}^0_e \cap \mathcal{Q}^t_e)\right] &\geq \sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{E}\left[\mathbb{I}(e \in \eta^{0,t})\mathbb{I}(\mathcal{Q}^0_e \cap \mathcal{Q}^t_e)\right] \\ &= \sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{E}[\mathbb{I}(e \in \eta^{0,t})(1 - \mathbb{I}(\{\mathcal{Q}^0_e \cap \mathcal{Q}^t_e\}^c)] \\ &\geq \mathbb{E}[|\eta^{0,t}|] - \sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{P}(\{\mathcal{Q}^0_e\}^c \cup \{\mathcal{Q}^t_e\}^c).\end{aligned}$$

由（3.9）可知，存在一个常数 $c > 0$，使得对所有 $s \in \{0, t\}$,

$$\mathbb{P}(\{\mathcal{Q}^s_e\}^c) \leq c^{-1}\exp(-c\min(\|e\|_\infty, \|e - nx\|_\infty).$$

将这些估计与引理3.7结合可得

$$\begin{aligned}\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{E}\left[\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M, \tilde{\mathrm{T}}^t_M)\right] &\geq \mathbb{E}[|\eta^{0,t}|] - \sum_{e\in\eta^{0,t}} \mathbb{P}(\{\mathcal{Q}^0_e\}^c \cup \{\mathcal{Q}^t_e\}^c) - \sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{E}\left[|\,\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M, \tilde{\mathrm{T}}^t_M)|\mathbb{I}(\{\mathcal{Q}^0_e \cap \mathcal{Q}^t_e\}^c)\right] \\ &\geq \mathbb{E}[|\eta^{0,t}|] - \mathcal{O}(\log^{d+8} n).\end{aligned}$$

对于上界（3.4），首先由独立性可得

$$\begin{aligned}&\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{E}\left[\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M, \tilde{\mathrm{T}}^t_M)\right] \leq \frac{1}{p^2}\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{E}\left[\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M, \tilde{\mathrm{T}}^t_M)\mathbb{I}(\tau_e = \tau_e(t) = 1)\right] \\ &\leq \frac{1}{p^2}\left(\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{E}\left[\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M, \tilde{\mathrm{T}}^t_M)\mathbb{I}(\tau_e = \tau_e(t) = 1)\mathbb{I}(\mathcal{Q}^0_e \cap \mathcal{Q}^t_e)\right] + \sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{E}\left[|\,\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M, \tilde{\mathrm{T}}^t_M)|\mathbb{I}(\{\mathcal{Q}^0_e \cap \mathcal{Q}^t_e\}^c)\right]\right).\end{aligned} \tag{3.11}$$

由命题 2.7 (ii) 可知，对所有 $e \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)$，

$$\begin{aligned}0 \leq \mathbb{E}\left[\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M, \tilde{\mathrm{T}}^t_M)\mathbb{I}(\tau_e = \tau_e(t) = 1)\mathbb{I}(\mathcal{Q}^0_e \cap \mathcal{Q}^t_e)\right] &\leq \mathbb{E}\left[(3\mathbb{I}(\mathcal{U}^0_e \cup \mathcal{U}^t_e)M^2 + (\hat{R}^{0,t}_e)^2)\mathbb{I}(e \in \eta^{0,t})\right] \\ &\leq 3M^2\mathbb{E}\left[\sum_{e\in\eta^{0,t}} \mathbb{I}(\mathcal{U}^0_e)\right] + 3M^2\mathbb{E}\left[\sum_{e\in\eta^{0,t}} \mathbb{I}(\mathcal{U}^t_e)\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{e\in\eta^{0,t}} (\hat{R}^{0,t}_e)^2\right].\end{aligned} \tag{3.12}$$

对于 $s \in \{0, t\}$，令 $r^s_e := \min(\|e - [0]_s\|_\infty, \|e - [nx]_s\|_\infty)$。若 $r^s_e \geq 3M$，则 $R^{0,t}_e \geq M$因此 $\hat{R}^{0,t}_e = M$。所以，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{E}\left[\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}, \tilde{\mathrm{T}}^t_M)\mathbb{I}(\tau_e = \tau_e(t) = 1)\mathbb{I}(\mathcal{Q}^0_e \cap \mathcal{Q}^t_e)\right] \\ &\leq 3M^2\mathbb{E}\left[\sum_{e\in\eta^{0,t}} \mathbb{I}(r^0_e \leq 3M)\right] + 3M^2\mathbb{E}\left[\sum_{e\in\eta^{0,t}} \mathbb{I}(r^t_e \leq 3M)\right] + 7\mathbb{E}\left[\sum_{e\in\eta^{0,t}} (\hat{R}^{0,t}_e)^2\right].\end{aligned} \tag{3.13}$$

显然，对于所有 $s \in \{0, t\}$,

$$\begin{aligned}\sum_{e\in\eta^{0,t}} \mathbb{I}(r^s_e \leq 3M) = |e \in \eta^{0,t} : r^s_e \leq 3M| &\leq |\{e \in \eta^{0,t} : \|[0]_s - e\|_\infty \leq 3M\}| + |\{e \in \eta^{0,t} : \|[nx]_s - e\|_\infty \leq 3M\}| \\ &= \mathcal{O}(M^d).\end{aligned} \tag{3.14}$$

因此，我们仍需n 用于控制（3.13）右端的第三项。注意，对于任意 $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{e\in\eta^{0,t}} (\hat{R}^{0,t}_e)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{e\in\eta^{0,t}} (\hat{R}^{0,t}_e)^2\mathbb{I}(\hat{R}^{0,t}_e \leq \alpha)\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{e\in\eta^{0,t}} (\hat{R}^{0,t}_e)^2\mathbb{I}(\hat{R}^{0,t}_e > \alpha)\right] \\ &\leq \alpha^2\mathbb{E}\left[|\eta^{0,t}|\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{e\in\eta^{0,t}} (\hat{R}^{0,t}_e)^2\mathbb{I}(\hat{R}^{0,t}_e \geq \alpha)\right].\end{aligned} \tag{3.15}$$

令 γ^1 为 $\tilde{\mathrm{T}}_M(0,\ nx)$ 在某种确定性破同分规则下的测地线，使得 $\eta^{0,\ t}\subset\gamma^1$。令 γ^2 为从 $\mathbb{Z}^d$到 0 的最短 $[0]$。令 $\gamma:=\gamma^1\cup\gamma^2$ 为从 0出发的随机路径。注意，$|\gamma^2|=\|[0]-0\|_1\le d\|[0]-0\|_\infty$。因此，由引理2.1 和 2.4，

$$\mathbb{P}(|\gamma|\ge 2dC_1n)\le\mathbb{P}(|\gamma^1|\ge dC_1n)+\mathbb{P}(|\gamma^2|\ge dC_1n)=c^{-1}\exp(-cn), \tag{3.16}$$

对于某个常数 $C_1,\ c>0$。应用推论2.10 及 $L=2dC_1n$，我们得到，对于某个常数 $C>0$ ，

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{e\in\eta^{0,t}}(\hat{R}_e^{0,t})^2\right)^2\right]\le\mathbb{E}\left[\left(\sum_{e\in\gamma}(\hat{R}_e^{0,t})^2\right)^2\right]\le Cn^2+\sum_{\ell\ge 2dC_1n}\ell^2(\mathbb{P}(|\gamma|\ge 2dC_1n))^{1/2}\le 2Cn^2. \tag{3.17}$$

由上述两个估计及柯西–施瓦茨不等式，存在一个常数 $c>0$ 使得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{e\in\gamma}(\hat{R}_e^{0,t})^2\mathbb{I}(\hat{R}_e^{0,t}\ge\alpha)\mathbb{I}(|\gamma|\ge 2dC_1n)\right]&\le\mathbb{E}\left[\sum_{e\in\gamma}(\hat{R}_e^{0,t})^2\mathbb{I}(|\gamma|\ge 2dC_1n)\right]\\&\le\left(\mathbb{E}\left[\left(\sum_{e\in\gamma}(\hat{R}_e^{0,t})^2\right)^2\right]\mathbb{P}\left(|\gamma|\ge 2dC_1n\right)\right)^{1/2}\\&\le c^{-1}\exp(-cn).\end{aligned}$$

