arXiv:2602.01049v1 [math.GT] 1 Feb 2026

小虚部复数参数化的八字结广义体积猜想

HITOSHI MURAKAMI

Dedicated to the memory of my mother, Yachiyo Murakami (1932–2025)

Abstract. 我们研究当 N 趋于无穷时，八字结的N维彩色琼斯多项式在复参数 ξ 满足 $0 <$ 虚部$\xi < \pi/2$时，取值于 $\exp(\xi/N)$ 的渐近行为。我们证明，若实部ξ 较大，则彩色琼斯多项式呈指数增长，其增长率可用陈–西蒙斯不变量表示；若实部ξ 较小，则它收敛至亚历山大多项式在 $\exp\xi$ 处取值的倒数。

Contents

1. 引言 2 2. 求和公式 8 3. 区域与曲线 18 3.1. φ 与 σ 18的位置 3.2. Re $F(z)$ 的偏导数 19 3.3. 曲线 H_G^0 21的形状 3.4. 曲线 χ_G 与 χ_F 273.5. 线段 h_F 与 v_F 294. 泊松求和公式 31 4.1. 泊松求和公式的陈述 31 4.2. 泊松求和公式的假设 31 4.2.1. Re $F(\sigma) > 0$ 32 的情形 4.2.2. Re $F(\sigma) \leq 0$ 35 的情形 5. 主定理的证明 35 5.1. 鞍点法 36 5.2. 主定理的证明 39 6. 陈–西蒙斯不变量与伴随 Reidemeister 扭率 49 6.1. 表示 49 6.2. 伴随 Reidemeister 扭率 51 6.3. 陈–西蒙斯不变量 51 附录 A. 命题 3.14 的证明 54 A.1. 曲率的计算 54 A.2. $\beta \geq 1/2$ 57 的情形 A.3. $0 < \beta < 1/2$ 与 $\alpha \geq 3/2$ 58的情形 A.4. $0 < \beta < 1/2$ 与 $1/2 < \alpha < 3/2$ 60的情形 附录 B. 技术引理 71

Date：2026年2月3日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：57K10 57K14 57K16。*Key words and phrases.*彩色琼斯多项式、八字结、体积猜想、陈–西蒙斯不变量、Reidemeister 扭率、SL(2;R) 表示。作者获得日本学术振兴会科学研究费助成事业资助，项目编号：JP20K03601、JP24K06702、JP23K22388、JP20K03931。

参考文献 83

1. Introduction

对于三维球面 S^3中的结 K 以及整数 $N \geq 2$，令 $J_N(K;\, q)$ 表示与李代数 $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ 的 N 维不可约表示相关联的彩色琼斯多项式，其复参数为 q。例如，参见 [9, § 3] 。我们将其归一化，使得对于平凡结 U， $J_N(U;\, q) = 1$；并且 $J_2(K;\, q)$ 是著名的琼斯多项式 $V(K;q)$ [7]。

如果我们将 q替换为单位根 $e^{2\pi\sqrt{-1}/N}$，且其阶为 N，那么 $J_N\left(K;\ e^{2\pi\sqrt{-1}/N}\right)$给出一个复数级数 $\left\{J_N\left(K;\ e^{2\pi\sqrt{-1}/N}\right)\right\}_{N=2,\ 3,\ \ldots\ldots}$。体积猜想指出，这个级数能够确定结补空间 $S^3 \setminus K$ 的单纯体积。

猜想 1.1（体积猜想 [8],[17]）。对于任意结 K in S^3，有

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \left| J_N\left(K; e^{2\pi\sqrt{-1}/N}\right)\right| = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Vol}\left(S^3 \setminus K\right), \tag{1.1}$$

其中 Vol 表示单纯体积。注意，若 K 是双曲的，也就是说， $S^3\setminus K$具有有限体积的完备双曲结构，那么 $\operatorname{Vol}\left(S^3 \setminus K\right)$ 与双曲体积相同。

若去掉左侧的绝对值符号 (1.1)，我们得到一个复数。

猜想 1.2（体积猜想的复化 [18]）。对于结 $K \subset S^3$，有

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log J_N\left(K; e^{2\pi\sqrt{-1}/N}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{Vol}\left(S^3 \setminus K\right) + \sqrt{-1}\, \mathrm{CS}^{\mathrm{SO}(3)}\left(S^3 \setminus K\right)\right),$$

其中 $\mathrm{CS}^{\mathrm{SO}(3)}$ 是当 K 为双曲结时与 Levi-Civita 联络相关联的陈–西蒙斯不变量，否则则由上面的方程定义。

若将 $2\pi\sqrt{-1}$ 替换为一般复数 ξ，我们会得到各种级数$\left\{J_N\left(K;\ e^{\xi/N}\right)\right\}_{N=2,\ 3,\ \text{依赖于}\ \xi}$。本文考虑八字结 $\mathscr{E} \subset S^3$，并研究当 $\operatorname{Im}\xi$ 较小时， $J_N(\mathscr{E};\, e^{\xi/N})$ 在 $N \to \infty$ 时的渐近行为。

对于复数 z，我们定义

$$\varphi(z) := \log\left(\cosh z - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(2\cosh z - 3)(2\cosh z + 1)}\right), \tag{1.2}$$

$$S(z) := \operatorname{Li}_2\left(e^{-z-\varphi(z)}\right) - \operatorname{Li}_2\left(e^{-z+\varphi(z)}\right) + z\varphi(z), \tag{1.3}$$

$$S^-(z) := S(z) + 2z\pi\sqrt{-1}, \tag{1.4}$$

$$S^+(z) := -S(z) + 2z\pi\sqrt{-1}, \tag{1.5}$$

$$T(z) := \frac{2}{\sqrt{(2\cosh z + 1)(2\cosh z - 3)}},$$

其中 $\operatorname{Li}_2(w)$: $= -\int_0^w \frac{\log(1-t)}{t}\, dt$ 是二重对数函数。Li_2的支割线为 $(1, \infty)$，并且我们令 $\operatorname{Im}\operatorname{Li}_2(x) = -\pi\overline{\sqrt{-1}}\log\, x$，其中 $x > 1$。我们选取 $(-\infty, 0)$ 作为平方根和对数的支割线。对于负数 x,

我们定义 $\sqrt{x}:=\sqrt{-1}\sqrt{|x|}$，以及 $\log\ x:=\log\ |x|+\pi\sqrt{-1}$。注意，$\cosh\varphi(z)\ =\cosh\ z-1/2$。

令 $\kappa:=$反双曲余弦$(3/2)\ =0.962424\ldots$，使得 $\varphi(\kappa)\ =0$。

注 1.3. 由于 $\varphi(\kappa)$ 消失，我们可知 $S^{+}(\kappa)\ =S^{-}(\kappa)=2\kappa\pi\sqrt{-1}$。

对于任意结，我们有 $J_N(K;\ \overline{q})\ =\overline{J_N(K;\ q)}$，其中 $\overline{z}$是 z的复共轭。由于八字结是可逆镜像的，我们有 $J_N(\mathscr{E};\ q^{-1})\ =J_N(\mathscr{E};\ q)$。因此，在研究 $J_N(\mathscr{E};\ e^{\xi/N})$ 时，本文假设 $\mathrm{Re}\ \xi\geq 0$和 $\mathrm{Im}\ \xi\geq 0$。

迄今已知以下结果。

(i) $\xi\ =\ 2p\pi\sqrt{-1}+u$，其中 $u\ \in\ \mathbb{R}$ 满足 $0\ <\ u\ <\ \kappa$，且 p 为正整数。作者在 [13] 和[15, 定理 1.4] 中证明了以下渐近公式。

$$J_N(\mathscr{E};e^{\xi/N})\underset{N\to\infty}{\sim}J_p(\mathscr{E};e^{4N\pi^2/\xi})\frac{\sqrt{-\pi}}{2\sinh(u/2)}T(\xi)^{1/2}\left(\frac{N}{\xi}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{S^{+}(u)}{\xi}N\right).$$

由于 $J_1(\mathscr{E};q)\ =1$，若 $\xi=2\pi\sqrt{-1}+u$，则有

$$J_N(\mathscr{E};e^{\xi/N})\underset{N\to\infty}{\sim}\frac{\sqrt{-\pi}}{2\sinh(u/2)}T(\xi)^{1/2}\left(\frac{N}{\xi}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{S^{+}(u)}{\xi}N\right).$$

(ii) $\xi\ =\ 2p\pi\sqrt{-1}+\kappa$，其中 p 是正整数。作者在 [16, 定理 1.8] 中证明了以下渐近公式。

$$J_N(\mathscr{E};e^{\xi/N})\underset{N\to\infty}{\sim}J_p(\mathscr{E};e^{4\pi^2N/\xi})\frac{\Gamma(1/3)e^{\pi\sqrt{-1}/6}}{3^{1/6}}\left(\frac{N}{\xi}\right)^{2/3}\exp\left(\frac{S^{\pm}(\kappa)}{\xi}N\right),$$

其中 $\Gamma(z)$ 是伽马函数，而 $S^{\pm}(\kappa)$ 表示 $S^{+}(\kappa)$ 或 $S^{-}(\kappa)$。注意，根据注 1.3，$S^{+}(\kappa)=S^{-}(\kappa)$。

特别地，若 $\xi=2\pi\sqrt{-1}+\kappa$，则有

$$J_N(\mathscr{E};e^{\xi/N})\underset{N\to\infty}{\sim}\frac{\Gamma(1/3)e^{\pi\sqrt{-1}/6}}{3^{1/6}}\left(\frac{N}{\xi}\right)^{2/3}\exp\left(\frac{S^{\pm}(\kappa)}{\xi}N\right).$$

(iii) $\xi=2p\pi\sqrt{-1}+u$，其中 $u\in\mathbb{R}$ 满足 $u>\kappa$ 且 p 是正整数。作者在 [14, 定理 1.11] 中证明了以下渐近公式。

$$J_N(\mathscr{E};e^{\xi/N})\underset{N\to\infty}{\sim}J_p(\mathscr{E};e^{4N\pi^2/\xi})\frac{\sqrt{\pi}}{2\sinh(u/2)}T(\xi)^{1/2}\left(\frac{N}{\xi}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{S^{-}(u)}{\xi}N\right).$$

When $\xi=2\pi\sqrt{-1}+u$, we have

$$J_N(\mathscr{E};e^{\xi/N})\underset{N\to\infty}{\sim}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sinh(u/2)}T(\xi)^{1/2}\left(\frac{N}{\xi}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{S^{-}(u)}{\xi}N\right).$$

(iv) $\xi\in\Omega$，其中我们令

$$\Omega:=\{\xi\in\mathbb{C}\mid\cosh(\mathrm{Re}\,\xi)-\cos(\mathrm{Im}\,\xi)<1/2,|\,\mathrm{Im}\,\xi|<\pi/3\}. \tag{1.6}$$

作者在 [12, 定理 1.1] 中证明，彩色琼斯多项式按如下方式收敛。

$$\lim_{N\to\infty}J_N(\mathscr{E};e^{\xi/N})=\frac{1}{\Delta(e^{\xi})},$$

其中 $\Delta(t)$ 是八字结的亚历山大多项式，其规范化使得 $\Delta(1)\ =1$，并且 $\Delta(t^{-1})\ =\Delta(t)$。

(v) $\xi = \kappa$。K. Hikami 与作者证明了彩色琼斯多项式呈多项式增长。事实上，我们在 [6, 定理 1.1] 中证明了如下渐近公式。

$$J_N(\mathscr{E}; e^{\xi/N}) \underset{N\to\infty}{\sim} \frac{\Gamma(1/3)}{3^{2/3}} \left(\frac{N}{\kappa}\right)^{2/3}.$$

(vi) $\xi \in \mathbb{R}$ 满足 $\xi > \kappa$。A. Tran 与作者在 [19, 定理 1.5] 中证明了以下渐近公式。

$$J_N(\mathscr{E}; e^{\xi/N}) \underset{N\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sinh(\xi/2)} T(\xi)^{1/2} \left(\frac{N}{\xi}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{S(\xi)}{\xi} N\right).$$

以下结果也已为人所知。

(vii) $\xi = 2\pi\sqrt{-1}$。J.E. Andersen 和 S.K. Hansen 证明了以下渐近公式 [1, 定理 1]。

$$J_N(\mathscr{E}; e^{2\pi\sqrt{-1}/N}) \underset{N\to\infty}{\sim} -2\pi^{3/2} T(0)^{1/2} \left(\frac{N}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{N}{2\pi\sqrt{-1}} S^+(0)\right).$$

(viii) $\xi = 2\pi\sqrt{-1} + u$ 满足 $u \in \mathbb{C} \setminus \sqrt{-1}\mathbb{R}$ 且 $|u|$ 很小。Y. Yokota 与作者 [20] 证明了以下公式。

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log J_N(\mathscr{E}; e^{\xi/N}) = \frac{S^+(u)}{\xi}.$$

参见图1。

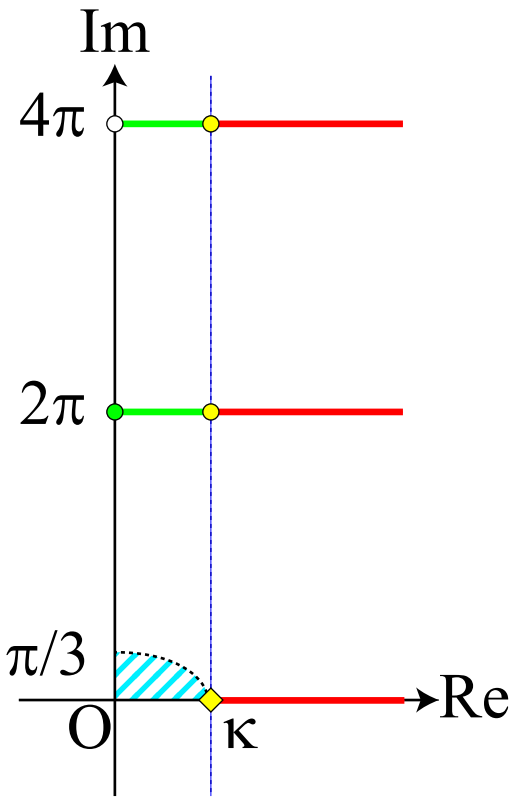

FIGURE 1. 绿色线条对应情形（i），黄色圆盘对应（ii），红线对应（iii）和（vi），青色条纹区域对应（iv），黄色菱形对应（v），绿色圆盘对应（vii）。

注1.4。在 [13, 15, 16], 中， $0 < u \leq \kappa$ 对应的 $S^{+}(u)$ 公式有所不同，因为我们对 $\varphi(u)$ 的定义不同。事实上，在那里我们将 $\varphi(u)$（$0 < u \leq \kappa$）定义为

$$\log\left(\cosh u - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(2\cosh u - 3)(2\cosh u + 1)}\right), \tag{1.7}$$

我们在此将其记为 $\widetilde{\varphi}(u)$。

由于 $e^{\varphi(u)}$ 与 $e^{\widetilde{\varphi}(u)}$ 均满足判别式为 (2 双曲余弦 $u-1)^2 - 4 =$(2 双曲余弦 $u-3)$(2 双曲余弦 $u+1$) 的二次方程 $x^2 -$(2 双曲余弦 $u-1)x+1 =0$，我们看到 $|e^{\varphi(u)}| = |e^{\widetilde{\varphi}(u)}| = 1$ 与 $e^{\widetilde{\varphi}(u)} = e^{\overline{\varphi(u)}}$。因此，若 $0 < u < \kappa =$ 反双曲余弦$(3/2)$, 则它们是纯虚数，且 $\widetilde{\varphi}(u) + \varphi(u) = 0$，因为它们的辐角应介于 $-\pi$ 与 π 之间。若 $u = \kappa$，则 $\varphi(\kappa) = \widetilde{\varphi}(\kappa) = 0$。于是我们得出，对 $0 < u \leq \kappa$ 有 $\varphi(u) = -\widetilde{\varphi}(u)$。

此外， $S^{+}(u)$被定义为

$$\mathrm{Li}_2\left(e^{-u-\widetilde{\varphi}(u)}\right) - \mathrm{Li}_2\left(e^{-u+\widetilde{\varphi}(u)}\right) + u\big(\widetilde{\varphi}(u) + 2\pi\sqrt{-1}\big)$$

~在 [13, 15, 16], 中，我们在此将其记为 $S^{+}(u)$。由(1.5)，本文中的 $S^{+}(u)$等于

$$\mathrm{Li}_2\left(e^{-u+\varphi(u)}\right) - \mathrm{Li}\left(e^{-u-\varphi(u)}\right) + u\big(-\varphi(u) + 2\pi\sqrt{-1}\big),$$

~，这与 $S^{+}(u)$一致。

本文研究当 $N \to \infty$时，在 $0 <$虚部$\xi < \pi/2$ 且实部$\xi > 0$的情形下 $J_N(\mathscr{E}; e^{\xi/N})$ 的渐近行为。

本文通篇使用如下术语。

我们固定一个复数 ξ，并记 $a :=$ 实部 ξ 以及 $b :=$ 虚部 ξ， $c :=$ 实部 $\varphi(\xi)$，以及$d :=$ 虚部 $\varphi(\xi)$，其中 $\varphi(\xi)$在(1.2)中定义。我们常常略去 $\varphi(\xi)$中的 ξ，并简记为 φ。我们还令

$$\alpha := \cosh a \cos b, \tag{1.8}$$

$$\beta := \sinh a \sin b \tag{1.9}$$

使得双曲余弦$\xi = \alpha + \beta\sqrt{-1}$。

在 φ的定义中，我们有一个平方根。由于我们计算

$$(2\cosh\xi - 3)(2\cosh\xi + 1) = (2\alpha - 3)(2\alpha + 1) - 4\beta^2 + 4\beta(2\alpha - 1)\sqrt{-1}, \tag{1.10}$$

平方根$\sqrt{}$(2 双曲余弦$\xi - 3$)(2 双曲余弦 $\xi + 1$)沿着曲线 $2\alpha =$1有一条支割线。因此，将我们的范围限制在以下区域是自然的:

$$\Xi := \{\xi \in \mathbb{C} \mid a > 0, 0 < b < \pi/2, \cosh a \cos b > 1/2\}. \tag{1.11}$$

然而，出于某些技术原因，我们将范围限制在以下更小的区域 $\Gamma \subset \Xi$。

$$\Gamma := \Xi \cap \{\xi \in \mathbb{C} \mid a\tanh c - b\tan d \geq 0, \cosh a - \cos b > 1/2\}.$$

如果我们设

$$\widetilde{\Gamma} := \Xi \cap \{\xi \in \mathbb{C} \mid a\tanh c - b\tan d < 0, \cosh a - \cos b > 1/2\},$$

那么 $\Xi = \Gamma \sqcup \widetilde{\Gamma} \sqcup \big(\mathrm{Cl}(\Omega) \cap \Xi\big)$，因为 $\mathrm{Cl}(\Omega) \cap \Xi = \{z \in \mathbb{C} \mid a > 0, 0 < b <\pi/2,$ 双曲余弦a 余弦 $b > 1/2$, 双曲余弦 $a -$ 余弦 $b \leq 1/2\}$，见注 B.3，其中 Cl 表示

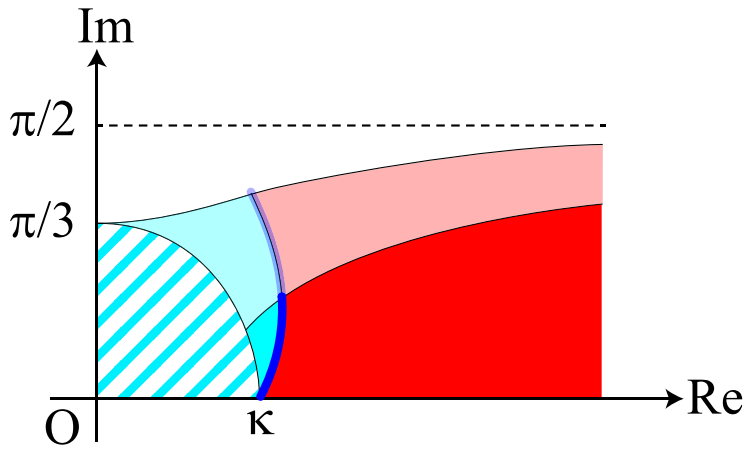

FIGURE 2. 区域 Ξ 被划分为五个区域 Γ_+~ ~（红色）、Γ_-（青色）、Γ_+（粉色）、Γ_-（浅青色）以及 $\Omega \cap \Xi$（带条纹的~青色）。蓝色弧线和浅蓝色弧线分别表示 Γ_0 和 $\Gamma_{0\circ}$

闭包，而 $\sqcup$ 表示不交并。我们还引入以下区域:

$$\begin{aligned}
\Gamma_+ :=& \Gamma \cap \{\xi \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\big(S(\xi)/\xi\big) > 0\},\\
\Gamma_- :=& \Gamma \cap \{\xi \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\big(S(\xi)/\xi\big) < 0\},\\
\Gamma_0 :=& \Gamma \cap \{\xi \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\big(S(\xi)/\xi\big) = 0\},\\
\widetilde{\Gamma}_+ :=& \widetilde{\Gamma} \cap \{\xi \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\big(S(\xi)/\xi\big) > 0\},\\
\widetilde{\Gamma}_- :=& \widetilde{\Gamma} \cap \{\xi \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\big(S(\xi)/\xi\big) < 0\},\\
\widetilde{\Gamma}_0 :=& \widetilde{\Gamma} \cap \{\xi \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\big(S(\xi)/\xi\big) = 0\}.
\end{aligned}$$

参见图2。

以下是我们的主定理，其证明见第5.2小节

定理 1.5（主定理）。若 $\xi \in \Gamma_+$，则有

$$J_N(\mathscr{E}; e^{\xi/N}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sinh(\xi/2)} T(\xi)^{1/2} \left(\frac{N}{\xi}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{S(\xi)}{\xi} N\right) \left(1 + O(N^{-1})\right) \tag{1.12}$$

当 $N \to \infty$时。

如果 $\xi \in \Gamma_0$，那么我们有

$$J_N(\mathscr{E}; e^{\xi/N}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sinh(\xi/2)} T(\xi)^{1/2} \left(\frac{N}{\xi}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{S(\xi)}{\xi} N\right) + \frac{1}{\Delta(e^{\xi})} + O(N^{-1/2}) \tag{1.13}$$

当 $N \to \infty$ 时。注意，在这种情况下，绝对值 $\left|J_N(\mathscr{E}; e^{\xi/N})\right|$ 呈多项式增长，因为 $\mathrm{Re}\big(S(\xi)/\xi\big) = 0$。

如果 $\xi \in \Gamma_-$，那么我们有如下结果。

$$J_N(\mathscr{E}; e^{\xi/N}) = \frac{1}{\Delta(e^{\xi})} + O(N^{-2}) \tag{1.14}$$

当 $N \to \infty$ 时。

注记 1.6。由注记 1.6 可得 $\Xi \cap \Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid a > 0, 0 < b < \pi/2$，双曲余弦 a − 余弦 $b < 1/2\}$。因此，由引理 B.2 可知，若 $\xi \in \Xi \cap \Omega$，则实部$\big(S(\xi)/\xi\big) < 0$。由此可得 $\Xi \cap \Omega \subset \Gamma_- \cup \widetilde{\Gamma}_-$。另一方面，根据

Mathematica，对于 $\xi = 1 + 0.5\sqrt{-1}$，我们有 a 双曲正切 $c - b$ 正切 $d = 0.0661743 > 0$，双曲余弦 a − 余弦 $b = 0.665498\ldots > 1/2$，且实部$\big(S(\xi)/\xi\big) = -0.166996\ldots < 0$，这意味着 $\xi \in \Gamma_-$，但 $\xi \notin \Omega$。因此，(1.14) 是新的。

注 1.7. 作者不知道 (1.14) 对 $\xi \in \Xi \cap \partial\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid a > 0, 0 < b < \pi/2,$ 双曲余弦 a − 余弦 $b = 1/2\}$ 是否也成立，其中 ∂ 表示边界。参见注 5.9。

注 1.8. 若实部 $S_{(\xi)_\xi} < 0$，则含有 $\exp\left(S_{(\xi}{}_{\xi}{}_{N}\right)$ 的项可能被项 $1/\Delta(e^\xi)$ 掩盖，因为 $\exp\left(S_{(\xi}{}_{\xi}{}_{N}\right)$ 呈指数衰减。类似地，若实部 $\overline{S_{(\xi)_\xi} > 0}$，则 $1/\Delta(e^\xi)$ 可能被 $\underline{\exp}\left(S_{(\xi}{}_{\xi}{}_{N}\right)$ 掩盖，因为 $\exp\left(S_{(\xi}{}_{\xi}{}_{\overline{N}}\right)$ 呈指数增长。

注 1.9。定理 1.5 中的条件 a 双曲正切 $c - b$ 正切 $d \geq 0$ 仅是技术性的。它用于引理 3.19、3.21、3.25、4.4、4.6、4.7、5.2 和 5.3，以及推论 3.20 和 5.4。

作者认为，定理 1.5 对任意 $\xi \in \Xi$ 都成立，也就是说，如果 $\xi \in \widetilde{\Gamma}_+$（$\widetilde{\Gamma}_0$、$\widetilde{\Gamma}_-$，分别），那么（1.12）（（1.13）和（1.14），分别）也成立。

上述公式的拓扑解释即将给出。详情见第 6 节。

令 $X := S^3 \setminus \mathrm{Int}\, N(\mathscr{E})$，其中 $N(\mathscr{E})$ 是八字结 $\mathscr{E} \subset S^3$ 的正则邻域，Int 表示内部。其边界 ∂X 的基本群 $\pi_1(\partial X)$ 同构于由子午线 m 和优选经线 l 生成的 $\mathbb{Z}^2$，其中 m 在 $N(\mathscr{E})$ 中零伦，而 l 与 $\mathscr{E}$ 平行，且在 X 中零同调。

给定 $\xi \in \mathbb{C}$，可以定义两个非阿贝尔表示 $\rho_\xi^\pm : \pi_1(X) \to \mathrm{PSL}(2;\mathbb{C})$，使得

$$\rho_\xi^\pm(m) = \begin{pmatrix} e^{\xi/2} & * \\ 0 & e^{-\xi/2} \end{pmatrix},$$
$$\rho_\xi^\pm(l) = \begin{pmatrix} \ell(\xi)^\pm & * \\ 0 & \ell(\xi)^\mp \end{pmatrix}.$$

令 $v^\pm(\xi) := dS^\pm(\xi)/d\xi - 2\pi\sqrt{-1}$，可以证明 $\ell(\xi) = -e^{\pm v^\pm(\xi)}$。我们用 $\mathrm{CS}_{(\xi, v^\pm(\xi))}\left(\rho_\xi^\pm\right)$ 表示与 $(u, -v^\pm(u))$ 相关联的 $\rho_\xi^\pm$ 的陈–西蒙斯不变量。在情形（i）、（ii）、（vii）和（viii）中，可以证明 $\mathrm{CS}_{(u, v^+(u))}(\rho_u^+) = S^+(u) - u\pi\sqrt{-1} - \frac{1}{4}uv^+(u)$。类似地，在情形（iii）中有 $\mathrm{CS}_{(u, v^-(u))}(\rho_u^-) = S^-(u) - u\pi\sqrt{-1} - \frac{1}{4}uv^-(u)$。情形（iv）对应一个阿贝尔表示，而情形（v）对应仿射表示 $\rho_\kappa^+ = \rho_\kappa^-$，其中 $\kappa :=$ 反双曲余弦$(3/2)$。关于情形（vi），参见注 6.6。

类似地，我们令 $v(\xi) := dS(\xi)/d\xi - 2\pi\sqrt{-1}$，并令 $\mathrm{CS}_{(u, v(\xi))}\left(\rho_\xi^-\right)$ 为与 $(\xi, v(\xi))$ 相关联的 ρ_ξ^- 的陈–西蒙斯不变量。于是我们可以证明，$\mathrm{CS}_{(\xi,\ v(\xi))}(\rho_\xi^-) = S(\xi) - \xi\pi\sqrt{-1} - \frac{1}{4}\xi v(\xi)$（引理 6.5）。

也可以将 $\rho_\xi^\pm$ 的上同调伴随 Reidemeister 扭率定义为 $\widetilde{X}$ 上链复形 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}(\pi_1(X))}(C_*(X;\mathbb{Z}), \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C}))$ 的扭率，其中 X 是 X 的万有覆盖。我们可以证明，它与 $T(\xi) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 相同。

图 3 展示了 ξ 如何与表示 $\rho_\xi^\pm$ 相关联。本文的组织结构如下。

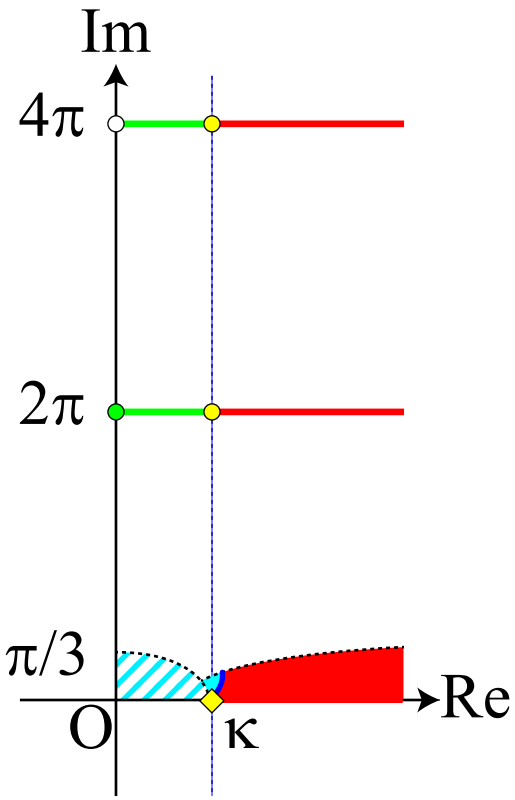

FIGURE 3. 红线和红色区域对应于表示 ρ_ξ^+，绿色线条和绿色圆盘对应于 ρ_ξ^-，其中ρ_ξ^+ （分别为ρ_ξ^- ）是定义具有正（分别为负）体积的（可能不完备的）双曲度量的非阿贝尔表示。黄色圆盘和黄色菱形对应于仿射表示 $\rho_\kappa^\pm$。青色区域和青色条纹区域对应于阿贝尔表示ρ_ξ^{Abel}。

在第2节中，我们将彩色琼斯多项式 $J_N(\mathscr{O};e^{\xi/N})$ 表示为形如 $\sum_{k=0}^{N-1} e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)}$ 的和，其中 $f_N(z)$ 是依赖于 N 的全纯函数。函数列 $\{f_N(z)\}_{N=2,3,\dots}$ 一致收敛于函数 $F(z)$，因此彩色琼斯多项式可由和$\sum_{k=0}^{N-1} e^{NF\left((2k+1)/(2N)\right)}$ 来逼近。在第3节中，我们准备若干将在第4节和第5节中使用的结果。我们将利用泊松求和公式，在第4节中把该和转化为形如 $\int_0^1 e^{NF(z)}\,dz$ 的积分。随后，我们在第5节中使用鞍点法，得到该积分的渐近公式，从而证明主定理。我们在第 6 节中给出主定理的拓扑解释。附录A和B包含前面各节所用的技术引理。

2. SUMMATION FORMULA

令 $\gamma := \frac{\xi}{2\pi\sqrt{-1}}$，其中 $a>0$ 和 $0<b<\pi/2$，这里令 $\xi := a+b\sqrt{-1}$。对于复数 z，满足 $-\text{实部}\frac{\gamma}{2N} < \text{实部}\ z < \text{实部}\frac{\gamma}{2N}+1$，以及正整数 N，我们

定义

$$T_N(z) := \frac{1}{4}\int_{\widehat{\mathbb{R}}} \frac{e^{(2z-1)t}}{t\sinh t\sinh(\gamma t/N)}\,dt \tag{2.1}$$

如下：[4], 其中 $\widehat{\mathbb{R}}$ 是一条路径（$-\infty$, $-1]\cup[1,\infty)$ $\cup\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1,$，方向从左向右，且 $z\geq 0\}$ 虚部。注意，$\gamma=\frac{b}{2\pi}>0$ 实部。右侧的收敛性由引理 B.1 给出。

我们还定义以下两个函数 $\mathcal{L}_i$（z）（$i=1$, 2），其中 $0<$ 实部 $z<1$ [19,定义 2.4]:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(z) &:= -\frac{1}{2}\int_{\widehat{\mathbb{R}}} \frac{e^{(2z-1)t}}{t\sinh t}\,dt,\\ \mathcal{L}_2(z) &:= \frac{\pi\sqrt{-1}}{2}\int_{\widehat{\mathbb{R}}} \frac{e^{(2z-1)t}}{t^2\sinh t}\,dt.\end{aligned} \tag{2.2}$$

右侧的积分同样收敛，因此省略证明。这些函数可以用熟知的函数表示，见引理 2.5]。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(z) &= \begin{cases}\log\left(1-e^{2\pi\sqrt{-1}z}\right) & \text{if } \operatorname{Im} z\geq 0,\\ 2\pi\sqrt{-1}z-\pi\sqrt{-1}+\log\left(1-e^{-2\pi\sqrt{-1}z}\right) & \text{if } \operatorname{Im} z<0,\end{cases}\\ \mathcal{L}_2(z) &= \begin{cases}\operatorname{Li}_2\left(e^{2\pi\sqrt{-1}z}\right) & \text{if } \operatorname{Im} z\geq 0,\\ 2\pi^2z^2-2\pi^2z+\frac{\pi^2}{3}-\operatorname{Li}_2\left(e^{-2\pi\sqrt{-1}z}\right) & \text{if } \operatorname{Im} z<0,\end{cases}\end{aligned} \tag{2.3}$$

其中 Li_2（z）：$=-\int_0^z \frac{\log(1-t)}{t}\quad dt$ 是二重对数函数。利用上述等式的右侧，我们可以将它们延拓为 $\overline{\mathbb{C}\setminus(}$（$-\infty$, $0]\cup[1,\infty)$）上的全纯函数。 $\mathcal{L}_2$（z）的导数可用 $\mathcal{L}_1$（z）表示，见引理 2.9]。

$$\frac{d}{dz}\mathcal{L}_2(z) = -2\pi\sqrt{-1}\mathcal{L}_1(z), \tag{2.4}$$

在 [16, § 2], 中，我们证明了 $T_N(z)$可延拓到如下区域:

$$\Sigma := \left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\; -1+\frac{\operatorname{Re}\gamma}{2N}<\operatorname{Re} z<2-\frac{\operatorname{Re}\gamma}{2N}\right\}\setminus(\triangleright\cup\triangleleft), \tag{2.5}$$