对于每个 $N\ge\lfloor\alpha\rfloor+1$，令$I_{e,\ N}:=\mathbb{I}(N-1\le\hat{R}^{0,\ t}_{e}<N)$。因此，利用引理2.8，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{e\in\gamma}(\hat{R}_e^{0,t})^2\mathbb{I}(\hat{R}_e^{0,t}\ge\alpha)\mathbb{I}(|\gamma|\le 2dC_1n)\right]&=\sum_{N\ge\lfloor\alpha\rfloor+1}\mathbb{E}\left[\sum_{e\in\gamma}(\hat{R}_e^{0,t})^2I_{e,N}\mathbb{I}(|\gamma|\le 2dC_1n)\right]\\&\le\sum_{N\ge\lfloor\alpha\rfloor+1}N^2\mathbb{E}\left[\sum_{e\in\gamma}I_{e,N}\mathbb{I}(|\gamma|\le 2dC_1n)\right]\\&\le\sum_{N\ge\lfloor\alpha\rfloor+1}N^2\mathbb{E}\left[\max_{\gamma\in\mathcal{P}_{2dC_1n}}\sum_{e\in\gamma}I_{e,N}\right]\\&\le 2dCC_1n\sum_{N\ge\lfloor\alpha\rfloor+1}N^{d+2}\exp(-N/(Cd))\le C_2n\exp(-\alpha/C_2),\end{aligned} \tag{3.18}$$

对于某个常数 $C_2=C_2(d,\ p)>0$。由上述两个估计可知，存在某个常数 $C>0$使得

$$\mathbb{E}\left[\sum_{e\in\eta^{0,t}}(\hat{R}_e^{0,t})^2\mathbb{I}(\hat{R}_e^{0,t}\ge\alpha)\right]\le Cn\exp(-\alpha/C)+C\exp(-n/C). \tag{3.19}$$

将此估计与（3.15）结合可得，对所有 $\alpha>0$,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{e\in\eta^{0,t}}(\hat{R}_e^{0,t})^2\right]\le\alpha^2\mathbb{E}[|\eta^{0,t}|]+Cn\exp(-\alpha/2C)+C\exp(-n/C). \tag{3.20}$$

将此结果和（3.14）代入（3.13）即可得

$$\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}\mathbb{E}\left[\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{T}}_M,\tilde{\mathrm{T}}_M^t)\mathbb{I}(\tau_e=\tau_e(t)=1)\mathbb{I}(\mathcal{Q}_e^0\cap\mathcal{Q}_e^t)\right]\le C\alpha^2\mathbb{E}[|\eta^{0,t}|]+Cn\exp(-\alpha/C)+C(\log n)^{2d+4},$$

其中某个常数为 $C>0$。因此，结合此估计、（3.11）和引理 3.7，即可完成上界的证明。

最后，我们注意到

$$\mathbb{E}[|\eta^{0,t}|]=\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}\mathbb{E}[\mathbb{I}(e\in\tilde{\pi}_M(0,nx))\mathbb{I}(e\in\tilde{\pi}_M^t(0,nx))].$$

根据引理 A.1，我们有 $\mathbb{E}[\mathbb{I}(e\in\tilde{\pi}_M(0,nx))\mathbb{I}(e\in\tilde{\pi}_M^t(0,nx))]$ 关于 t是非递增的。因此，$\mathbb{E}[|\eta^{0,t}|]$ 关于 t也同样是非递增的。□

4. The comparison of $\tilde{\mathrm{D}}^t(0,nx)$ and $\tilde{\mathrm{T}}^t_M(0,nx)$

给定 $t\geq 0$，令 $\mathbb{G}^t([0]_t,[nx]_t)$ 为 $\mathrm{D}^t([0]_t,[nx]_t)$ 的所有测地线组成的集合。回忆一下，$\mathbb{G}^t_M([0]_t,[nx]_t)$ 是 $\mathrm{T}^t_M([0]_t,[nx]_t)$ 的所有测地线组成的集合。若 $t=0$，为简洁起见，我们将 $\mathbb{G}([0],[nx])$ 和 $\mathbb{G}_M([0],[nx])$ 简记为此。在本节中，我们以如下方式将伯努利渗流与首次截断通行渗流耦合：当且仅当 $\omega_e(t)=\tau_e t$ 时，每条边都是 t-开放的（相应地，当且仅当 $\omega_e(t)=\infty$ 且 $\tau_e(t)=M$ 时，每条边都是 t-闭合的）。下一个命题指出，以压倒性的概率，$\tilde{\mathrm{D}}^t(0,nx)$ 和 $\tilde{\mathrm{T}}^t_M(0,nx)$ 的测地线重合。

命题 4.1。存在一个常数 $C>0$，使得对所有 $t\geq 0$，

$$\mathbb{P}(\mathbb{G}^t([0]_t,[nx]_t)=\mathbb{G}^t_M([0]_t,[nx]_t))\geq 1-C\exp(-M^{3/4}/C). \tag{4.1}$$

因此，我们有

$$\mathbb{E}[|\tilde{\pi}(0,nx)\cap\tilde{\pi}^t(0,nx)|-|\tilde{\pi}_M(0,nx)\cap\tilde{\pi}^t_M(0,nx)|]\leq C\exp(-M^{3/4}/C). \tag{4.2}$$

命题 *4.1* 的证明。我们先定义两个事件

$$\mathcal{E}^t_1:=\{\|0-[0]_t\|_\infty,\|nx-[nx]_t\|_\infty\leq M^{7/8}\};$$
$$\mathcal{E}^t_2:=\{\forall\gamma\in\mathbb{G}^t_M([0]_t,[nx]_t),\forall e\in\gamma:R^{0,t}_e\leq M^{3/4}\}.$$

令 $\mathcal{E}^t_3:=\mathcal{E}^t_1\cap\mathcal{E}^t_2$。根据引理 2.1，存在一个常数 $c>0$ 使得

$$\mathbb{P}(\{\mathcal{E}^t_1\}^c)\leq 2\mathbb{P}(\|0-[0]_t\|_\infty\geq M^{7/8})\leq 2c_1^{-1}\exp(-c_1M^{7/8}).$$

注意，在事件 $\mathcal{E}^t_1$ 上，对所有 $\gamma\in\mathbb{G}^t_M([0]_t,[nx]_t)$，都有 $|\gamma|\leq\tilde{\mathrm{T}}^t_M(0,nx)\leq 2n\|x\|_1M$，因此 $\gamma\subset\Lambda_{4n\|x\|_1M}$。故，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\mathcal{E}^t_2\}^c\cap\mathcal{E}^t_1)&\leq\mathbb{P}(\exists\gamma\in\mathbb{G}^t_M([0]_t,[nx]_t),\gamma\subset\Lambda_{4n\|x\|_1M},\exists e\in\gamma:R^{0,t}_e\geq M^{3/4})\\&\leq\mathbb{P}(\exists e\in\Lambda_{4n\|x\|_1M}:R^{0,t}_e\geq M^{3/4})\\&\leq c_2^{-1}(8n\|x\|_1M)^d\exp(-c_2M^{3/4}),\end{aligned}$$

对于某个常数 $c_2>0$。将以上两个不等式合并，存在某个常数 $c_3>0$，

$$\mathbb{P}(\{\mathcal{E}^t_3\}^c)\leq c_3^{-1}\exp(-c_3M^{3/4}).$$

现在我们将证明，在事件 $\mathcal{E}^t_3$ 上，

$$\mathcal{E}^t_4:=\{\forall\gamma\in\mathbb{G}^t_M([0]_t,[nx]_t):\text{ if }e\in\gamma\setminus\{\Lambda_{2M^{7/8}}(0)\cup\Lambda_{2M^{7/8}}(nx)\}\text{ then }e\text{ is }t\text{-open}\}.$$

事实上，我们假设 $\mathcal{E}^t_3$ 发生，令 $\gamma\in\mathbb{G}^t_M([0]_t,[nx]_t)$，且 $e\in\gamma\setminus\{\Lambda_{2M^{7/8}}(0)\cup\Lambda_{2M^{7/8}}(nx)\}$。由 $\mathcal{E}^t_3$ 可知 $R^{0,t}_e\leq M^{3/4}$，因此 $\Lambda_{3R^{0,t}_e}(e)\cap\Lambda_{M^{7/8}}(0)=\varnothing$，并且 $\Lambda_{3R^{0,t}_e}(e)\cap\Lambda_{M^{7/8}}(nx)=\varnothing$，因为 $e\notin\Lambda_{2M^{7/8}}(0)\cup\Lambda_{2M^{7/8}}(nx)$。因此，在事件 $\mathcal{E}^t_3$ 上，当 n 足够大时，我们有 $[0]_t\notin\Lambda_{3R^{0,t}_e}(e)$ 以及 $[nx]_t\notin\Lambda_{3R^{0,t}_e}(e)$。将命题 2.6 (iii) 应用于 $\gamma\in\mathbb{G}^t_M([0]_t,[nx]_t)$，我们得到一条从 $[0]_t$ 到 $[nx]_t$ 的修改路径 η_e，使得

$$e\notin\eta_e,\quad\eta_e\setminus\gamma\text{ is }t\text{-open},\quad|\eta_e\setminus\gamma|\leq C_*R^{0,t}_e.$$

因此，

$$\mathrm{T}^t_M(\gamma)\leq\mathrm{T}^t_M(\eta_e)=\mathrm{T}^t_M(\eta_e\cap\gamma)+\mathrm{T}^t_M(\eta_e\setminus\gamma)\leq\mathrm{T}^t_M(\gamma)-\tau_e(t)+C_*R^{0,t}_e,$$

这意味着 $\tau_e(t)\leq C_*R^{0,t}_e<M$，因此 $\tau_e(t)=1$，即 e 是 t-开放的。

注意，由引理 2.1 和 2.5，存在一个正的常数 C，使得对所有 $z\in\mathbb{Z}^d$，

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}^t_5(z))\geq 1-C\exp(-M^{7/8}/C),$$

其中

$$\mathcal{E}^t_5(z):=\{\mathcal{C}^t_\infty\cap\Lambda_{M^{7/8}}(z)\neq\varnothing\}\cap\{\forall\gamma_1,\gamma_2\subset\mathbb{O}^t(\Lambda_{M^{7/8}}(z)):\mathrm{Diam}(\gamma_1),\mathrm{Diam}(\gamma_2)\geq M^{7/8},\gamma_1\cap\gamma_2\neq\varnothing\}.$$

此外，在事件 $\mathcal{E}^t_4$ 上，γ 必须分别通过两条 t-开放路径 γ_0 和 γ_{nx} 穿过圆环 $\mathrm{A}_{2M^{7/8}}(0)=\Lambda_{6M^{7/8}}(0)\setminus\Lambda_{2M^{7/8}}(0)$ 和 $\mathrm{A}_{2M^{7/8}}(nx):=\Lambda_{6M^{7/8}}(nx)\setminus\Lambda_{2M^{7/8}}(nx)$。因此，在事件 $\mathcal{E}^t_4\cap\mathcal{E}^t_5(0)\cap\mathcal{E}^t_5(nx)$ 上，这些 t-开放路径必须分别与 $\mathcal{C}^t_\infty$ 在两点 u 和 v 相交（见图 1）。结合引理 2.4 可知，对于某个足够大的常数 $C>0$，

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}^t_6)\geq 1-C\exp(-M^{3/4}/C),$$

其中

$$\mathcal{E}^t_6:=\{\forall\gamma\in\mathbb{G}^t_M([0]_t,[nx]_t),\exists u\in\gamma\cap\mathcal{C}^t_\infty\cap\mathrm{A}_{2M^{7/8}}(0),\exists v\in\gamma\cap\mathcal{C}^t_\infty\cap\mathrm{A}_{2M^{7/8}}(nx),$$

$$\|u-[0]_t\|_\infty, \|v-[nx]_t\|_\infty \le 6M^{7/8} : \mathrm{D}^t([0]_t,u) \le CM^{7/8}, \mathrm{D}^t([nx]_t,v) \le CM^{7/8}\}.$$

由事件 $\mathcal{E}_4^t \cap \mathcal{E}_6^t$可知，对于每个 $\gamma \in \mathbb{G}_M^t([0]_t,\ [nx]_t)$，都存在 $u \in \gamma \cap \mathrm{A}_{2M^{7/8}}(\mathbf{0})$ $v \in$

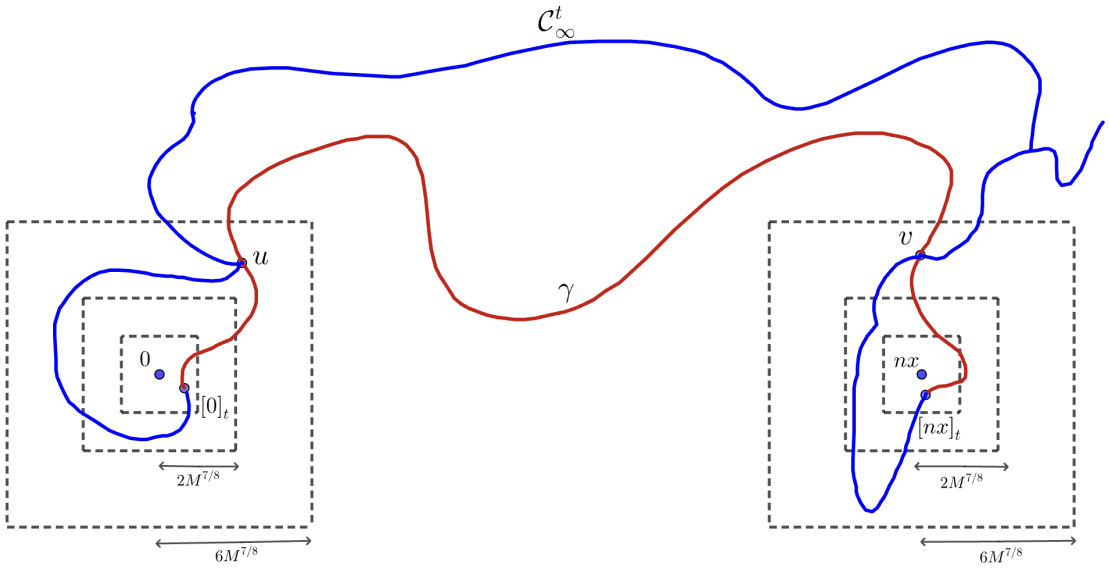


图 1. 事件的示意图 $\mathcal{E}_6^t$

$\gamma \cap \mathrm{A}_{2M^{7/8}}(nx)$，使得子测地线 $\gamma_{[0]_t,u}$,$\gamma_{[nx]_t,v}$，以及 $\gamma \setminus \{\Lambda_{2M^{7/8}}(\mathbf{0}) \cup \Lambda_{2M^{7/8}}(nx)\}$ 是 t-开放的（即不包含任何 M-权重边），因此 γ是 t-开放的，并且 $\tilde{\mathrm{D}}^t(\mathbf{0},nx) \le \mathrm{D}^t(\gamma) = \mathrm{T}_M^t(\gamma) < \infty$。另一方面，显然 $\tilde{\mathrm{D}}^t(\mathbf{0},nx) \ge \tilde{\mathrm{T}}_M^t(\mathbf{0},nx) = \mathrm{T}_M^t(\gamma)$。因此，在事件 $\mathcal{E}_4^t \cap \mathcal{E}_6^t$发生时，我们有 $\tilde{\mathrm{D}}^t(\mathbf{0},nx) = \mathrm{D}^t(\gamma)$，即$\gamma$也是 $\tilde{\mathrm{D}}^t(\mathbf{0},nx)$的一条测地线，故 $\mathbb{G}_M^t([0]_t,[nx]_t) \subset \mathbb{G}^t([0]_t,[nx]_t)$。否则，取 $\eta \in \mathbb{G}^t([0]_t,[nx]_t)$，则$\tilde{\mathrm{D}}^t(\mathbf{0},nx) = \mathrm{D}^t(\eta) = \mathrm{T}_M^t(\eta)$。注意，由 $\mathcal{E}_4^t \cap \mathcal{E}_6^t$可知，存在一条测地线 $\gamma \in \mathbb{G}_M^t([0]_t,[nx]_t) \subset \mathbb{G}^t([0]_t,[nx]_t)$，使得 $\tilde{\mathrm{D}}^t(\mathbf{0},nx) = \mathrm{D}^t(\gamma) = \mathrm{T}_M^t(\gamma) = \tilde{\mathrm{T}}_M^t(\mathbf{0},nx)$。因此，我们有 $\tilde{\mathrm{T}}_M^t(\mathbf{0},nx) = \mathrm{T}_M^t(\eta)$，即 η必定是 $\tilde{\mathrm{T}}_M^t(\mathbf{0},nx)$的一条测地线。这意味着 $\mathbb{G}^t([0]_t,[nx]_t) \subset \mathbb{G}_M^t([0]_t,[nx]_t)$。因此，对所有 $t \ge 0$,

$$\mathbb{P}(\mathbb{G}_M^t([0]_t,[nx]_t) = \mathbb{G}^t([0]_t,[nx]_t)) \ge \mathbb{P}(\mathcal{E}_4^t \cap \mathcal{E}_6^t) \ge 1 - C\exp(-M^{3/4}/C),$$

对某个常数 $C > 0$。

最后，我们断言（4.2）。利用引理 2.4，我们得到

$$\max\{\mathbb{E}[|\tilde{\pi}^t(0,nx)|^2], \mathbb{E}[|\tilde{\pi}_M^t(0,nx)|^2]\} = \mathcal{O}(n^2).$$

由柯西–施瓦茨不等式，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[||\tilde{\pi}(0,nx) \cap \tilde{\pi}^t(0,nx)| - |\tilde{\pi}_M(0,nx) \cap \tilde{\pi}_M^t(0,nx)||] \\
&\quad \le \mathbb{E}[||\tilde{\pi}(0,nx) \cap \tilde{\pi}^t(0,nx)| - |\tilde{\pi}_M(0,nx) \cap \tilde{\pi}_M^t(0,nx)|| \\
&\qquad\qquad \times \mathbb{I}(\{\mathbb{G}_M([0]_t,[nx]_t) = \mathbb{G}([0]_t,[nx]_t) \cap \mathbb{G}_M^t([0]_t,[nx]_t) = \mathbb{G}^t(0,nx)\}^c)] \\
&\quad \le \mathcal{O}(n)(2\mathbb{P}(\mathbb{G}_M([0]_t,[nx]_t) \ne \mathbb{G}([0]_t,[nx]_t)))^{1/2} \le \mathcal{O}(n)\exp(-M^{3/4}/2C).
\end{aligned}$$

这里，对于最后一行，我们使用了

$$\max\{\mathbb{E}[|\tilde{\pi}^t(0,nx)|^2], \mathbb{E}[|\tilde{\pi}_M^t(0,nx)|^2]\} = \mathcal{O}(n^2),$$

接着是引理 2.4。 □

因此，得出如下结论。中，$\tilde{\mathrm{D}}^t$ 的方差和总共同影响可由 $\tilde{\mathrm{T}}_M^t$的方差和总共同影响很好地近似 .