其中我们令

$$\begin{aligned}\triangleright &:= \left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\; \operatorname{Im} z\geq 0, -1+\frac{\operatorname{Re}\gamma}{2N}<\operatorname{Re} z\leq 0, \operatorname{Im}\left(\frac{z}{\gamma}\right)\leq 0\right\},\\ \triangleleft &:= \left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\; \operatorname{Im} z\leq 0, 1\leq\operatorname{Re} z<2-\frac{\operatorname{Re}\gamma}{2N}, \operatorname{Im}\left(\frac{z-1}{\gamma}\right)\geq 0\right\}.\end{aligned}$$

此外，函数 $T_N(z)$在 Σ中全纯。见图 4（左）。

函数列$\{\frac{1}{N}T_N(z)\}_{N=2,3,\ldots}$一致收敛于 $^{\mathcal{L}_2(z)\,\xi}$。更确切地说，我们有~~如下~~引理（[16, 命题 2.25]）。

引理 2.1. 设 $\nu<1/4$ 为正数。则我们有

$$T_N(z) = \frac{N}{\xi}\mathcal{L}_2(z)+O(N^{-1})$$

当 $N\to\infty$ 位于区域 Σ_ν内时。这里我们令

$$\Sigma_\nu := \left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\; -1+\nu\leq\operatorname{Re} z\leq 2-\nu, |\operatorname{Im} z|\leq M\right\}\setminus(\triangleright_\nu\cup\triangleleft_\nu)$$

对于满足 $M > \max\left\{\nu, \left|\frac{\operatorname{Im}\gamma}{\text{实部 }\gamma}\right|\right\}$ 的实数 $M > 0$，并且

$$\triangleright_\nu := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > -\nu, -1+\nu \le \operatorname{Re} z < \nu, \operatorname{Im}\left(\frac{z-\nu}{\gamma}\right) < 0 \right\},$$
$$\triangleleft_\nu := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < \nu, 1-\nu < \operatorname{Re} z \le 2-\nu, \operatorname{Im}\left(\frac{z-1+\nu}{\gamma}\right) > 0 \right\}.$$

注意， $\Sigma_\nu \subset \Sigma$ 如果 $N > \frac{\text{实部 }\gamma}{2\nu}$。参见图 4（右）。

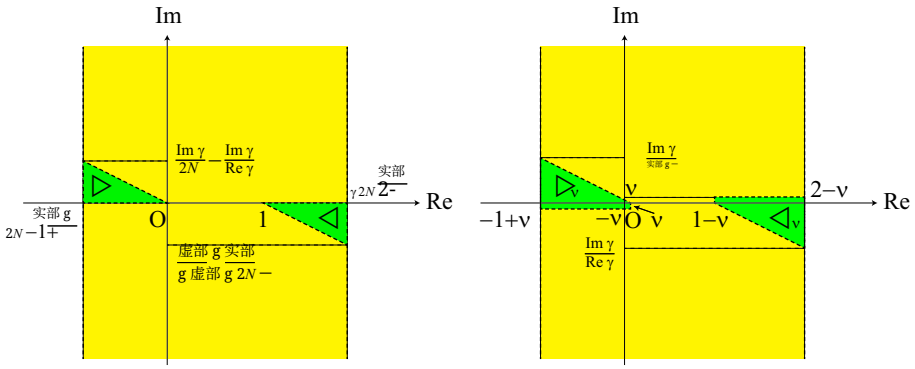

FIGURE 4. Σ （左）和 Σ_ν （右）。

考虑以下积分： $\mathcal{J}_m$，其中 $m = 0$，1，2，.....：

$$\mathcal{J}_m(z) := \int_{\widehat{\mathbb{R}}} \frac{t^m e^{(2z-1)t}}{\sinh t}\, dt,$$

那么， $\mathcal{L}_1(z)$ 的导数可以用 $\mathcal{J}_m(z)$ 表示。

引理 2.2。我们有

$$\frac{d}{dz}\mathcal{L}_1(z) = -\mathcal{J}_0(z),$$

and

$$\frac{d}{dz}\mathcal{J}_m(z) = 2\mathcal{J}_{m-1}(z).$$

证明。我们有

$$\frac{d}{dz}\mathcal{J}_m(z) = 2\int_{\widehat{\mathbb{R}}} \frac{t^{m+1} e^{(2z-1)t}}{\sinh t}\, dt = 2\mathcal{J}_m(z).$$

□

我们还有以下引理。

引理 2.3. 对于 $0 < \nu < 1/4$，我们有

$$T_N'(z) = -\frac{N}{\gamma}\mathcal{L}_1(z) + O(N^{-1})$$

当 $N \to \infty$ 属于 Σ_ν 时，其中 $T_N'(z)$ 表示导数。

证明。我们遵循 [19, 引理2的证明。4]由于

$$T_N'(z) = \frac{1}{2}\int_{\widehat{\mathbb{R}}} \frac{e^{(2z-1)t}}{\sinh t \sinh(\gamma t/N)}\, dt,$$

我们有

$$\begin{aligned}\left|T_N'(z)+\frac{N}{\gamma}\mathcal{L}_1(z)\right| =&\frac{1}{2}\left|\int_{\widehat{\mathbb{R}}}\frac{Ne^{(2z-1)t}}{\gamma t\sinh t}\left(\frac{\gamma t/N}{\sinh(\gamma t/N)}-1\right)dt\right|\\ \leq&\frac{N}{2|\gamma|}\int_{\widehat{\mathbb{R}}}\left|\frac{e^{(2z-1)t}}{t\sinh t}\right|\left|\frac{\gamma t/N}{\sinh(\gamma t/N)}-1\right|dt.\end{aligned}$$

由于当 $x\to 0$ 时， $x/\sinh x=1-x^2/6+O(x^4)$， $\left|\frac{\gamma t/N}{\sinh(\gamma t/N)}-1\right|\leq\frac{c|t|^2}{N^2}$ 对某个常数$c>0$成立。因此我们有

$$\left|T_N'(z)+\frac{N}{\gamma}\mathcal{L}_1(z)\right|\leq\frac{c'}{N}\int_{\widehat{\mathbb{R}}}\left|\frac{te^{(2z-1)t}}{\sinh t}\right|dt,$$

其中 $c':=\frac{c}{2|\gamma|}$。

我们将估计积分 $\int_{\widehat{\mathbb{R}}}\left|\frac{te^{(2z-1)t}}{\text{双曲正弦 }t}\right|dt$。令

$$\begin{aligned}I_+:=&\int_1^\infty\left|\frac{te^{(2z-1)t}}{\sinh t}\right|dt,\\ I_-:=&\int_{-\infty}^{-1}\left|\frac{te^{(2z-1)t}}{\sinh t}\right|dt,\\ I_0:=&\int_{|t|=1,\operatorname{Im}t\geq 0}\left|\frac{te^{(2z-1)t}}{\sinh t}\right|dt.\end{aligned}$$

由于 $\operatorname{Re}z\leq 1-\nu$，我们有

$$\begin{aligned}I_+=&\int_1^\infty\frac{2te^{(2\operatorname{Re}z-1)t}}{e^t-e^{-t}}dt=\int_1^\infty\frac{2te^{2(\operatorname{Re}z-1)t}}{1-e^{-2t}}dt\leq\frac{2}{1-e^{-2}}\int_1^\infty te^{-2\nu t}dt\\ =&\frac{2e^{-2\nu}(1+2\nu)}{4\nu^2(1-e^{-2})}.\end{aligned}$$

类似地，由 $\operatorname{Re}z\geq\nu$，我们有

$$\begin{aligned}I_-=&-\int_{-\infty}^{-1}\frac{2te^{(2\operatorname{Re}z-1)t}}{e^{-t}-e^t}dt=-\int_{-\infty}^{-1}\frac{2te^{2t\operatorname{Re}z}}{1-e^{2t}}dt\leq\frac{-2}{1-e^{-2}}\int_{-\infty}^{-1}te^{2\nu t}dt\\ =&\frac{2e^{-2\nu}(1+2\nu)}{4\nu^2(1-e^{-2})}.\end{aligned}$$

至于 I_0，令 $t:=e^{s\sqrt{-1}}$对于 $0\leq s\leq\pi$，以及 $L:=\min_{|z|=1,\ \operatorname{Im}z\geq 0}|\text{双曲正弦 }z|$，我们有

$$\begin{aligned}I_0=&\int_0^\pi\left|\frac{e^{s\sqrt{-1}}e^{(2z-1)e^{s\sqrt{-1}}}}{\sinh\left(e^{s\sqrt{-1}}\right)}\right|\times\left|\sqrt{-1}e^{s\sqrt{-1}}\right|ds\\ \leq&\frac{1}{L}\int_0^\pi e^{(2\operatorname{Re}z-1)\cos s-2\operatorname{Im}z\sin s}ds,\end{aligned}$$

由于 z 有界，故其为有界的。

因此我们得出 $I_++I_-+I_0$ 是有界的，从而引理得证。□

如果 $0<$实部$z<1$，则我们有

$$\frac{\exp\left(T_N\left(z-\frac{\gamma}{2N}\right)\right)}{\exp\left(T_N\left(z+\frac{\gamma}{2N}\right)\right)}=1-e^{2\pi\sqrt{-1}z}\tag{2.6}$$

由 [15, 引理 2.5]。对于满足 $0<j<2N$的整数 j，将 $z=j\gamma/N$ 代入 (2.6)，得到

$$\frac{\exp\left(T_N\big((j-1/2)\gamma/N\big)\right)}{\exp\left(T_N\big((j+1/2)\gamma/N\big)\right)}=1-e^{j\xi/N}\tag{2.7}$$

因为 $\mathrm{Re}(j\gamma/N) = \frac{jb}{2N\pi}$，其值介于 0 和 $1/2$ 之间。

八字结的彩色琼斯多项式 $J_N(\mathscr{E};\, q)$ 有如下由 K. Habiro [5] 和 T. Le [11] 得出的简洁公式。

$$J_N(\mathscr{E};q) = \sum_{k=0}^{N-1} q^{-kN} \prod_{l=1}^{k} \left(1-q^{N-l}\right)\left(1-q^{N+l}\right). \tag{2.8}$$

对于一个满足 $a>0$ 和 $0<b<\pi/2$ 的复数 $\xi = a+b\sqrt{-1}$，我们可以利用 $T_N(z)$ 表示 $J_N(\mathscr{E};\, e^{\xi/N})$。由 (2.7) 可得

$$\begin{aligned}
&\prod_{l=1}^{k} \left(1-q^{N-l}\right)\left(1-q^{N+l}\right)\\
=&\prod_{l=1}^{k} \left(1-e^{(N-l)\xi/N}\right)\left(1-e^{(N+l)\xi/N}\right)\\
=&\prod_{l=1}^{k} \frac{\exp\left(T_N\big((N-l-1/2)\gamma/N\big)\right)}{\exp\left(T_N\big((N-l+1/2)\gamma/N\big)\right)} \frac{\exp\left(T_N\big((N+l-1/2)\gamma/N\big)\right)}{\exp\left(T_N\big((N+l+1/2)\gamma/N\big)\right)}\\
=&\frac{\exp\left(T_N\big((N-k-1/2)\gamma/N\big)\right)}{\exp\left(T_N\big((N-1/2)\gamma/N\big)\right)} \frac{\exp\left(T_N\big((N+1/2)\gamma/N\big)\right)}{\exp\left(T_N\big((N+k+1/2)\gamma/N\big)\right)}.
\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}
&J_N\left(\mathscr{E};e^{\xi/N}\right)\\
=&\frac{\exp\left(T_N\left(\left(1+\frac{1}{2N}\right)\gamma\right)\right)}{\exp\left(T_N\left(\left(1-\frac{1}{2N}\right)\gamma\right)\right)} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-k\xi} \frac{\exp\left(T_N\left(\left(1-\frac{2k+1}{2N}\right)\gamma\right)\right)}{\exp\left(T_N\left(\left(1+\frac{2k+1}{2N}\right)\gamma\right)\right)}\\
=&\frac{1}{1-e^{\xi}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-k\xi} \frac{\exp\left(T_N\left(\left(1-\frac{2k+1}{2N}\right)\gamma\right)\right)}{\exp\left(T_N\left(\left(1+\frac{2k+1}{2N}\right)\gamma\right)\right)},
\end{aligned}$$

这里，在第二个等式中，我们对 $z=\gamma$ 使用 (2.6)，并注意到 $\mathrm{Re}\,\gamma = \frac{b}{2\pi}$。令

$$f_N(z) := \frac{1}{N} T_N\big(\gamma(1-z)\big) - \frac{1}{N} T_N\big(\gamma(1+z)\big) - \xi z + 2\pi\sqrt{-1}z, \tag{2.9}$$

我们有

$$J_N\left(\mathscr{E};e^{\xi/N}\right) = \frac{1}{2\sinh(\xi/2)} \sum_{k=0}^{N-1} e^{N f_N\left((2k+1)(2N)\right)}. \tag{2.10}$$

引理 2.4。函数 $f_N(z)$ 定义在以下区域中：

$$\Theta := \left\{ z\in\mathbb{C} \;\middle|\; \left|\mathrm{Im}(\xi z)\right| < 2\pi + \left(1-\frac{1}{2N}\right) b \right\} \setminus \left(\triangle^+ \cup \triangledown^+ \cup \triangle^- \cup \triangledown^-\right),$$

其中

$$\begin{aligned}
\triangle^+ &:= \left\{ z\in\mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}(\xi z) \geq a, \mathrm{Im}(\xi z) < 2\pi + \left(1-\frac{1}{2N}\right) b, \mathrm{Im}\, z \geq 0 \right\},\\
\triangledown^- &:= \left\{ z\in\mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}(\xi z) \leq a, -2\pi - \left(1-\frac{1}{2N}\right) b < \mathrm{Im}(\xi z), \mathrm{Im}\, z \leq -\frac{2\pi a}{|\xi|^2} \right\},\\
\triangledown^+ &:= \left\{ z\in\mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}(\xi z) \leq -a, -2\pi - \left(1-\frac{1}{2N}\right) b < \mathrm{Im}(\xi z), \mathrm{Im}\, z \leq 0 \right\},\\
\triangle^- &:= \left\{ z\in\mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}(\xi z) \geq -a, \mathrm{Im}(\xi z) < 2\pi + \left(1-\frac{1}{2N}\right) b, \mathrm{Im}\, z \geq \frac{2\pi a}{|\xi|^2} \right\}.
\end{aligned}$$

参见图5。注意， $\triangle^{\pm}$ 与 $\triangledown^{\pm}$全等，且 $\triangle^{+}$ 和 $\triangledown^{+}$ 分别与 $\triangle^{-}$ 和 $\triangledown^{-}$ 相似，相似比为 π/b。参见图5。

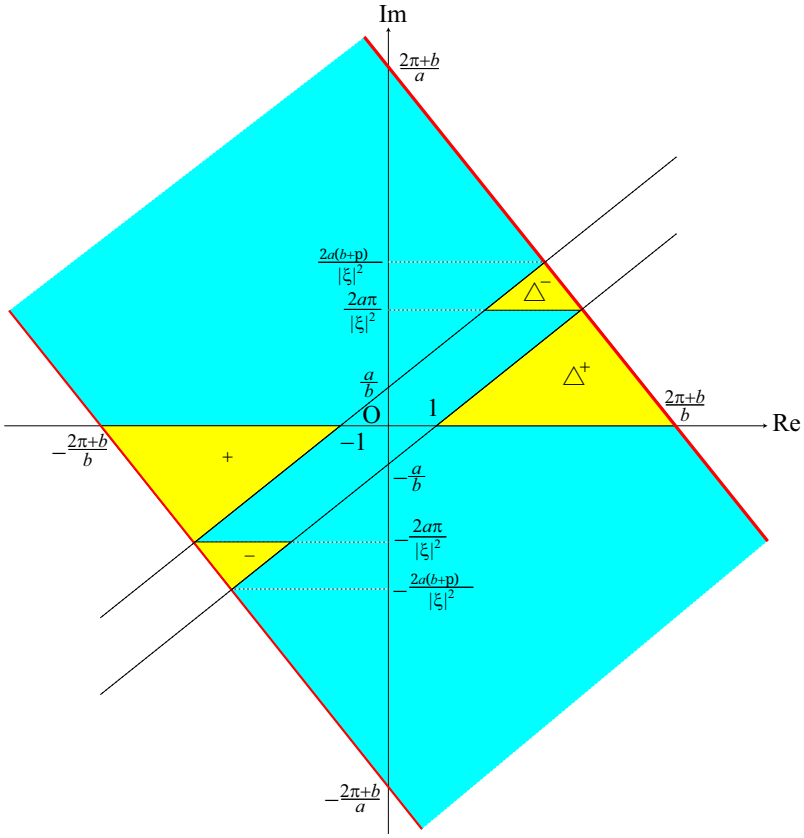

FIGURE 5. 函数 $f_N(z)$定义在区域 Θ中，该区域位于两条红线之间，但不包括四个黄色三角形。

证明。我们令 $x :=$ 实部 z 以及 $y :=$ 虚部 z。

由于 $\operatorname{Re}\gamma = \frac{b}{2\pi}$、$\operatorname{Re}\big(\gamma(1-z)\big) = \frac{b}{2\pi} - \frac{\operatorname{Im}(\xi z)}{2\pi}$，且 $\operatorname{Im}\big(\gamma(1-z)\big) = -\frac{a}{2\pi} + \frac{\operatorname{Re}(\xi z)}{2\pi}$，我们可知， $\gamma(1-z)$ 属于区域 (2.5) 当且仅当

$$
\begin{aligned}
&\left\{ z\in\mathbb{C} \;\middle|\; -4\pi + \left(1+\frac{1}{2N}\right) b < \operatorname{Im}(\xi z) < 2\pi + \left(1-\frac{1}{2N}\right) b \right\} \\
&\quad \setminus \left\{ z\in\mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Re}(\xi z) \geq a, b \leq \operatorname{Im}(\xi z) < 2\pi + \left(1-\frac{1}{2N}\right) b, \operatorname{Im} z \geq 0 \right\} \\
&\quad \setminus \left\{ z\in\mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Re}(\xi z) \leq a, -4\pi + \left(1+\frac{1}{2N}\right) b < \operatorname{Im}(\xi z) \leq -2\pi + b, \right. \\
&\qquad\qquad \left. \operatorname{Im} z \leq -\frac{2\pi a}{|\xi|^2} \right\}.
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

根据对称性 $z \leftrightarrow -z$，我们也可知， $\gamma(1+z)$ 属于区域 2.5 当且仅当

$$
\begin{aligned}
&\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; -2\pi - \left(1 - \frac{1}{2N}\right) b < \operatorname{Im}(\xi z) < 4\pi - \left(1 + \frac{1}{2N}\right) b \right\} \\
&\quad \setminus \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Re}(\xi z) \le -a, -2\pi - \left(1 - \frac{1}{2N}\right) b < \operatorname{Im}(\xi z) \le -b, \operatorname{Im} z \le 0 \right\} \\
&\quad \setminus \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Re}(\xi z) \ge -a, 2\pi - b \le \operatorname{Im}(\xi z) < 4\pi - \left(1 + \frac{1}{2N}\right) b, \right. \\
&\qquad\qquad \left. \operatorname{Im} z \ge \frac{2\pi a}{|\xi|^2} \right\}.
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

因此， $f_N(z)$的区域是 $\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\text{虚部}(\xi z)| < 2\pi + \left(1 - \frac{1}{2N}\right) b \right\}$ 减去（2.11）和（2.12）中第二、第三和第四条直线里的集合。

由于实部$(\xi z) \ge a$ 意味着 $ax - by \ge a$，我们有 $x - 1 \ge by/a$。因此，如果 $y \ge 0$，我们有

$$\operatorname{Im}(\xi z) - b = b(x-1) + ay \ge \frac{|\xi|^2}{a} y \ge 0.$$

因此，我们不需要（2.11）第二条直线中的虚部$(\xi z) \ge b$。

类似地，如果实部$(\xi z) \le a$，我们有 $x - 1 \le by/a$。因此，如果 $y \le -2\pi a/|\xi|^2$，我们有

$$\operatorname{Im}(\xi z) - (-2\pi + b) = b(x-1) + ay + 2\pi \le \frac{b^2 y}{a} + ay + 2\pi = \frac{|\xi|^2}{a} y + 2\pi \le 0,$$

并且我们不需要（2.11）第三和第四条直线中的虚部$(\xi z) \le -2\pi + b$。由于$-4\pi + (1 + 1/(2N))b$小于 $-2\pi - (1 - 1/(2N))b$，我们可以用 $\bigtriangledown^-$替换（2.11）第三和第四条直线中的集合。

同样，我们可以将其中第二、第三和第四条直线中的集合替换为 $\bigtriangledown^+$ 和 $\bigtriangleup^-$。 (2.12)

由对称性可知， $\bigtriangleup^\pm$ 与 $\bigtriangledown^\pm$全等。三角形$\bigtriangleup^+$ 与 $\bigtriangleup^-$相似，因为它们共用图5中的上方红线，且其他边彼此平行。由于 $\bigtriangleup^+$ 的高度为 $2a\pi/|\xi|^2$，而 $\bigtriangleup^-$ 的高度为$2a(b+\pi)/|\xi|^2 - 2a\pi/|\xi|^2 = 2ab/|\xi|^2$，因此相似比为 π/b。

证明至此完成。 □

根据引理 2.1，级数 $\{\frac{1}{N} T_N(w)\}_{N=2,\ 3,\ \dots}$ 在紧区域 Σ_ν上一致收敛于 $\frac{1}{\xi}\mathcal{L}_2(w)$。因此我们可以得出以下引理。由于其证明与引理 2.4 的证明类似，这里略去。

引理 2.5。函数列 $\{f_N(z)\}_{N=2,\ 3,\ 4,\ \dots}$ 在区域内一致收敛于

$$F(z) := \frac{1}{\xi}\mathcal{L}_2\big(\gamma(1-z)\big) - \frac{1}{\xi}\mathcal{L}_2\big(\gamma(1+z)\big) - \xi z + 2\pi\sqrt{-1}z \tag{2.13}$$

在区域

$$
\begin{aligned}
\Theta_\nu := \{ z \in \mathbb{C} \mid &|\operatorname{Im}(\xi z)| \le b + 2\pi(1-\nu), |\operatorname{Re}(\xi z)| \le 2M\pi - a \} \\
&\setminus \left(\bigtriangleup_\nu^+ \cup \bigtriangledown_\nu^+ \cup \bigtriangleup_\nu^- \cup \bigtriangledown_\nu^- \right),
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

其中 M 和 ν 是引理 2.1 中给出的正数，并且

$$
\begin{aligned}
\bigtriangleup_\nu^+ :=& \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\xi z) > a - 2\pi\nu, b - 2\pi\nu < \operatorname{Im}(\xi z) \le b + 2\pi(1-\nu), \\
&\qquad \operatorname{Im} z > -2\pi\nu a/|\xi|^2 \}, \\
\bigtriangledown_\nu^- :=& \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\xi z) < a + 2\pi\nu, -b - 2\pi(1-\nu) \le \operatorname{Im}(\xi z) < b - 2\pi(1-\nu), \\
&\qquad \operatorname{Im} z < -2\pi(1-\nu)a/|\xi|^2 \}, \\
\bigtriangledown_\nu^+ :=& \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\xi z) < -a + 2\pi\nu, -b - 2\pi(1-\nu) \le \operatorname{Im}(\xi z) < -b + 2\pi\nu,
\end{aligned}
$$

$$\operatorname{Im} z < 2\pi\nu a/|\xi|^2\},$$
$$\triangle_\nu^- := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\xi z) > -a - 2\pi\nu, -b + 2\pi(1-\nu) < \operatorname{Im}(\xi z) \le b + 2\pi(1-\nu),$$
$$\operatorname{Im} z > 2\pi(1-\nu)a/|\xi|^2\}.$$

参见图6。注意到 $\bigtriangledown_\nu^\pm$ 和 $\triangle_\nu^\pm$ 是邻域，并将其与图5进行比较

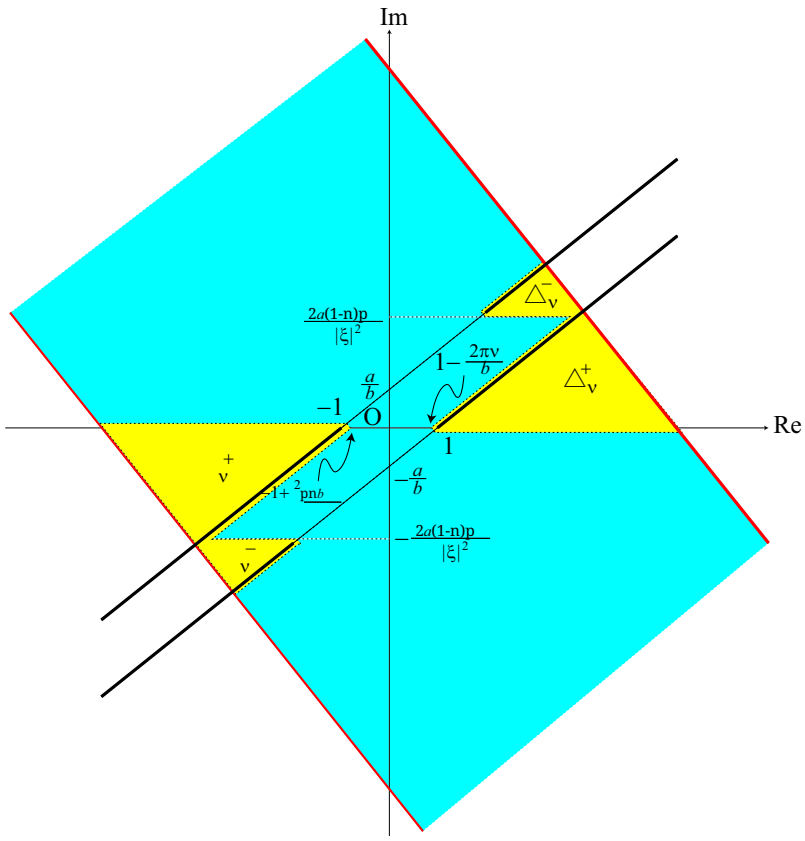

FIGURE 6. 区域 Θ_ν 位于两条红线之间，但不包括黄色平行四边形；这些平行四边形是图5中黄色三角形的邻域。注意，$\triangle_\nu^+$ 和 $\triangle_\nu^-$ 重叠，$\bigtriangledown_\nu^+$ 和 $\bigtriangledown_\nu^-$ 也重叠。函数 $F(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 中除四条黑色半直线外的区域上全纯。

分别属于 $\bigtriangledown^\pm$ 和 $\triangle^\pm$ 。

注 2.6. 由于 $\mathcal{L}_2(z)$ 在区域 $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, 0] \cup [1, \infty))$ 内全纯，函数 $F(z)$ 在区域 $\mathbb{C}\setminus\{t/\gamma - 1 \mid t \le 0$ 或 $t \ge 1\} \cup \{-t/\gamma + 1 \mid t \le 0$ 或 $t \ge 1\}$ 内全纯，该区域是图6中四条粗直线的补空间。

由引理 2.1 和 2.3，我们得到以下引理。

引理 2.7. 我们有

$$f_N(z) = F(z) + O(N^{-2}),$$
$$f_N'(z) = F'(z) + O(N^{-2})$$

当 $N \to \infty$ 时。

证明。第一个渐近公式直接由引理 2.1 得出。

至于第二个，一方面由 (2.9)，我们有

$$\begin{aligned} f_N'(z) =& -\frac{\gamma}{N}T_N'\big(\gamma(1-z)\big) - \frac{\gamma}{N}T_N'\big(\gamma(1+z)\big) - \xi + 2\pi\sqrt{-1} \\ =& \mathcal{L}_1\big(\gamma(1-z)\big) + \mathcal{L}_1\big(\gamma(1+z)\big) - \xi + 2\pi\sqrt{-1} + O(N^{-2}), \end{aligned}$$

在第二个等式中我们使用了引理 2.3。另一方面，由 (2.13) 和 (2.4) 可得

$$\begin{aligned} F'(z) =& -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\mathcal{L}_2'\big(\gamma(1-z)\big) - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\mathcal{L}_2'\big(\gamma(1+z)\big) - \xi + 2\pi\sqrt{-1} \\ =& \mathcal{L}_1\big(\gamma(1-z)\big) + \mathcal{L}_1\big(\gamma(1+z)\big) - \xi + 2\pi\sqrt{-1}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

因此我们有 $f_N'(z) = F'(z) + O(N^{-2})$，证明完毕。 □

有时使用另一个变量 $Z := \xi z$ 会更方便。我们将相应的函数记作 $g_N(Z) := f_N(Z/\xi)$，即

$$g_N(Z) := \frac{1}{N}T_N\left(\frac{\xi - Z}{2\pi\sqrt{-1}}\right) - \frac{1}{N}T_N\left(\frac{\xi + Z}{2\pi\sqrt{-1}}\right) - Z + \frac{2\pi\sqrt{-1}Z}{\xi},$$

函数 $g_N(Z)$ 定义于 $\xi\Theta := \{\xi z \in \mathbb{C} \mid z \in \Theta\}$。

由于函数列 $\{f_N(z)\}_{N=2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ldots}$ 一致收敛于 $F(z)$，函数列 $\{g_N(Z)\}_{N=2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ldots}$ 一致收敛于

$$G(Z) := \frac{1}{\xi}\mathcal{L}_2\left(\frac{\xi - Z}{2\pi\sqrt{-1}}\right) - \frac{1}{\xi}\mathcal{L}_2\left(\frac{\xi + Z}{2\pi\sqrt{-1}}\right) - Z + \frac{2\pi\sqrt{-1}Z}{\xi}$$

在区域 $\xi\Theta_\nu$。

在某些情况下，我们可以用 $\mathrm{Li}_2(w)$ 来表示 $G(Z)$。

引理 2.8. 若 $|\text{实部 } Z| < a$，则有

$$G(Z) = \frac{1}{\xi}\operatorname{Li}_2\left(e^{-\xi-Z}\right) - \frac{1}{\xi}\operatorname{Li}_2\left(e^{-\xi+Z}\right) + Z.$$

证明. 若 $|\text{实部 } Z| < a$，则 $\operatorname{Im}\frac{\xi \pm Z}{2\pi\sqrt{-1}} = -\frac{1}{2\pi}(a \pm \text{实部 } Z) < 0$。因此，由 (2.3) 可得

$$\begin{aligned} G(Z) =& -\frac{1}{\xi}\operatorname{Li}_2(e^{-\xi+Z}) + \frac{1}{\xi}\operatorname{Li}_2(e^{-\xi-Z}) - Z + \frac{2\pi\sqrt{-1}Z}{\xi} \\ &+ \frac{2\pi^2}{\xi}\left(\left(\frac{\xi - Z}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^2 - \left(\frac{\xi + Z}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^2\right) - \frac{2\pi^2}{\xi}\left(\frac{\xi - Z}{2\pi\sqrt{-1}} - \frac{\xi + Z}{2\pi\sqrt{-1}}\right) \\ =& \frac{1}{\xi}\operatorname{Li}_2\left(e^{-\xi-Z}\right) - \frac{1}{\xi}\operatorname{Li}_2\left(e^{-\xi+Z}\right) + Z, \end{aligned}$$

证明完毕 □

关于导数，当实部 $z > -a$时，有以下公式。

引理 2.9. 如果 $|\text{实部 } Z| < a$，那么我们有

$$\frac{d}{d\,Z}G(Z) = \frac{1}{\xi}\log\big(2\cosh\xi - 2\cosh Z\big).$$

如果实部 $Z \geq a$，那么我们有

$$\frac{d}{d\,Z}G(Z) = \frac{1}{\xi}\big(\log\left(1 - e^{-\xi-Z}\right) + \log\left(1 - e^{\xi-Z}\right) + Z + \pi\sqrt{-1}\big).$$

证明. 如果 $|\text{实部 } Z| < a$，根据引理 2.8，我们有

$$\frac{d}{d\,Z}G(Z) = \frac{1}{\xi}\big(\log\left(1 - e^{-\xi-Z}\right) + \log\left(1 - e^{-\xi+Z}\right) + \xi\big) = \frac{1}{\xi}\log\big(2\cosh\xi - 2\cosh Z\big),$$

其中第二个等式由下文的引理 2.11 得出。

现在，我们考虑实部 $Z \geq a$的情形。由（2.4），可得

$$\frac{d}{dZ}G(Z) = \frac{1}{\xi}\left(\mathcal{L}_1\left(\frac{\xi+Z}{2\pi\sqrt{-1}}\right) + \mathcal{L}_1\left(\frac{\xi-Z}{2\pi\sqrt{-1}}\right) - \xi + 2\pi\sqrt{-1}\right)$$

由于实部 $Z \geq a$，我们有虚部 $\left(\frac{\xi+Z}{2\pi\sqrt{-1}}\right) = \frac{-1}{2\pi}(a + \text{实部 } Z) < 0$，且虚部 $\left(\frac{\xi-Z}{2\pi\sqrt{-1}}\right) = \frac{-1}{2\pi}(a - \text{实部 } Z) \geq 0$。因此，由 (2.3) 可得所需公式。□

由于 $F(z) = G(\xi z)$，由引理 2.8 和引理 2.9 可得以下推论。

推论 2.10. 若 $|\text{实部}(\xi z)| < a$，则有

$$F(z) = \frac{1}{\xi}\operatorname{Li}_2\left(e^{-\xi-\xi z}\right) - \frac{1}{\xi}\operatorname{Li}_2\left(e^{-\xi+\xi z}\right) + \xi z,$$

and

$$\frac{d}{dz}F(z) = \log\bigl(2\cosh\xi - 2\cosh(\xi z)\bigr).$$

若实部$(\xi z) \geq a$，则有

$$\frac{d}{dz}F(z) = \log\left(1 - e^{-\xi-\xi z}\right) + \log\left(1 - e^{\xi-\xi z}\right) + \xi z + \pi\sqrt{-1}.$$

以下引理将在引理 2.9 的证明中用到。

引理 2.11。设

$$D_1(Z) := \arg(1 - e^{-\xi-Z}) + \arg(1 - e^{-\xi+Z}) + b,$$
$$D_2(Z) := \arg(1 - e^{-\xi-Z}) + \arg(1 - e^{\xi-Z}) + \operatorname{Im} Z + \pi.$$