命题 4.2。存在一个常数 $C > 0$，使得对于所有 $t \ge 0$,

$$|\operatorname{Var}(\tilde{\mathrm{D}}^t(0,nx)) - \operatorname{Var}(\tilde{\mathrm{T}}_M^t(0,nx))| \le C\exp(-M^{3/4}/C), \tag{4.3}$$

and

$$\left|\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}\mathbb{E}\left[\Delta_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t)\right]-\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}\mathbb{E}\left[\Delta_e(\tilde{\mathrm{T}}_M,\tilde{\mathrm{T}}_M^t)\right]\right|\le C\exp(-M^{3/4}/C). \tag{4.4}$$

命题 *4.2* 的证明。 我们先证明（4.3）。根据柯西–施瓦茨不等式，

$$\begin{aligned}&|\operatorname{Var}(\tilde{\mathrm{D}}^t(0,nx))-\operatorname{Var}(\tilde{\mathrm{T}}_M^t(0,nx))|\\&\quad\le 2\left(\mathbb{E}[(\tilde{\mathrm{D}}^t(0,nx)-\tilde{\mathrm{T}}_M^t(0,nx))^2](\operatorname{Var}(\tilde{\mathrm{D}}^t(0,nx))+\operatorname{Var}(\tilde{\mathrm{T}}_M^t(0,nx)))\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

我们注意到，如果 $\mathbb{G}^t([0]_t,\ [nx]_t)=\mathbb{G}_M^t([0]_t,\ [nx]_t)$，那么 $\tilde{\mathrm{D}}^t(0,\ nx)=\tilde{\mathrm{T}}_M^t(0,\ nx)$。因此，存在一个常数$C>0$，使得对所有 $t\ge 0$,

$$\mathbb{P}(\tilde{\mathrm{D}}^t(0,nx)=\tilde{\mathrm{T}}_M^t(0,nx))\ge\mathbb{P}(\mathbb{G}^t([0]_t,[nx]_t)=\mathbb{G}_M^t([0]_t,[nx]_t))\ge 1-C\exp(-M^{3/4}/C). \tag{4.5}$$

因此，由命题4.1及柯西–施瓦茨不等式，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\tilde{\mathrm{D}}^t(0,nx)-\tilde{\mathrm{T}}_M^t(0,nx))^2]&=\mathbb{E}[(\tilde{\mathrm{D}}^t(0,nx)-\tilde{\mathrm{T}}_M^t(0,nx))^2\mathbb{I}(\tilde{\mathrm{D}}^t(0,nx)\ne\tilde{\mathrm{T}}_M^t(0,nx))]\\&\le\left(8(\mathbb{E}[(\tilde{\mathrm{D}}^t(0,nx))^4]+\mathbb{E}[(\tilde{\mathrm{T}}_M^t(0,nx))^4])\mathbb{P}(\tilde{\mathrm{D}}^t(0,nx)\ne\tilde{\mathrm{T}}_M^t(0,nx))\right)^{1/2}\\&\le Cn^2\exp(-M^{3/4}/C),\end{aligned} \tag{4.6}$$

对某个常数 $C>0$。结合$\max(\operatorname{Var}(\tilde{\mathrm{D}}^t(0,\ nx)),\ \operatorname{Var}(\tilde{\mathrm{T}}_M^t(0,\ nx)))=\mathcal{O}(n)$，我们得到（4.3）。现在证明（4.4）。对于 $e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)$ 和 $t\ge 0$，我们定义

$$\mathcal{A}_e:=\{\tilde{\mathrm{D}}(0,nx)=\tilde{\mathrm{T}}_M(0,nx),\tilde{\mathrm{D}}(0,nx)\circ\sigma_e^{\omega_e^1}(\omega)=\tilde{\mathrm{T}}_M(0,nx)\circ\sigma_e^{\tau_e^1}(\tau)\},$$

and

$$\mathcal{B}_e^t:=\{\tilde{\mathrm{D}}^t(0,nx)=\tilde{\mathrm{T}}_M^t(0,nx),\tilde{\mathrm{D}}^t(0,nx)\circ\sigma_e^{\omega_e^2}(\omega(t))=\tilde{\mathrm{T}}_M^t(0,nx)\circ\sigma_e^{\tau_e^2}(\tau(t))\}.$$

利用（4.5）和并集界，对于某个 $C>0$,

$$\mathbb{P}(\{\mathcal{A}_e\cap\mathcal{B}_e^t\}^c)\le C\exp(-M^{3/4}/C). \tag{4.7}$$

注意，在事件 $\mathcal{A}_e\cap\mathcal{B}_e^t$ 上，我们有 $\Delta_e(\tilde{\mathrm{D}}\ \tilde{\mathrm{D}}^t)=\Delta_e(\tilde{\mathrm{T}}_M,\ \tilde{\mathrm{T}}_M^t)$。因此，

$$\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}\mathbb{E}\left[\Delta_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t)\right]\le\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}\mathbb{E}\left[\Delta_e(\tilde{\mathrm{T}}_M,\tilde{\mathrm{T}}_M^t)\right]+\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}\mathbb{E}\left[\Delta_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t)\mathbb{I}(\{\mathcal{A}_e\cap\mathcal{B}_e^t\}^c)\right]. \tag{4.8}$$

经过直接的代数运算，我们可以写成

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|\Delta_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t)|\mathbb{I}(\{\mathcal{A}_e\cap\mathcal{B}_e^t\}^c)]&=\mathbb{E}[|\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t)|\mathbb{I}(\omega_e^1=\omega_e^2=\infty,\omega_e=1)\mathbb{I}(\{\mathcal{A}_e\cap\mathcal{B}_e^t\}^c)]\\&\quad+\mathbb{E}[|\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t)|\mathbb{I}(\omega_e^1=\omega_e^2=1,\omega_e=\infty)\mathbb{I}(\{\mathcal{A}_e\cap\mathcal{B}_e^t\}^c)]\\&\le 2\mathbb{E}[|\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t)|\mathbb{I}(\{\mathcal{A}_e\cap\mathcal{B}_e^t\}^c)],\end{aligned} \tag{4.9}$$

其中

$$\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t):=\nabla_e^{\infty,1}\tilde{\mathrm{D}}(0,nx)\nabla_e^{\infty,1}\tilde{\mathrm{D}}^t(0,nx).$$

令 $\omega'':=(\omega_e'')_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}$ 是 ω的独立副本，并且与 ω'、τ^1、τ^2、ω^1、ω^2相互独立。注意到 ω_e''与两个事件 $\{\mathcal{A}_e\cap\mathcal{B}_e^t\}$ 和 $\mathcal{Q}_e^0$相互独立。利用（2.5）中的类似论证，我们得到

$$0\le_{\text{无穷大}_e}(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t)\mathbb{I}(\omega_e''=1)\mathbb{I}(\mathcal{Q}_e^0)\le\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t)\mathbb{I}(e\in\tilde{\pi}(0,nx))\mathbb{I}(\mathcal{Q}_e^0)\le|\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t)|\mathbb{I}(e\in\tilde{\pi}(0,nx)),$$

其中需要指出的是，$\tilde{\pi}(0,\ nx)$ 是环境 $(\omega_e'',\ (\omega_{e'})_{e'\ne e})$ 中的测地线。因此，我们得到

$$\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}\mathbb{E}\left[|\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t)|\mathbb{I}(\mathcal{Q}_e^0)\mathbb{I}(\{\mathcal{A}_e\cap\mathcal{B}_e^t\}^c)\right]\le\frac{1}{p}\mathbb{E}\left[\sum_{e\in\tilde{\pi}(0,nx)}|\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t)|\mathbb{I}(\{\mathcal{A}_e\cap\mathcal{B}_e^t\}^c)\right]. \tag{4.10}$$

根据柯西-施瓦茨不等式，

$$\mathbb{E}\left[\sum_{e\in\tilde{\pi}(0,nx)}|\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t)|\mathbb{I}(\{\mathcal{A}_e\cap\mathcal{B}_e^t\}^c)\right]\le\mathbb{E}\left[\sum_{e\in\tilde{\pi}(0,nx)}|\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t)|\mathbb{I}(\{\mathcal{A}_e\cap\mathcal{B}_e^t\}^c)\mathbb{I}(|\tilde{\pi}(0,nx)|\le C'n)\right]$$

$$+\mathbb{E}\left[\sum_{e\in\tilde{\pi}(0,nx)}|\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t)|\mathbb{I}(\{\mathcal{A}_e\cap\mathcal{B}_e^t\}^c)\mathbb{I}(|\tilde{\pi}(0,nx)|\geq C'n)\right]$$

$$\leq\sum_{e\in\Lambda_{C'n}}\mathbb{E}\left[|\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t)|\mathbb{I}(\{\mathcal{A}_e\cap\mathcal{B}_e^t\}^c)\right]+\sum_{\ell\geq C'n}\mathbb{E}\left[\sum_{e\in\tilde{\pi}(0,nx)}|\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t)|\mathbb{I}(\{\mathcal{A}_e\cap\mathcal{B}_e^t\}^c)\mathbb{I}(|\tilde{\pi}(0,nx)|=\ell)\right]$$

$$\leq\sum_{e\in\Lambda_{C'n}}\mathbb{E}\left[|\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t)|\mathbb{I}(\{\mathcal{A}_e\cap\mathcal{B}_e^t\}^c)\right]+\sum_{\ell\geq C'n}\sum_{e\in\Lambda_{d\ell}}\left(\mathbb{E}\left[\left(\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t)\right)^2\mathbb{I}(\{\mathcal{A}_e\cap\mathcal{B}_e^t\}^c)\right]\mathbb{P}(|\tilde{\pi}(0,nx)|=\ell)\right)^{1/2},\tag{4.11}$$

其中 C' 是引理 2.4中定义的常数。再次根据柯西-施瓦茨不等式，我们有

$$\mathbb{E}\left[\left(\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t)\right)^2\mathbb{I}(\{\mathcal{A}_e\cap\mathcal{B}_e^t\}^c)\right]\leq\left(\mathbb{E}\left[\left(\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t)\right)^4\right]\mathbb{P}(\{\mathcal{A}_e\cap\mathcal{B}_e^t\}^c)\right)^{1/2}.$$

显然，

$$\mathbb{E}\left[\left(\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t)\right)^4\right]=\mathbb{E}\left[(\nabla_e^{\infty,1}\tilde{\mathrm{D}}(0,nx))^4(\nabla_e^{\infty,1}\tilde{\mathrm{D}}^t(0,nx))^4\right]\leq\left(\mathbb{E}\left[(\nabla_e^{\infty,1}\tilde{\mathrm{D}}(0,nx))^8\right]\mathbb{E}\left[(\nabla_e^{\infty,1}\tilde{\mathrm{D}}^t(0,nx))^8\right]\right)^{1/2}$$
$$=\mathbb{E}\left[(\nabla_e^{\infty,1}\tilde{\mathrm{D}}(0,nx))^8\right]=\mathcal{O}(n^8).$$

将此代入（4.7）可得

$$\mathbb{E}\left[\left(\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t)\right)^2\mathbb{I}(\{\mathcal{A}_e\cap\mathcal{B}_e^t\}^c)\right]=C\exp(-M^{3/4}/C),$$

对于某个常数 $C>0$。结合这些不等式与引理 2.4，可得存在某个常数 $C>0$ 使得

$$\sum_{\ell\geq C'n}\sum_{e\in\Lambda_{d\ell}}\left(\mathbb{E}\left[\left(\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t)\right)^2\mathbb{I}(\{\mathcal{A}_e\cap\mathcal{B}_e^t\}^c)\right]\right)^{1/2}(\mathbb{P}(|\tilde{\pi}(0,nx)|=\ell))^{1/2}\leq C\exp(-M^{3/4}/C).\tag{4.12}$$

利用最后两个不等式，式（4.10）和式（4.11）可得

$$\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}\mathbb{E}\left[|\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t))|\mathbb{I}(\Omega_e^0)\mathbb{I}(\{\mathcal{A}_e\cap\mathcal{B}_e^t\}^c)\right]\leq C\exp(-M^{3/4}/C),\tag{4.13}$$

对于某个常数 $C>0$。利用柯西-施瓦茨不等式，可得存在某个常数 $c>0$,

$$\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}\mathbb{E}\left[|\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t))|\mathbb{I}(\{\Omega_e^0\}^c)\mathbb{I}(\{\mathcal{A}_e\cap\mathcal{B}_e^t\}^c)\right]\leq\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}\left(\mathbb{E}\left[|\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t))|^2\mathbb{I}(\{\Omega_e^0\}^c)\mathbb{P}(\{\mathcal{A}_e\cap\mathcal{B}_e^t\}^c)\right]\right)$$
$$\leq\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}\left(\mathbb{E}\left[|\mathrm{Inf}_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t)|^4\right]\right)^{1/2}\left(\mathbb{P}(\{\Omega_e^0\}^c)\right)^{1/4}\left(\mathbb{P}(\{\mathcal{A}_e\cap\mathcal{B}_e^t\}^c)\right)^{1/4}$$
$$\leq c^{-1}\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}\exp(-c\min(\|e\|_\infty,\|e-nx\|_\infty)\exp(-cM^{3/4})$$
$$\leq c^{-1}\exp(-cM^{3/4}/2),\tag{4.14}$$

其中，在第三个不等式中，我们使用了（3.9）和命题 4.1。结合上述两个上界与（4.9）和（4.8），可知存在 $C>0$ 使得

$$\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}\mathbb{E}\left[\Delta_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t)\right]\leq\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}\mathbb{E}\left[\Delta_e(\tilde{\mathrm{T}}_M,\tilde{\mathrm{T}}_M^t)\right]+C\exp(-M^{3/4}/C).\tag{4.15}$$

另一方面，

$$\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}\mathbb{E}\left[\Delta_e(\tilde{\mathrm{T}}_M,\tilde{\mathrm{T}}_M^t)\right]\leq\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}\mathbb{E}\left[\Delta_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t)\right]+\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}\mathbb{E}\left[\Delta_e(\tilde{\mathrm{T}}_M,\tilde{\mathrm{T}}_M^t)\mathbb{I}(\{\mathcal{A}_e\cap\mathcal{B}_e^t\}^c)\right].$$

By 通过与（4.13）和（4.14）中类似的论证，我们推出，对某个常数 $C>0$ ，

$$\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}\mathbb{E}\left[|\Delta_e(\tilde{\mathrm{T}}_M,\tilde{\mathrm{T}}_M^t)|\mathbb{I}(\{\mathcal{A}_e\cap\mathcal{B}_e^t\}^c)\right]\leq C\exp(-M^{3/4}/C).$$

因此，

$$\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}\mathbb{E}\left[\Delta_e(\tilde{\mathrm{T}}_M,\tilde{\mathrm{T}}_M^t)\right]\le\sum_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}\mathbb{E}\left[\Delta_e(\tilde{\mathrm{D}},\tilde{\mathrm{D}}^t)\right]+C\exp(-M^{3/4}/C). \tag{4.16}$$

通过合并（4.15）和（4.16），即可得到该结果。 □

附录 A. 方差的动力学公式：引理 3.2 的证明

给定 h：对于 $\{\ell,L\}^{|E|}\to\mathbb{R}$ 和 $e\in E$，考虑 X 和 X' 之间的插值函数 ，

$$\phi(t_e):=\mathbb{E}[h(X)h(X(t_e,(t_{e'})_{e'\neq e})].$$

我们首先推导 $\phi(t_e)$ 的导数与时刻 t_e 的共同影响之间的关系。

引理 A. **1.** 对于任意函数 $h\in L^2(G_p^{|E|})$ 和 $e\in E$，$\phi(t_e)$ 关于 t_e *a* 单调不增 *nd*

$$\phi'(t_e)=-\mathbb{E}\left[\nabla_e^{X_e,X_e^1}h(X)\nabla_e^{X_e,X_e^2}h(X((t_e)_{e\in E}))\right]. \tag{A.1}$$