若 $|\text{实部 } Z| < a$，则有 $|D_1(Z)| < \pi$。若实部 $Z \geq a$ 且虚部 $Z \leq b$，则有$D_2(Z) < 3\pi/2$。

该引理的证明虽然初等，但较为复杂。因此我们将其推迟到附录 B 中。

引理 2.11 还有另一项应用。结合推论 2.10，我们得到以下结果，该结果将在引理 4.6 的证明中使用。

推论 2.12。设 $x :=$ 实部 z，且 $y :=$ 虚部 z。若 $0 \leq x \leq 1$ 且 $y \leq 0$，则$\frac{\partial}{\partial y}$实部 $F(z) > -3\pi/2$。

证明。由推论 2.10，柯西-黎曼方程给出

$$\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Re} F(z) = -\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Im} F(z)$$
$$= \begin{cases} -\arg\bigl(2\cosh\xi - 2\cosh(\xi z)\bigr) & (\text{if } |\operatorname{Re}(\xi z)| < a), \\ -D_2(\xi z) & (\text{if } \operatorname{Re}(\xi z) \geq a). \end{cases}$$

如果 $|\text{Re}(\xi z)| < a$，那么从上面的公式可清楚看出 $\frac{\partial}{\partial y}\text{Re } F(z) > -3\pi/2$。

如果 $\text{Re}(\xi z) \leq -a$，那么由于 $\text{Re}(\xi z) = ax - by \leq -a$ 且 $y \leq 0$，我们得到 $0 \geq y \geq \frac{a}{b}(x+1)$。这不可能，因为我们假设 $x \geq 0$。

如果 $\text{Re}(\xi z) \geq a$，那么由于 $ax - by \geq a$，我们得到 $y \leq \frac{a}{b}(x-1)$。假设$x \leq 1$ 蕴含 $\text{Im}(\xi z) = bx + ay \leq b$，并且根据引理 2.11，我们有 $\frac{\partial}{\partial y}\text{Re } F(z) = -D_2(\xi z) > -3\pi/2$。

因此，如果 $|\text{Re}(\xi z)| < a$，那么显然 $\frac{\partial}{\partial y}\text{Re } F(z) > -3\pi/2$。

假设 $\text{Re}(\xi z) \geq a$ 且 $\text{Im}(\xi z) \leq b$，则由引理 2.11 得到 $\frac{\partial}{\partial y}\text{Re } F(z) = -D_2(\xi z) > -3\pi/2$。

□

3. Regions and curves

本节在 z-平面和Z-平面中分别定义若干区域与曲线，并研究它们的性质，其中 z 用作 $f_N(z)$ 和$F(z)$ 的辐角，而 Z用作 $g_N(Z)$ 和 $G(Z)$ 的辐角。

回顾一下，我们令 $\xi = a+b\sqrt{-1}$, $\varphi = c+d\sqrt{-1}$, $\alpha =$双曲余弦 a 余弦 b, $\beta =$双曲正弦 a 正弦 b，其中 $\varphi := \varphi(\xi)$ 定义如 (1.2)。如果 φ 对 ξ 的依赖关系显而易见，我们通常会像上文那样用 φ 代替 $\varphi(\xi)$。本节中始终假设 $\xi \in \Xi$(见 (1.11))，即 $a > 0$, $0 < b < \pi/2$，且 $\alpha =$双曲余弦 a 余弦 $b > 1/2$。

3.1. φ 和 σ 的位置。令

$$\sigma(\xi) := \varphi(\xi)/\xi. \tag{3.1}$$

我们通常用 σ 代替 $\sigma(\xi)$。我们先确定 φ 在 Z 平面中的位置，以及 σ 在 z 平面中的位置。记 $z = x + y\sqrt{-1}$ 和 $Z = X + Y\sqrt{-1}$，其中 $x, y, X, Y \in \mathbb{R}$。

由（1.10），我们有 $\operatorname{Im}\bigl((2\cosh\xi - 3)(2\cosh\xi + 1)\bigr) = 4\beta(2\alpha - 1) > 0$，因为我们假设 $\alpha > 1/2$。因此，（1.2）中的平方根位于第一象限。由于我们还有 $\operatorname{Im}(\cosh\xi - 1/2) = \sinh a \sin b > 0$，当 $z = \xi$ 时，（1.2）中 log 的辐角的虚部为正。因此我们得到以下不等式。

$$0 < d < \pi. \tag{3.2}$$

取等式 $\cosh\varphi = \cosh\xi - 1/2$ 两边的实部和虚部，得到

$$\cosh c \cos d = \alpha - 1/2, \tag{3.3}$$

$$\sinh c \sin d = \beta. \tag{3.4}$$

现在，我们有以下引理。

引理 3.1。我们有反双曲正弦 $\beta < c < a$ 和 $b < d < \pi/2$。

证明。由于 $\alpha > 1/2$，由（3.3）可得 $\cos d > 0$。由（3.2）我们得出$d < \pi/2$。

由于 $a > 0$和 $0 < b < \pi/2$，我们有 $\beta =$双曲正弦 a 正弦 $b > 0$。此外，由于 $0 < d < \pi/2$，我们有$0 <$ 正弦 $d < 1$，因此由 (3.4) 可知双曲正弦 $c > \beta$，即$c >$ 反双曲正弦 β。

由于双曲余弦 $a = \sqrt{1 +$双曲正弦$^2 a}$，且余弦 $b = \sqrt{1 -$正弦$^2 b}$，我们有 $\alpha = \sqrt{1 +$双曲正弦$^2 a}\sqrt{1 -$正弦$^2 b}$ 以及 $\beta =$双曲正弦 a 正弦 b。从这些方程中消去正弦 b，得到

$$\sinh a = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1 + \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - 1)^2 + 4\beta^2}}{2}}.$$

类似地，由 (3.3) 和 (3.4)，我们有

$$\sinh c = \sqrt{\frac{(\alpha - 1/2)^2 + \beta^2 - 1 + \sqrt{\bigl((\alpha - 1/2)^2 + \beta^2 - 1\bigr)^2 + 4\beta^2}}{2}}.$$

这两个公式意味着双曲正弦 $a >$双曲正弦 c，即 $a > c$。

由 (3.4)，我们有正弦 $d = \beta/$ 双曲正弦 $c > \beta/$ 双曲正弦 $a =$正弦 b。由于 b和 d均介于 0 和 $\pi/2$之间，我们得出 $b < d$，证明完毕。□

由推论 2.10 和引理 2.9，我们有 $\frac{d}{dz}F(\sigma) = \frac{d}{dZ}G(\varphi) = 0$，因为实部 $\varphi = c < a$，且双曲余弦 $\varphi =$双曲余弦 $\xi - 1/2$。

注记 3.2。由于余弦 $b = \alpha/$ 双曲余弦 $a < \alpha$，我们有 $b >$反余弦 α。

由于 $\sigma = \varphi/\xi$，我们得到以下推论。

推论 3.3. 我们有 $\operatorname{arsinh}\beta < \operatorname{Re}(\xi\sigma) < a$ 且 $b < \operatorname{Im}(\xi\sigma) < \pi/2$，也就是说，$\sigma$ 位于矩形 $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{arsinh}\beta < \operatorname{Re}(\xi\sigma) < a, b < \operatorname{Im}(\xi\sigma) < \pi/2\}$内。特别地，$\sigma$ 位于 z平面的第一象限。参见图7。

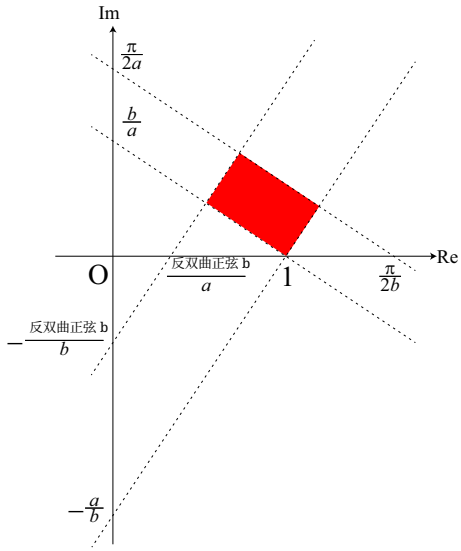

FIGURE 7. σ 位于红色矩形内。

3.2. 实部 $F(z)$ 的偏导数。在本小节中，我们研究实部 $F(z)$ 关于 $x :=$ 实部 z 与 $y :=$ 虚部 z 的偏导数。我们假设 $a > 0$、$0 < b < \pi/2$ 以及 $\alpha =$ 双曲余弦 a 余弦 $b > 1/2$。

如下在 Z 平面中定义四个区域 $H_G^{\pm}$ 与 $V_G^{\pm}$：

$$\begin{aligned} H_G^+ &:= \{Z \in \mathbb{C} \mid |\cosh Z - \cosh\xi| > 1/2, -\pi < \operatorname{Im} Z \le \pi\}, \\ H_G^- &:= \{Z \in \mathbb{C} \mid |\cosh Z - \cosh\xi| < 1/2, -\pi < \operatorname{Im} Z \le \pi\}, \\ V_G^+ &:= \{Z \in \mathbb{C} \mid \arg(\cosh Z - \cosh\xi) > 0, -\pi < \operatorname{Im} Z \le \pi\}, \\ V_G^- &:= \{Z \in \mathbb{C} \mid \arg(\cosh Z - \cosh\xi) < 0, -\pi < \operatorname{Im} Z \le \pi\}. \end{aligned}$$

它们的边界分别记为 H_G^0 和 V_G^0，即令

$$\begin{aligned} H_G^0 &:= \{Z \in \mathbb{C} \mid |\cosh Z - \cosh\xi| = 1/2, -\pi < \operatorname{Im} Z \le \pi\}, \\ V_G^0 &:= \{Z \in \mathbb{C} \mid \arg(\cosh Z - \cosh\xi) = 0, -\pi < \operatorname{Im} Z \le \pi\}. \end{aligned}$$

注意，$\xi \in H_G^- \cap V_G^0$，且 $\varphi \in H_G^0 \cap V_G^0$。见图8。

我们还将 z-平面中的区域 $H_F^{\pm}$ 和 $V_F^{\pm}$ 分别定义为 $\xi^{-1}H_G^{\pm}$ 和 $\xi^{-1}V_G^{\pm}$。因此有

$$\begin{aligned} H_F^+ &= \{z \in \mathbb{C} \mid |\cosh(\xi z) - \cosh\xi| > 1/2, -\pi < \operatorname{Im}(\xi z) \le \pi\}, \\ H_F^- &= \{z \in \mathbb{C} \mid |\cosh(\xi z) - \cosh\xi| < 1/2, -\pi < \operatorname{Im}(\xi z) \le \pi\}, \\ V_F^+ &= \{z \in \mathbb{C} \mid \arg(\cosh(\xi z) - \cosh\xi) > 0, -\pi < \operatorname{Im}(\xi z) \le \pi\}, \\ V_F^- &= \{z \in \mathbb{C} \mid \arg(\cosh(\xi z) - \cosh\xi) < 0, -\pi < \operatorname{Im}(\xi z) \le \pi\}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

它们的边界分别记为 $H_F^0 := \xi^{-1}H_G^0$ 和 $V_F^0 := \xi^{-1}V_G^0$，即令

$$\begin{aligned} H_F^0 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |\cosh(\xi z) - \cosh\xi| = 1/2, -\pi < \operatorname{Im}(\xi z) \le \pi\}, \\ V_F^0 &= \{z \in \mathbb{C} \mid \arg(\cosh(\xi z) - \cosh\xi) = 0, -\pi < \operatorname{Im}(\xi z) \le \pi\}. \end{aligned}$$

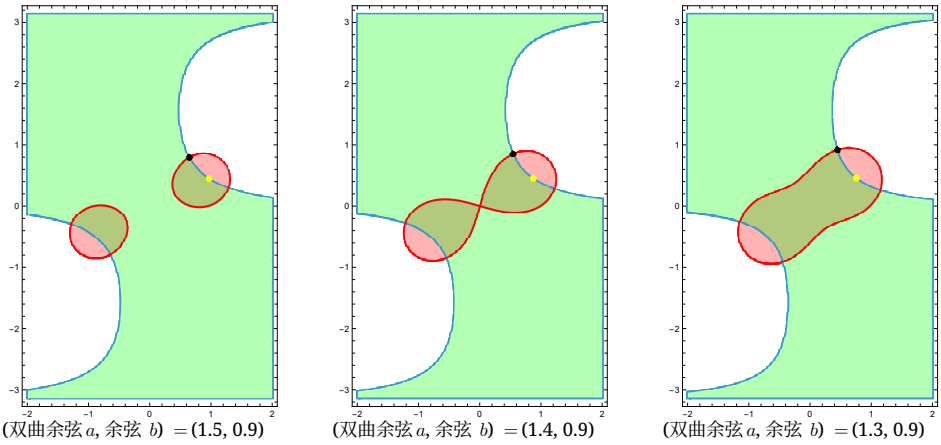

FIGURE 8. 区域 H_G^- 和 V_G^- 分别用红色和绿色表示。黑点为 φ，黄点为 ξ。

令 $Z = X + Y\sqrt{-1}$，α =余弦 a 余弦 b，以及 β =双曲正弦 a 正弦 b（见 (1.8) 和 (1.9)），则区域 $H_G^{\pm}$ 和 $V_G^{\pm}$ 以及曲线 H_G^0 和 V_G^0 可表示为

$$\begin{aligned}
H_G^+ =&\{(X,Y)\in\mathbb{R}^2 \mid (\cosh X\cos Y-\alpha)^2+(\sinh X\sin Y-\beta)^2>1/4,\\
&-\pi<Y\le\pi\},\\
H_G^- =&\{(X,Y)\in\mathbb{R}^2 \mid (\cosh X\cos Y-\alpha)^2+(\sinh X\sin Y-\beta)^2<1/4,\\
&-\pi<Y\le\pi\},\\
H_G^0 =&\{(X,Y)\in\mathbb{R}^2 \mid (\cosh X\cos Y-\alpha)^2+(\sinh X\sin Y-\beta)^2=1/4,\\
&-\pi<Y\le\pi\}\\
V_G^+ =&\{(X,Y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sinh X\sin Y>\beta,-\pi<Y\le\pi\},\\
V_G^- =&\{(X,Y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sinh X\sin Y<\beta,-\pi<Y\le\pi\},\\
V_G^0 =&\{(X,Y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sinh X\sin Y=\beta,-\pi<Y\le\pi\},
\end{aligned}\tag{3.6}$$

因为我们有

$$\cosh Z-\cosh\xi=\cosh X\cos Y-\alpha+\sqrt{-1}(\sinh X\sin Y-\beta).$$

如果令

$$\chi(Y):=\operatorname{arsinh}\left(\frac{\beta}{\sin Y}\right)\tag{3.7}$$

对于 $0<|Y|<\pi$，由 (3.6) 可知，区域 V_G^- 也可表示为

$$\begin{aligned}
V_G^- =&\{(X,Y)\in\mathbb{R}^2 \mid -\pi<Y<0, X>\chi(Y)\}\\
&\cup\{(X,Y)\in\mathbb{R}^2 \mid Y=0\}\cup\{(X,Y)\in\mathbb{R}^2 \mid Y=\pi\}\\
&\cup\{(X,Y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<Y<\pi, X<\chi(Y)\}.
\end{aligned}$$

利用函数 χ，我们定义如下曲线。

定义 3.4. 设 χ_G 是 Z 平面上的曲线 $\{\chi(t)+t\sqrt{-1}\in\mathbb{C} \mid b\le t\le d\}$。注意，由于根据引理 3.1 有 $0<b<d<\pi/2$，χ_G 是 V_G^- 的边界 V_G^0 的一部分。

再令 χ_F 为 z平面中的曲线 $\xi^{-1}\chi_G:=\{\xi^{-t}(\xi(t)+t\sqrt{-1}) \mid b\le t\le d\}$。它是 V_F^- 的边界 V_F^0的一部分。

引理 3.5。曲线 χ_G 连接 ξ 与 φ。此外，$\chi_G \in H_G^-$，但 φ除外。

证明。由于根据 (3.4)，$\chi(b) = a$ 且 $\chi(d) = c$，我们得出 χ_G 将 ξ 与φ连接起来。

根据 (3.7)，$\chi(t)$ 关于 $0 < t < \pi/2$ 单调递减，且由引理 3.1 可知 $0 < b < d < \pi/2$，因此我们看到，对于 $b \le t \le d$，$c \le \chi(t) \le a$，并且若 $t \ge b$，则 $\alpha =$双曲余弦a余弦 $b \ge$双曲余弦$\chi(t)$ 余弦 t。所以我们有

$$\begin{aligned}&\big(\cosh\chi(t)\cos t-\alpha\big)^2+\big(\sinh\chi(t)\sin t-\beta\big)^2\\ =&\big(\alpha-\cosh\chi(t)\cos t\big)^2\le\big(\alpha-\cosh c\cos d\big)^2=1/4,\end{aligned}$$

这里的不等式成立，是因为双曲余弦 $\chi(t) \ge$双曲余弦c且余弦 $t \ge$余弦 d；最后一个等式则由 (3.3) 得出。注意，当 $t = d$时等号成立。根据 (3.6)，我们得出，曲线 χ_G 位于区域 H_G^- 内，但 φ除外。

证明完毕。 □

由于 $\sigma = \varphi/\xi$，我们得到以下推论。

推论 3.6. 曲线 χ_F 连接 1 与 σ，并且 χ_F 包含在 H_F^- 中，但 σ除外。

以下引理说明了我们为何将这些区域命名为 $H_F^\pm$ 和 $V_F^\pm$。

引理 3.7. 假设 $|$实部$(\xi z)| < a$ 且 $-\pi <$虚部$(\xi z) \le \pi$。

将 $z = x+y\sqrt{-1}$ 写成 $x, y \in \mathbb{R}$，函数实部 $F(z)$ 关于 x 递增（分别为递减）当且仅当 $z \in H_F^+$（分别为 $z \in H_F^-$），并且关于 y 递增（分别为递减）当且仅当 $z \in V_F^+$（分别为 $z \in V_F^-$）。

证明。由于 $|$实部$(\xi z)| < a$，我们可以使用推论 2.10。我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Re}F(z)&=\log|2\cosh\xi-2\cosh(\xi z)|,\\ \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Re}F(z)&=-\operatorname{Im}\log(2\cosh\xi-2\cosh(\xi z))\\ &=\arg\big(\cosh(\xi z)-\cosh\xi\big).\end{aligned}$$

现在，结论由 (3.5) 得出。 □

3.3. 曲线 H_G^0 的形状。在本小节中，我们研究曲线 H_G^0 的形状。回顾一下，我们假设 $a > 0$、$0 < b < \pi/2$ 和 $\alpha :=$双曲余弦 a余弦$b > 1/2$。

引理 3.8. 等式 $\sqrt{(\alpha-1)^2+\beta^2} =$双曲余弦 $\xi - 1| =$双曲余弦 $a -$余弦 b成立。

证明。由于 $|$双曲余弦$\xi - 1|^2 = (\alpha-1)^2 + \beta^2$，第一个等式得证。

至于第二个等式，我们有

$$\begin{aligned}|\cosh\xi-1|^2=&(\cosh a\cos b-1)^2+\sinh^2 a\sin^2 b.\\ =&\cosh^2 a\cos^2 b+(\cosh^2 a-1)(1-\cos^2 b)-2\cosh a\cos b+1\\ =&(\cosh a-\cos b)^2.\end{aligned}$$

由于双曲余弦 $a >$ 余弦 $b > 0$，我们有双曲余弦$a -$余弦 $b > 0$，第二个等式得证。□

引理 3.9. 如果 cosh $a -$ cos $b > 1/2$，那么 H_G^0由两条简单闭曲线组成。如果 cosh $a -$ cos $b = 1/2$，那么 H_G^0是一条在 (0, 0) 处具有双重点奇异性的曲线。如果 cosh $a -$ cos $b < 1/2$，那么 H_G^0是一条简单闭曲线。

证明。令

$$\Phi(X,Y) := (\alpha - \cosh X \cos Y)^2 + (\beta - \sinh X \sin Y)^2 \tag{3.8}$$

关于 $-\pi < Y \le \pi$。

我们将研究函数 $\Phi(X,Y)$ 的临界点，并运用莫尔斯理论确定逆像 $C_h := \Phi^{-1}(h) \cap \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < Y \le \pi\}$，注意到 $H_G^0 = C_{1/4}$ 是由 (3.6) 中第三个等式得出的。我们假设 $h \ge 0$，因为当 $h < 0$ 时，$C_h = \emptyset$。

由于 $\Phi(X,\pi) = (\alpha + \text{双曲余弦 } X)^2 + \beta^2$，交集 $\Phi^{-1}(h) \cap \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \mid Y = \pi\}$ 可表示为

$$\begin{aligned}&\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\alpha + \cosh X)^2 + \beta^2 = h, Y = \pm\pi\}\\ =&\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \mid \cosh X = \sqrt{h-\beta^2} - \alpha, Y = \pm\pi\},\end{aligned}$$

当 $h < (\alpha+1)^2 + \beta^2$ 时，该集合为空。因此，$C_{1/4}$ 不会与直线 $Y = \pm\pi$ 相交，因为根据 $\alpha > 1/2$，$(\alpha+1)^2 + \beta^2 > 9/4 > 1/4$。由于我们关注的是 $C_{1/4}$，可以假设 $h < (\alpha+1)^2 + \beta^2$。

分别用 $\Phi_X(X,Y)$ 和 $\Phi_Y(X,Y)$ 表示 Φ 关于 X 和 Y 的偏导数，则有

$$\begin{aligned}\Phi_X(X,Y) &= 2(\sinh X \cosh X - \beta \cosh X \sin Y - \alpha \sinh X \cos Y),\\ \Phi_Y(X,Y) &= 2(-\sin Y \cos Y - \beta \sinh X \cos Y + \alpha \cosh X \sin Y).\end{aligned} \tag{3.9}$$

由下文的子引理 3.10 可知，$\Phi(X,Y)$ 的临界点为 $(0,0)$、(X_+, Y_+) 和 (X_-, Y_-)，其中 $(X_\pm, Y_\pm)$ 由下式给出

$$X_\pm := \pm \operatorname{arsinh} \sqrt{\frac{1}{2}\left(\alpha^2 + \beta^2 - 1 + \sqrt{(\alpha^2+\beta^2-1)^2 + 4\beta^2}\right)},$$

$$Y_\pm := \pm \arcsin \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \alpha^2 - \beta^2 + \sqrt{(\alpha^2+\beta^2-1)^2 + 4\beta^2}\right)}.$$

二阶导数如下所示。

$$\begin{aligned}\Phi_{XX}(X,Y) &= 2\left(\text{双曲余弦}^2 X + \text{双曲正弦}^2 X - \beta \,\text{双曲正弦 } X \,\text{正弦 } Y - \alpha \,\text{双曲余弦 } X \,\text{余弦 } Y\right),\\ \Phi_{YY}(X,Y) &= 2\left(-\,\text{余弦}^2 Y + \text{正弦}^2 Y + \beta \,\text{双曲正弦 } X \,\text{正弦 } Y + \alpha \,\text{双曲余弦 } X \,\text{余弦 } Y\right),\\ \Phi_{XY}(X,Y) &= 2\left(-\beta \,\text{双曲余弦 } X \,\text{余弦 } Y + \alpha \,\text{双曲正弦 } X \,\text{正弦 } Y\right)。\end{aligned} \tag{3.10}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}\Phi_{XX}(0,0) &= 2(1-\alpha),\\ \Phi_{YY}(0,0) &= 2(\alpha-1),\\ \Phi_{XY}(0,0) &= -2\beta,\end{aligned} \tag{3.11}$$

and

$$\begin{aligned}\Phi_{XX}(X_\pm, Y_\pm) &= 2\sqrt{(\alpha^2+\beta^2-1)^2 + 4\beta^2},\\ \Phi_{YY}(X_\pm, Y_\pm) &= 2\sqrt{(\alpha^2+\beta^2-1)^2 + 4\beta^2},\\ \Phi_{XY}(X_\pm, Y_\pm) &= 0.\end{aligned}$$

令 $J_\Phi(X,Y)$ 为 $\Phi(X,Y)$ 的雅可比矩阵。于是有 $J_\Phi(0,0) = 2\begin{pmatrix}1-\alpha & -\beta\\ -\beta & \alpha-1\end{pmatrix}$，且 $\det J_\Phi(0,0) = -4(\alpha-1)^2 - 4\beta^2 < 0$。我们还有 $J_\Phi(X_\pm, Y_\pm) = 2\sqrt{(\alpha^2+\beta^2-1)^2 + 4\beta^2} \times \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，~~这显然是正定的。因此，~~点 $(X_\pm, Y_\pm)$ 是极小值点，而 $(0,0)$ 是鞍点。

由于我们计算了 $\Phi(X_\pm, Y_\pm) = 0$ 以及 $\Phi(0,0) = (\alpha-1)^2 + \beta^2 = (\text{双曲余弦 } a - \text{余弦 } b)^2$，因此有如下结果。

- $C_h = \{(X_+, Y_+)、(X_-, Y_-)\}$ 如果 $h = 0$,
- C_h 由两条简单闭曲线组成，当 $0 < h <$ (双曲余弦 a − 余弦 b)2,
- C_h 是一条在 (0, 0) 处具有双重点奇异性的闭曲线，当 $h =$ (双曲余弦 a −余弦 b)2,

- C_h 是一条简单闭曲线，当 (余弦 a − 余弦 b)$^2 < h <$ $(\alpha + 1)^2 + \beta^2$。

根据莫尔斯理论。见图9

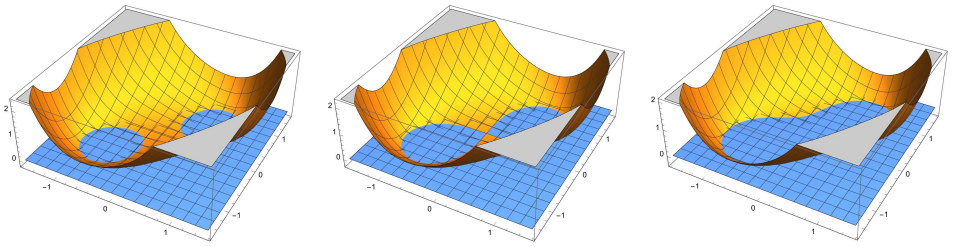

FIGURE 9. C_h 的图像，其中 $h = 1/5$（左）、 $1/4$（中）和$1/3$（右），其中 $(\alpha, \beta) =$ (1, $1/2$)。

由于 $H_G^0 = C_{1/4}$，引理得证。 □

现在，我们证明前一个引理中用到的子引理。

子引理 3.10. $\Phi(X, Y)$ 的临界点（其中 $-\pi < Y \leq \pi$）为 (0, 0) 和 $(X_\pm, Y_\pm)$。

证明. 首先，我们可以假设 $|Y| < \pi$，因为我们知道 C_h 不与直线 $Y = \pi$ 相交（参见引理 3.9 的证明）。

由 (3.9)， $\Phi_X(X, Y) = \Phi_Y(X, Y) = 0$ 当且仅当

$$\sinh X \cosh X - \beta \cosh X \sin Y - \alpha \sinh X \cos Y = 0, \tag{3.12}$$

$$-\sin Y \cos Y - \beta \sinh X \cos Y + \alpha \cosh X \sin Y = 0. \tag{3.13}$$

将 (3.12) 乘以 $\sinh X \cos Y$，将 (3.13) 乘以 $\cosh X \sin Y$，并取二者之差，得到

$$\begin{aligned}
0 =& \sinh^2 X \cosh X \cos Y - \beta \sinh X \cosh X \sin Y \cos Y - \alpha \sinh^2 X \cos^2 Y \\
&+ \cosh X \sin^2 Y \cos Y + \beta \sinh X \cosh X \sin Y \cos Y - \alpha \cosh^2 X \sin^2 Y \\
=& \cosh X \cos Y \left(\sinh^2 X + \sin^2 Y\right) - \alpha \left(\sinh^2 X \cos^2 Y + \cosh^2 X \sin^2 Y\right) \\
=& \cosh X \cos Y (\cosh^2 X - \cos^2 Y) \\
&- \alpha \left(\cosh^2 X \cos^2 Y - \cos^2 Y + \cosh^2 X - \cosh^2 X \cos^2 Y\right) \\
=& \left(\cosh^2 X - \cos^2 Y\right) (\cosh X \cos Y - \alpha).
\end{aligned}$$

由于双曲余弦 $X \geq 1$， |余弦 $Y| \leq 1$，且 $|Y| < \pi$，我们有双曲余弦 X 余弦 $Y = \alpha$，或 $X = Y = 0$。

当 $(X, Y) =$ (0, 0) 时，两个偏导数必定为零。

现在，考虑双曲余弦 X 余弦 $Y = \alpha$ 的情形。

将 (3.12) 乘以余弦 Y，并利用双曲余弦 X 余弦 $Y = \alpha$，我们得到

$$\begin{aligned}
0 =& \alpha \sinh X - \alpha\beta \sin Y - \alpha \sinh X \cos^2 Y \\
=& \alpha \sin Y \left(\sinh X \sin Y - \beta\right).
\end{aligned}$$

由于 $|Y| < \pi$，我们得到 $Y = 0$，即 $\sinh X \sin Y = \beta$。若 $Y = 0$，由 (3.13) 可得$\beta \sinh X = 0$，这意味着 $X = 0$。

因此，剩下的情形是 $\sinh X \sin Y = \beta$，且 $\cosh X \cos Y = \alpha$，并且 $(X,Y) \neq (0,0)$。

由于 $\sinh X \neq 0$ 和 $\cosh X \neq 0$，我们有 $\beta/\sinh X = \sin Y$ 和 $\alpha/\cosh Y = \cos Y$，这意味着 $(\beta/\sinh X)^2 + (\alpha/\cosh Y)^2 = 1$。因此，我们有 $\sinh^4 X - (\alpha^2 + \beta^2 - 1)\sinh^2 X - \beta^2 = 0$。所以我们有 $\sinh X = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\alpha^2+\beta^2-1+\sqrt{(\alpha^2+\beta^2-1)^2+4\beta^2}\right)}$。注意，较大平方根中的表达式为正，因为 $|\alpha^2+\beta^2-1| < \sqrt{(\alpha^2+\beta^2-1)^2+4\beta^2}$。类似地，我们有 $\sin Y = \beta/\sinh X = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\alpha^2-\beta^2+\sqrt{(\alpha^2+\beta^2-1)^2+4\beta^2}\right)}$。出于上述相同原因，较大平方根中的表达式为正。它小于 1，因为 $(\alpha^2+\beta^2-1)^2+4\beta^2-(\alpha^2+\beta^2+1)^2 = -4\alpha^2 < 0$。

因此，我们得出，$-\pi < Y \leq \pi$ 时，$\Phi(X,Y)$ 的临界点为 $(0,0)$ 和 $(X_\pm, Y_\pm)$ □

注 3.11. 若 $(X,Y) \in C_{1/4} = H^0_G$，则我们有 $|\alpha - \cosh X \text{余弦 } Y| \leq 1/2$。因此，由假设可知 $\alpha > 1/2$，我们有 $\cosh X \text{余弦 } Y \geq \alpha - 1/2 > 0$。由此可得余弦 $Y > 0$，所以事实上我们有 $|Y| < \pi/2$。

注 3.12. 若双曲余弦 $a -$ 余弦 $b = 1/2$，即由引理 3.8 可知 $(\alpha-1)^2+\beta^2 = 1/4$，则点 $(0,0)$ 是 H^0_G 的唯一双重点。根据 (3.11)，$\Phi(X,Y)$ 在 $(0,0)$ 处的泰勒展开为

$$\Phi(X,Y) = 1/4 + (1-\alpha)(X^2-Y^2) - 2\beta XY + (\text{terms with degree three or more}).$$

由于右侧的二次项变为

$$-\frac{1}{2(2\beta+1)}\big(2(\alpha-1)X + (2\beta+1)Y\big)\big((2\beta+1)X + 2(1-\alpha)Y\big),$$

在 $(0,0)$ 处，H^0_G 的切线如下：

$$2(\alpha-1)X + (2\beta+1)Y = 0,$$
$$(2\beta+1)X - 2(\alpha-1)Y = 0.$$

如果令

$$\rho_1 := (2\beta+1) - 2(\alpha-1)\sqrt{-1}, \tag{3.14}$$
$$\rho_2 := 2(\alpha-1) + (2\beta+1)\sqrt{-1},$$

那么，直线 $\{\rho_1 t \mid t \in \mathbb{R}\}$ 和 $\{\rho_2 t \mid t \in \mathbb{R}\}$ 平行于这些切线。注意到 $\rho_1 \times \sqrt{-1} = \rho_2$，因此我们得出结论：将对应于 ρ_1 的向量旋转 $\pi/2$，即可得到对应于 ρ_2 的向量。

由 (3.6) 可知，H^0_G 关于原点 O 对称。

如果 $\cosh a - \cos b \geq 1/2$，曲线 H^0_G 将 Z 平面分隔成三个开连通分支。在这种情况下，我们定义如下两条简单闭曲线：$\overline{C}_G$ 和 $\underline{C}_G$。注意，由 (3.6)、(3.3) 和 (3.4) 可知，$\varphi = c + d\sqrt{-1}$ 位于 H^0_G 上。

定义 3.13. 当 $\cosh a - \cos b > 1/2$ 时，我们将 $\overline{C}_G$ 和 $\underline{C}_G$ 定义为光滑的简单闭曲线，使得 $H^0_G = \overline{C}_G \cup \underline{C}_G$ 和 $\overline{C}_G \cap \underline{C}_G = \emptyset$，其中我们选择 $\overline{C}_G$，使得 $\varphi \in \overline{C}_G$。参见图 8 左图。

若 $\cosh a - \cos b = 1/2$，则我们定义简单闭曲线 $\overline{C}_G$ 和 $\underline{C}_G$，使得 $H^0_G = \overline{C}_G \cup \underline{C}_G$，其中 $\overline{C}_G \cap \underline{C}_G = \{O\}$，并且 $\overline{C}_G$ 包含点 φ。于是 $\overline{C}_G$ 和 $\underline{C}_G$ 除了在 O 处之外都是光滑的。参见图 8 中图。注意，在这两种情况下，$\overline{C}_G$ 和 $\underline{C}_G$ 都是对称的。

我们可以证明曲线 $\overline{C}_G$ 是凸的。事实上，我们证明如下命题。

命题 3.14. 若 $\cosh a - \cos\, b > 1/2$，则适当定向后，$\overline{C}_G$ 的曲率为正。若 $\cosh a - \cos\, b = 1/2$，则适当定向后，$\overline{C}_G$ 的曲率为正，但 (0,0) 除外。

证明过程很长，且涉及许多技术性计算，因此我们将其推迟到附录 A。

若 $\cosh a - \cos\, b = 1/2$，根据注 3.12，$\overline{C}_G$ 在 (0, 0) 处的两条切线互相垂直。因此，它在 (0, 0) 处的内角为 $\pi/2$ 或 $3\pi/2$。若为 $3\pi/2$，那么根据 $\overline{C}_G$ 和 $\underline{C}_G$ 的对称性，它们应当相交。因此，内角应为 $\pi/2 < \pi$，由此得到以下推论。

推论 3.15。若 $\cosh a - \cos\, b \geq 1/2$，则曲线 $\overline{C}_G$ 是凸的。

我们可以证明，$\overline{C}_G$ 和 $\underline{C}_G$ 被直线 $aX + bY = 0$ 分隔。

引理 3.16。若 $\cosh\, a - \cos\, b > 1/2$，则直线 $aX + bY = 0$ 将 H^0_G 分隔为 $\overline{C}_G$ 和 $\underline{C}_G$。若 $\cosh\, a - \cos b = 1/2$，则直线 $aX + bY = 0$ 将 $H^0_G \setminus \{O\}$ 分隔为 $\overline{C}_G \setminus \{O\}$ 和 $\underline{C}_G \setminus \{O\}$。

证明。回顾一下，我们假设 $-\pi < Y \leq \pi$, $a > 0$, $0 < b \leq \pi/2$，且 $\alpha = \cosh\, a \cos\, b > 1/2$。另请注意，根据引理 3.8，$(\alpha - 1)^2 + \beta^2 = (\cosh\, a - \cos\, b)^2$。

我们首先考虑 $\cosh\, a - \cos\, b = 1/2$ 的情形，也就是说，$(\alpha - 1)^2 + \beta^2 = 1/4$。注意，$1/2 < \alpha < 3/2$ 且 $0 < \beta < 1/2$。

我们将证明 $\overline{C}_G$ 位于圆形扇区 $S := \{Z \in \mathbb{C} \mid Z = s\rho_1 + t\rho_2, s, t \geq 0\}$ 内，其中 ρ_i $(i = 1, 2)$ 在 (3.14) 中定义。

我们首先证明 ξ 位于 S 中。由注 3.12 可知 $\rho_2 = \rho_1 \times \sqrt{-1}$，因此只需证明 ξ/ρ_1 位于第一象限，也就是说，$\mathrm{Im}(\xi/\rho_1) > 0$ 且 $\mathrm{Re}(\xi/\rho_1) > 0$。

我们有

$$|\rho_1|^2 \operatorname{Im} \frac{\xi}{\rho_1} = b(2\beta + 1) + 2a(\alpha - 1), \tag{3.15}$$

$$|\rho_1|^2 \operatorname{Re} \frac{\xi}{\rho_1} = a(2\beta + 1) - 2b(\alpha - 1). \tag{3.16}$$

将（3.15）（分别为（3.16））的右侧记为 $R^{\mathrm{Im}}(a, b)$（分别为 $R^{\mathrm{Re}}(a, b)$），我们有

$$\frac{\partial R^{\mathrm{Im}}}{\partial a}(a, b) := 2\big(a \sinh a \cos b + \cosh a(b \sin b + \cos b) - 1\big),$$
$$\frac{\partial R^{\mathrm{Re}}}{\partial b}(a, b) := 2\big(a \sinh a \cos b + \cosh a(b \sin b - \cos b) + 1\big)$$

由于 $b \sin\, b + \cos\, b$ 的导数在 $0 < b < \pi/2$ 时等于 $b \cos b > 0$，$b \sin\, b + \cos b > 1$。因此 $\frac{\partial R^{\mathrm{Im}}}{\partial a}(a, b) > 0$，于是我们有 $R^{\mathrm{Im}}(a, b) > R^{\mathrm{Im}}(0, b) = b > 0$。

类似地，$b \sin b - \cos\, b$ 的导数在 $0 < b < \pi/2$ 时等于 $b \cos\, b + 2b > 0$，这意味着 $b \sin\, b - \cos b > -1$ 且 $\frac{\partial R^{\mathrm{Re}}}{\partial b}(a, b) > 0$。因此，我们得出结论：$R^{\mathrm{Re}}(a, b) > R^{\mathrm{Re}}(a, 0) = a > 0$。

由此我们证明了 $\xi \in S$。

由推论 3.15 可知，$\overline{C}_G$ 是凸的。由于 $\xi \in S$ 和 $\xi \in H^-_G$，因此向量 ρ_1 位于 H^-_G 的右侧，而向量 ρ_2 位于 H^-_G 的左侧。由此我们得出 $\overline{C}_G \setminus \{O\} \subset S$。由于直线 $aX + bY = 0$ 平行于 $\xi\sqrt{-1}$，而 $\xi\sqrt{-1}$ 垂直于 ξ，所以除了 O 之外，它不在 S 中。最后我们看到，直线 $aX + bY = 0$ 将 $C \setminus \{O\}$ 分隔成 $\overline{C}_G \setminus \{O\}$ 和 $\underline{C}_G \setminus \{O\}$。

注意，这意味着若 $\cosh a - \cos\, b = 1/2$，则 $\Phi(-bt, at) \geq 1/4$。

接下来，我们将证明：若 $(\alpha - 1)^2 + \beta^2 > 1/4$，则直线 $aX + bY = 0$ 将 H^0_G 分隔为 $\overline{C}_G$ 和 $\underline{C}_G$。为此，我们将证明直线 $aX + bY = 0$ 位于

区域 H_G^+。由 (3.6) 和 (3.8) 可知，由于 $-\pi < Y \le \pi$，只需证明对$-\pi/a < t \le \pi/a$ 有 $\Phi(-bt, at) > 1/4$。

由于 $\alpha =$双曲余弦 a 余弦 b 且 $\beta =$双曲正弦 a 正弦 b，由 (3.8) 可得

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}(a,b,t) :=& \Phi(-bt,at)\\ =&\big(\alpha-\cosh(bt)\cos(at)\big)^2+\big(\beta+\sinh(bt)\sin(at)\big)^2\\ =&\big(\cosh a\cos b-\cosh(bt)\cos(at)\big)^2+\big(\sinh a\sin b+\sinh(bt)\sin(at)\big)^2.\end{aligned}$$

~~我们可以假设 $0 \le t \le \pi/a$，因为 $\Phi(a,b,t) = \Phi(a,b,-t)$。

如果 $\pi/(2a) \le t \le \pi/a$，那么由于余弦$(at) \le 0$、双曲正弦$(bt) > 0$、正弦$(at) \ge 0$，且$\alpha > 1/2$，我们有

$$\widetilde{\Phi}(a,b,t) \ge \alpha^2+\beta^2 > 1/4.$$

~我们来考虑 $0 \le t < \frac{\pi}{2a}$ 的情形。 $\Phi(a,b,t)$ 关于 a 的偏导数为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial a}(a,b,t)\\ =&2\cosh a\sinh a-2t\cos(at)\sin(at)\\ &+2\cosh a\sin(at)\big(t\cosh(bt)\cos b+\sinh(bt)\sin b\big)\\ &+2\sinh a\cos(at)\big(t\sinh(bt)\sin b-\cosh(bt)\cos b\big).\end{aligned}$$

对其关于 b 求偏导数，得到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial b\,\partial a}(a,b,t)\\ =&2(1+t^2)\big(\cosh a\sinh(bt)\cos b\sin(at)+\cosh(bt)\sinh a\cos(at)\sin b\big)\ge 0.\end{aligned}$$

~因此，偏导数 $\partial\Phi(a,b,t)/\partial a$ 关于 b 是递增的，并且我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial a}(a,b,t) \ge& \frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial a}(a,0,t)\\ =&2\big(\cosh a-\cos(at)\big)\big(\sinh a+t\sin(at)\big)>0.\end{aligned}$$

~因此，我们看到 $\Phi(a,b,t)$ 关于 a 严格递增。

因此，若 $\pi/3 < b < \pi/2$，则 $\widetilde{\Phi}(a,b,t) > \widetilde{\Phi}(0,b,t) = \big($双曲余弦$(bt) -$余弦$\,b\big)^2$，它关于 t 严格递增，因为双曲余弦$(bt) >$余弦 b。由此我们得出结论： $\widetilde{\Phi}(a,b,t) > (1-$余弦 $b)^2 > 1/4$。

假设 $0 < b \le \pi/3$。由双曲余弦 $a -$余弦 $b > 1/2$，且余弦 $b > 1/2$，我们~有 $a >$反双曲余弦(余弦 $b + 1/2$)。由于 $\Phi(a,b,t)$ 关于~~ a 严格递增，我们看到 $\Phi(a,b,t)$ 大于将 $\Phi(a,b,t)$ 在 $a =$反双曲余弦(余弦 $b + 1/2$) 处取值所得的值。然而，若 $a =$反双曲余弦(余弦 $b + 1/2$)，则双曲余弦 $a -$余弦 $b = 1/2$。~现在，我们已经知道，若双曲余弦 $a -$余弦 $b = 1/2$，则 $\Phi(a,b,t) \ge 1/4$。所以我们~最终得出结论： $\Phi(a,b,t) > 1/4$。

至此，证明完成。 □

令 $\overline{C}_F := \xi^{-1}\overline{C}_G$ 和 $\underline{C}_F := \xi^{-1}\underline{C}_G$，由于映射 $Z \mapsto \xi^{-1}Z$ 将 Z 平面中的直线 $aX + bY = 0$ 映到 z 平面中的虚轴，因此得到以下推论。

推论 3.17。如果双曲余弦 $a -$余弦 $b > 1/2$，那么直线 $x = 0$ 将 H_F^0 分隔为$\overline{C}_F$和 $\underline{C}_F$。如果双曲余弦 $a -$余弦 $b = 1/2$，那么直线 $x = 0$ 将 $H_F^0 \setminus \{O\}$ 分隔为$\overline{C}_F \setminus \{O\}$ 和 $\underline{C}_F \setminus \{O\}$。

由此可知，当双曲余弦 $a-$余弦$b=1/2$时，半开区间 $(0,1]$ 包含于H_F^-。类似地，若双曲余弦 $a-$余弦$b<1/2$，则闭区间 $[0,1]$ 包含于 H_F^-。因此我们得到另一个推论。

推论 3.18. 若 $\cosh a-\cos b\le 1/2$，则当 $x\in(0,1],$时，Re $F(x)$ 递减，因此 Re $F(x)<0$ 对于 $0<x\le 1$。

3.4. 曲线 χ_G 和 χ_F。本小节中，我们研究定义 3.4 中定义的曲线 χ_G 和χ_F。回顾一下，我们假设 $a>0$, $0<b<\pi/2$，且$\alpha=\cosh a\cos b>1/2$。

引理 3.19. 假设 $a\tanh c-b\tan d\ge 0$。沿着曲线 χ_G，Re $G(Z)$ 严格递增。特别地，我们有 Re $G(\xi)<$Re $G(\varphi)$。

证明。由于 $\cosh\big(\chi(t)+t\sqrt{-1}\big)=\cosh\chi(t)\cos t+\sqrt{-1}\sinh\chi(t)\sin t=\cosh\chi(t)\cos t+\sqrt{-1}\beta$，由 (1.8) 和 (1.9) 可得 $\cosh\xi-\cosh\big(\chi(t)+t\sqrt{-1}\big)=\alpha-\cosh\chi(t)\cos t\in\mathbb{R}$。此外，由于 $\chi(t)$ 对于 $b\le t\le d$ 严格递减，我们得到

$$0<2\cosh\xi-2\cosh\big(\chi(t)+t\sqrt{-1}\big)<2\alpha-2\cosh c\cos d=1 \tag{3.17}$$

对于 $b<t<d$，这里我们使用 (3.3)。由于$c<\chi(t)<a$，根据引理 2.9 中的第一个等式，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\operatorname{Re}G\big(\chi(t)+t\sqrt{-1}\big)\\
=&\frac{\partial}{\partial X}\operatorname{Re}G\big(\chi(t)+t\sqrt{-1}\big)\times\chi'(t)+\frac{\partial}{\partial Y}\operatorname{Re}G\big(\chi(t)+t\sqrt{-1}\big)\\
=&\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\xi}\log\Big(2\cosh\xi-2\cosh\big(\chi(t)+t\sqrt{-1}\big)\Big)\right)\times\left(\frac{-\beta\cot t}{\sqrt{\beta^2+\sin^2 t}}\right)\\
&-\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\xi}\log\Big(2\cosh\xi-2\cosh\big(\chi(t)+t\sqrt{-1}\big)\Big)\right)\\
&(\text{since } 2\cosh\xi-2\cosh\big(\chi(t)+t\sqrt{-1}\big)\in\mathbb{R})\\
=&\frac{\log\Big(2\cosh\xi-2\cosh\big(\chi(t)+t\sqrt{-1}\big)\Big)}{|\xi|^2}\left(b-\frac{a\beta\cot t}{\sqrt{\beta^2+\sin^2 t}}\right).
\end{aligned}$$

由于 $\cot t$ 递减，且当 $0<b\le t\le d<\pi/2$ 时 $\sin^2 t$ 递增，并且由 (3.4) 可得 $\beta=\sinh c\sin d$，因此我们有

$$\begin{aligned}
b-\frac{a\beta\cot t}{\sqrt{\beta^2+\sin^2 t}}\le&b-\frac{a\sinh c\sin d\cot d}{\sqrt{\sinh^2 c\sin^2 d+\sin^2 d}}\\
=&b-\frac{a\tanh c}{\tan d}\le 0,
\end{aligned}$$

其中，第二个不等式由假设 $a\tanh c-b\tan d\ge 0$ 得出。注意，当 $t=d$ 时，第一个等式成立。因此，由 (3.17) 可知，对于 $b<t<d$, $\frac{d}{dt}$Re $G\big(\chi(t)+t\sqrt{-1}\big)>0$。这表明，沿曲线 χ_G，Re $G(Z)$ 严格递增。

证明至此完成。 □

在 z 平面中，我们有以下推论。

推论 3.20. 若 $a\tanh c-b\tan d\ge 0$，则沿曲线 χ_F，Re $F(z)$ 递增。特别地，我们有 Re $F(1)<$Re $F(\sigma)$。

我们还可以利用曲线 χ_G 证明以下引理。

引理 3.21. 若 a 双曲正切$c-b$ 正切 $d\ge 0$，则实部 $\sigma<1$。

证明. 曲线 χ_G 在 XY平面上参数化为 $X = \chi(Y)$ $(b \le Y \le d)$。其导数变为

$$\chi'(Y) = -\frac{\beta \cos Y}{\sin Y \sqrt{\sin^2 Y + \beta^2}} < 0,$$
$$\chi''(Y) = \frac{\beta\left(\sin^2 Y(1+\cos^2 Y) + \beta^2\right)}{\sin^2 Y\left(\sin^2 Y + \beta^2\right)^{3/2}} > 0,$$

其中第一个不等式成立是因为 $0 < b \le Y \le d < \pi/2$。因此， $\chi(Y)$ 的图像在 XY 平面上向左递减且为凸函数。由此可知， χ_G 在 φ 处的切线 T_V 位于 χ_G 的左侧，但 φ 除外。由于 $\chi(Y)$ 递减，切线 T_V 位于左上方。回想一下， ξ 是与 $\chi(b)$ 对应的 χ_G 的另一端，我们得出点 ξ 位于 T_V 的右侧。见图 10 左图。

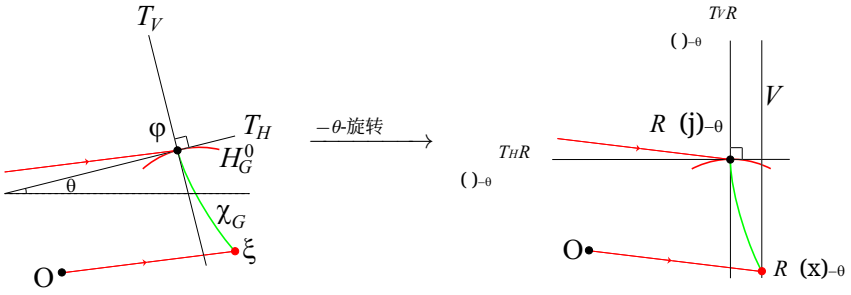

FIGURE 10. A $-\theta$-旋转将 T_V 和 T_H 分别映射到垂直直线和水平直线。在左图中，绿色曲线是χ_G，红色曲线是 H_G^0的一部分。

由 (3.4) 中的 $\beta = \sinh c \sin d$， 可知 T_V的斜率等于

$$-\frac{\beta \cos d}{\sin d\sqrt{\sin^2 d + \beta^2}} = -\frac{\sinh c \sin d \cos d}{\sin d\sqrt{\sin^2 d + \sinh^2 c \sin^2 d}} = -\tanh c \cot d,$$

也就是说， $-\coth c \tan d$。

根据隐函数定理， H_G^0 在 $\varphi = c + d\sqrt{-1}$处的切线 T_H 的斜率等于 $-\frac{\Phi_X(c,\ d)}{\Phi_Y(c,\ d)}$。由 (3.9)、~~(3.3)~~和 (3.4)，我们得到

$$\Phi_X(c,d) = -\sinh c \cos d,$$
$$\Phi_Y(c,d) = \cosh c \sin d.$$

因此， T_H的斜率为 $\tanh c \cot d$，由此可知 T_V与 T_H垂直。

我们令 $\theta :=$ 反正切(双曲正切 c余切 d)，使得 θ是从 X轴到 T_H的角。注意，由引理 3.1 可知， $0 < \theta < \pi/2$ ，因为 $c > 0$ 且 $0 < d < \pi/2$ 。用 R_υ 表示绕原点旋转 υ，则直线 $R_{-\theta}(T_H)$（分别为 $R_{-\theta}(T_V)$）是水平的（分别是竖直的）。由于 ξ 位于 T_V的右侧，点 $R_{-\theta}(\xi)$ 位于直线 $R_{-\theta}(T_V)$ 的右侧，这意味着点 $R_{-\theta}(\varphi)$ 位于经过 $R_{-\theta}(\xi)$ 的竖直直线 V 的左侧。注意，它位于连接 O 与 $R_{-\theta}(\xi)$ 的直线上方。见图10右图。

由假设可得双曲正切 $c\cot d \ge b/a$，因此有 $\arg \xi \le \theta$。由于映射 $z \mapsto \xi z$等于 $|\xi| R_{\arg \xi}$，其逆变换 $|\xi|^{-1} R_{-\arg \xi}$将 ξ映至 1，并将φ映至 σ，也就是说，我们有 $|\xi|^{-1} R_{-\arg \xi}(\varphi) = \sigma$，以及 $|\xi|^{-1} R_{-\arg \xi}(\xi) = 1$。因此，我们看到 $\sigma = |\xi|^{-1}(R_{\theta - \arg \xi} \circ R_{-\theta})(\varphi)$ 和 $1 = |\xi|^{-1}(R_{\theta-\arg \xi} \circ R_{-\theta})(\xi)$ 是

分别由 $R_{-\theta}(\varphi)$ 和 $R_{-\theta}(\xi)$ 经绕原点旋转 $\theta-\arg\xi\geq 0$ （并放大）得到的。

若将图10的右图绕原点旋转 $\theta-\arg\xi$，我们得出 σ 位于直线 $R_{\theta-\arg\xi}(V)$的左侧，且在实轴上方。由于直线 $R_{\theta-\arg\xi}(V)$向右下方倾斜并经过点1，我们得出实部 $\sigma<1$。□

3.5. 线段 h_F 与 v_F。在本小节中，我们在 z平面上定义线段 $v_F\subset V_F^-$ 与 $h_F\subset H_F^+$，分别连接 O 与$\sqrt{-1}$虚部 σ，以及 σ 与 $\sqrt{-1}$ 虚部 σ。我们假设 $a>0$、 $0<b<\pi/2$以及 $\alpha=$双曲余弦 a 余弦 $b>1/2$。

定义 3.22. 设 v_F 为 z平面中的线段 $v(t):=t\sqrt{-1}$，其中$0\leq t\leq(ad-bc)/|\xi|^2$，并设 h_F 为 z 平面中的线段 $h(t):=\sigma-t$，其中 $0\leq t\leq(ac+bd)/|\xi|^2$。注意， $ad-bc>0$ 由引理 3.1 得出。

在 Z平面中，我们将 v_G 和 h_G 分别定义为线段 ξv_F 和 ξh_F。

由于我们有 $v\big((ad-bc)/|\xi|^2\big)=h\big((ac+bd)/|\xi|^2\big)=\overline{(ad-bc)_{|\xi|^2}^{\sqrt{-1}}}=\sqrt{-1}$虚部 σ，v_F 连接 O 与 $\sqrt{-1}$ 虚部 σ，且 h_F 连接 σ 与 $\sqrt{-1}$ 虚部 σ。由此可知， v_G 连接 O 与 $\xi\sqrt{-1}$虚部 σ，且 h_G 连接 φ 与 $\xi\sqrt{-1}$虚部 σ。

引理3.23。假设双曲余弦 $a-$余弦 $b\geq 1/2$。则线段 v_G 和h_G 位于矩形 $\{Z\in\mathbb{C}\mid|$实部 $Z|<a$， $-\pi<$虚部 $Z\leq\pi\}$中。

证明。由于$\varphi=c+d\sqrt{-1}$ 以及来自引理 3.1 的 $0<c<a$ 和 $0<d<\pi/2$，只需证明 |实部 $(\xi\sqrt{-1}$虚部 $\sigma)|<a$ 和 $-\pi<|$虚部$(\xi\sqrt{-1}$虚部 $\sigma)|\leq\pi$。

由于根据引理 3.1，$\mathrm{Im}(\xi\sqrt{-1}\,\mathrm{Im}\ \sigma)=\frac{a}{(ad-bc)_{|\xi|^2}}>0$ 且 $\mathrm{Re}(\xi\sqrt{-1}\,\mathrm{Im}\ \sigma)=-\frac{b(ad-bc)}{|\xi|^2}<0$，我们需要证明 $\pi(a^2+b^2)-a(ad-bc)\geq 0$ 以及 $a(a^2+b^2)-b(ad-bc)>0$。

由于根据引理 3.1 有 $d<\pi/2$，因此 $\pi(a^2+b^2)-a(ad-bc)=a^2(\pi-d)+\pi b^2+abc>a^2\pi/2+\pi b^2+abc>0$。

为了证明 $a(a^2+b^2)-b(ad-bc)>0$，我们先证明 $\cosh a-\cos b\geq 1/2$ 蕴含$a^2+b^2\geq\kappa^2$，其中 $\kappa:=$ 反双曲余弦$(3/2)$。实际上，我们将证明其逆否命题；即$a^2+b^2<\kappa^2$ 蕴含 $\cosh a-\cos b<1/2$。

由 $a^2+b^2<\kappa^2$ 和 $a>0$，可得 $a<\sqrt{\kappa^2-b^2}$ 和 $b<\kappa$。由于 $\cosh a$ 在 $a>0$ 上递增，因此只需证明，对于$0<b<\kappa$，$\cosh(\sqrt{\kappa^2-b^2})-\cos b<1/2$。由于我们有

$$\begin{aligned}\frac{d}{db}\big(\cosh(\sqrt{\kappa^2-b^2})-\cos b\big)&=\sin b-\frac{b\sinh(\sqrt{\kappa^2-b^2})}{\sqrt{\kappa^2-b^2}}\\&\qquad(\text{since }\sinh x>x\text{ for }x>0)\\&<\sin b-b<0\end{aligned}$$

对于 $0<b<\kappa$。因此我们得出，$\cosh(\sqrt{\kappa^2-b^2})-\cos b<\big(\cosh(\sqrt{\kappa^2-b^2})-\cos b\big)\Big|_{b=0}=\cosh\kappa-1=1/2$。

接下来，我们证明，若 $a^2+b^2\geq\kappa^2$，则 $a(a^2+b^2)-b(ad-bc)>0$。

由引理 3.1，可得 $d<\pi/2$和 $c>$反双曲正弦β，其中 $\beta=$双曲正弦 a正弦 b（见(1.9)）。结合假设 $a^2+b^2\geq\kappa^2$，可得

$$a(a^2+b^2)-b(ad-bc)>\kappa^2a+b^2\,\mathrm{arsinh}(\sinh a\sin b)-ab\pi/2.$$

令 $h(a,b):=\kappa^2a+b^2$ 反双曲正弦(双曲正弦 a 正弦 $b)-ab\pi/2$，则有

$$\frac{\partial h}{\partial a}(a,b)=\kappa^2-\frac{\pi}{2}b+\frac{b^2\cosh a\sin b}{\sqrt{1+\sinh^2a\sin^2b}},$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial a^2}(a,b)=\frac{b^2\sinh a\sin b\cos^2 b}{\left(1+\sinh^2 a\sin^2 b\right)^{3/2}}.$$

由于 $\frac{\partial^2 h}{\partial a^2}(a,b) > 0$ 对 $a > 0$ 和 $0 < b < \pi/2$ 成立，因此我们得出 $\frac{\partial h}{\partial a}(a,b)$ 关于 a 递增。因此 $\frac{\partial h}{\partial a}(a,b) > \frac{\partial h}{\partial a}(0,b) = \kappa^2 - \frac{\pi}{2}b + b^2$ 正弦 b。

我们将证明，对于 $0 < b < \pi/2$，$h_0(b) := \frac{\partial h}{\partial a}(0,b) = \kappa^2 - \frac{\pi}{2}b + b^2$ 正弦 $b > 0$。为此，我们考虑函数 $\widetilde{h}_0(b) := \left(\frac{4\kappa}{\pi}\right)^2\left(b-\frac{\pi}{4}\right)^2 \geq 0$。我们将证明 $h_0(b) > \widetilde{h}_0(b)$（$0 < b < \pi/2$）。我们有

$$h_0(b)-\widetilde{h}_0(b)=b\left(\left(\sin b-\frac{16\kappa^2}{\pi^2}\right)b+\frac{16\kappa^2-\pi^2}{2\pi}\right).$$

我们将证明，对于 $0 < b < \pi/2$，$k(b) := \left(\text{正弦}\, b-\frac{16\kappa^2}{\pi^2}\right)b+\frac{16\kappa^2-\pi^2}{2\pi}$ 为正。我们计算 $k'(b) = \text{正弦}\, b + b\,\text{余弦}\, b - \frac{16\kappa^2}{\pi^2}$ 以及 $k''(b) = 2\,\text{余弦}\, b - b\,\text{正弦}\, b$。由于 $k''(b)$ 在 $0 < b < \pi/2$ 时从 2 递减至 $-\pi/2$，我们得出结论：存在 $0 < b_0 < \pi/2$ 使得，当 $0 < b < b_0$ 时，$k''(b) > 0$；当 $b = b_0$ 时，$k''(b_0) = 0$；当 $b_0 < b < \pi/2$ 时，$k''(b) < 0$。由此可知，$k'(b)$ 在 $0 < b < \pi/2$ 时于 b_0 处取得最大值。由于 Mathematica 告诉我们，$b_0 = 1.07687\ldots$ 且 $k'(b_0) = -0.110587\ldots$，我们得出结论：对于 $0 < b < \pi/2$，$k'(b) < 0$。因此，$k(b)$ 单调递减；又由于 $k(\pi/2) = 0$，我们得出结论：对于 $0 < b < \pi/2$，$k(b) > 0$。

由此可知，$h(a,b)$ 关于 $a > 0$ 递减，因此我们有 $h(a,b) > h(0,b) = 0$，这意味着 $a(a^2+b^2) - b(ad-bc) > 0$，证明完毕。□

推论 3.24. 若 $\cosh a - \text{余弦}\, b \geq 1/2$，则线段 h_F 和 v_F 位于区域 $\{z \in \mathbb{C} \mid |\text{实部}(\xi z)| < a,\ -\pi < \text{虚部}(\xi z) \leq \pi\}$ 内。

现在，我们可以证明以下两个引理。

引理 3.25. 若 $\cosh a - \text{余弦}\, b \geq 1/2$ 且 a 双曲正切 $c - b$ 正切 $d \geq 0$，则线段 h_F 位于 H_F^+ 内，但不包括 σ。

证明. 只需证明线段 h_G 位于 H_G^+ 内，但不包括 φ。

回想一下，h_G 连接 φ 与 $\xi\sqrt{-1}\,\mathrm{Im}\,\sigma = (ad-bc)\xi\sqrt{-1}/|\xi|^2$ 位于直线 $aX + bY = 0$ 上，而 h_G 包含 $\varphi \in \overline{C}_G$（见定义 3.13），由引理 3.16 可知，$h_G$ 不会与 $\underline{C}_G$ 相交。

由于 $\cosh a - \cos b \geq 1/2$，由引理 3.14 可知，简单闭曲线 $\overline{C}_G$ 是凸的。因此，除了切点之外，每条切线都位于 H_G^+ 内。

由引理 3.21 的证明可知，在 φ 处的切线斜率为 $\tanh c \cot d$；由于 $a\tanh c - b\tan d \geq 0$，该斜率大于或等于 b/a。因此，φ 处的切线比向量 ξ 更陡，这意味着带有 $s < 0$ 的射线 $\varphi + s\xi$ 位于 $\overline{C}_G$ 之外。由于 h_G 不会与 $\underline{C}_G$ 相交，且表示为带有 $-(ac+bd)/|\xi|^2 \leq t \leq 0$ 的 $\varphi + s\xi$，我们得出 h_G 位于 H_G^+ 内（除 φ 外），证明得证。□

引理 3.26. 若双曲余弦 $a - \text{余弦}\, b \geq 1/2$，则线段 v_F 属于 V_F^-。

证明. 我们将证明线段 v_G 属于 V_G^-。

由于 v_G 参数化为 $t\xi\sqrt{-1}$，其中 $0 \leq t \leq (ad-bc)/|\xi|^2$，由 (3.6) 可知，只需证明双曲正弦$(\text{实部}(t\xi\sqrt{-1}))$正弦$(\text{虚部}(t\xi\sqrt{-1})) - \beta < 0$，也就是说，

$$\sinh(bt)\sin(at)+\sinh a\sin b>0.$$

我们分别由 $0 < b < \pi/2$ 和 $t \geq 0$ 得到 $\sinh a \sin b > 0$ 和 $\sinh(bt) \geq 0$。此外，由于 $t \leq (ad-bc)/|\xi|^2$，我们有

$$at \leq \frac{a(ad-bc)}{|\xi|^2} = d - \frac{b(ac+bd)}{|\xi|^2} < \frac{\pi}{2}$$

由引理 3.1 得出。由此可知 $\sin(at) > 0$，证明完毕。 □

4. Poisson summation formula

本节中，我们将使用泊松求和公式把 (2.10) 中的求和变为积分。

4.1. 泊松求和公式的陈述。我们使用以下版本的泊松求和公式，其证明与[22]的证明相似。另见 [16, 附录 A]。

命题 4.1（泊松求和公式）。设 $\{\psi_N(z)\}_{N=1,2,3\dots}$ 是区域 $D \subset \mathbb{C}$ 上的一列全纯函数。假设 $\psi_N(z)$ 在 D 中一致收敛于全纯函数 $\psi(z)$。令

$$R_+ := \{z \in D \mid \operatorname{Im} z \geq 0, \operatorname{Re}\psi(z) < 2\pi \operatorname{Im} z\},$$
$$R_- := \{z \in D \mid \operatorname{Im} z \leq 0, \operatorname{Re}\psi(z) < -2\pi \operatorname{Im} z\}.$$

我们还假设以下条件：

(i) 存在一个包含于 D 中的闭区间 $[p_0, p_1]$ ($p_0 < p_1$)，(ii) $\operatorname{Re}\psi(p_0) < 0$ 且 $\operatorname{Re}\psi(p_1) < 0$，(iii) 存在一条位于 R_+ 中、连接 p_0 与 p_1 的路径 C_+，它与 D 中的 $[p_0, p_1]$ 同伦，(iv) 存在一条位于 R_- 中、连接 p_0 与 p_1 的路径 C_-，它与 D 中的 $[p_0, p_1]$ 同伦。

于是我们有

$$\frac{1}{N} \sum_{p_0 \leq (2k+1)/(2N) \leq p_1} e^{N\psi_N\left((2k+1)/(2N)\right)} = \int_{p_0}^{p_1} e^{N\psi_N(z)}\, dz + O\left(e^{-\varepsilon N}\right)$$

对于某个与 N 无关的 $\varepsilon > 0$。

4.2. 泊松求和公式的假设。我们将证明命题 4.1 的假设 (i)–(iv) 均成立。我们假设 $\xi \in \Xi$，也就是说，$a > 0$、$0 < b < \pi/2$，以及通常的 $\alpha = \cosh a \cos b > 1/2$。

令

$$D := \{z \in \mathbb{C} \mid -\delta < \operatorname{Re} z < 1 - \delta, -4 \operatorname{Im}\sigma < \operatorname{Im} z < 2 \operatorname{Im}\sigma\}$$

其中 $\delta > 0$ 充分小。

引理 4.2. 若选取 ν 充分小且 M 充分大，则区域 D 包含于 Θ_ν。

证明. 回忆 Θ_ν 的定义 (2.14)。

我们首先证明，若选取 $0 < \nu < 1/4$ 充分小且 $M > 0$ 充分大，则 D 位于平行四边形（实际上是矩形）$\{z \in \mathbb{C} \mid |\text{虚部}(\xi z)| \leq b + 2\pi(1-\nu),\ |\text{实部}(\xi z)| \leq 2M\pi - a\}$ 内。

若 $z \in D$，则有 $-\delta < x < 1 - \delta$ 且 $-4\,\text{虚部}\,\sigma < y < 2\,\text{虚部}\ \sigma$，其中按惯例令 $x :=$ 实部 z 且 $y :=$ 虚部 z。由于 $|\text{实部}(\xi z)| = |ax - by| \leq a|x| + b|y| < a(1-\delta) + 4b\,\text{虚部}\,\sigma$，若选择 M 使得 $M > \left(a + a(1-\delta) + 4b\,\text{虚部}\ \sigma\right)/(2\pi)$，则

我们有 $|\text{实部}(\xi z)| < 2M\pi - a$。回想 $\sigma = \varphi/\xi$，可得

$$\begin{aligned} b + 2\pi(1-\nu) - |\operatorname{Im}(\xi z)| =& b + 2\pi(1-\nu) - |bx + ay| \\ \geq& b + 2\pi(1-\nu) - b|x| - a|y| \\ >& b + 2\pi(1-\nu) - b(1-\delta) - 4a \operatorname{Im}\sigma \\ =& \delta b + 2\pi(1-\nu) - \frac{4a(ad-bc)}{|\xi|^2} \\ =& \delta b - 2\pi\nu + \frac{4abc}{|\xi|^2} + \frac{1}{|\xi|^2}\left(2\pi(a^2+b^2) - 4a^2 d\right) \\ >& \delta b - 2\pi\nu + \frac{4abc}{|\xi|^2} + \frac{2\pi b^2}{|\xi|^2} > 0 \end{aligned}$$