证明。为了计算 $\phi'(t_e)$，其中 $t_e\in(0,1)$，我们取满足 $t_e+\delta\in[0,1]$ 的 $\delta>0$。记 $Y:=X(t_e,(t_{e'})_{e'\neq e})$，以及 $Y':=X(t_e+\delta,(t_{e'})_{e'\neq e})$。于是，

$$\phi(t_e+\delta)-\phi(t_e)=\mathbb{E}[h(X)(h(Y')-h(Y))]. \tag{A.2}$$

注意，若 $U_e\notin[t_e,t_e+\delta]$，则 $Y=Y'$。否则，我们有 $Y=(X_e,(X_{e'}(t_{e'}))_{e'\neq e})$ 和 $Y'=(X_e^2,(X_{e'}(t_{e'}))_{e'\neq e})$，并注意到 X_e^2 是 X_e 的独立副本。因此，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h(X)(h(Y')-h(Y))]&=\mathbb{E}[h(X)(h(Y')-h(Y))\mathbb{I}(U_e\in[t_e,t_e+\delta])]\\&=-\delta\mathbb{E}\left[h(X)\nabla_e^{X_e,X_e^2}h(X((t_e)_{e\in E}))\right].\end{aligned}$$

由 X_e^1 独立于 X_e 和 X_e^2，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[h\circ\sigma_e^{X_e^1}(X)\nabla_e^{X_e,X_e^2}h(X((t_e)_{e\in E}))\right]&=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}_{X_e,X_e^2}h\circ\sigma_e^{X_e^1}(X)\nabla_e^{X_e,X_e^2}h(X((t_e)_{e\in E}))\right]\\&=\mathbb{E}\left[h\circ\sigma_e^{X_e^1}(X)\mathbb{E}_{X_e,X_e^2}\left[\nabla_e^{X_e,X_e^2}h(X((t_e)_{e\in E}))\right]\right]=0.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h(X)(h(Y')-f(Y))]&=-\delta\mathbb{E}\left[(h(X)-h\circ\sigma_e^{X_e^1}(X))\nabla_e^{X_e,X_e^2}h(X((t_e)_{e\in E}))\right]\\&=-\delta\mathbb{E}\left[\nabla_e^{X_e,X_e^1}h(X)\nabla_e^{X_e,X_e^2}h(X((t_e)_{e\in E}))\right].\end{aligned} \tag{A.3}$$

将此与（A.2）结合，可得

$$\phi'(t_e)=\frac{d}{dt_e}\mathbb{E}[h(X)h(X(t_e,(t_{e'})_{e'\neq e}))]=-\mathbb{E}\left[\nabla_e^{X_e,X_e^1}h(X)\nabla_e^{X_e,X_e^2}h(X((t_e)_{e\in E}))\right].$$

Finally，由 [ADS23，引理 11]，ϕ（t_e）是非增的，因此 ϕ'（t_e）≤ 0。由此可得tha t

$$\mathbb{E}\left[\nabla_e^{X_e,X_e^1}h(X)\nabla_e^{X_e,X_e^2}h(X((t_e)_{e\in E}))\right]\ge 0.$$

至此证明完毕。 □

引理*3.2*的证明。我们首先观察到

$$\mathrm{Cov}(f(X),f(X(t)))=\mathbb{E}[f(X)f(X(t))]-\mathbb{E}[f(X)f(X(1))]=\int_t^1-\frac{d}{ds}\mathbb{E}[f(X)f(X(s))]ds. \tag{A.4}$$

在 E 有限的情形下，由链式法则，我们有

$$\frac{d}{ds}\mathbb{E}[f(X)f(X(s))]=\sum_{e\in E}\frac{d}{dt_e}\mathbb{E}[f(X)f(X((t_e)_{e\in\mathbb{E}}))]\Big|_{t_e=s,\,\forall e\in E}. \tag{A.5}$$

应用引理A.1 于 $h=f$，$e\in E$，我们得到

$$\phi'(t_e)=\frac{d}{dt_e}\mathbb{E}\left[f(X)f(X((t_e)_{e\in\mathbb{E}}))\right]=-\mathbb{E}\left[\nabla_e^{X_e,X_e^1}f(X)\nabla_e^{X_e,X_e^2}f(X((t_e)_{e\in E}))\right].$$

取 $t_e=s$ 对所有 $e\in E$ 并代入（A.5）和（A.2），可得（3.1）。由于

$$\forall s\in[0,1],\quad\mathbb{E}\left[\nabla_e^{X_e,X_e^1}f(X)\nabla_e^{X_e,X_e^2}f(X(s))\right]\ge 0,$$

我们有 $\mathrm{Cov}(f(X)\ f(X(t)))$ 关于 $t\in[0,1]$ 非负且非递增。

若 E 是（可数）无限的，我们可以将其元素枚举为 $E=\{e_1,e_2,e_3,\ldots\}$。定义一列 σ-代数如下

$$\mathcal{F}_0:=\{\varnothing\};\quad \mathcal{F}_m:=\sigma(\{X_{e_1},X'_{e_1},U_{e_1}\},\ldots,\{X_{e_m},X'_{e_m},U_{e_m}\}).$$

现在我们考虑一个鞅

$$g_m(X(t))=\mathbb{E}[f(X(t))|\mathcal{F}_m].$$

将前面的结果应用于有限情形，我们得到

$$\mathrm{Cov}(g_m(X),g_m(X(t)))=\int_t^1\sum_{i=1}^m\mathbb{E}\left[\nabla_{e_i}^{X_{e_i},X^1_{e_i}}g_m(X)\nabla_{e_i}^{X_{e_i},X^2_{e_i}}g_m(X(s))\right]ds.$$

根据假设，f 具有有限二阶矩，并由Doob鞅定理可知，$g_m(X(t))$ 收敛到 f，在 L^2 中。因此，我们有

$$\mathrm{Cov}(g_m(X),g_m(X(t)))\to\mathrm{Cov}(f(X),f(X(t))),$$

当 $m\to\infty$。注意，共同影响始终非负，并且对于每个 $i\geq 1$ 和 $s\in[0,1]$，若 $m<i$，则 $\mathbb{E}\left[\nabla^{X_{e_i},\ e_i\ \ X^1_{e_i}}g_m(X)\nabla^{X_{e_i},\ e_i\ \ X^2_{e_i}}g_m(X(s))\right]=0$。因此，要证明（3.1），根据单调收敛定理，我们只需证明，对于每个 $i\geq 1$，$m\geq i$ 和 $s\in[0,1]$，

$$\mathbb{E}\left[\nabla_{e_i}^{X_{e_i},X^1_{e_i}}g_m(X)\nabla_{e_i}^{X_{e_i},X^2_{e_i}}g_m(X(s))\right]\to\mathbb{E}\left[\nabla_{e_i}^{X_{e_i},X^1_{e_i}}f(X)\nabla_{e_i}^{X_{e_i},X^2_{e_i}}f(X(s))\right]\ \text{as}\ m\to\infty.\tag{A.6}$$

事实上，对于每个 $i\geq 1$，$s\in[0,1]$，如果 W和 Z是 X_{e_i}的两个副本，且独立于 $(X_{e_j}(s))_{j\neq i}$，那么根据Doob鞅定理

$$g_m\circ\sigma^W_{e_i}(X(s))=\mathbb{E}\left[f\circ\sigma^W_{e_i}(X(s))|\mathcal{F}_m\right]\to f\circ\sigma^W_{e_i}(X(s));\quad g_m\circ\sigma^Z_{e_i}(X(s))=\mathbb{E}\left[f\circ\sigma^Z_{e_i}(X(s))|\mathcal{F}_m\right]\to f\circ\sigma^Z_{e_i}(X(s)),$$

在 L^2 中，当 $m\to\infty$时。因此，

$$\mathbb{E}\left[g_m\circ\sigma^Y_{e_i}(X)g_m\circ\sigma^Z_{e_i}(X(s))\right]\to\mathbb{E}\left[f\circ\sigma^Y_{e_i}(X)f\circ\sigma^Z_{e_i}(X(s))\right],\ \text{as}\ m\to\infty.$$

结合离散导数算子的定义可得（A.6）。 □

附录 B. 测地线相交的下界：命题 2.11 的证明

对于每个 $z\in\mathbb{Z}^d$ 和 $N\geq 1$，我们定义一个盒子

$$B_N(z):=2Nz+[-N,N)^d\cap\mathbb{Z}^d.$$

显然，盒子族 $(B_N(z))_{z\in\mathbb{Z}^d}$ 构成了 $\mathbb{Z}^d$的一个划分。回想一下，令 ω' 为ω的一个独立副本。对于每个 $z\in\mathbb{Z}^d$，我们定义 $\bar\omega^z=(\bar\omega^z_e)_{e\in\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}$ 为

$$\bar\omega^z_e:=\begin{cases}\omega'_e, & \text{if } e\in B_N(z);\\ \omega_e, & \text{if } e\notin B_N(z).\end{cases}$$

换言之，$\bar\omega^z$ 是通过在 $B_N(z)$中对 ω 进行重新抽样得到的。注意，对于任意 $z\in\mathbb{Z}^d$，ω 和 $\bar\omega^z$ 具有相同的分布。