如果我们选择的 $\nu > 0$ 充分小，其中最后一个不等式用到了引理 3.1 中的 $d < \pi/2$。这证明了 $|\text{虚部}(\xi z)| < b + 2\pi(1-\nu)$。

剩下要证明的是 D 避开 $\Delta_\nu^\pm$ 和 $\nabla_\nu^\pm$。

Δ_ν^+最左点的 x坐标为 $1 - 2\pi\nu/b$（见图6）。由于当 $z \in D$时$x < 1 - \delta$，并且

$$1 - \frac{2\pi\nu}{b} - (1-\delta) = \delta - \frac{2\pi\nu}{b} > 0$$

如果 ν 充分小。因此我们得出 $D \cap \Delta_\nu^+ = \emptyset$。类似地，$\nabla_\nu^+$最右点的 x坐标为 $-1 + 2\pi\nu/b$（见图6）。由于当 $z \in D$时$x > -\delta$，并且

$$(-\delta) - \left(-1 + \frac{2\pi\nu}{b}\right) = 1 - \delta - \frac{2\pi\nu}{b} > 0$$

如果 ν 充分小，这意味着 $D \cap \nabla_\nu^+ = \emptyset$。

由于 Δ_ν^- 的底边的 y 坐标为 $2\pi(1-\nu)a/|\xi|^2$（见图6），$\operatorname{Im}\sigma = (ad-bc)/|\xi|^2$，并且由引理 3.1 可得 $d < \pi/2$，因此我们有

$$\begin{aligned} \frac{2\pi(1-\nu)a}{|\xi|^2} - 2\operatorname{Im}\sigma =& \frac{1}{|\xi|^2}\left(2a\pi - 2a\pi\nu - 2(ad-bc)\right) \\ >& \frac{1}{|\xi|^2}(a\pi + 2bc - 2a\pi\nu), \end{aligned}$$

当 ν 足够小时，它为正。这表明 D 位于 Δ_ν^- 下方。类似地，∇_ν^- 的顶边的 y 坐标为 $-2\pi(1-\nu)a/|\xi|^2$（见图6）。由于$d < \pi/2$，我们有

$$\begin{aligned} -4\operatorname{Im}\sigma - \left(-\frac{2\pi(1-\nu)a}{|\xi|^2}\right) =& \frac{1}{|\xi|^2}\left(2a\pi - 2a\pi\nu - 4(ad-bc)\right) \\ >& \frac{1}{|\xi|^2}(-2a\pi\nu + 4bc) \end{aligned}$$

当 ν 足够小时，它为正。因此我们得出结论，D 位于 ∇_ν^- 上方。因此，如果我们选择足够小的 $\nu > 0$，就有 $D \subset \Theta_\nu$。□

现在，我们将证明条件(i)–(iv)成立，假设 $a\tanh c - b\tan d \geq 0$，且 $\cosh a - \cos b > 1/2$。我们分别考虑两种情形：$\operatorname{Re} F(\sigma) > 0$ 和 $\operatorname{Re} F(\sigma) \leq 0$。

4.2.1. $\operatorname{Re} F(\sigma) > 0$ 的情形。首先，假设 $\operatorname{Re} F(\sigma) > 0$。令

- $\psi_N(z) := f_N(z) - f_N(\sigma)$ 和 $\psi(z) := F(z) - F(\sigma)$，
- $p_0 := 0$ 以及当 $\delta_1 > \delta$ 时，充分小的 $\delta_1 > 0$ 所对应的 $p_1 = 1 - \delta_1$。

由引理 2.5 和 4.2，函数列 $\{\psi_N(z)\}$ 在 D 中一致收敛于 $\psi(z)$。

显然，若选择 δ_1 使得 $\delta_1 < 1$，则条件(i)成立。

至于条件(ii)，根据假设，我们有 Re $\psi(p_0)$ = Re $F(0)$ − Re $F(\sigma)$ = − Re $F(\sigma)$ < 0。此外，我们还有 Re $\psi(p_1)$ = Re $F(1-\delta_1)$ − $F(\sigma)$；当 $\delta_1 > 0$ 足够小时，该值为负，因为根据推论 3.20，当 $a\tanh c - b\tan d \geq 0$ 时，Re $F(1)$ < Re $F(\sigma)$。

注 4.3。由 (3.5) 可知，点 1 属于 H_F^-，当 x 接近 1 且 $x < 1$ 时，Re $F(x)$ 单调递减，这由引理 3.7 得出。因此，我们可以选择 δ_1，使得对于 $x \in [1-\delta_1, 1]$，Re $F(x)$ < Re $F(\sigma)$。

因此，仍需证明条件 (iii) 和 (iv) 得以满足。

我们注意到，$R_\pm$ 如下给出。

$$\begin{aligned} R_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Im} z < 2\operatorname{Im}\sigma, -\delta < \operatorname{Re} z < 1-\delta, \\ \operatorname{Re} F(z) < \operatorname{Re} F(\sigma) + 2\pi \operatorname{Im} z\}, \\ R_- = \{z \in \mathbb{C} \mid -4\operatorname{Im}\sigma < \operatorname{Im} z \leq 0, -\delta < \operatorname{Re} z < 1-\delta, \\ \operatorname{Re} F(z) < \operatorname{Re} F(\sigma) - 2\pi \operatorname{Im} z\}. \end{aligned}$$

还要注意，由于 D 是单连通的，只需证明存在连接 p_0 和 p_1 的路径$C_\pm \subset R_\pm$ 即可。见图11。

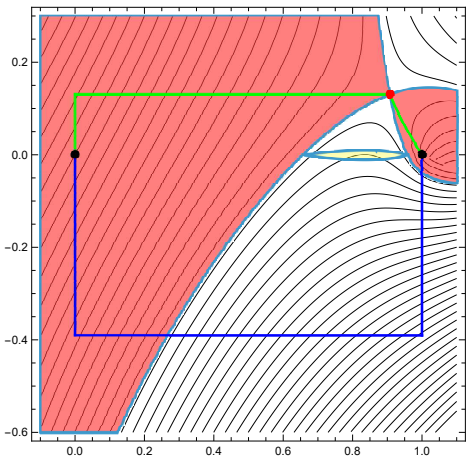

FIGURE 11. Re $F(z)$ 的等高线图，其中 $\xi = 1.5 + 0.5\sqrt{-1}$。注意，Re $F(\sigma) > 0$。红点为 σ，黑点为 0 和 1。区域 $\{z \in \mathbb{C} \mid$ Re $F(z) < 0\}$ 以粉色标示。黄色区域表示 $D \backslash (R_+ \cup R_-)$。绿色曲线（蓝色曲线）分别为 $\overline{\lambda}$ ($\underline{\lambda}$。

引理4.4。如果 Re $F(\sigma) > 0$，则条件 (iii) 成立。

证明。置 $\overline{\lambda} := v_F \cup h_F \cup \chi_F$，其中 v_F（分别为 h_F）是连接 O 至 $\sqrt{-1}$Im σ（连接 σ 至 $\sqrt{-1}$Im σ，分别），而 χ_F是连接 1 和 σ的曲线。见定义 3.4 和 3.22。于是，分段光滑曲线$\overline{\lambda}$经由 σ连接 O 和 1。由假设 $a\tanh c - b\tan d \geq 0$、引理 3.21 及其证明可知，曲线 χ_F 位于直线 Re $z = 1$ 的左侧，但 1 除外（见图10）。

由于 a 双曲正切 $c - b$ 正切 $d \geq 0$，根据推论 3.20，沿曲线 χ_F，Re $F(z)$ 从 σ 递减至 1，因此若 $z \in \chi_F$ 且 $z \neq \sigma$，则 Re $F(z)$ < Re $F(\sigma)$。根据

引理 3.25，沿线段h_F，Re $F(x+y\sqrt{-1})$ 关于 x 递增。因此，若 $z \in h_F$，则除 $z=\sigma$ 外，Re $F(z)$ $<$Re $F(\sigma)$。根据引理 3.26，由于双曲余弦 $a-$余弦 $b>1/2$，沿线段 v_F，Re F $(x+y\sqrt{-1})$ 关于 y 递减。因此，若 $z \in v_F$，则 Re $F(z)$ $<$Re $F(0)$ $=0<$Re $F(\sigma)$。

因此，如果 $z \in \overline{\lambda} \setminus \{\sigma\}$，那么 Re $F(z)$ $<$Re $F(\{v6)$。

由于曲线 $\overline{\lambda}$ 位于矩形 $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Im} z \leq \operatorname{Im} \sigma, 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ 内，我们可以通过在 O 附近将 v_F 稍稍向右推，并在 1 附近将 χ_F 稍稍向左推，得到 C_+ 。□

注 4.5. 上文定义的曲线 C_+ 包含在一个比 R_+ 更小的区域内:

$$\widetilde{R}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Im} z < 2\operatorname{Im} \sigma, -\delta < \operatorname{Re} z < 1-\delta, \operatorname{Re} F(z) \leq \operatorname{Re} F(\sigma)\}.$$

引理 4.6. 如果 Re $F(\sigma)$ >0，那么条件 (iv) 成立。

证明。令 λ_1、 λ_2 和 λ_3 分别为连接 0 与 $-3\sqrt{-1}$Im σ、连接 $-3\sqrt{-1}$Im σ 与 $1-3\sqrt{-1}$ Im σ，以及连接 $1-3\sqrt{-1}$Im σ 与 1 的线段。设 $\underline{\lambda} := \lambda_1 \cup \lambda_2 \cup \lambda_3$，它连接 0 与 1。

定义 $r_x(y)$: $=$实部 $F(x+y\sqrt{-1})$ $-$实部 $F(\sigma)$ $+2\pi y$ 为关于 y 的函数。由于 $\underline{\lambda}$ 位于区域 $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq$实部 $z \leq 1$、虚部 $z \leq 0\}$，根据推论 2.12，我们有$r'_x(y) = \frac{\partial}{\partial y}$实部 $F($ $x+y\sqrt{-1})$ $+2\pi > \pi/2$。

我们将证明，当 (x,y) 位于 $\underline{\lambda}$ 上时， $r_x(y)$ <0 。

- $\lambda_1 \subset R_-$: 由于 $r'_0(y)$ $>\pi/2$，我们得到

$$\begin{aligned} r_0(y) &= \int_0^y r'_0(s)\,ds + r_0(0) = \int_0^y r'_0(s)\,ds - \operatorname{Re} F(\sigma) \\ &< y\pi/2 \leq 0 \end{aligned}$$

  由于 $y \leq 0$ 且实部 $F(\sigma)$ >0。因此，如果 $z \in \lambda_1$，则有 $r_x(y)$ <0 。

- $\lambda_2 \subset R_-$: 对于每个点 $x-3\sqrt{-1}$虚部 $\sigma \in \lambda_2\,(0 \leq x \leq 1)$，我们选择 y_0，使得 $0 \leq y_0 \leq$虚部σ，从而点 (x,y_0) 包含于 $\overline{\lambda}$ 中。

  由于曲线 $\overline{\lambda}$ 位于 R_+ 根据注 4.5，我们有 $r_x(y_0)$ $=$实部 $F(x+y_0\sqrt{-1})$ $-$实部 $F(\sigma)$ $+2\pi y_0 \leq 2\pi y_0$。不等式 $r'_x(y)$ $>\pi/2$ 蕴含

$$\begin{aligned} r_x(-3\operatorname{Im}\sigma) &= \int_{y_0}^{-3\operatorname{Im}\sigma} r'_x(s)\,ds + r_x(y_0) \\ &< \frac{1}{2}\pi(-3\operatorname{Im}\sigma - y_0) + 2\pi y_0 = \frac{3\pi}{2}(y_0 - \operatorname{Im}\sigma) \leq 0. \end{aligned}$$

  因此我们证明了，若 (x,y) $\in \lambda_2$，则 $r_x(y)$ <0 。

- $\lambda_3 \subset R_-$: 根据推论 3.20，由于 $r_1(0)$ $=$实部 $F(1)$ $-$实部 $F(\sigma)$ <0，并且对于如上所述的 -3 虚部$\sigma \leq s \leq 0$，$r'_1(s)$ $>\pi/2$，我们有

$$r_1(y) = \int_0^y r'_1(s)\,ds + r_1(0) < 0,$$

  这就证明了，若 (x,y) $\in \lambda_3$，则 $r_x(y)$ <0 。

由于折线$\underline{\lambda}$位于矩形 $\{z \in \mathbb{C} \mid -3$虚部$\sigma \leq$虚部 $z \leq 0, 0 \leq$实部$z \leq 1\}$内，曲线 C_- 是将它稍微向内推移后得到的。

证明完毕。 □

因此，由命题 4.1 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} e^{-Nf_N(\sigma)} \sum_{0 \leq (2k+1)/(2N) \leq 1-\delta_1} & e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)} \\ &= e^{-Nf_N(\sigma)} \int_0^{1-\delta_1} e^{Nf_N(z)}\,dz + O\left(e^{-\varepsilon N}\right) \end{aligned} \tag{4.1}$$

其中 $N \to \infty$ 为某个与 N无关的 $\varepsilon > 0$ 。

4.2.2. 实部 $F(\sigma) \leq 0$ 的情形。接下来，我们假设实部 $F(\sigma) \leq 0$。

令

- $\psi_N(z) := f_N(z)$ and $\psi(z) := F(z)$,
- $p_0 := -\delta_0$ and $p_1 = 1 - \delta_1$,

其中我们选取足够小的 $\delta_0 > 0$ 和 $\delta_1 > 0$ ，使得 $\delta_0 < \delta$ 和 $\delta_1 > \delta$。

引理 4.7. 假设 a 双曲正切 $c - b$ 正切 $d \geq 0$，且双曲余弦 $a -$ 余弦 $b > 1/2$。若实部 $F(\sigma) \leq 0$，则条件(i)–(iv)成立。

证明。条件(i)成立，因为 $\delta_0 < \delta$ 和 $\delta_1 > \delta$。

根据引理 3.8， $|1 - \cosh \xi| = \cosh a - \cos b$。由定义 (3.5) 可知，原点属于 H_F^+。因此，我们可以选择 δ_0，使得 Re $F(x)$ 在 $-\delta_0 < x < 0$ 上递增。由于 $F(0) = 0$，我们有 Re $F(p_0) =$ Re $F(-\delta_0) < 0$。

根据推论 3.20，Re $F(1) <$ Re $F(\sigma) \leq 0$，因此我们可以选择 $\delta_1 > 0$，使 $\delta_1 < \delta$足够小，从而 Re $F(p_1) =$ Re $F(1 - \delta_1) < 0$。由此可得，条件(ii)成立。

如果假设 $a \tanh c - b \tan d \geq 0$，且 $\cosh a - \cos b \geq 1/2$，那么条件(iii)和(iv)也如上所述成立。参见图 12。□

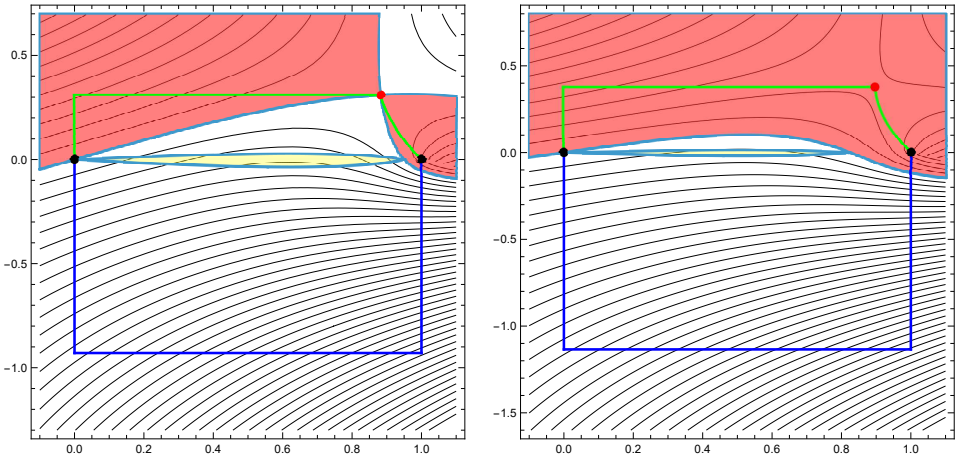

FIGURE 12. 当 $\xi = 1.0943\ldots + 0.5\sqrt{-1}$（左）和 $\xi = 1 + 0.5\sqrt{-1}$（右）时，Re $F(z)$ 的等高线图。注意，Re $F(\sigma) = 0$（左），且 Re $F(\sigma) < 0$（右）。红点为 σ，黑点为 0 和 1。Re $F(z) < 0$ 的区域以粉色标出。区域 $D \setminus (R_+ \cup R_-)$ 以黄色标出。绿色（蓝色）曲线为 $\overline{\lambda}$ （分别为 $\underline{\lambda}$）。

因此，若 a 双曲正切 $c - b$ 双曲正切 $d \geq 0$、双曲余弦 $a -$ 余弦 $b > 1/2$，且 Re $F(\sigma) \leq 0$，则有

$$\frac{1}{N} \sum_{-\delta_0 \leq (2k+1)/(2N) \leq 1-\delta_1} e^{N f_N\left((2k+1)/(2N)\right)} = \int_{-\delta_0}^{1-\delta_1} e^{N f_N(z)}\, dz + O\left(e^{-\varepsilon N}\right) \tag{4.2}$$

当 $N \to \infty$ 时，对于某个与 N无关的 $\varepsilon > 0$，有。

5. PROOF OF THE MAIN THEOREM

本节中，我们对（4.1）和（4.2）中的积分应用鞍点法，并证明主定理。

我们假设 $a > 0$、 $0 < b < \pi/2$ 和 $\alpha =$ 双曲余弦 a 余弦 $b > 1/2$。

5.1. 鞍点法。我们采用 [14, 命题 5.3] 中的鞍点法。另见 [22, 命题 3.2 和注 3.3] ，以及 [16, 命题 5.2]。

命题5.1（鞍点法）。设 $\eta(w)$ 是定义在包含 0 的区域 E 上的全纯函数，且 $\eta(0) = \eta'(0) = 0$ ， $\eta''(0) \neq 0$。令 $V := \{w \in E \mid \text{实部}\,\eta(w) < 0\}$。设 C 是 E 中一条从 q_0 到 q_1 的路径，其中两个端点位于 V 中。

我们作如下假设:

(i) 存在 0 的一个邻域 $E \subset E$ ，使得 $V \cap E$ 有两个连通分支，(ii) 存在一条路径 $C \subset V \cup \{0\}$ ，经由 0 连接 q_0 和 q_1 ，并且在固定 q_0 和 q_1 的条件下与 C 在 E 中同伦 ，使得 $(C \cap E) \setminus \{0\}$ 分裂为两个连通分支，且它们分别属于 V 的不同连通分支。

设 $\{h_N(w)\}_{N=1,2,3,\dots}$ 是 E 中的一列全纯函数，它一致收敛于全纯函数 $h(w)$，且 $h(0) \neq 0$。我们还假设$|h_N(w)|$有界，且与 N无关。

于是，我们有

$$\int_C h_N(w) e^{N\eta(w)}\, dw = \frac{h(0)\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-\eta''(0)}\sqrt{N}}\big(1 + O(N^{-1})\big)$$

当 $N \to \infty$时，其中我们选取 $\sqrt{-\eta''(0)}$的符号，使得实部 $\Big(q_1\sqrt{-\eta''(0)}\Big) \geq 0$。

令 $\eta(w) := F(w+\sigma) - F(\sigma)$， $h_N(w) := e^{N(f_N(w+\sigma) - F(w+\sigma))}$， $h(w) := 1$，以及$E := D - \sigma = \{w \in \mathbb{C} \mid -\delta < \text{实部}(w+\sigma) < 1 - \delta,\ -4\,\text{虚部}\,\sigma < \text{虚部}(w+\sigma) < 2\,\text{虚部}\,\sigma\}$。我们将证明，命题5.1的假设对某些点 q_0 和$\smile q_1$以及某些路径 C 和 C成立。

首先，我们看到 $\eta(0) = 0$，并且根据 σ 的定义（见（3.1））， $\eta'(0) = F'(0) = 0$。由推论 2.10 可得

$$F''(z) = \frac{-\xi \sinh(\xi z)}{\cosh\xi - \cosh(\xi z)}$$

若 $|\text{实部}(\xi z)| < a$。由引理 3.1，因 $|\text{实部}(\xi\sigma)| = |\text{实部}\ \varphi| = c < a$，可得

$$\begin{aligned}\eta''(0) =& F''(\sigma) = \frac{-\xi \sinh\varphi}{\cosh\xi - \cosh\varphi}\\ =& -2\xi \sinh\varphi = -2\xi\sqrt{\cosh^2\varphi - 1}\\ =& -\xi\sqrt{(2\cosh\xi + 1)(2\cosh\xi - 3)},\end{aligned}$$

由于 $\varphi \neq 0$，它不为零。这里，第三个等号成立是因为双曲余弦φ =双曲余弦$\xi - 1/2$，并且我们选择平方根，使其辐角介于 0 和$\pi/2$之间，因为双曲正弦 φ = 双曲正弦 c余弦 $d + \sqrt{-1}$双曲余弦 c正弦 d位于第一象限。

因此，剩下要证明以下引理 .

引理 5.2。设 a双曲正切 $c - b$正切 $d \geq 0$且双曲余弦a − 余弦 $b > 1/2$。那么 若适当选取 q_0、 q_1、 C 和 C ，则条件 (i) 和 (ii) 成立。

证明。我们首先证明 (i)。由 0 附近的泰勒展开，我们有

$$\eta(w) = \frac{1}{2}\eta''(0)w^2 + c_3 w^3 + c_4 w^4 + \dots.$$

因此，若选取充分小的 $E \ni 0$ ，则 (i) 成立。

为证明(ii)，我们将考虑以下两种情形：Re $F(\sigma) > 0$ 以及 Re $F(\sigma) \leq 0$。

- 实部 $F(\sigma) > 0$的情形。

  令 $q_0 := -\sigma$ 且 $q_1 := 1 - \delta_1 - \sigma$，并令 C 为连接 q_0 与 q_1的线段，其中我们取 $\delta_1 > 0$ 为小节4.2.1。现在，令 $C := C_+ - \sigma$，其中 C_+ 在引理4.4的证明中定义。于是，路径 C 在区域 $\{w \in E$ |中经由0连接 $-\sigma$ 与 $1 - \delta_1 - \sigma$，且除0外均满足 Re $\eta(w) < 0\}$，因为除 σ外，Re $F(z) -$ Re $F(\sigma) < 0\}$。由于在 σ附近，C_+ 分裂为 h_F和 χ_F，我们可以假设 $(C \cap E) \setminus \{0\}$有两个连通分支，必要时取较小的 E。显然，C 在 E中与 C 同伦。

- 实部 $F(\sigma) \leq 0$的情形。

  令 $q_0 :=$ – 实部 σ，并令 $q_1 := 1 - \delta_1 - \sigma$；设 C 为连接 q_0、$-\sigma$ 和 q_1 的折线，其中我们按照第 4.2.2 小节选择 $\delta_1 > 0$ 。那么，C 与路径 C: $= h_F \cup \chi_F - \sigma = \{z - \sigma \mid z \in h_F \cup \chi_F\}$ 同伦。路径 C 经由 0 将 – 实部 σ 与 $1 - \delta_1 - \sigma$ 连接起来，并且它位于区域 $\{w \in E \mid$ 实部 $\eta(w) < 0\}$ 中；但 O 除外，因为 $h_F \cup \chi_F$ 位于区域 $\{z \in D \mid$ 实部 $F(z) <$ 实部 $F(\sigma)\}$ 中，除去引理 3.25 中的 σ 以及推论 3.20 中的相应部分。显然，C 与 C 同伦。见图13。

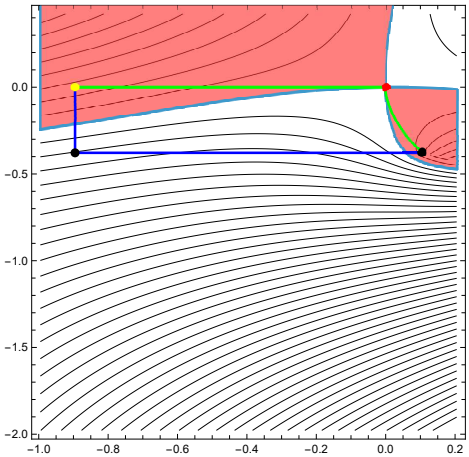

FIGURE 13. Re $\eta(w)$在 $\xi = 1 + 0.5\sqrt{-1}$下的等高线图。粉色区域表示 $\{w \in \mathbb{C} \mid \text{Re}\,\eta(w) < 0\}$。绿色曲线表示 C，蓝色曲线表示 $C_\circ$ 红色点为O，黄色点为 $-\text{Re}\,\sigma$，黑点为 $-\sigma$和$1 - \delta_1 - \sigma$。将其与图 12的右图进行比较。

因此我们得出结论：条件(ii)成立。 □

因此我们可以使用命题5.1来估计(4.1)和(4.2)右侧的积分。

如果 $F(\sigma)$ 的实部 > 0，则得到

$$
\begin{aligned}
&\int_C e^{N\left(f_N(w+\sigma)-F(\sigma)\right)}\,dw \\
&= \int_C e^{N\left(f_N(w+\sigma)-F(w+\sigma)\right)} e^{N\left(F(w+\sigma)-F(\sigma)\right)}\,dw \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\xi\sqrt{(2\cosh\xi+1)(2\cosh\xi-3)}\sqrt{N}}} \times \left(1 + O(N^{-1})\right),
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

其中，我们选择平方根，使得 $\sqrt{\xi\sqrt{(2\text{ 双曲余弦 }\xi+1)(2\text{ 双曲余弦 }\xi-3)\text{ 的实部}}}$ >0。令 $z:=w+\sigma$，则有

$$\int_0^{1-\delta_1} e^{Nf_N(z)}\,dz=\frac{\sqrt{2\pi}e^{NF(\sigma)}}{\sqrt{\xi\sqrt{(2\cosh\xi+1)(2\cosh\xi-3)}}\sqrt{N}}\times\bigl(1+O(N^{-1})\bigr).$$

结合 (4.1)，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N}e^{-Nf_N(\sigma)}\sum_{0\le(2k+1)/(2N)\le1-\delta_1}e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)}\\=&\frac{\sqrt{2\pi}e^{N\left(F(\sigma)-f_N(\sigma)\right)}}{\sqrt{\xi\sqrt{(2\cosh\xi+1)(2\cosh\xi-3)}}\sqrt{N}}\times\left(1+O(N^{-1})\right)+O\left(e^{-\varepsilon N}\right).\end{aligned}$$

因此，我们有

(5.2)

$$\begin{aligned}&\sum_{0\le(2k+1)/(2N)\le1-\delta_1}e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)}\\=&\frac{\sqrt{2\pi N}e^{NF(\sigma)}}{\sqrt{\xi\sqrt{(2\cosh\xi+1)(2\cosh\xi-3)}}}\left(1+O\bigl(N^{-1}\bigr)+O\Bigl(N^{1/2}e^{N\left(f_N(\sigma)-F(\sigma)-\varepsilon\right)}\Bigr)\right)\\=&\frac{\sqrt{2\pi N}e^{NF(\sigma)}}{\sqrt{\xi\sqrt{(2\cosh\xi+1)(2\cosh\xi-3)}}}\left(1+O\bigl(N^{-1}\bigr)\right),\end{aligned}$$

其中，第二个等式成立是因为 $f_N(\sigma)$ 收敛到 $F(\sigma)$。

若 Re $F(\sigma)\le 0$，则 (5.1) 也成立，与 Re $F(\sigma)>0$ 的情形相同。令 $z:=w+\sigma$，我们还有

$$\begin{aligned}\int_C e^{Nf_N(w)}\,dw&=\int_{\sqrt{-1}\,\mathrm{Im}\,\sigma}^{0}e^{Nf_N(z)}\,dz+\int_0^{1-\delta_1}e^{Nf_N(z)}\,dz\\&=\frac{\sqrt{2\pi}e^{NF(\sigma)}}{\sqrt{\xi\sqrt{(2\cosh\xi+1)(2\cosh\xi-3)}}\sqrt{N}}\times\bigl(1+O(N^{-1})\bigr)\end{aligned}$$

因为 C 是一条连接 $-$ 实部 σ、$-\sigma$ 和 $1-\delta_1-\sigma$ 的折线。因此我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^{1-\delta_1}e^{Nf_N(z)}\,dz\\=&\frac{\sqrt{2\pi}e^{NF(\sigma)}}{\sqrt{\xi\sqrt{(2\cosh\xi+1)(2\cosh\xi-3)}}\sqrt{N}}\bigl(1+O(N^{-1})\bigr)-\int_{\sqrt{-1}\,\mathrm{Im}\,\sigma}^{0}e^{Nf_N(z)}\,dz.\end{aligned}$$

由 (4.2) 可得

(5.3)

$$\begin{aligned}
&\sum_{0\le(2k+1)/(2N)\le 1-\delta_1} e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)}\\
=&\sum_{-\delta_0\le(2k+1)/(2N)\le 1-\delta_1} e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)} - \sum_{-\delta_0\le(2k+1)/(2N)<0} e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)}\\
=&N\int_{-\delta_0}^{1-\delta_1} e^{Nf_N(z)}\,dz - \sum_{-\delta_0\le(2k+1)/(2N)<0} e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)} + O\left(Ne^{-\varepsilon N}\right)\\
=&N\int_{0}^{1-\delta_1} e^{Nf_N(z)}\,dz + N\int_{-\delta_0}^{0} e^{Nf_N(z)}\,dz - \sum_{-\delta_0\le(2k+1)/(2N)<0} e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)}\\
&+O\left(Ne^{-\varepsilon N}\right)\\
=&\frac{\sqrt{2\pi N}e^{NF(\sigma)}}{\sqrt{\xi\sqrt{(2\cosh\xi+1)(2\cosh\xi-3)}}}\left(1+O(N^{-1})\right) - N\int_{\sqrt{-1}\,\mathrm{Im}\,\sigma}^{0} e^{Nf_N(z)}\,dz\\
&+N\int_{-\delta_0}^{0} e^{Nf_N(z)}\,dz - \sum_{-\delta_0\le(2k+1)/(2N)<0} e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)} + O\left(Ne^{-\varepsilon N}\right).
\end{aligned}$$

5.2. 主定理的证明。为证明主定理，我们需要估计以下各项：$\sum_{1-\delta_1<(2k+1)/(2N)<1} e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)}$（针对 Re $F(\sigma)>$以及 Re $F(\sigma)\le 0$这两种情况，见推论 5.4）的和；$\sum_{-\delta_0\le(2k+1)/(2N)<0} e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)}$（针对 Re $F(\sigma)\le 0$且 cosh $a-\cos b>1/2$的情况，见引理 5.7）；以及积分 $\int_{-\delta_0}^{0} e^{Nf_N}(z)\,dz - \int_{\sqrt{-1}\,\mathrm{Im}\,\sigma}^{0} e^{Nf_N}(z)\,dz$之间的差（针对 Re $F(\sigma)\le 0$且 cosh $a-\cos b>1/2$的情况，见引理 5.5）。

引理 5.3. 假设 a 双曲正切 $c-b$ 正切 $d\ge 0$，使得根据推论 3.20，实部 $F(\sigma)>$实部 $F(1)$。对于任意满足 $0<2\varepsilon_1<$实部 $F(\sigma)-$实部 $F(1)$ 的 ε_1，存在 $\delta_2>0$使得

$$\mathrm{Re}\,f_N\left((2k+1)/(2N)\right)<\mathrm{Re}\,F(\sigma)-\varepsilon_1$$

如果 $1-\delta_2<(2k+1)/(2N)<1$，且 N充分大。

证明. 我们沿用 [14, 引理 5.4]的证明。

由实部 $F(x)$ 的连续性，存在 $\delta_2'>0$ 使得|实部 $F\left((2k'+1)/(2N)\right)-$实部 $F(1)|<$实部 $F(\sigma)-$实部 $F(1)-2\varepsilon_1$若 $1-\delta_2'<(2k'+1)/(2N)<1$。由此可得

$$\mathrm{Re}\,F\left((2k'+1)/(2N)\right)<\mathrm{Re}\,F(\sigma)-2\varepsilon_1 \tag{5.4}$$

如果 $1-\delta_2'<(2k'+1)/(2N)<1$。

由引理 2.5 可知，当 $x\in\mathbb{R}$ 时，函数 $f_N(x)$ 收敛到 $F(x)$，若 $x\notin\Delta_\nu^+\cup\nabla_\nu^+$，也就是说，若 $|x|\le 1-2\pi\nu/b$。因此，我们有

$$\left|\mathrm{Re}\,f_N\left((2k'+1)/(2N)\right)-\mathrm{Re}\,F\left((2k'+1)/(2N)\right)\right|<\varepsilon_1 \tag{5.5}$$

若 $0<(2k'+1)/(2N)\le 1-2\pi\nu/b$ 且 N 充分大。

因此，由 (5.5) 和 (5.4)，我们有

$$\mathrm{Re}\,f_N\left((2k'+1)/(2N)\right)<\mathrm{Re}\,F\left((2k'+1)/(2N)\right)+\varepsilon_1<\mathrm{Re}\,F(\sigma)-\varepsilon_1 \tag{5.6}$$

若 $1-\delta_2'<(2k'+1)/(2N)<1-2\pi\nu/b$ 且 N 充分大。

令 $r_N(k):=\prod_{l=1}^{k}\left(4\text{双曲正弦}\left(\frac{\xi}{2}(1-l/N)\right)\text{双曲正弦}\left(\frac{\xi}{2}(1+l/N)\right)\right)$。由Note (2.8) 可知，$J_N(\mathscr{E};q)$ 是 $=\sum_{k=0}^{N-1} r_N(k)$。由于该函数

4 双曲正弦 $\left(\frac{\xi}{2}(1-x)\right)$ 双曲正弦 $\left(\frac{\xi}{2}(1+x)\right)$ 在 $x=1$ 时为零，因此当 $1-\delta_2''<x<1$ 时，对某个 $0<\delta_2''<1$，其绝对值小于 1。由此可得，当 $1-\delta_2''<k'/N<k/N<1$ 时，$|r_N(k)|<|r_N(k')|$。

现在，由于我们有

$$r_N(k)=\frac{1}{2\sinh(\xi/2)}\exp\bigl(Nf_N\bigl((2k+1)/(2N)\bigr)\bigr)$$

由 (2.10)，我们得到

$$\operatorname{Re} f_N\bigl((2k+1)/(2N)\bigr)=\frac{1}{N}\log\bigl|2\sinh(\xi/2)r_N(k)\bigr|.$$

由此可得，实部 $f_N\bigl((2k+1)/(2N)\bigr)<$实部 $f_N\bigl((2k'+1)/(2N)\bigr)$ 如果 $1-\delta_2''<k'/N<k/N<1$ 因为 $|r_N(k)|<|r_N(k')|$。

令 $\delta_2:=\min\{\delta_2',\delta_2''\}$，我们选取 k 和 k'，使得 $k'<k$ 且 $1-\delta_2<k'/N<(2k'+1)/(2N)<1-2\pi\nu/b$ 并且 $k'/N<k/N<1$。然后由 (5.6)，我们有

$$\operatorname{Re} f_N\bigl((2k+1)/(2N)\bigr)<\operatorname{Re} f_N\bigl((2k'+1)/(2N)\bigr)<\operatorname{Re} F(\sigma)-\varepsilon_1.$$

至此，证明完毕。 □

我们有以下推论。

推论 5.4. 若 a 双曲正切 $c-b$ 正切 $d\geq 0$ 且 $0<\delta_1<\delta_2$，则有

$$\sum_{1-\delta_1<(2k+1)/(2N)<1} e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)}=O\left(Ne^{N\left(\operatorname{Re}F(\sigma)-\varepsilon_1\right)}\right)$$

对于某个 $\varepsilon_1>0$，当 $N\to\infty$ 时。

至于积分之差 $\int_{-\delta_0}^{0}e^{Nf_N(z)}\,dz-\int_{\sqrt{-1}\text{虚部}\,\sigma}^{0}e^{Nf_N(z)}\,dz$，我们有以下引理。

引理 5.5. 假设双曲余弦 $a-$余弦 $b>1/2$。若实部 $F(\sigma)\leq 0$，则有

$$\int_{-\delta_0}^{0}e^{Nf_N(z)}\,dz-\int_{\sqrt{-1}\operatorname{Im}\sigma}^{0}e^{Nf_N(z)}\,dz=O(e^{-\varepsilon_0 N})$$

对于某个 $\varepsilon_0>0$，当 $N\to\infty$ 时。

证明。根据隐函数定理，曲线 Re $F(z)=0$ 在 O 处的切线斜率为

$$-\frac{\partial\operatorname{Re}F(x+y\sqrt{-1})/\partial x}{\partial\operatorname{Re}F(x+y\sqrt{-1})/\partial y}\Bigg|_{x=y=0}=\frac{\log|2\cosh\xi-2|}{\arg(2\cosh\xi-2)}=\frac{\log\sqrt{4(\alpha-1)^2+4\beta^2}}{\arg(2\alpha-2+2\beta\sqrt{-1})}$$

由推论 2.10 得出。由引理 3.8 可知分子为正，而分母也为正，因为 $\beta>0$，因此我们得出斜率为正。由 $F(0)=0$可知，对于任意满足 Re $z\leq 0$、Im $z\geq 0$、$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$且 $|z|\leq\delta$的 z，当 $0<\delta<$足够小时，$\min\{\delta_0,$ Im $\sigma\}$，都有 Re $F(z)<0$，因为对于 $-\delta_0<x<0$，Re $F(z)$ 随 x 增大而增大；而对于 $0<y<$Im σ，则随 y 增大而减小。由引理 2.5 可知，$\{f_N(z)\}_{N=2,3,\dots}$ 在 O 附近收敛于 $F(z)$，因此我们可以假设，当 N 足够大时，在圆形扇区 $\{z\in\mathbb{C}\,|\,$Re $z\leq 0$、Im $z\geq\widetilde{\ }0,|z|\leq\delta\}$ 内，Re $f_N(z)<0$。

$\widetilde{\ }$设 ℓ 为一条路径：从 $-\delta_0$出发，沿实轴走到 $-\delta$，左转后沿着$\widetilde{\ }$作为上方圆形扇区边界的圆弧走到 $\sqrt{-1}\delta$，再左转，

然后沿虚轴走到 $\sqrt{-1}\mathrm{Im}\ \sigma$。由柯西积分定理可得

$$\int_{-\delta_0}^{0} e^{Nf_N(z)}\,dz - \int_{\sqrt{-1}\,\mathrm{Im}\,\sigma}^{0} e^{Nf_N(z)}\,dz = \int_{\ell} e^{Nf_N(z)}\,dz.$$

由该构造可知，当N 充分大且 z位于 ℓ 上时，对某个 $\varepsilon_0 > 0$ 有实部 $f_N(z) < -\varepsilon_0$。这意味着上述方程的右侧为 $O\left(e^{-\varepsilon_0 N}\right)$阶，从而证明了该引理。□

接下来，我们将估计和 $\sum_{-\delta_0 \le (2k+1)/(2N) < 0} \exp\left(N f_N\big((2k+1)/(2N)\big)\right)$.

令 $p := F'(0)$，且 $h_N(z) := f_N(z) - pz$。由于 $f_N(z)$是奇函数，我们可以将 $f_N(z)$写成 $= f'_N(0)z + z^3\psi_N(z)$，其中 $\psi_N(z)$（$N = 1, 2, 3, \ldots$）是 Θ中的全纯函数。 Θ的定义见引理 2.4。引理 2.7表明$f'_N(0) = p + N^{-2}\chi_N$，其中当 $N \to \infty$时 $\chi_N \in \mathbb{C}$有界。因此，我们有$h_N(z) = N^{-2}\chi_N z + z^3\psi_N(z)$。由于 $F(z)$也是奇函数，我们可以将$F(z)$写成 $= pz + z^3\Psi(z)$，其中 $\Psi(z)$是 Θ_ν中的全纯函数。 Θ_ν的定义见引理 2.5。

我们先准备以下引理。

引理 5.6. 设 B_ρ 是复数域 Θ_ν 中以原点为中心、半径为 $0 < \rho < \mathrm{Re}\,\gamma/|\gamma|$ 的开圆盘，其中 $\gamma := \xi/(2\pi\sqrt{-1})$ 与通常一样。

那么，当 $N \to \infty$ 时，我们有 $\psi_N(z) = \Psi(z) + O(N^{-2})$ 在 B_ρ 中。特别地，函数列 $\{\psi_N(z)\}_{N=1,2,3,\ldots}$ 在 B_ρ 中有界。

证明。由 (2.13)、(2.15) 和 (2.2)，可得

$$\begin{aligned}
&z^3\Psi(z)\\
=&\frac{1}{\xi}\mathcal{L}_2\big(\gamma(1-z)\big) - \frac{1}{\xi}\mathcal{L}_2\big(\gamma(1+z)\big) - 2\mathcal{L}_1(\gamma)z\\
=&\frac{1}{4\gamma}\int_{\widehat{\mathbb{R}}} \frac{e^{\left(2\gamma(1-z)-1\right)t}}{t^2\sinh t}\,dt - \frac{1}{4\gamma}\int_{\widehat{\mathbb{R}}} \frac{e^{\left(2\gamma(1+z)-1\right)t}}{t^2\sinh t}\,dt + z\int_{\widehat{\mathbb{R}}} \frac{e^{(2\gamma-1)t}}{t\sinh t}\,dt\\
=&\frac{1}{2\gamma}\int_{\widehat{\mathbb{R}}} \frac{e^{(2\gamma-1)t}}{t^2\sinh t}\big(2\gamma z t - \sinh(2\gamma z t)\big)\,dt.
\end{aligned}$$

$2\gamma z t -$ 的双曲正弦 $\sinh(2\gamma z t)$ 在 $z = 0$ 附近的泰勒展开为

$$2\gamma z t - \sinh(2\gamma z t) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2\gamma t)^{2j+1}}{(2j+1)!} z^{2j+1}. \tag{5.7}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}
\Psi(z) &= -\frac{1}{2\gamma}\int_{\widehat{\mathbb{R}}} \frac{e^{(2\gamma-1)t}}{t^2\sinh t}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2\gamma t)^{2j+1} z^{2j-2}}{(2j+1)!}\right) dt\\
&= -\frac{1}{2\gamma}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2\gamma)^{2j+1} z^{2j-2}}{(2j+1)!}\int_{\widehat{\mathbb{R}}} \frac{t^{2j-1}e^{(2\gamma-1)t}}{\sinh t}\,dt.
\end{aligned}$$

由于根据引理 2.7 的证明，$f'_N(0) = -\frac{2\gamma}{N}T'_N(\gamma) - \xi + 2\pi\sqrt{-1}$，(2.9) 和 (2.1) 推出

$$\begin{aligned}
&z^3\psi_N(z)\\
=&\frac{1}{N}T_N\bigl(\gamma(1-z)\bigr) - \frac{1}{N}T_N\bigl(\gamma(1+z)\bigr) + \frac{2\gamma z}{N}T'_N(\gamma)\\
=&\frac{1}{4N}\int_{\widehat{\mathbb{R}}} \frac{e^{\left(2\gamma(1-z)-1\right)t}}{t\sinh t\sinh(\gamma t/N)}\,dt - \frac{1}{4N}\int_{\widehat{\mathbb{R}}} \frac{e^{\left(2\gamma(1+z)-1\right)t}}{t\sinh t\sinh(\gamma t/N)}\,dt\\
&+\frac{\gamma z}{N}\int_{\widehat{\mathbb{R}}} \frac{e^{(2\gamma-1)t}}{\sinh t\sinh(\gamma t/N)}\,dt,\\
=&\frac{1}{2N}\int_{\widehat{\mathbb{R}}} \frac{e^{(2\gamma-1)t}}{t\sinh t\sinh(\gamma t/N)}\bigl(2\gamma z t - \sinh(2\gamma z t)\bigr)\,dt,
\end{aligned}$$

其中第二个等式由引理 2.3 的证明得出。等式（5.7）意味着

$$\begin{aligned}
\psi_N(z) &= -\frac{1}{2N}\int_{\widehat{\mathbb{R}}} \frac{e^{(2\gamma-1)t}}{t\sinh t\sinh(\gamma t/N)}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(2\gamma t)^{2j+1}z^{2j-2}}{(2j+1)!}\right)dt\\
&= -\frac{1}{2N}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(2\gamma)^{2j+1}z^{2j-2}}{(2j+1)!}\int_{\widehat{\mathbb{R}}} \frac{t^{2j}e^{(2\gamma-1)t}}{\sinh t\sinh(\gamma t/N)}\,dt.
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
&\Psi(z) - \psi_N(z)\\
=&-\frac{1}{2\gamma}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(2\gamma)^{2j+1}z^{2j-2}}{(2j+1)!}\int_{\widehat{\mathbb{R}}}\frac{t^{2j-1}e^{(2\gamma-1)t}}{\sinh t}\\
&+\frac{1}{2N}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(2\gamma)^{2j+1}z^{2j-2}}{(2j+1)!}\int_{\widehat{\mathbb{R}}}\frac{t^{2j}e^{(2\gamma-1)t}}{\sinh t\sinh(\gamma t/N)}\,dt\\
=&\frac{1}{2\gamma}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(2\gamma)^{2j+1}z^{2j-2}}{(2j+1)!}\int_{\widehat{\mathbb{R}}}\frac{t^{2j-1}e^{(2\gamma-1)t}}{\sinh t}\left(\frac{\gamma t/N}{\sinh(\gamma t/N)}-1\right)dt.
\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&|\Psi(z) - \psi_N(z)|\\
<&\frac{1}{2\rho^3|\gamma|}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(2\rho|\gamma|)^{2j+1}}{(2j+1)!}\int_{\widehat{\mathbb{R}}}\left|\frac{t^{2j-1}e^{(2\gamma-1)t}}{\sinh t}\right|\left|\frac{\gamma t/N}{\sinh(\gamma t/N)}-1\right||dt|
\end{aligned}$$

由于 $|z| < \rho$。由于 $\left|\frac{\gamma t/N}{\text{双曲正弦}(\gamma t/N)} - 1\right| \le \frac{c|t|^2}{N^2}$，对于正数 c，如引理 2.3 的证明中所示，我们有

$$|\Psi(z) - \psi_N(z)| \le \frac{c}{2\rho^3|\gamma|N^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(2\rho|\gamma|)^{2j+1}}{(2j+1)!}\int_{\widehat{\mathbb{R}}}\left|\frac{t^{2j+1}e^{(2\gamma-1)t}}{\sinh t}\right||dt|. \tag{5.8}$$

Put

$$\begin{aligned}
I_{+,j} &:= \int_1^{\infty}\left|\frac{t^{2j+1}e^{(2\gamma-1)t}}{\sinh t}\right|dt = \int_1^{\infty}\frac{t^{2j+1}e^{(2\operatorname{Re}\gamma-1)t}}{\sinh t}\,dt,\\
I_{-,j} &:= \int_{-\infty}^{-1}\left|\frac{t^{2j+1}e^{(2\gamma-1)t}}{\sinh t}\right|dt = \int_{-\infty}^{-1}\frac{t^{2j+1}e^{(2\operatorname{Re}\gamma-1)t}}{\sinh t}\,dt,\\
I_{0,j} &:= \int_{|t|=1,\operatorname{Im}t\ge 0}\left|\frac{t^{2j+1}e^{(2\gamma-1)t}}{\sinh t}\right||dt|.
\end{aligned}$$

注意，$\int_{\widehat{\mathbb{R}}} \left|\frac{t^{2j+1}e^{(2\gamma-1)t}}{\text{双曲正弦 } t}\right| |dt| = I_{+,\,j} + I_{-,\,j} + I_{0,\,j}$。我们将估计积分$I_{+,\,j}$、$I_{-,\,j}$和$I_{0,\,j}$。我们有

$$\begin{aligned}
I_{+,j} =& 2\int_1^\infty \frac{t^{2j+1}e^{2(\operatorname{Re}\gamma-1)t}}{1-e^{-2t}}\,dt \\
\le& \frac{2}{1-e^{-2}}\int_1^\infty t^{2j+1}e^{2(\operatorname{Re}\gamma-1)t}\,dt < \frac{2}{1-e^{-2}}\int_0^\infty t^{2j+1}e^{2(\operatorname{Re}\gamma-1)t}\,dt \\
& (\text{put } s := 2(1-\operatorname{Re}\gamma)t \text{ noting that } \operatorname{Re}\gamma = b/(2\pi) < 1/4) \\
=& \frac{2}{1-e^{-2}}\int_0^\infty \left(\frac{s}{2(1-\operatorname{Re}\gamma)}\right)^{2j+1} \frac{e^{-s}}{2(1-\operatorname{Re}\gamma)}\,ds \\
=& \frac{\Gamma(2j+2)}{(1-e^{-2})2^{2j+1}(1-\operatorname{Re}\gamma)^{2j+2}} = \frac{(2j+1)!}{(1-e^{-2})2^{2j+1}(1-\operatorname{Re}\gamma)^{2j+2}}.
\end{aligned}$$

类似地，我们有

$$\begin{aligned}
I_{-,j} =& \int_1^\infty \frac{t^{2j+1}e^{(1-2\operatorname{Re}\gamma)t}}{\sinh t}\,dt = 2\int_1^\infty \frac{t^{2j+1}e^{-2t\operatorname{Re}\gamma}}{1-e^{-2t}}\,dt \\
\le& \frac{2}{1-e^{-2}}\int_1^\infty t^{2j+1}e^{-2t\operatorname{Re}\gamma}\,dt < \frac{2}{1-e^{-2}}\int_0^\infty t^{2j+1}e^{-2t\operatorname{Re}\gamma}\,dt \\
& (\text{put } s := 2t\operatorname{Re}\gamma \text{ noting that } \operatorname{Re}\gamma > 0) \\
=& \frac{2}{1-e^{-2}}\int_0^\infty \left(\frac{s}{2\operatorname{Re}\gamma}\right)^{2j+1} \frac{e^{-s}}{2\operatorname{Re}\gamma}\,ds \\
=& \frac{\Gamma(2j+2)}{(1-e^{-2})2^{2j+1}(\operatorname{Re}\gamma)^{2j+2}} = \frac{(2j+1)!}{(1-e^{-2})2^{2j+1}(\operatorname{Re}\gamma)^{2j+2}}.
\end{aligned}$$

令 $t := e^{s\sqrt{-1}}$ $(0 \le s \le \pi)$，我们有

$$\begin{aligned}
I_{0,j} =& \int_0^\pi \left|\frac{e^{(2j+1)s\sqrt{-1}}e^{(2\gamma-1)e^{s\sqrt{-1}}}}{\sinh(e^{s\sqrt{-1}})}\right| \times \left|\sqrt{-1}e^{s\sqrt{-1}}\right| ds \\
\le& \frac{1}{L}\int_0^\pi e^{(2\operatorname{Re}\gamma-1)\cos s - 2\operatorname{Im}\gamma\sin s}\,ds = M,
\end{aligned}$$

对于某个正常数 M，其中我们令 $L := \min_{|z|=1,\ \operatorname{Im} z\ge 0} |\text{双曲正弦 } z|$，如引理 2.3 的证明中那样。

由 (5.8)，我们有

$$\begin{aligned}
& |\Psi(z) - \psi_N(z)| \\
\le& \frac{c}{2\rho^3|\gamma|N^2}\sum_{j=1}^\infty \frac{(2\rho|\gamma|)^{2j+1}}{(2j+1)!} \\
& \times \left(M + \frac{(2j+1)!}{(1-e^{-2})2^{2j+1}(1-\operatorname{Re}\gamma)^{2j+2}} + \frac{(2j+1)!}{(1-e^{-2})2^{2j+1}(\operatorname{Re}\gamma)^{2j+2}}\right) \\
=& \frac{cM}{2\rho^3|\gamma|N^2}\sum_{j=1}^\infty \frac{(2\rho|\gamma|)^{2j+1}}{(2j+1)!} + \frac{c}{2\rho^3|\gamma|(1-e^{-2})(1-\operatorname{Re}\gamma)N^2}\sum_{j=1}^\infty \left(\frac{\rho|\gamma|}{1-\operatorname{Re}\gamma}\right)^{2j+1} \\
& + \frac{c}{2\rho^3|\gamma|(1-e^{-2})\operatorname{Re}\gamma N^2}\sum_{j=1}^\infty \left(\frac{\rho|\gamma|}{\operatorname{Re}\gamma}\right)^{2j+1}.
\end{aligned}$$

第一项求和显然收敛。由于根据假设 $\frac{\rho|\gamma|}{\text{实部}\,\gamma} < 1$，第三项求和收敛。由 $b < \pi/2$ 可得 $\frac{\rho|\gamma|}{1-\text{实部}\,\gamma} < \frac{\gamma}{\text{实部}\,\gamma} = \frac{b}{2\pi-b} < 1$，因此第二项求和收敛。由此可得 $\psi_N(z) = \Psi(z) + O(N^{-2})$。□

注意，若 $\cosh a - \cos b > 1/2$，则根据推论 2.10 和引理 3.8，$\mathrm{Re}\ p = \mathrm{Re}\ F'(0) = \log|2\cosh\xi - 2| > 0$。

现在我们可以证明下面这个引理。

引理 5.7. 假设 $\cosh a - \cos b > 1/2$。我们假设 $\delta_0 < \rho$，其中 $\rho > 0$ 由引理 5.6 给出。

由于 $f_N(x) = F(x) + O(N^{-2})$ 且 $p = F'(0)$，我们可以假设对于 $0 < x \le \delta_0$，$\mathrm{Re}\ f_N(x) < 0$。于是，我们有

$$\sum_{-\delta_0 < (2k+1)/(2N) < 0} e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)} = -\frac{2\sinh(\xi/2)}{\Delta(e^{\xi})} + O(N^{-2})$$

当 $N \to \infty$ 时，其中 $\Delta(t) := -t + 3 - t^{-1}$ 是八字结的归一化亚历山大多项式。

证明。首先，我们有

(5.9)
$$\begin{aligned}\sum_{-\delta_0 \le (2k+1)/(2N) < 0} e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)} &= \sum_{k=-1,-2,\dots,\lceil -\delta_0 N - 1/2\rceil} e^{-Nf_N(-(2k+1)/(2N))} \\ &= \sum_{k=0}^{D_N} e^{-Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)}\end{aligned}$$

其中 $\lceil x\rceil$ 是大于或等于 x 的最小整数，并令 $D_N := \lfloor \delta_0 N - 1/2\rfloor$，其中 $\lfloor x\rfloor$ 是小于或等于 x 的最大整数。因此，我们将估计最后一个求和。

我们还令

$$\begin{aligned} r(k) &:= e^{-Npz}\Big|_{z:=(2k+1)/(2N)} = e^{-p(k+1/2)}, \\ s_N(k) &:= e^{-Nh_N(z)}\Big|_{z:=(2k+1)/(2N)} = e^{-Nh_N\left((2k+1)/(2N)\right)}\end{aligned}$$

使得 $e^{-Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)} = r(k)s_N(k)$。

令 $R(t) := \sum_{i=0}^{\lfloor t\rfloor} r(i)$，我们使用阿贝尔求和公式（例如参见[2, (3.13.2)]）得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{D_N} e^{-Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)} &= \sum_{k=0}^{D_N} r(k)s_N(k) \\ &= R(D_N)s_N(D_N) - \sum_{j=0}^{D_N-1} R(j)\left(s_N(j+1) - s_N(j)\right) \\ &= R(D_N)s_N(D_N) - \int_0^{D_N} R(t)s_N'(t)\,dt.\end{aligned}$$

这里最后一个等式成立是因为

$$\begin{aligned}\int_0^{D_N} R(t)s'_N(t)\,dt &= \sum_{j=0}^{D_N-1}\int_j^{j+1} R(t)s'_N(t)\,dt\\ &= \sum_{j=0}^{D_N-1}\int_j^{j+1} R(j)s'_N(t)\,dt\\ &= \sum_{j=0}^{D_N-1} R(j)\int_j^{j+1} s'_N(t)\,dt\\ &= \int_0^{D_N} R(t)\big(s_N(j+1)-s_N(j)\big).\end{aligned}$$

由于 $R(t)=\frac{1-e^{-p(\lfloor t\rfloor+1)}}{e^{p/2}-e^{-p/2}}$，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{D_N} e^{-Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)}\\ =&\frac{1-e^{-p(D_N+1)}}{e^{p/2}-e^{-p/2}}s_N(D_N)-\int_0^{D_N}\frac{1-e^{-p(\lfloor t\rfloor+1)}}{e^{p/2}-e^{-p/2}}s'_N(t)\,dt\\ =&\frac{s_N(D_N)-e^{-p(D_N+1)}s_N(D_N)}{e^{p/2}-e^{-p/2}}-\frac{1}{e^{p/2}-e^{-p/2}}\int_0^{D_N} s'_N(t)\,dt\\ &+\frac{1}{e^{p/2}-e^{-p/2}}\int_0^{D_N} e^{-p(\lfloor t\rfloor+1)}s'_N(t)\,dt\\ =&\frac{s_N(D_N)-e^{-p(D_N+1)}s_N(D_N)}{e^{p/2}-e^{-p/2}}-\frac{s_N(D_N)-s_N(0)}{e^{p/2}-e^{-p/2}}\\ &+\frac{1}{e^{p/2}-e^{-p/2}}\int_0^{D_N} e^{-p(\lfloor t\rfloor+1)}s'_N(t)\,dt\\ =&\frac{s_N(0)-e^{-p(D_N+1)}s_N(D_N)}{e^{p/2}-e^{-p/2}}+\frac{e^{-p}}{e^{p/2}-e^{-p/2}}\int_0^{D_N} e^{-p\lfloor t\rfloor}s'_N(t)\,dt.\end{aligned}\tag{5.10}$$

我们将估计 $s_N(0)$、$e^{-p(D_N+1)}s_N(D_N)$ 和 $\int_0^{D_N} e^{-p\lfloor t\rfloor}s'_N(t)\,dt$。首先，我们得到

$$h_N\big(1/(2N)\big)=\frac{\chi_N}{2N^3}+\frac{\psi_N\big(1/(2N)\big)}{(2N)^3},$$

因此

$$s_N(0)=e^{-Nh_N\left(1/(2N)\right)}=1+O(N^{-2})\tag{5.11}$$

因为 $\psi_N\big(1/(2N)\big)$ 随 $N\to\infty$ 有界，由引理 5.6 可知 $N\to\infty$。

接下来，我们研究 $e^{-p(D_N+1)}s_N(D_N)$。由于 $e^{-Nf_N\left((2j+1)/(2N)\right)}=r_j s_N(j)$，我们有

$$\left|e^{-p(D_N+1)}s_N(D_N)\right|=e^{-\operatorname{Re}p/2}e^{-N\operatorname{Re}f_N\left((2D_N+1)/(2N)\right)}.$$

现在，由于 $(2D_N+1)/(2N)\le\delta_0$，根据假设可知 $-\operatorname{Re}\,f_N\big((2D_N+1)/(2N)\big)<0$。因此

$$e^{-p(D_N+1)}s_N(D_N)=O(e^{-\varepsilon N})\tag{5.12}$$

对于某个 $\varepsilon>0$，当 $N\to\infty$ 时成立。

最后，我们考虑积分 $\int_0^{D_N} e^{-p\lfloor t\rfloor}s'_N(t)\,dt$。

Since $s_N(t) = e^{-Nh_N\left((2t+1)/(2N)\right)}$ and $h_N(z) = N^{-2}\chi_N z + z^3\psi_N(z)$, we have

$$\begin{aligned} s'_N(t) =& -h'_N\left(\frac{2t+1}{2N}\right)e^{-Nh_N\left((2t+1)/(2N)\right)} \\ =& -s_N(t)\left(\frac{\chi_N}{N^2} + \frac{3(2t+1)^2}{4N^2}\psi_N\left(\frac{2t+1}{2N}\right) + \frac{(2t+1)^3}{8N^3}\psi'_N\left(\frac{2t+1}{2N}\right)\right). \end{aligned}$$

根据引理 5.6，$\psi_N(x)$ 有界，因此当 $0 \le x \le \delta_0$ 时，对于某个常数 C_0，我们有 $|\psi_N(x)| \le C_0$。根据柯西估计，当$0 \le x \le \delta_0$ 时，对于某个常数 C_1，我们也有 $|\psi'_N(x)| \le C_1$。因此我们有

$$|s'_N(t)| \le \frac{M}{N^2}\left(|\chi_N| + C_0\frac{3(2t+1)^2}{4} + C_1\frac{(2t+1)^3}{8N}\right),$$

其中我们令 $M := \text{最大值}_{0\le x\le\delta_0}\,|e^{-Nh_N(x)}|$。

因此我们有

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^{D_N} e^{-p\lfloor t\rfloor}s'_N(t)\,dt\right| = \left|\sum_{k=0}^{D_N-1}\int_k^{k+1} e^{-p\lfloor t\rfloor}s'_N(t)\,dt\right| \\ \le& \sum_{k=0}^{D_N-1} e^{-\operatorname{Re}(p)k}\int_k^{k+1}|s'_N(t)|\,dt \\ \le& \frac{M}{N^2}\sum_{k=0}^{D_N-1} e^{-\operatorname{Re}(p)k}\int_k^{k+1}\left(|\chi_N| + \frac{3C_0}{4}(2t+1)^2 + \frac{C_1}{8N}(2t+1)^3\right)dt \\ <& \frac{M}{N^2}\sum_{k=0}^{D_N-1} e^{-\operatorname{Re}(p)k}\left(|\chi_N| + \frac{3C_0}{4}(2k+3)^2 + \frac{C_1}{8N}(2k+3)^3\right) \\ =& \frac{M}{N^2}|\chi_N|\sum_{k=0}^{D_N-1} e^{-\operatorname{Re}(p)k} + \frac{3C_0M}{4N^2}\sum_{k=0}^{D_N-1} e^{-\operatorname{Re}(p)k}(2k+3)^2 \\ &+ \frac{C_1M}{8N^3}\sum_{k=0}^{D_N-1} e^{-\operatorname{Re}(p)k}(2k+3)^3. \end{aligned}$$

由于 $\operatorname{Re} p > 0$，每个求和显然都收敛。因此我们得出

$$\int_0^{D_N} e^{-p\lfloor t\rfloor}s'_N(t)\,dt = O(N^{-2}). \tag{5.13}$$

因此，方程 (5.10)、(5.11)、(5.12) 和 (5.13) 得出如下渐近公式。

$$\sum_{k=0}^{D_N} e^{-Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)} = \frac{e^{p/2}}{e^p-1} + O(N^{-2}) = \frac{\sqrt{2\cosh\xi - 2}}{2\cosh\xi - 3} + O(N^{-2}).$$

由于余弦双曲函数 $\xi = 2$ 双曲正弦$^2(\xi/2) + 1$ 以及 $\Delta(e^\xi) = -2$ 双曲余弦$\xi + 3$，我们有$\sqrt{2}$ 双曲余弦 $\xi - 2/(2$ 双曲余弦$\xi - 3) = -2$ 双曲正弦$(\xi/2)/\Delta(e^\xi)$。

因此，由（5.9）最终得到

$$\sum_{-\delta_0\le(2k+1)/(2N)<0} e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)} = -\frac{2\sinh(\xi/2)}{\Delta(e^\xi)} + O(N^{-2}),$$

证明至此完成。 □

现在我们可以证明主定理了。

定理 1.5（主定理）的证明。若 Re $F(\sigma) > 0$，则由 (5.2) 和推论 5.4 可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{N-1} e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)} \\
=&\sum_{0\le(2k+1)/(2N)\le 1-\delta_1} e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)} + \sum_{1-\delta_1<(2k+1)/(2N)<1} e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)} \\
=&\frac{\sqrt{2\pi N}e^{NF(\sigma)}}{\sqrt{\xi\sqrt{(2\cosh\xi+1)(2\cosh\xi-3)}}}\big(1+O(N^{-1})\big)+O\left(Ne^{N\left(\operatorname{Re}F(\sigma)-\varepsilon_1\right)}\right) \\
=&\frac{\sqrt{2\pi N}e^{NF(\sigma)}}{\sqrt{\xi\sqrt{(2\cosh\xi+1)(2\cosh\xi-3)}}}\Big(1+O(N^{-1})+O\big(N^{1/2}e^{-\varepsilon_1 N}\big)\Big) \\
=&\frac{\sqrt{\pi N}e^{NF(\sigma)}}{\sqrt{\frac{\xi}{2}\sqrt{(2\cosh\xi+1)(2\cosh\xi-3)}}}\big(1+O(N^{-1})\big) \\
=&\sqrt{\pi}T(\xi)^{1/2}\left(\frac{N}{\xi}\right)^{1/2}e^{NF(\sigma)}\big(1+O(N^{-1})\big).
\end{aligned}$$

现在，由引理 3.1 可知 Re($\xi\sigma$) = Re $\varphi = c < a$，结合推论 2.10 和 (1.3)，可得 $S(\xi) = \xi F(\sigma)$。因此，由 (2.10) 可得主定理中的 (1.12)。

若 Re $F(\sigma) \le 0$，则由 (5.3)、引理 5.5 和引理 5.7，取 $\delta_1 > 0$充分小，可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{N-1} e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)} \\
=&\sum_{0\le(2k+1)/(2N)\le 1-\delta_1} e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)} + \sum_{1-\delta_1<(2k+1)/(2N)<1} e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)} \\
=&\frac{\sqrt{2\pi N}e^{NF(\sigma)}}{\sqrt{\xi\sqrt{(2\cosh\xi+1)(2\cosh\xi-3)}}}\big(1+O(N^{-1})\big)+\frac{2\sinh(\xi/2)}{\Delta(e^{\xi})}+O(N^{-2}).
\end{aligned}$$

因此，由 (2.10)，若 Re $F(\sigma) < 0$，则有

$$J_N(\mathscr{E};e^{\xi/N}) = \frac{1}{\Delta(e^{\xi})}+O(N^{-2}),$$

这意味着主定理中的 (1.14)。若 Re $F(\sigma) = 0$，则有

$$J_N(\mathscr{E};e^{\xi/N}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sinh(\xi/2)}T(\xi)^{1/2}\left(\frac{N}{\xi}\right)^{1/2}e^{NF(\sigma)}+\frac{1}{\Delta(e^{\xi})}+O(N^{-1/2})$$

因为 $\sqrt{N}e^{NF(\sigma)}$的阶为 $N^{1/2}$。由于 $F(\sigma) = S(\xi)/\xi$，这证明了主定理中的 (1.13)。

证明完成。 □

我们可以对 [12, 定理 1.1] 给出另一种证明，当 $a > 0$ 且 $0 < b < \pi/2$，并且 $\cosh a - \cos b < 1/2$时。

命题 5.8. 当 $a > 0$、 $0 < b < \pi/2$且 $\cosh a - \cos b < 1/2$时，我们有

$$J_N(\mathscr{E};e^{\xi/N}) = \frac{1}{\Delta(e^{\xi})}+O(N^{-2})$$

作为 $N \to \infty$。

证明。首先，由推论 3.18，我们知道实部 $F(x) < 0$ 对于 $0 < x \le 1$。由于由引理 2.7 可得 $f_N(z) = F(z)+O(N^{-2})$，因此当 N 充分大时，我们有实部 $f_N(x) < 0$ 对于 $0 < x \le 1$。由此可知，对任意 $\delta > 0$,

$$\sum_{\delta<(2k+1)/(2N)<1} e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)} = O(Ne^{-\varepsilon N}) \tag{5.14}$$

对于某个 $\varepsilon > 0$。

我们将估计总和 $\sum_{0<(2k+1)/(2N)\le\delta} e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)}$。

令 $\widetilde{D}_N := \lfloor \delta N - 1/2 \rfloor$，则 $\sum_{0<(2k+1)/(2N)\le\delta} e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)} = \sum_{k=0}^{\widetilde{D}_N} e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)}$。我们还像引理 5.7 的证明中那样，令 $p := F'(0)$ 且 $h_N(z) := f_N(z) - pz$。注意，根据引理 3.8，$\operatorname{Re} p < 0$。

我们记 $\widetilde{r}(k) := e^{p(k+1/2)}$, $\widetilde{s}_N(k) := e^{Nh_N\left((2k+1)/(2N)\right)}$，以及 $\widetilde{R}(t) := \sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor} \widetilde{r}(k)$。注意，$e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)} = \widetilde{r}(k)\widetilde{s}_N(k)$。