为方便起见，在证明的剩余部分中，我们分别记 $\mathbb{O}_\omega$、$\mathbb{G}_\omega$、D_ω，以强调开放路径的集合、测地线的集合以及环境 ω 中的图距离。令 $\mathcal{E}_n:=\{[0]\in\Lambda_{n^{1/2d}}(0)\ [nx]\in\Lambda_{n^{1/2d}}(nx)\}$。对于每个 $z\in\mathbb{Z}^d$，$\delta>0$ 和 $u\neq v\in\partial B_N(z)$，我们定义

$$\mathcal{A}^{u,\ z\ v}:=\{\text{存在 }\gamma\in\mathbb{G}_\omega([0],\ [nx])\ \gamma\text{在第一个点 }u\text{和最后一个点 }v\text{处穿过 }B_N(z),\ |\gamma_{u,v}|\geq(1+\delta)\|u-v\|_1\};$$

and

$$\mathcal{B}^{u,v}_z:=\{\text{there exists an open path }\pi_{u,v}\subset B_N(z)\cap\mathbb{O}_{\bar\omega^z}(B_N(z))\text{ such that }|\pi_{u,v}|=\|u-v\|_1\}.$$

我们注意到，事件 $\mathcal{B}^{u,\ z\ v}$完全取决于 $B_N(z)$或$(\bar\omega^z_e)_{e\in B_N(e)}$内部的边权重。因此，$\mathcal{B}^{u,\ z\ v}$与 $\mathcal{A}^{u,\ z\ v}$及 $\mathcal{E}_n$相互独立。我们将证明，对于所有$z\notin\Lambda_{0,\ nx}:=\Lambda_{n^{1/2d}+2N}(0)\cup\Lambda_{n^{1/2d}+2N}(nx)$，

$$\mathcal{E}_n\cap\mathcal{A}^{u,v}_z\cap\mathcal{B}^{u,v}_z\subset\{\exists\eta'\in\mathcal{P}(B_N(z)):\forall\eta\in\mathbb{G}_{\bar\omega^z}([0],[nx]),\ \eta'\subset\eta\}.\tag{B.1}$$

事实上，我们现在假设对于$z\notin\Lambda_{0,\ nx}$, $\mathcal{E}_n\cap\mathcal{A}^{u,\ z\ v}\cap\mathcal{B}^{u,\ z\ v}$发生。注意，正则化点 $[0]$，$[nx]$在环境 ω 和 $\bar\omega^z$ 中重合，因为 $[0]\in\Lambda_{n^{1/2d}}(0)$ $[nx]\in\Lambda_{n^{1/2d}}(nx)$ 和 $\{\Lambda_{n^{1/2d}}(0)\cup\Lambda_{n^{1/2d}}(nx)\}\cap B_N(z)=$

∅。那么，存在一条穿过 $B_N(z)$ 的 $\gamma \in \mathbb{G}_\omega([0], [nx])$，其经过第一点 u 和最后一点 v，以及一条开放路径$\pi_{u,v} \subset B_N(z) \cap \mathbb{O}_{\bar{\omega}^z}(B_N(z))$，使得$|\gamma_{u,v}| > \|u-v\|_1 = |\pi_{u,v}|$。因此，

$$\mathrm{D}_\omega(\gamma) = \tilde{\mathrm{D}}_\omega(0, nx) = |\gamma_{[0],u}| + |\gamma_{v,[nx]}| + |\gamma_{u,v}| > |\gamma_{[0],u}| + |\gamma_{v,[nx]}| + |\pi_{u,v}| \geq \tilde{\mathrm{D}}_{\bar{\omega}^z}(0, nx).$$

我们指出，对所有满足 $\eta \cap B_N(z) = \varnothing$ 的路径 η，有 $\mathrm{D}_\omega(\eta) = \mathrm{D}_{\bar{\omega}^z}(\eta)$，从而

$$\mathrm{D}_{\bar{\omega}^z}(\eta) = \mathrm{D}_\omega(\eta) \geq \tilde{\mathrm{D}}_\omega(0, nx) > \tilde{\mathrm{D}}_{\bar{\omega}^z}(0, nx).$$

因此，在事件 $\mathcal{E}_n \cap \mathcal{A}^{u,z^v} \cap \mathcal{B}^{u,z^v}$上，对所有路径 $\eta \in \mathbb{G}_{\bar{\omega}^z}([0], [nx])$，存在 $\eta' \in \mathcal{P}(B_N(z))$ 使得$\eta' \subset \eta$，从而我们断言（B.1）。

利用（B.1）以及 ω 与 $\bar{\omega}^z$ 具有相同分布这一事实，我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{z \notin \Lambda_{0,nx}} \sum_{u \neq v \in \partial B_N(z)} \mathbb{P}(\mathcal{E}_n \cap \mathcal{A}_z^{u,v} \cap \mathcal{B}_z^{u,v}) &\leq \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \sum_{u,v \in \partial B_N(z)} \mathbb{P}(\exists \eta' \in \mathcal{P}(B_N(z)) : \forall \eta \in \mathbb{G}_{\bar{\omega}^z}([0], [nx]), \eta' \subset \eta) \\
&= |\partial B_N(z)|^2 \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(\exists \gamma' \in \mathcal{P}(B_N(z)) : \forall \gamma \in \mathbb{G}_\omega([0], [nx]), \gamma' \subset \gamma) \\
&\leq |\partial B_N(z)|^2 \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(\exists e \in B_N(z) : \forall \gamma \in \mathbb{G}_\omega([0], [nx]), e \subset \gamma) \\
&\leq (2N+1)^{2d} \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(\exists e \in B_N(z) : \forall \gamma \in \mathbb{G}_\omega([0], [nx]), e \subset \gamma) \\
&\leq (2N+1)^{2d} \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \sum_{e \in B_N(z)} \mathbb{P}(\forall \gamma \in \mathbb{G}_\omega([0], [nx]), e \subset \gamma) \\
&= (2N+1)^{2d} \sum_{e \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)} \mathbb{P}(\forall \gamma \in \mathbb{G}_\omega([0], [nx]), e \subset \gamma) \\
&= (2N+1)^{2d} \mathbb{E}[|\tilde{\pi}(0, nx)|]. \qquad \text{(B.2)}
\end{aligned}$$

我们仍需给出（B.2）左端的下界。对每个 $z \in \mathbb{Z}^d$ 与 ρ，$\delta > 0$，我们称盒子 $B_N(z)$ 是 (ρ, δ)-好的，如果对所有满足 $\mathrm{D}_\omega(u, v) < \infty$ 的 $u \neq v \in B_N(z)$，都有 $\rho\|u-v\|_1 \geq \mathrm{D}(u, v) \geq (1+\delta)\|u-v\|_1$。注意到对所有 $u \neq v \in \partial B_N(z)$，$\mathbb{P}(\mathcal{B}^{u,z^v}) \geq p^{\|u-v\|_1} \geq p^{d(2N+1)}$。由独立性，对所有充分大的 n，我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{z \notin \Lambda_{0,nx}} \sum_{u \neq v \in \partial B_N(z)} \mathbb{P}(\mathcal{E}_n \cap \mathcal{A}_z^{u,v} \cap \mathcal{B}_z^{u,v}) &\geq \sum_{z \notin \Lambda_{0,nx}} \sum_{u \neq v \in \partial B_N(z)} \mathbb{P}(\mathcal{E}_n \cap \mathcal{A}_z^{u,v}) \mathbb{P}(\mathcal{B}_z^{u,v}) \\
&\geq p^{d(2N+1)} \sum_{z \notin \Lambda_{0,nx}} \sum_{u \neq v \in \partial B_N(z)} \mathbb{P}(\mathcal{E}_n \cap \{\exists \gamma \in \mathbb{G}_\omega([0], [nx]), \gamma \text{ crosses } B_N(z) \text{ at first point } u \text{ and last point } v, \\
&\qquad\qquad |\gamma_{u,v}| \geq (1+\delta)\|u-v\|_1\}) \\
&\geq p^{d(2N+1)} \sum_{z \notin \Lambda_{0,nx}} \mathbb{P}(\mathcal{E}_n \cap \{\exists u \neq v \in \partial B_N(z), \exists \gamma \in \mathbb{G}_\omega([0], [nx]), \gamma \text{ crosses } B_N(z) \text{ at first point } u \\
&\qquad\qquad \text{and last point } v, \mathrm{D}_\omega(u, v) \geq (1+\delta)\|u-v\|_1\}) \\
&\geq \frac{1}{2} p^{d(2N+1)} \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(\{\exists \gamma \in \mathbb{G}_\omega([0], [nx]), \gamma \text{ crosses } B_N(z), B_N(z) \text{ is } (\rho, \delta)\text{-good}\} | \mathcal{E}_n) - \mathcal{O}(n^{1/2}). \qquad \text{(B.3)}
\end{aligned}$$