我们定义 χ_N 和 $\psi_N(z)$，使得 $f_N'(0) = p + N^{-2}\chi_N$，并且 $h_N(z) = N^{-2}\chi_N z + z^3\psi_N(z)$。

根据阿贝尔求和公式，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\widetilde{D}_N} e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)}\\ &= \frac{\widetilde{s}_N(0) - e^{p(\widetilde{D}_N+1)}\widetilde{s}_N(\widetilde{D}_N)}{e^{-p/2} - e^{p/2}} + \frac{e^p}{e^{-p/2} - e^{p/2}} \int_0^{\widetilde{D}_N} e^{p\lfloor t \rfloor} \widetilde{s}_N'(t)\, dt\end{aligned} \tag{5.15}$$

其证明方式与引理 5.7 的证明相似。

理由与引理 5.7 的证明相同，因此我们有

$$\widetilde{s}_N(0) = e^{Nh_N\left(1/(2N)\right)} = 1 + O(N^{-2}) \tag{5.16}$$

因为 $N \to \infty$。

Since $e^{Nf_N\left((2j+1)/(2N)\right)} = \widetilde{r}(j)\widetilde{s}_N(j)$ and $\operatorname{Re} p < 0$, we have

$$\left| e^{p(\widetilde{D}_N+1)}\widetilde{s}_N(\widetilde{D}_N) \right| = e^{N \operatorname{Re} f_N\left((2\widetilde{D}_N+1)/(2N)\right)}.$$

由于当 $0 < x \le 1$ 时，$f_N(x)$ 的实部 < 0，我们有

$$e^{p(\widetilde{D}_N+1)}\widetilde{s}_N(\widetilde{D}_N) = O(e^{-\varepsilon N}) \tag{5.17}$$

对于某个 $\varepsilon > 0$，当 $N \to \infty$ 时。

现在，我们将估计积分 $\int_0^{\widetilde{D}_N} e^{p\lfloor t \rfloor} \widetilde{s}_N'(t)\, dt$。由于 $\widetilde{s}_N(t) = e^{Nh_N\left((2\lfloor t \rfloor+1)/(2N)\right)}$ 且 $h_N(z) = N^{-2}\chi_N z + z^3\psi_N(z)$，我们有

$$|\widetilde{s}_N'(t)| \le \frac{\widetilde{M}}{N^2}\left(|\chi_N| + \widetilde{C}_0 \frac{3(2t+1)^2}{4N^2} + \widetilde{C}_1 \frac{(2t+1)^3}{8N} \right)$$

~ ~以与引理 5.7 的证明相似的方式，其中 $|\psi_N(x)| \le C_0$ 且 $|\psi'_N(x)| \le C_1$对于 $0 \le x \le \delta$，且 $\widetilde{M}:=\max_{0\le x\le\delta} e^{e^{Nh_N(x)}}$。由此可得

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^{\widetilde{D}_N} e^{p\lfloor t\rfloor}\widetilde{s}'_N(t)\,dt\right|\\ \le&\frac{\widetilde{M}}{N^2}|\chi_N|\sum_{k=0}^{\widetilde{D}_N-1} e^{\mathrm{Re}(p)k}+\frac{3\widetilde{C}_0\widetilde{M}}{4N^2}\sum_{k=0}^{\widetilde{D}_N-1} e^{\mathrm{Re}(p)k}(2k+3)^2\\ &+\frac{\widetilde{C}_1\widetilde{M}}{8N^3}\sum_{k=0}^{\widetilde{D}_N-1} e^{\mathrm{Re}(p)k}(2k+3)^3.\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{Re}\,p<0$，每个求和都收敛，因此

$$\int_0^{\widetilde{D}_N} e^{p\lfloor t\rfloor}\widetilde{s}'_N(t)\,dt=O(N^{-2}). \tag{5.18}$$

由于 $p=\log(2\cosh\xi-2)$，由 (5.15)、(5.16)、(5.17)、(5.18)，我们得到

$$\sum_{k=0}^{\widetilde{D}_N} e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)}=\frac{1}{e^{-p/2}-e^{p/2}}+O(N^{-2})=\frac{2\sinh(\xi/2)}{\Delta(e^\xi)}+O(N^{-2}),$$

理由与引理 5.7 相同。

因此，由 (5.14) 可得

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{N-1} e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)}\\ =&\sum_{0<(2k+1)/(2N)\le\delta} e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)}+\sum_{\delta<(2k+1)/(2N)<1} e^{Nf_N\left((2k+1)/(2N)\right)}\\ =&\frac{2\sinh(\xi/2)}{\Delta(e^\xi)}+O(N^{-2}).\end{aligned}$$

现在由 (2.10) 即得该命题。 □

注 5.9. 当 $\cosh a-\cos b=1/2$ 时，我们可以用同样的方法证明 (5.15)、(5.16) 和 (5.17)。然而，作者不知道如何证明 (5.18)。参见注 1.7。

6. Chern–Simons invariant and the adjoint Reidemeister torsion

本节计算由复数参数化的李群 PSL(2;ℂ) 中，八字结补空间的基本群的不可约表示所对应的陈–西蒙斯不变量和伴随 Reidemeister 扭量。我们将遵循 [21, 第 5] 章。

令 $N(\mathscr{E})$ 为三维球面 S^3 中八字结 $\mathscr{E}$ 的闭管状邻域。设 $X:=S^3\setminus\mathrm{Int}\ N(\mathscr{E})$，并令 $\Pi:=\pi_1(X)$ 为其基本群，其中 Int 表示内部。

6.1. 表示。众所周知， Π 可表示为

$$\Pi=\langle x,y\mid xy^{-1}x^{-1}yx=yxy^{-1}x^{-1}y\rangle.$$

我们选择 x 作为子午线，它可由 ∂X 上的一条有向简单闭曲线表示，该曲线在 $N(\mathscr{E})$ 中围成一个圆盘。优选经线是 ∂X 上的一条有向简单闭曲线，在 $N(\mathscr{E})$ 中与 $\mathscr{E}$平行，并且在 X中为零同调的。它表示 Π中的元素 $xy^{-1}xyx^{-2}yxy^{-1}x^{-1}$ 。

按照 [24], , 对于复数 ξ , 令 $\rho_\xi^\pm$ 为从 Π 到李群 $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{C})$的非阿贝尔表示, 其定义如下:

$$\rho_\xi^\pm(x) := \begin{pmatrix} e^{\xi/2} & 1 \\ 0 & e^{-\xi/2} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \rho_\xi^\pm(y) := \begin{pmatrix} e^{\xi/2} & 0 \\ d_\pm(\xi) & e^{-\xi/2} \end{pmatrix},$$

其中

$$d_\pm(\xi) := \frac{1}{2}\left(-2\cosh\xi + 3 \pm \sqrt{(2\cosh\xi - 3)(2\cosh\xi + 1)}\right).$$

优选经线映射为

$$\begin{pmatrix} \ell(\xi)^{\pm 1} & \mp 2\cosh(\xi/2)\sqrt{(2\cosh\xi - 3)(2\cosh\xi + 1)} \\ 0 & \ell(\xi)^{\mp 1} \end{pmatrix},$$

其中

$$\ell(\xi) := \cosh(2\xi) - \cosh\xi - 1 - \sinh\xi\sqrt{(2\cosh\xi - 3)(2\cosh\xi + 1)}.$$

如果 $\xi \in \Xi$, 我们可以用 $S(\xi)$ 的导数来表示 $\ell(\xi)$。我们先证明以下引理。

引理 6.1. 如果 $\xi \in \Xi$, 则有 $\frac{d\,S(\xi)}{d\,\xi} = \log\left(2\,\text{双曲余弦}(\xi+\varphi) - 2\right)$。

证明。我们照例令 $a :=$ 实部 ξ, $b :=$ 虚部 ξ, $c :=$ 实部 φ, 以及 $d :=$ 虚部 φ。

由 $S(\xi)$的定义（见 (1.3)）, 我们有

(6.1)
$$\begin{aligned} \frac{d\,S(\xi)}{d\,\xi} &= \left(\frac{d\,\varphi}{d\,\xi} + 1\right)\log(1 - e^{-\xi-\varphi}) + \left(\frac{d\,\varphi}{d\,\xi} - 1\right)\log(1 - e^{-\xi+\varphi}) + \varphi + \xi\frac{d\,\varphi}{d\,\xi} \\ &= \frac{d\,\varphi}{d\,\xi}\left(\log(1 - e^{-\xi-\varphi}) + \log(1 - e^{-\xi+\varphi}) + \xi\right) \\ &\quad + \log(1 - e^{-\xi-\varphi}) - \log(1 - e^{-\xi+\varphi}) + \varphi. \end{aligned}$$

由引理 3.1, 我们看到实部$(-\xi-\varphi) = -(a+c)$为负, 实部$(-\xi+\varphi) = c-a$为负, 虚部$(-\xi-\varphi) = -(b+d)$位于 $(-\pi, 0)$ 内, 且虚部$(-\xi+\varphi) = -b+d$ 位于 $(0, \pi/2)$ 内。因此由引理 B.6, 我们得到

(6.2)
$$\begin{aligned} 0 < \arg(1 - e^{-\xi-\varphi}) &\le (-b-d)/2 + \pi/2, \\ (-b+d)/2 - \pi/2 \le \arg(1 - e^{-\xi+\varphi}) &< 0. \end{aligned}$$

将这些不等式与 b相加, 我们有

$$(b+d)/2 - \pi/2 < \arg(1 - e^{-\xi-\varphi}) + \arg(1 - e^{-\xi+\varphi}) + b < (b-d)/2 + \pi/2,$$

由于 $b+d > 0$ 与 $b-d < 0$, 我们有

(6.3)
$$\begin{aligned} &\log(1 - e^{-\xi-\varphi}) + \log(1 - e^{-\xi+\varphi}) + \xi \\ &= \log\left(e^{\xi} + e^{-\xi} - e^{\varphi} - e^{-\varphi}\right) \\ &= \log\big(2(\cosh\xi - \cosh\varphi)\big) = 0 \end{aligned}$$

因为双曲余弦 $\varphi =$ 双曲余弦 $\xi - 1/2$。由 (6.1), 我们得到

(6.4)
$$\begin{aligned} \frac{d\,S(\xi)}{d\,\xi} &= \log(1 - e^{-\xi-\varphi}) - \log(1 - e^{-\xi+\varphi}) + \varphi \\ &= 2\log\left(1 - e^{-\xi-\varphi}\right) + \varphi + \xi \\ &= \log\left(e^{\xi+\varphi} + e^{-\xi-\varphi} - 2\right), \end{aligned}$$

其中, 第二个等式由 (6.3) 得出, 最后一个等式则是因为根据 (6.2) 的第一个等式, $\arg\big(2\log(1 - e^{-\xi-\varphi}) + \varphi + \xi\big)$ 介于 $b+d$ 和 π 之间。□

定义 6.2。对于 $\xi \in \Xi$，令

$$v(\xi) := 2\frac{dS(\xi)}{d\xi} - 2\pi\sqrt{-1},$$
$$v^{\pm}(\xi) := 2\frac{dS^{\pm}(\xi)}{d\xi} - 2\pi\sqrt{-1}.$$

于是我们得到如下推论。

推论 6.3。我们有

$$\ell(\xi) = -e^{-v(\xi)/2} = -e^{v^{+}(\xi)/2} = -e^{-v^{-}(\xi)/2}$$

若 $\xi \in \Xi$。

证明。由引理 6.1 和 (1.2)，对于 $\xi \in \Xi$，我们有

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\frac{dS(\xi)}{d\xi}\right)\\
=&e^{\xi+\varphi} + e^{-\xi-\varphi} - 2\\
=&e^{\xi}\left(\cosh\xi - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(2\cosh\xi-3)(2\cosh\xi+1)}\right)\\
&+ e^{-\xi}\left(\cosh\xi - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(2\cosh\xi-3)(2\cosh\xi+1)}\right) - 2\\
=&\cosh(2\xi) - \cosh\xi - 1 + \sinh\xi\sqrt{(2\cosh\xi-3)(2\cosh\xi+1)}\\
=&\ell(\xi)^{-1}.
\end{aligned}$$

因此我们有 $\ell(\xi) = e^{-v(\xi)/2-\pi\sqrt{-1}} = -e^{-v(\xi)/2}$。

由于 $S^{\pm}(\xi) = \mp S(\xi) + 2\xi\pi\sqrt{-1}$ (见（1.5）和（1.4）)，我们有

$$\begin{aligned}
v^{+}(\xi) =& -v(\xi),\\
v^{-}(\xi) =& v(\xi) + 4\pi\sqrt{-1}
\end{aligned}$$

推论得证。 □

6.2. 伴随 Reidemeister 扭率。对于表示 ρ: $\Pi \to \mathrm{PSL}(2;\mathbb{C})$，令$C^*(X;\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})_\rho) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\Pi]}\left(C_*(\widetilde{X};\mathbb{Z}),\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})\right)$ 为由 ρ 的伴随作用扭曲得到的上链复形，其中 X 是 X的万有覆盖，Π 通过甲板变换作用于 X，而 Π 通过 ρ 的伴随作用作用于 $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$，即对于 $w \in \Pi$ 和 $g \in \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$，有$w \cdot g := \rho(w)^{-1}g\rho(w)$。

与子午线相关的上同调伴随 Reidemeister 扭率，记作 $T(\rho)$，定义为上链复形 $C^*(X;\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})_\rho)$ 的扭率。对于八字结及上述表示 $\rho_\xi^{\pm}$，我们有

$$T(\rho_\xi^{\pm}) = \frac{2}{\sqrt{(2\cosh\xi-3)(2\cosh\xi+1)}}$$

如果我们恰当地选择符号。更多详情请参见 [23],[3], 和 [21, 第 5]章。

6.3. 陈–西蒙斯不变量。设 X 是一个边界为 T、同胚于环面的紧致三维流形。

设 $R(X)$ 和 $R(T)$ 分别为 $\pi_1(X)$ 和 $\pi_1(T)$ 的 $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{C})$ 特征簇。因此，$R(X)$（$R(T)$ 分别）由 $\pi_1(X)$ 的表示 $\to \mathrm{PSL}(2;\mathbb{C})$（$\pi_1(T) \to \mathrm{PSL}(2;\mathbb{C})$）的特征的等价类组成。

我们在 $\mathrm{Hom}(\pi_1(T), \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$ 中引入以下等价关系：

$$
\begin{aligned}
&(\alpha, \beta; z) \sim (\alpha + 1/2, \beta; z e^{-4\pi\sqrt{-1}\beta}),\\
&(\alpha, \beta; z) \sim (\alpha, \beta + 1/2; z e^{4\pi\sqrt{-1}\alpha}),\\
&(\alpha, \beta; z) \sim (-\alpha, -\beta; z),
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

其中 (α, β) 是相对于 $\mathrm{Hom}(\pi_1(T), \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^2$ 的一组固定生成元的坐标，而 $z \in \mathbb{C}^\times$。令 $E(T)$ 为商空间 $\left(\mathrm{Hom}(\pi_1(T), \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times\right)/\sim$，并记 $[\alpha, \beta; z]$ 为 $E(T)$ 中 $(\alpha, \beta; z)$ 的等价类。

然后，按照 [10], ，可以定义陈–西蒙斯函数 cs_X：$R(X) \to E(T)$，使得 $p \circ \mathrm{cs}_X = r$，其中 p：$E(T) \to R(T)$ 是投影映射 p：$[\alpha, \beta; z] \mapsto [\alpha, \beta]$，而 r：$R(X) \to R(T)$ 是限制映射，其中 $[\alpha, \beta] \in R(T)$ 表示等价类。$E(T)$

$$
\begin{array}{ccc}
 & \overset{p}{\underset{\mathrm{cs}}{\rightleftarrows}}\ {}^{x} & \\
R(X) & & R(T)
\end{array}
$$

可以使用以下定理计算 cs_X。

定理 6.4（P. Kirk 和 E. Klassen [10]）。若 ρ_t 是表示的路径，且 $\mathrm{cs}_X([\rho_t]) = [\alpha_t, \beta_t; z_t]$，则

$$
\frac{z_1}{z_0} = \exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_0^1 \left(\alpha_t \frac{d\beta_t}{dt} - \frac{d\alpha_t}{dt}\beta_t\right) dt\right).
$$

固定 $\pi_1(T)$ 的生成元 (m, l) 后，与 (μ, λ) 相关的 ρ 的陈–西蒙斯不变量 $\mathrm{CS}^{(\mu,\lambda)}(\rho) \in \mathbb{C}/(\pi^2\mathbb{Z})$ 定义如下。

$$
\mathbf{cs}_X([\rho]) = \left[\frac{\mu}{4\pi\sqrt{-1}}, \frac{\lambda}{4\pi\sqrt{-1}}; \exp\left(\frac{2\,\mathrm{CS}_{(\mu,\lambda)}(\rho)}{\pi\sqrt{-1}}\right)\right] \in E(T),
\tag{6.6}
$$

其中 ρ：$\pi_1(X) \to \mathrm{PSL}(2; \mathbb{C})$，$[\rho]$ 是其在 $R(X)$ 中的等价类，而 $\rho(m) = \begin{pmatrix} e^{\mu/2} & * \\ 0 & e^{-\mu/2} \end{pmatrix}$，并且在适当共轭后 $\rho(l) = \begin{pmatrix} -e^{\lambda/2} & * \\ 0 & -e^{-\lambda/2} \end{pmatrix}$。

令 $X := S^3 \setminus \mathrm{Int}\, N(\mathscr{L})$ 和 $T := \partial X$，我们计算与 $(\xi, v(\xi))$ 相关的 ρ_ξ^- 的陈–西蒙斯不变量 $\mathrm{CS}_{(\xi,\ v(\xi))}\left(\rho_\xi^-\right)$，其中我们选择子午线和优选经线作为 $\pi_1(T)$ 的生成元。

引理 6.5. 若 $\xi \in \Xi$，则与 $(\xi, v(\xi))$ 相关的 ρ_ξ^- 的陈–西蒙斯不变量为

$$
\mathrm{CS}_{(\xi, v(\xi))}\left(\rho_\xi^-\right) = S(\xi) - \xi\pi\sqrt{-1}\,\frac{}{4}\xi_I v(\xi).
$$

证明。令 ρ_t^{Abel} 为阿贝尔表示，将 x 和 y 都映射到 $\begin{pmatrix} e^{t\kappa/2} & 0 \\ 0 & e^{-t\kappa/2} \end{pmatrix}$。

由于 $d_-(\kappa) = 0$，第 6.1 小节中定义的表示 ρ_κ^- 是上三角的，因此其迹与阿贝尔表示 ρ_1^{Abel} 的迹一致。我们可以假设 $\mathrm{cs}_X\left(\left[\rho_t^{\mathrm{Abel}}\right]\right)$ 由 $\left[\frac{t\kappa}{4\pi\sqrt{-1}}, 0; z_t\right]$ 给出，因为 ρ_t^{Abel} 将优选经线映射为单位矩阵。于是根据定理 6.4，$z_1 = z_0 = 1$，因为 ρ_0^{Abel} 是平凡表示。

现在，由于 cs_X 仅取决于迹，我们有 $\mathrm{cs}_X\left([\rho_\kappa^-]\right) = \mathrm{cs}_X\left(\left[\rho_\kappa^{\mathrm{Abel}}\right]\right)$。因此，根据定理 6.4，我们得到

$$\mathbf{cs}_X\left(\left[\rho_\kappa^-\right]\right) = \mathbf{cs}_X\left(\left[\rho_\kappa^{\mathrm{Abel}}\right]\right) = \left[\frac{\kappa}{4\pi\sqrt{-1}}, 0; 1\right] = \left[\frac{\kappa}{4\pi\sqrt{-1}}, -\frac{1}{2}; e^{-\kappa}\right], \tag{6.7}$$

其中，最后一个等式用到了 (6.5)。

由于 $\varphi(\kappa) = 0$ 和 $e^{\kappa} + e^{-\kappa} = 3$，由定义 6.2 和 (6.4) 可得

$$\begin{aligned} v(\kappa) =& 2\frac{d\,S(\kappa)}{d\,\xi} - 2\pi\sqrt{-1} \\ =& 2\log(e^{\kappa} + e^{-\kappa} - 2) - 2\pi\sqrt{-1} \\ =& -2\pi\sqrt{-1}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

因此，我们得出

$$\mathbf{cs}_X\left(\left[\rho_\kappa^-\right]\right) = \left[\frac{\kappa}{4\pi\sqrt{-1}}, \frac{v(\kappa)}{4\pi\sqrt{-1}}; e^{-\kappa}\right].$$

由 (6.7) 可得。我们还有

$$\mathrm{CS}_{\left(\kappa, v(\kappa)\right)}\left(\rho_\kappa^-\right) = \frac{-\kappa\pi\sqrt{-1}}{2} \tag{6.9}$$

由 (6.6) 可得。

令 $\gamma(t)$ $(0 \le t \le 1)$ 为一条光滑路径，满足 $\gamma(0) = \kappa$, $\gamma(1) = \xi$，且除 $\gamma(0) = \kappa$ 外，$\gamma(t) \in \Xi$。则 $\{\rho_{\gamma(t)}^-\}_{0\le t\le 1}$ 是一条连接 ρ_κ^- 与 ρ_ξ^- 的表示的路径。我们可以定义 $z(t) \in \mathbb{C}$，使得

$$\mathbf{cs}_X\left(\left[\rho_{\gamma(t)}^-\right]\right) = \left[\frac{\gamma(t)}{4\pi\sqrt{-1}}, \frac{v\big(\gamma(t)\big)}{4\pi\sqrt{-1}}; z(t)\right],$$

因为 $\rho_{\gamma(t)}^-$ 将子午线和优选经线分别映射为

$$\begin{pmatrix} e^{\gamma(t)/2} & 1 \\ 0 & e^{-\gamma(t)/2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \ell\big(\gamma(t)\big)^{-1} & * \\ 0 & \ell\big(\gamma(t)\big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{v\left(\gamma(t)\right)/2} & * \\ 0 & -e^{-v\left(\gamma(t)\right)/2} \end{pmatrix},$$

根据推论 6.3，分别得到。注意，由式 (6.9) 可知 $z(0) = e^{-\kappa}$。于是由定理 6.4 可得

$$z(1) = e^{-\kappa}\exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_0^1 \left(\gamma(t)\frac{d\,v\big(\gamma(t)\big)}{d\,t} - v\big(\gamma(t)\big)\frac{d\,\gamma(t)}{d\,t}\right) dt\right). \tag{6.10}$$

利用分部积分，上述积分变为

$$\begin{aligned} & \Big[\gamma(t)v\big(\gamma(t)\big)\Big]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{d\,\gamma(t)}{d\,t} v\big(\gamma(t)\big)\,dt \\ =& \xi v(\xi) + 2\kappa\pi\sqrt{-1} - 2\int_0^1 \frac{d\,\gamma(t)}{d\,t} v\big(\gamma(t)\big)\,dt. \\ =& \xi v(\xi) + 2\kappa\pi\sqrt{-1} - 2\int_\gamma v(z)\,dz, \end{aligned}$$

其中第一个等式由 (6.8) 得出，且 γ 是 $\gamma(t)$ $(0 \le t \le 1)$ 在复平面中的像。由于根据定义 6.2，$v(z) = 2^{d\,S\left(d\,z^{z} - 2\pi\sqrt{-1}\right)}$，且 $S(\kappa) = 0$

由 (1.4)，我们有

$$\int_\gamma v(z)\,dz = \Big[2S(z) - 2\pi\sqrt{-1}z\Big]_\kappa^\xi = 2S(\xi) - 2\xi\pi\sqrt{-1} + 2\kappa\pi\sqrt{-1}.$$

由（6.10）可得

$$\begin{aligned} z(1) =& e^{-\kappa}\exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\left(\xi v(\xi) + 2\kappa\pi\sqrt{-1} - 2\big(2S(\xi) - 2\xi\pi\sqrt{-1} + 2\kappa\pi\sqrt{-1}\big)\right)\right) \\ =& \exp\left(-2\xi + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\xi v(\xi) - \frac{2\sqrt{-1}}{\pi}S(\xi)\right). \end{aligned}$$

因此可得

$$\mathrm{CS}_{\xi,v(\xi)}(\rho_\xi^-) = S(\xi) - \xi\pi\sqrt{-1} - \frac{1}{4}\xi v(\xi)$$

由（6.6）可得。 □

在引言中的情形（i）和（viii）下，我们在 [13]（另见 [21, 第 6] 章）证明了，彩色琼斯多项式决定了与不可约表示 ρ_u^+ 相关联的陈–西蒙斯不变量。事实上，我们证明了公式 $\mathsf{CS}\big(\xi,\ v^+(u)\big)(\rho_u^+) = S^+(u) - u\pi\sqrt{-1} - \frac{1}{4}uv^+(u)$。令 $u = 0$，则同一公式在情形（vii）下也成立。在情形（ii）下，同一公式也成立，且它对应于仿射表示 $\rho_\kappa^+ = \rho_\kappa^-$（见 [16, § 6]）。

另一方面，在情形（iii）和（vi）下，彩色琼斯多项式决定了与 ρ_u^- 相关联的陈–西蒙斯不变量，如引理 6.5 所示。因此，相应的双曲结构具有反向定向。特别地，$S^+(0) = \mathsf{CS}_{(0,0)}\left(\rho_0^-\right) = -\mathrm{Vol}(S^3\setminus\mathscr{E})\sqrt{-1}$，这与 $S^+(0) = \mathsf{CS}_{(0,0)}\left(\rho_0^+\right) = \mathrm{Vol}(S^3\setminus\mathscr{E})\sqrt{-1}$ 相比较。

注 6.6. 关于 (vi)，在 [19], 中我们证明了，对于满足 $a > \kappa$ 的 $a \in \mathbb{R}$，有 $\mathsf{CS}\big(a,\ \widetilde{v}(a)\big)(\rho_a^-) = S(a) - \frac{1}{4}a\widetilde{v}(a)$，其中

$$\begin{aligned} \widetilde{v}(a) :=& \log\left(\cosh(2a) - \cosh a - 1 + \sinh a\sqrt{(2\cosh a - 3)(2\cosh a + 1)}\right) \\ =& v(a) + 2\pi\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

由 (6.6) 和 (6.5) 可知，$\mathsf{CS}\big(a,\ \widetilde{v}(a)\big)(\rho_a^-)$ 和 $\mathsf{CS}\big(a,\ v(a)\big)(\rho_a^-)$ 均确定 $\mathsf{cs}_X([\rho_a^-])$。

Appendix A. Proof of Proposition 3.14

在本附录中，我们证明命题 3.14。

A.1. 曲率的计算。回顾一下，我们的曲线 $\overline{C}_G$ 由方程 $\Phi(X,Y) = 1/4$ 给出，该方程位于区域 $\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < Y \le \pi\}$中，其中 $\Phi(X,Y)$ 在 (3.8) 中定义。

Put

$$A := \cosh X\cos Y, \quad B := \sinh X\sin Y.$$

回顾一下，我们已设

$$\alpha = \cosh a\cos b, \quad \beta = \sinh a\sin b.$$

因此，由（3.8）可得 $\Phi(X,Y) = (A-\alpha)^2 + (B-\beta)^2$。

为证明该命题，我们首先准备一个引理，用 α、β、A 和 B（以及 Φ_X（X、Y）$^2 + \Phi_Y$（X、Y）^{2}）表示曲率。

引理 A.1. 当（X、Y）$\neq$(0, 0) 时，$\overline{C}_G$ 在（X、Y）处的曲率为

$$\frac{2\left(\alpha A\left(A^2+B^2-1\right)+\beta B\left(A^2+B^2+1\right)-A^2+B^2+1\right)}{(\Phi_X^2+\Phi_Y^2)^{3/2}}$$

若对其进行适当定向，其中我们分别将 Φ_X 和 Φ_Y 记作 $\Phi_X(X,Y)$ 和 $\Phi_Y(X,Y)$。

注 A.2. 根据引理 3.8，$\cosh a-\cos\ b>1/2$ 当且仅当 $(\alpha-1)^2+\beta^2>1/4$，且 $\cosh a-\cos\ b=1/2$ 当且仅当 $(\alpha-1)^2+\beta^2=1/4$。

根据引理 3.9，当 $\cosh a-\cos\ b=1/2$ 时，$\overline{C}_G$ 的唯一奇点，即满足 $\Phi_X=\Phi_Y=0$ 的点 (X,Y)，为 (0, 0)。因此，引理 A.1 中曲率公式的分母不为零，除非 $(\alpha-1)^2+\beta^2=1/4$ 且 (X,Y) =(0, 0)。

证明。众所周知，曲线 $\overline{C}_G$ 在点（X,Y）处的曲率为

$$\pm\frac{\Phi_{XX}\Phi_Y^2+\Phi_{YY}\Phi_X^2-2\Phi_{XY}\Phi_X\Phi_Y}{(\Phi_X^2+\Phi_Y^2)^{3/2}},$$

其中正负号取决于曲线的定向。我们将证明，取正号时分子等于 $2\left(\alpha A\left(A^2+B^2-1\right)+\beta B\left(A^2+B^2+1\right)-A^2+B^2+1\right)$。

下文中，为简便起见，记 X_c:= 双曲余弦 X, X_s:= 双曲正弦 X, Y_c:= 余弦 Y，以及 Y_s:= 正弦 Y。注意，$A=X_cY_c$ 且 $B=X_sY_s$。

于是由（3.9），可得

$$\frac{1}{2}\Phi_X=X_sX_c-\beta X_cY_s-\alpha X_sY_c,$$
$$\frac{1}{2}\Phi_Y=-Y_sY_c-\beta X_sY_c+\alpha X_cY_s.$$

由（3.10），我们还可得

$$\frac{1}{2}\Phi_{XX}=2X_c^2-1-\beta X_sY_s-\alpha X_cY_c=2X_c^2-1-\beta B-\alpha A,$$
$$\frac{1}{2}\Phi_{YY}=1-2Y_c^2+\beta X_sY_s+\alpha X_cY_c=1-2Y_c^2+\beta B+\alpha A,$$
$$\frac{1}{2}\Phi_{XY}=\alpha X_sY_s-\beta X_cY_c.=\alpha B-\beta A,$$

其中，Φ_{XX}、Φ_{XY} 和 Φ_{YY} 分别表示 Φ_{XX}（X,Y）、Φ_{XY}（X,Y）和 Φ_{YY}（X,Y）。

在以下计算中，我们使用 Mathematica 进行验证。我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8}\Phi_{XY}\Phi_X\Phi_Y\\
=&(\alpha B-\beta A)\\
&\times\left(-AB-\beta AX_s^2+\alpha BX_c^2+\beta AY_s^2+\beta^2AB-\alpha\beta X_c^2Y_s^2\right.\\
&\left.+\alpha BY_c^2+\alpha\beta X_s^2Y_c^2-\alpha^2AB\right)\\
=&(\alpha B-\beta A)\\
&\times\left(AB(\beta^2-\alpha^2-1)+\alpha B(X_c^2+Y_c^2)+\beta A(Y_s^2-X_s^2)+\alpha\beta(X_s^2Y_c^2-X_c^2Y_s^2)\right)\\
=&(\alpha B-\beta A)\\
&\times\left(AB(\beta^2-\alpha^2-1)+\alpha B(A^2+B^2+1)\right.\\
&\left.-\beta A(A^2+B^2-1)+\alpha\beta(A^2-B^2-1)\right),
\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由下式得出

$$X_c^2+Y_c^2=A^2+B^2+1, \tag{A.1}$$

$$X_s^2-Y_s^2=A^2+B^2-1, \tag{A.2}$$

$$X_s^2Y_c^2-X_c^2Y_s^2=(X_c^2-1)Y_c^2-X_c^2(1-Y_c^2)=A^2-B^2-1. \tag{A.3}$$

我们还有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8}\Phi_{XX}\Phi_Y^2\\
=&\left(2X_c^2-\alpha A-\beta B-1\right)\\
&\times\left(Y_s^2Y_c^2+\beta^2X_s^2Y_c^2+\alpha^2X_c^2Y_s^2+2\beta BY_c^2-2\alpha\beta AB-2\alpha AY_s^2\right)\\
=&2A^2Y_s^2+2\beta^2A^2X_s^2+2\alpha^2X_c^4Y_s^2+4\beta A^2B-4\alpha\beta ABX_c^2-4\alpha AX_c^2Y_s^2\\
&-(\alpha A+\beta B+1)\left(Y_s^2Y_c^2+\beta^2X_s^2Y_c^2+\alpha^2X_c^2Y_s^2+2\beta BY_c^2-2\alpha\beta AB-2\alpha AY_s^2\right),
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8}\Phi_{YY}\Phi_X^2\\
=&\left(1-2Y_c^2+\alpha A+\beta B\right)\\
&\times\left(X_s^2X_c^2+\beta^2X_c^2Y_s^2+\alpha^2X_s^2Y_c^2-2\beta BX_c^2+2\alpha\beta AB-2\alpha AX_s^2\right)\\
=&-2A^2X_s^2-2\beta^2A^2Y_s^2-2\alpha^2X_s^2Y_c^4+4\beta A^2B-4\alpha\beta ABY_c^2+4\alpha AX_s^2Y_c^2\\
&+(\alpha A+\beta B+1)\\
&\times\left(X_s^2X_c^2+\beta^2X_c^2Y_s^2+\alpha^2X_s^2Y_c^2-2\beta BX_c^2+2\alpha\beta AB-2\alpha AX_s^2\right).
\end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8}\Phi_{XX}\Phi_Y^2+\frac{1}{8}\Phi_{YY}\Phi_X^2\\
=&2A^2(Y_s^2-X_s^2)+2\beta^2A^2(X_s^2-Y_s^2)+2\alpha^2(X_c^4Y_s^2-X_s^2Y_c^4)+8\beta A^2B\\
&-4\alpha\beta AB(X_c^2+Y_c^2)+4\alpha A(X_s^2Y_c^2-X_c^2Y_s^2)\\
&+(\alpha A+\beta B+1)\Big(X_s^2X_c^2-Y_s^2Y_c^2+\beta^2(X_c^2Y_s^2-X_s^2Y_c^2)+\alpha^2(X_s^2Y_c^2-X_c^2Y_s^2)\\
&\quad-2\beta B(X_c^2+Y_c^2)-2\alpha A(X_s^2-Y_s^2)+4\alpha\beta AB\Big)\\
=&2A\big(\beta^2A-A-\alpha(\alpha A+\beta B+1)\big)(A^2+B^2-1)\\
&+2\alpha^2(B^4+2B^2+A^2B^2-A^2+1)+8\beta A^2B\\
&-2\beta B(3\alpha A+\beta B+1)(A^2+B^2+1)\\
&+\big(4\alpha A+(\alpha^2-\beta^2)(\alpha A+\beta B+1)\big)(A^2-B^2-1)\\
&+(\alpha A+\beta B+1)(A^4+B^4+2A^2B^2+B^2-A^2)+4\alpha\beta AB(\alpha A+\beta B+1),
\end{aligned}$$

where we use (A.1), (A.2), (A.3)

$$\begin{aligned}
X_s^2X_c^2-Y_s^2Y_c^2=&(X_c^2-1)X_c^2-(1-Y_c^2)Y_c^2\\
=&(X_c^2+Y_c^2)^2-2X_c^2Y_c^2-(X_c^2+Y_c^2)\\
=&A^4+B^4+2A^2B^2+B^2-A^2,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
X_c^4Y_s^2-X_s^2Y_c^4=&X_c^2\big(X_s^2Y_c^2-(A^2-B^2-1)\big)-Y_c^2(X_c^2Y_s^2+A^2-B^2-1)\\
=&A^2(X_s^2-Y_s^2)-(A^2-B^2-1)(X_c^2+Y_c^2)\\
=&A^2(A^2+B^2-1)-(A^2-B^2-1)(A^2+B^2+1)\\
=&B^4+2B^2+A^2B^2-A^2+1
\end{aligned}$$