这里在最后一步用到了 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_n) \geq 1 - C\exp(-n^{1/2d}/C)$ 其中某个常数为 $C > 0$。给定 $[0] \in \Lambda_{n^{1/2d}}(0)$和 $[nx] \in \Lambda_{n^{1/2d}}(nx)$，令 η 为环境 ω 中从 $[0]$ 到 $[nx]$ 的测地线，并采用确定性破同分规则。式（B.3）右端各项之和的下界为

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(\eta \text{ 交叉 }]\text{s } B_N(z), B_N(z) \text{ is } (\rho, \delta)\text{-good} | \mathcal{E}_n) = \mathbb{E}\left[\#\{\text{distinct } (\rho, \delta)\text{-good boxes that } \eta \text{ crosses}\} | \mathcal{E}_n \right. \qquad \text{(B.4)}$$

根据 [Jac24，定理 1、1], 引理 2.4 以及并集界，存在某些常数 C，ρ，$\delta > 0$，使得对所有$z \in \mathbb{Z}^d$ 和 N 足够大时，

$$\mathbb{P}(B_N(z) \text{ is } (\rho, \delta)\text{-good}) \geq 1 - C\exp(-N/C). \qquad \text{(B.5)}$$

注意，事件 $\{B_N(z)$是(ρ, δ)-好的$\}$仅依赖于 $\Lambda_{\rho N}(z)$中边的状态。因此，变量$\{\mathbb{I}(B_N(z)$是(ρ, δ)-好的$)\}_{z \in \mathbb{Z}^d}$构成一个有限相依位点渗流过程。使用标准的Peierls论证

以及并集界（参见， [vdBK93，引理5.2]）可推得存在 $C>0$ 使得对所有 N 充分大

$$\mathbb{P}\left(\{\exists \text{一条从 } [0] \text{ 到 } [nx] \text{ 的路径，该路径至多穿过 } \frac{n}{CN} \text{ 个不同的（}\rho,\ \delta\text{）-好盒子}\}|\mathcal{E}_n\right) \leq C\exp\left(\frac{-n}{CN}\right).$$

由此可得，存在一个常数 $c>0$ ，使得对所有足够大的 N ，

$$\mathbb{E}\left[\#\{\text{distinct } (\rho,\delta)\text{-good boxes that } \eta \text{ crosses}\}|\mathcal{E}_n\right] \geq cn/N.$$

将此与（B.4）和（B.3）相结合，可得

$$\sum_{z\notin\Lambda_{0,nx}} \sum_{u,v\in\partial B_N(z)} \mathbb{P}(\mathcal{E}_n\cap\mathcal{A}_z^{u,v}\cap\mathcal{B}_z^{u,v}) \geq n/C, \tag{B.6}$$

对某个常数 $C>0$。最后，将此与（B.2）合并，我们便得到所需结果。 □

参考文献

[ADS23] Daniel Ahlberg、Maria Deijfen 和 Matteo Sfragara。《首次通过渗流中的混沌、集中与多重谷》。arXiv 预印本 arXiv:2302.11367，2023年。[AP96] Peter Antal 和 Agoston Pisztora。超临界伯努利渗流中的化学距离。《概率年刊》，24(2)：1036–1048，1996年。[BH57] Simon R Broadbent 和 John M Hammersley。渗流过程：I. 晶体与迷宫。《剑桥哲学学会数学会刊》，53(3)：629–641，1957年。[BKS99] Itai Benjamini、Gil Kalai 和 Oded Schramm。布尔函数的噪声敏感性及其在渗流中的应用。《高等科学研究所数学出版物》，90(1)：5–43，1999年。[BKS03] I Benjamini、G Kalai 和 O Schramm。首次通过渗流的距离方差为次线性。《概率年刊》，31(4)：1970–1978，2003年。[BLZ20] Charles Bordenave、Gábor Lugosi 和 Nikita Zhivotovskiy。维格纳矩阵最大特征向量的噪声敏感性。《概率论及相关领域》，177(3)：1103–1135，2020年。[BM87] Alan J Bray 和 Michael A Moore。自旋玻璃相的混沌性质。《物理评论快报》，58(1)：57，1987年。[BSS] Riddhipratim Basu、Vladas Sidoravicius 和 Allan Sly。旋转不变的首次通过渗流：打破 n/log n 方差障碍。准备中。[CD22] Raphaël Cerf 和 Barbara Dembin。伯努利渗流的时间常数在严格高于临界概率 pc 时是利普希茨连续的。《概率年刊》，50(5)：1781–1812，2022年。[Cha08] Sourav Chatterjee。混沌、集中与多重谷。arXiv 预印本 arXiv:0810.4221，2008年。[Cha09] Sourav Chatterjee。自旋玻璃中的无序混沌与多重谷。arXiv 预印本 arXiv:0907.3381，2009年。[Cha14] Sourav Chatterjee。《超集中及相关主题》，第15卷。施普林格，2014年。[Cha23] Sourav Chatterjee。表面生长中的超集中。《随机结构与算法》，62(2)：304–334，2023年。[CN19] Van Hao Can 和 Shuta Nakajima。青蛙模型的首次通过时间具有次线性方差。《电子概率期刊》，24：1–27，2019年。[CN25] Van Hao Can 和 VAN QUYET NGUYEN。伯努利渗流中化学距离的亚扩散集中。arXiv 预印本 arXiv:2406.14834，2025年。[CNN24] Van Hao Can、Shuta Nakajima 和 VAN QUYET NGUYEN。广义首次通过渗流中时间常数的利普希茨连续性。《随机过程及其应用》，175：104402，2024年。[DC18] Hugo Duminil-Copin。渗流六十年。载于《2018年里约热内卢国际数学家大会论文集》，第IV卷，第2829–2856页。世界科学出版社，2018年。[Dem22] Barbara Dembin。渗流无限簇中的图距离方差为次线性。arXiv 预印本 arXiv:2203.01083，2022年。[DG24] Barbara Dembin 和 Christophe Garban。首次通过渗流与无序伊辛铁磁体中极小曲面的超集中。《概率论及相关领域》，第1–28页，2024年。[DHJ+20] Michael Damron、Jack Hanson、Christopher Janjigian、Wai-Kit Lam 和 Xiao Shen。首次通过渗流中测地线上的经验分布估计。arXiv 预印本 arXiv:2010.08072，2020年。[DHS15] Michael Damron、Jack Hanson 和 Philippe Sosoe。一般分布下首次通过渗流中的次线性方差。《概率论及相关领域》，163(1)：223–258，2015年。[DN22] Barbara Dembin 和 Shuta Nakajima。超临界渗流中化学距离上尾大偏差速率函数。《arXiv》预印本 arXiv:2211.02605，2022年。[FH91] Daniel S Fisher 和 David A Huse。随机势中的有向路径。《物理评论B辑》，43(13)：10728，1991年。[GH24] Shirshendu Ganguly 和 Alan Hammond。动态末次通过渗流中的稳定性与混沌。《美国数学会通讯》，4(09)：387–479，2024年。[GM04] Olivier Garet 和 Régine Marchand。无限伯努利簇上化学距离与首次通过渗流的渐近形状。ESAIM：《概率与统计》，8：169–199，2004年。[GM07] Olivier Garet 和 Régine Marchand。超临界伯努利渗流中化学距离的大偏差。《概率年刊》，35(3)：833–866，2007年。[GM09] Olivier Garet 和 Régine Marchand。伯努利渗流中化学距离的中等偏差。ALEA，《拉丁美洲概率与数理统计杂志》，7：171–191，2009年。[Gri89] Geoffrey Grimmett。《渗流》。施普林格-维拉格，1989年。[Jac24] Antonin Jacquet。首次通过渗流中测地线会穿过任意图案：无需任何矩假设，且通过时间可以是无限的。arXiv 预印本 arXiv:2412.20779，2024年。

[Jac25] Antonin Jacquet。首次通过渗流中测地线会穿过任意图案：无需任何矩假设，且通过时间可以是无限的。《随机过程及其应用》，179：104496，2025年。[MBK82] Susan R McKay、A Nihat Berker 和 Scott Kirkpatrick。具有混沌重整化群轨迹的受挫伊辛模型中的自旋玻璃行为。《物理评论快报》，48(11)：767，1982年。[Méz90] Marc Mézard。二维随机定向高分子的玻璃态性质。《物理学杂志》，51 1846，1990 17 1831( ): – 。[Pis96] Agoston Pisztora。伊辛、波茨与渗流模型的表面阶大偏差。《概率论及相关领域》，104：427–466，1996年。[TV23] Vincent Tassion 和 Hugo Vanneuville。通过微分不等式研究渗流的噪声敏感性。《伦敦数学学会会刊》，126(4)：1063–1091，2023年。[vdBK93] Jacob van den Berg 和 Harry Kesten。首次通过渗流时间常数的不等式。《应用概率年刊》，第56–80页，1993年。[Zha87] Yi-Cheng Zhang。随机系统的基态不稳定性。《物理评论快报》，59(19)：2125，1987年。