在第二个等式中。

现在 Mathematica 给出以下结果。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{8}\left(\Phi_{XX}\Phi_Y^2+\Phi_{YY}\Phi_X^2-2\Phi_{XY}\Phi_X\Phi_Y\right)\\=&\left((A-\alpha)^2+(B-\beta)^2\right)\left(\alpha A(A^2+B^2-1)+\beta B(A^2+B^2+1)-A^2+B^2+1\right)\\=&\frac{1}{4}\left(\alpha A(A^2+B^2-1)+\beta B(A^2+B^2+1)-A^2+B^2+1\right),\end{aligned}$$

其中我们使用 $(A-\alpha)^2+(B-\beta)^2=\Phi(X,Y)=1/4$，因为 $(X,Y)\in\overline{C}_G$。

证明完毕。 □

注 A.3. 条件 $(X,Y)=(0,0)$ 等价于 $(A,B)=(1,0)$，理由如下。

显然，等式 $(X,Y)=(0,0)$ 蕴含 $(A,B)=(1,0)$。

反之，假设 $(A,B)=(1,0)$。于是有 $\cosh X\cos Y=1$ 以及 $\sinh X\sin Y=0$。由第二个等式可知，要么 $X=0$，要么 $Y=0,\pi$，因为我们假设 $-\pi<Y\leq\pi$。

如果 $X=0$，那么 $\cos Y=1$，因此有 $Y=0$。如果 $Y=0$，那么 $\cosh X=1$，因此有 $X=0$。如果 $Y=\pi$，那么有 $\cosh X=-1$，这是不可能的。

如果 $(X,Y)\in\overline{C}_G$，那么 $(A-\alpha)^2+(B-\beta)^2=1/4$。因此我们可以令

$$\begin{aligned}A&=\alpha+(\cos s)/2,\\B&=\beta+(\sin s)/2\end{aligned}$$

其中 s 为实数，且满足 $0\leq s<2\pi$。我们还令

$$\begin{aligned}&(\mathrm{A}.4)\quad\lambda(\alpha,\beta,s)\\&:=\alpha A(A^2+B^2-1)+\beta B(A^2+B^2+1)-A^2+B^2+1\Big|_{\substack{A:=\alpha+(\cos s)/2,\\B:=\beta+(\sin s)/2}}.\end{aligned}$$

根据引理 A.1 以及注 A.2 和注 A.3，要证明命题 3.14，只需证明：若 $(\alpha-1)^2+\beta^2\geq1/4$ 且 $(A,B)\neq(1,0)$，则 $\lambda(\alpha,\beta,s)>0$。

回顾 $\alpha>1/2$ and $\beta>0$，我们将证明分为以下三种情形：

(i) $\beta\geq1/2$, (ii) $0<\beta<1/2$ and $\alpha\geq3/2$, (iii) $0<\beta<1/2$ and $1/2<\alpha<3/2$。

A.2. $\beta\geq1/2$的情形。在本小节中，我们证明情形（i）下的命题 3.14。

引理 A.4（情形（i））。若 $\beta\geq1/2$、$\alpha>1/2$、$(\alpha-1)^2+\beta^2\geq1/4$，且 $(A,B)\neq(1,0)$，则有 $\lambda(\alpha,\beta,s)>0$。

证明。首先，如果 $\beta\geq1/2$，那么不等式 $(\alpha-1)^2+\beta^2\geq1/4$显然成立。因此，在下面的证明中，我们不使用假设 $(\alpha-1)^2+\beta^2\geq1/4$。

由于 $\beta \geq 1/2$ 和 $\alpha > 1/2$，我们有 $B = \beta + (\text{正弦 } s)/2 \geq 0$ 以及 $A = \alpha + (\text{余弦 } s)/2 > 0$。因此我们有

$$\begin{aligned}
\lambda(\alpha,\beta,s) \geq & \alpha A\big(A^2-1\big)+\frac{1}{2}BA^2-A^2+1 \\
& \quad (\text{since } B=\beta+(\sin s)/2 \geq 1/2+(\sin s)/2) \\
\geq & \alpha A\big(A^2-1\big)+\frac{1}{4}A^2+\frac{1}{4}A^2\sin s-A^2+1 \\
& \quad (\text{since } \alpha = A-(\cos s)/2) \\
= & \big(A-(\cos s)/2\big)A\big(A^2-1\big)-\frac{3}{4}A^2+\frac{1}{4}A^2\sin s+1 \\
= & \frac{1}{4}\left(4A^4-7A^2+4+A^2\sin s-2A\big(A^2-1\big)\cos s\right) \\
& \quad (\text{composition of simple harmonic motions}) \\
= & \frac{1}{4}\left(4A^4-7A^2+4+\sqrt{A^4+4A^2\big(A^2-1\big)^2}\sin(s+\theta)\right) \\
\geq & \frac{1}{4}\left(4A^4-7A^2+4-A\sqrt{4A^4-7A^2+4}\right) \\
& \quad (\text{since } 4A^4-7A^2+4=4(A^2-1)^2+A^2>0) \\
= & \frac{1}{4}\sqrt{4A^4-7A^2+4}\left(\sqrt{4A^4-7A^2+4}-A\right) \\
\geq & 0,
\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由 $\big(4A^4-7A^2+4\big)-A^2=4\left(A^2-1\right)^2\geq 0$ 得出。下面考虑所有等式成立的情形。第一个等式在 $B=0$ 时成立，第二个等式在 $\beta=1/2$ 时成立。因此，如果前两个等式成立，那么我们有 $B=0,\ \beta=1/2$，以及 $s=3\pi/2$。注意，如果 $s=3\pi/2$，那么 $4A^4-7A^2+4+A^2$ 正弦 $s-2A\big(A^2-1\big)$余弦 $s=4(A^2-1)^2$。最后一个等式在 $A=1$ 时成立，因为 $A>0$；在这种情况下，第三个不等式中的等式也成立。因此我们得出结论，等式 $\lambda(\alpha,\beta,s)=0$ 仅当 $(A,B)=(1,0)$ 时成立。

因此，根据假设（A,B）$\neq(1,0)$，我们有 $\lambda(\alpha,\beta,s)>0$，从而完成了 $\beta\geq 1/2$ 时情形的证明。□

A.3. $0<\beta<1/2$ 且 $\alpha\geq 3/2$的情形。在本小节中，我们证明情形（ii）的命题 3.14。

引理 A.5（情形（ii））。若 $0<\beta<1/2,\ \alpha\geq 3/2,\ (\alpha-1)^2+\beta^2\geq 1/4$，且（$A,B$）$\neq(1,0)$，则我们有 $\lambda(\alpha,\beta,s)>0$。

证明。由于 $A=\alpha+(\text{余弦 } s)/2\geq 1$，我们有

$$\begin{aligned}
& \lambda(\alpha,\beta,s) \\
\geq & \frac{3}{2}\left(A^2-1\right)+\beta B\left(A^2+B^2+1\right)-A^2+1 \\
= & (\beta B+1/2)\left(\alpha^2+\alpha\cos s\right)+\frac{1}{4}\cos^2 s(\beta B+1/2)+\beta B\left(B^2+1\right)-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

我们将最后一个表达式视为关于 α 的二次函数。由于 $\beta B+1/2=\beta^2+(\beta$ 正弦 $s+1)/2>0$，当 $\alpha>-(\text{余弦 } s)/2$ 时，它严格递增。由于 $-(\text{余弦 } s)/2<$

3/2，它大于在 $\alpha = 3/2$ 处的取值。因此我们有

$$\begin{aligned}
&\lambda(\alpha, \beta, s) \\
>&(\beta B + 1/2)\left(\frac{9}{4} + \frac{3}{2}\cos s\right) + \frac{1}{4}\cos^2 s(\beta B + 1/2) + \beta B\left(B^2 + 1\right) - \frac{1}{2}. \\
=&\beta^4 + \frac{3}{2}\beta^3 \sin s + \frac{1}{2}\beta^2\left(7 + 3\cos s + \sin^2 s\right) \\
&+ \frac{1}{4}\beta \sin s(3\cos s + 7) + \frac{1}{8}(\cos s + 1)(\cos s + 5) \\
&(\text{since } 7 + 3\cos s + \sin^2 s \geq 4) \\
\geq&\beta^4 + \frac{3}{2}\beta^3 \sin s + 2\beta^2 + \frac{1}{4}\beta \sin s(3\cos s + 7) + \frac{1}{8}(\cos s + 1)(\cos s + 5).
\end{aligned}$$

我们需要证明，最后一个表达式（记作 $\mu(\beta, s)$）非负。

当 $0 \leq s \leq \pi$ 时，由于每一项都非负，我们可知 $\mu(\beta, s) > 0$。因此，只需证明对于 $\pi < s < 2\pi$， $\mu(\beta, s) \geq 0$。令

$$\begin{aligned}
\mu_1(\beta, s) &:= \beta^4 + \frac{5}{4}\beta^2 + \frac{1}{4}\beta \sin s(3\cos s + 7) + \frac{1}{8}(\cos s + 1)(\cos s + 5), \\
\mu_2(\beta, s) &:= \beta^2\left(\frac{3}{2}\beta \sin s + \frac{3}{4}\right)
\end{aligned}$$

于是 $\mu(\beta, s) = \mu_1(\beta, s) + \mu_2(\beta, s)$。

由于当 $\pi < s < 2\pi$ 时， $-1 \leq$正弦 $s < 0$，且 $0 < \beta < 1/2$，因此我们有 $-1/2 < \beta$正弦 $s <$0，从而 $\mu_2(\beta, s) > 0$。

为证明 $\mu_1(\beta, s) > 0$，令 $s :=$ 2π − 反余弦 x，其中 $|x| < 1$，并令 $0 <$反余弦 $x < \pi$，使得余弦 $s = x$。由于正弦 $s < 0$，我们有正弦 $s = -\sqrt{1 - x^2}$。设 $\widetilde{\mu}_1(\beta, x) :=\mu_1(\beta, 2\pi -$ 反余弦 $x)$，则有

$$\widetilde{\mu}_1(\beta, x) = \beta^4 + \frac{5}{4}\beta^2 - \frac{1}{4}\beta(3x + 7)\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{8}(x + 1)(x + 5)$$

其中 $0 < \beta < 1/2$ 和 $|x| < 1$。由于我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \beta}\widetilde{\mu}_1(\beta, x) &= 4\beta^3 + \frac{5}{2}\beta - \frac{1}{4}(3x + 7)\sqrt{1 - x^2}, \\
\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{\mu}_1(\beta, x) &= \frac{1}{4}\left(x + 3 - 3\beta\sqrt{1 - x^2} + \frac{\beta x(3x + 7)}{\sqrt{1 - x^2}}\right),
\end{aligned}$$

$\widetilde{\mu}_1(\beta, x)$ 关于 (β, x) 在 $\in (0, 1/2) \times (-1, 1)$ 处的临界点应满足以下方程组:

$$4\beta^3 + \frac{5}{2}\beta - \frac{1}{4}(3x + 7)\sqrt{1 - x^2} = 0, \tag{A.5}$$

$$x + 3 - 3\beta\sqrt{1 - x^2} + \frac{\beta x(3x + 7)}{\sqrt{1 - x^2}} = 0. \tag{A.6}$$

由 (A.6)，我们有

$$\beta = \frac{-(x + 3)\sqrt{1 - x^2}}{(3x - 1)(2x + 3)},$$

因为 (A.6) 的左边在 $x = 1/3$ 时变为 $10/3 \neq 0$。将$\beta = \frac{-(x+3)\sqrt{1-x^2}}{(3x-1)(2x+3)}$ 代入~~(A.5), Mat~~hematica 给出的结果是

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{1 - x^2}}{4(3x - 1)^3(2x + 3)^3} \\
&\times \left(648x^7 + 3780x^6 + 7310x^5 + 4443x^4 - 1494x^3 - 1704x^2 + 504x + 513\right) = 0.
\end{aligned}$$

Mathematica 还告诉我们，$648x^7+3780x^6+7310x^5+4443x^4-1494x^3-1704x^2+504x+513$ 的实根为 $-2.44837\ldots$、$-1.66468\ldots$ 和 $-1.26834\ldots$。因此，我们得出结论：$\widetilde{\mu}_1(\beta,x)$ 在 $(0,1/2)\times(-1,1)$ 中没有临界点。

因此，$\widetilde{\mu}_1(\beta,x)$ 大于其在区域 $[0,1/2]\times[-1,1]$ 边界上的取值。我们计算

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu}_1(0,x)&=\frac{1}{8}(x+1)(x+5),\\ \widetilde{\mu}_1(1/2,x)&=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}(x+1)(x+5)-\frac{1}{8}(3x+7)\sqrt{1-x^2},\\ \widetilde{\mu}_1(\beta,-1)&=\beta^4+\frac{5}{4}\beta^2,\\ \widetilde{\mu}_1(\beta,1)&=\beta^4+\frac{5}{4}\beta^2+\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

除 $\widetilde{\mu}_1(1/2,x)$ 外，显然它们在 $0<\beta<1/2$ 和 $|x|<1$ 时均为正。

要证明 $\widetilde{\mu}_1(1/2,x)>0$，只需证明 $3+(x+1)(x+5)>(3x+7)\sqrt{1-x^2}$，即当 $|x|<1$ 时，$\big(3+(x+1)(x+5)\big)^2-(3x+7)^2(1-x^2)>0$。Mathematica 表明，$\big(3+(x+1)(x+5)\big)^2-(1-x^2)(3x+7)^2=10x^4+54x^3+92x^2+54x+15$ 没有实根，因此对于任意实数 x，它都为正。

这表明，当 $0<\beta<1/2$ 和 $|x|<1$ 时，$\widetilde{\mu}_1(\beta,x)>0$，从而完成了该引理的证明。□

A.4. $0<\beta<1/2$ 和 $1/2<\alpha<3/2$ 的情形。还需证明 $\beta<1/2$ 和 $1/2<\alpha<3/2$ 且 $(\alpha-1)^2+\beta^2\geq 1/4$ 的情形。我们将此情形分为四个子情形：

(iii-1) $0<\beta<1/2$、$1/2<\alpha<3/2$ 和 $B>0$,
(iii-2) $0<\beta<1/2$、$1/2<\alpha<3/2$ 和 $B=0$,
(iii-3) $0<\beta<1/2$、$1\leq\alpha<3/2$ 和 $B<0$, (iii-4) $0<\beta<1/2$、$1/2<\alpha<1$ 和 $B<0$。

注 A.6. 令 s_0 :=反正弦(2β)，则有

- $B>0$ 当且仅当 $s\in(0,\pi+s_0)\cup(2\pi-s_0,2\pi)$,
- $B=0$ 当且仅当 $s=\pi+s_0$ 或 $2\pi-s_0$,
- $B<0$ 当且仅当 $s\in(\pi+s_0,2\pi-s_0)$

因为 $B=\beta+$(正弦 s)$/2$ 且 $0<s_0<\pi/2$。

引理 A.7（子情形 (iii-1)）。若 $0<\beta<1/2, 1/2<\alpha<3/2, (\alpha-1)^2+\beta^2\geq 1/4$, 且 $B>0$，则有 $\lambda(\alpha,\beta,s)>0$。注意，在此情形下 $(A,B)\neq(1,0)$。

证明。由于 $\alpha>1/2$，我们有 $A=\alpha+$(余弦 s)$/2>0$。此外，由于 $\beta>0$ 和$B>0$, 由 (A.4) 可得

$$\lambda(\alpha,\beta,s)>\alpha A(A^2-1)+\beta B(A^2+1)-A^2+1=(\alpha A-1)(A^2-1)+\beta B(A^2+1).$$

~我们将最后一个表达式记为 $\widetilde{\lambda}(\alpha,\beta,s)$，即令

$$\widetilde{\lambda}(\alpha,\beta,s):=(\alpha A-1)(A^2-1)+\beta B(A^2+1). \tag{A.7}$$

~由于 $B>0$ 且 B 关于 β 递增，我们看到 $\widetilde{\lambda}(\alpha,\beta,s)$ 关于 β 递增。由于 $\beta\geq\sqrt{1/4-(\alpha-1)^2}$, 我们有

$$\begin{aligned}&\widetilde{\lambda}(\alpha,\beta,s)\\ >&(\alpha A-1)(A^2-1)+\beta B\\ \geq&(\alpha A-1)(A^2-1)+\sqrt{1/4-(\alpha-1)^2}\left(\sqrt{1/4-(\alpha-1)^2}+(\sin s)/2\right).\end{aligned}$$

首先假设 $0 < s \le \pi$，从而 $\sin s \ge 0$。注意，根据注 A.6，$s \in (0, \pi + s_0) \cup (2\pi - s_0, 2\pi)$。

由于正弦 $s \ge 0$，我们有

$$\nu_1(\alpha, s) := (\alpha A - 1)(A^2 - 1) + 1/4 - (\alpha - 1)^2.$$

我们将在紧区域 $\{(\alpha, s) \in \mathbb{R}^2 \mid 1/2 \le \alpha \le 3/2, 0 \le s \le \pi\}$中求 $\nu_1(\alpha, s)$的临界点。由于$\frac{\partial A}{\partial \alpha}(\alpha, s) = 1$ 且 $\frac{\partial A}{\partial s}(\alpha, s) = -($正弦 $s)/2$，我们有

$$\frac{\partial \nu_1}{\partial \alpha}(\alpha, s) = A^3 + 3\alpha A^2 - 3A - 3\alpha + 2,$$
$$\frac{\partial \nu_1}{\partial s}(\alpha, s) = -\frac{1}{2}\left(3\alpha A^2 - 2A - \alpha\right)\sin s.$$

因此，临界点(α, s)满足以下方程组：

$$A^3 + 3\alpha A^2 - 3A - 3\alpha + 2 = 0, \tag{A.8}$$
$$\left(3\alpha A^2 - 2A - \alpha\right)\sin s = 0. \tag{A.9}$$

由(A.9)，我们有正弦 $s = 0$ 或

$$3\alpha A^2 - 2A - \alpha = \frac{3}{4}\alpha\cos^2 s + (3\alpha^2 - 1)\cos s + 3\alpha(\alpha^2 - 1) = 0.$$

解上述方程得到余弦 s，可得

$$\cos s = \frac{2(1 - 3\alpha^2 \pm \sqrt{1 + 3\alpha^2})}{3\alpha}.$$

由于 $\frac{2(1-3\alpha^2-\sqrt{1+3\alpha^2})}{3\alpha}$ 显然是递减的，并且当 $\alpha = 1/2$ 时其值等于 $\frac{1-2\sqrt{7}}{3} = -1.435\ldots < -1$，因此可知 $\cos s = \frac{2(1-3\alpha^2+\sqrt{1+3\alpha^2})}{3\alpha}$。由此我们得出，方程组 (A.8) 和 (A.9) 的解满足 $\sin s = 0$或 $\cos s = \frac{2(1-3\alpha^2+\sqrt{1+3\alpha^2})}{3\alpha}$。

若 $\sin s = 0$，则 $s = 0$ 或 π。若 $s = 0$，则 $A = \alpha + 1/2$，因此由 (A.8) 可得

$$4\alpha^3 + \frac{9}{2}\alpha^2 - \frac{9}{2}\alpha + \frac{5}{8} = 0.$$

由于其导数为正，左端在 $\alpha \ge 1/2$ 时递增，且在 $\alpha = 1/2$ 处的值等于 0。因此唯一的解是 $\alpha = 1/2$。若 $s = \pi$，则$A = \alpha - 1/2$，由 (A.8) 可得

$$\frac{1}{8}(2\alpha - 3)(16\alpha^2 + 6\alpha - 9) = 0.$$

由于 $1/2 \le \alpha \le 3/2$，我们有 $\alpha = 3/2$ 或 $\frac{3}{16}(\sqrt{17} - 1) = 0.585582\ldots$。

如果余弦 $s = \frac{2(1-3\alpha^2+\sqrt{1+3\alpha^2})}{3\alpha}$，由 (A.8) 我们得到

$$\frac{-2}{27\alpha^3}\left(27\alpha^4 - 27\alpha^3 - 2 + (3\alpha^2 - 2)\sqrt{3\alpha^2 + 1}\right) = 0.$$

借助 Mathematica，上述方程的实数解为 1 和 $-0.456897\ldots$。因此我们有 $\alpha = 1$ 以及余弦 $s = 0$，也就是说，$(\alpha, s) = (1, \pi/2)$。

因此，我们得出结论：对于 $1/2 \le \alpha \le 3/2$ 和$0 \le s \le \pi$，$\nu_1(\alpha, s)$ 的临界点如下。

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right), \quad \left(\frac{3}{2}, \pi\right), \quad \left(\frac{3(\sqrt{17} - 1)}{16}, \pi\right), \quad \left(1, \frac{\pi}{2}\right).$$

由于二阶偏导数为

$$\frac{\partial^2 \nu_1}{\partial \alpha^2}(\alpha, s) = 6\left(A^2 + \alpha A - 1\right),$$

$$\frac{\partial^2 \nu_1}{\partial s^2}(\alpha, s) = \frac{\cos s}{2}(-3\alpha A^2 + 2A + \alpha) + \frac{\sin^2 s}{2}(3\alpha A - 1),$$
$$\frac{\partial^2 \nu_1}{\partial \alpha \partial s}(\alpha, s) = -\frac{3\sin s}{2}\left(A^2 + 2\alpha A - 1\right),$$

相应的海森矩阵变为

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{9(17-9\sqrt{17})}{32} & 0 \\ 0 & \frac{189\sqrt{17}-1541}{2048} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

分别如此。因此，这些临界点依次为局部极小值、局部极小值、局部极大值和鞍点。因此，点 $(1/2, 0)$ 和 $(3/2, \pi)$ 是函数值为 $\nu_1(1/2, 0) = \nu_1(3/2, \pi) = 0$ 的极小点候选。

对于边界，我们有

$$\begin{aligned} \nu_1(1/2, s) &= \frac{1}{16}(\cos^2 s - 9)(\cos s - 1) \geq 0, \\ \nu_1(3/2, s) &= \frac{1}{16}(3\cos s + 5)(\cos s + 5)(\cos s + 1) \geq 0, \\ \nu_1(\alpha, 0) &= \frac{\alpha}{8}(2\alpha - 1)^2(2\alpha + 5) \geq 0, \\ \nu_1(\alpha, \pi) &= \frac{\alpha}{8}(2\alpha + 3)(2\alpha - 3)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

因此，我们得出结论： $\nu_1(\alpha, s)$ 在 $(1/2, 0)$ 和 $(3/2, \pi)$ 处取到最小值 0，从而证明当 $1/2 < \alpha < 3/2$ 且 $0 < s \leq \pi$ 时， $\lambda(\alpha, \beta, s) > 0$。

接下来，我们假设 $s \in (\pi, \pi + s_0) \cup (2\pi - s_0, 2\pi)$，即 $\sin s < 0$。由于 $\sin s < 0$，我们有 $\sin s = -\sqrt{1 - \cos^2 s}$。因此我们有

$$\widetilde{\lambda}(\alpha, \beta, s) > \nu_2(\alpha, x),$$

其中我们设

$$\begin{aligned} &\nu_2(\alpha, x) \\ &:= (\alpha A - 1)(A^2 - 1) + \frac{1}{4}(A^2 + 1)\sqrt{1 - 4(\alpha - 1)^2}\left(\sqrt{1 - 4(\alpha - 1)^2} - \sqrt{1 - x^2}\right) \end{aligned}$$

其中 $x :=$ 余弦 s 由于 $\beta \geq \sqrt{1/4 - (\alpha - 1)^2}$。注意，由于 $|x| < 1$ $\pi < s < 2\pi$。由于 $\sqrt{1 - 4(\alpha - 1)^2} + \sqrt{1 - x^2} > 0$，我们有

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - 4(\alpha - 1)^2} - \sqrt{1 - x^2} =& \frac{\left(1 - 4(\alpha - 1)^2\right) - (1 - x^2)}{\sqrt{1 - 4(\alpha - 1)^2} + \sqrt{1 - x^2}} \\ =& \frac{(x - 2\alpha + 2)(x + 2\alpha - 2)}{\sqrt{1 - 4(\alpha - 1)^2} + \sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned} \tag{A.10}$$

由于 $A = \alpha + x/2$，我们有

$$\begin{aligned} &\nu_2(\alpha, x) \\ =&(x/2 + \alpha - 1)\left((\alpha A - 1)(A + 1) + \frac{(A^2 + 1)\sqrt{1 - 4(\alpha - 1)^2}(x - 2\alpha + 2)}{2\left(\sqrt{1 - 4(\alpha - 1)^2} + \sqrt{1 - x^2}\right)}\right) \\ =&\frac{x/2 + \alpha - 1}{2\left(\sqrt{1 - 4(\alpha - 1)^2} + \sqrt{1 - x^2}\right)}\nu_3(\alpha, x), \end{aligned}$$

其中我们令

$$\begin{aligned}\nu_3(\alpha,x) :=&2(\alpha A-1)(A+1)\left(\sqrt{1-4(\alpha-1)^2}+\sqrt{1-x^2}\right)\\&+(A^2+1)\sqrt{1-4(\alpha-1)^2}\big(x-2\alpha+2\big).\end{aligned}$$

借助 Mathematica，我们得到

$$\begin{aligned}&\nu_3(\alpha,x)\\=&(x/2+\alpha-1)\left(p(\alpha,x)\sqrt{1-4(\alpha-1)^2}+q(\alpha,x)\sqrt{1-x^2}\right)\\&+4(\alpha-1)\left(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4(\alpha-1)^2}\right)\end{aligned}$$

with

$$p(\alpha,x) := \frac{1}{2}x^2+(\alpha+2)x+4(\alpha+1)=\alpha(x+4)+\frac{1}{2}(x+2)^2+2>4, \tag{A.11}$$

$$q(\alpha,x) := 2\alpha^2+(x+4)\alpha-2=2(\alpha+1)^2+\alpha x-4>0. \tag{A.12}$$

由（A.10），我们得到

$$\nu_3(\alpha,x)=\frac{(x/2+\alpha-1)}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4(\alpha-1)^2}}\nu_4(\alpha,x),$$

其中我们令

$$\begin{aligned}&\nu_4(\alpha,x)\\:=&\left(p(\alpha,x)\sqrt{1-4(\alpha-1)^2}+q(\alpha,x)\sqrt{1-x^2}\right)\left(\sqrt{1-4(\alpha-1)^2}+\sqrt{1-x^2}\right)\\&+8(\alpha-1)(2\alpha-2-x).\end{aligned}$$

因此最终得到

$$\nu_2(\alpha,x)=\frac{(x/2+\alpha-1)^2}{2\left(\sqrt{1-4(\alpha-1)^2}+\sqrt{1-x^2}\right)^2}\nu_4(\alpha,x).$$

注意，$\left(\sqrt{1-4(\alpha-1)^2}+\sqrt{1-x^2}\right)^2$ 对于 $|x|<1$ 和 $1/2<\alpha<3/2$ 为正。还要注意，$(x/2+\alpha-1)^2\geq 0$，且等号仅当 $\alpha+x/2=1$、$\sim$ 时成立，也就是说，$A=1$。然而，如果 $A=1$，则由（A.7）可得 $\lambda(\alpha,\beta,s)=2\beta B>0$。因此，只需证明对于 $1/2<\alpha<3/2$ 和 $|x|<1$，$\nu_4(\alpha,x)>0$。

首先，考虑 $x\geq 2\alpha-2$ 的情形。若 $\alpha\leq 1$，则由于我们有 $(\alpha-1)(2\alpha-2-x)\geq 0$，可知 $\nu_4(\alpha,x)>0$。若 $\alpha>1$，则由 (A.12) 可得 $q(\alpha,x)>8-1-4>3$。又由于由 (A.11) 可得 $p(\alpha,x)>3$，因此我们得到

$$\begin{aligned}\nu_4(\alpha,x)>&3\left(\sqrt{1-4(\alpha-1)^2}+\sqrt{1-x^2}\right)^2+8(\alpha-1)(2\alpha-2-x)\\>&3\left(2-4(\alpha-1)^2-x^2\right)+8(\alpha-1)(2\alpha-2-x)\\=&4(\alpha-x-1)^2-7x^2+6.\end{aligned}$$

令 $\nu_5(\alpha,x)$ 为最后一个表达式。由于 $x\geq 2\alpha-2$ 且 $\alpha>1$，我们有 $\alpha-x-1\leq -\alpha+1<0$。因此，$\nu_5(\alpha,x)$ 关于 α 单调递减，这意味着 $\nu_5(\alpha,x)\geq\nu_5(x/2+1,x)=6-6x^2>0$，因为 $\alpha\geq x/2+1$。

接下来，考虑 $x<2\alpha-2$ 的情形。若 $\alpha\geq 1$，那么由于我们如前所述有 $(\alpha-1)(2\alpha-2-x)\geq 0$，可知 $\nu_4(\alpha,x)>0$。

因此，只需证明 $\alpha<1$ 且 $x<2\alpha-2$ 的情形。再次由 (A.11) 得到 $p(\alpha,x)>4$, 于是可得

$$\begin{aligned}&\nu_4(\alpha,x)\\ >&\left(4\sqrt{1-4(\alpha-1)^2}+q(\alpha,x)\sqrt{1-x^2}\right)\left(\sqrt{1-4(\alpha-1)^2}+\sqrt{1-x^2}\right)\\ &+8(\alpha-1)(2\alpha-2-x)\\ =&r(\alpha,x)+\left(q(\alpha,x)+4\right)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4(\alpha-1)^2}\\ >&r(\alpha,x)\end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}r(\alpha,x):=&4(1-4(\alpha-1)^2)+q(\alpha,x)(1-x^2)+8(\alpha-1)(2\alpha-2-x)\\ =&2(1-x^2)\alpha^2+(-x^3-4x^2-7x+4)\alpha+2x^2+8x+2.\end{aligned}$$

由于 $\alpha>1/2$ 和 $-1<x<2(\alpha-1)<0$，我们有 $\frac{\partial}{\partial\alpha}r(\alpha,x)=4(1-x^2)\alpha-x^3-4x^2-7x+4>-4x^2+4>0$。因此我们有

$$r(\alpha,x)>r(1/2,x)=\frac{1}{2}(9-x^2)(1+x)>0.$$

因此，引理的证明完成 . □

引理 A.8（子情形 (iii-2)）。若 $0<\beta<1/2$, $1/2<\alpha<3/2$, $(\alpha-1)^2+\beta^2\geq 1/4$, $B=0$，且 $A\neq 1$，则有 $\lambda(\alpha,\beta,s)>0$。

证明。注意，在这种情况下我们有

$$\lambda(\alpha,\beta,s)=(\alpha A-1)(A^2-1).$$

我们还注意到，由于 $(\alpha-1)^2+\beta^2\geq 1/4$ 和 $0<\beta<1/2$，可知 $\alpha\neq 1$。

由不等式 $(\alpha-1)^2+\beta^2\geq 1/4$，我们得到

$$-|\alpha-1|\leq\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-4\beta^2}\leq|\alpha-1|. \tag{A.13}$$

由注 A.6，我们有 $s=\pi+s_0$ 或 $2\pi-s_0$。由于我们设 $s_0:=$反正弦(2β)，因此 $\cos(\pi+s_0)=-\sqrt{1-4\beta^2}$，且 $\cos(2\pi-s_0)=\sqrt{1-4\beta^2}$。

首先，考虑 $s=\pi+s_0$ 的情形。在这种情况下，我们有 $A=\alpha-\frac{1}{2}\sqrt{1-4\beta^2}>0$，因为 $\alpha>1/2$。

若 $\alpha>1$，则根据 (A.13) 有 $A\geq\alpha+(1-\alpha)=1$。由于假设 $A\neq 1$，我们得出 $A^2-1>0$。此外，由于 $A>0$，我们有 $\alpha A-1\geq\alpha-1>0$。因此可知 $\lambda(\alpha,\beta,s)>0$。

若 $\alpha<1$，则由 (A.13) 可得 $A\leq\alpha+(1-\alpha)=1$，因此 $A^2-1<0$，因为 $A\neq 1$。我们还有 $\alpha A-1<A-1<0$，因为 $A>0$。由此得出，$\lambda(\alpha,\beta,s)>0$ 也成立。

接下来，考虑 $s=2\pi-s_0$ 的情形。在这种情况下，我们有 $A=\alpha+\frac{1}{2}\sqrt{1-4\beta^2}>0$。

若 $\alpha>1$，则以与上文类似的理由，$A>1$，因此我们有 $A^2-1>0$。我们还有 $\alpha A-1>A-1>0$。由此得出，$\lambda(\alpha,\beta,s)>0$。

若 $\alpha<1$，则如上所述，$A<1$，因此得出 $A^2-1<0$。我们还有 $\alpha A-1<A-1<0$, 所以在这种情况下 $\lambda(\alpha,\beta,s)<0$

现在证明完成。 □

现在，我们考虑子情形 (iii-3) 和 (iii-4)。由于这两个子情形均有 $B<0$，因此我们得到

$$\lambda(\alpha,\beta,s)>\widehat{\lambda}(\alpha,\beta,s):=(\alpha A-1)(A^2-1)+\beta B(A^2+B^2+1)$$

由（A.4）可知。因此，只需证明在子情形 (i$\widehat{\text{i}}$i-3) 和 (iii-4) 中，$\lambda(\alpha,\beta,s)\geq 0$。

$\widehat{\ }\ \lambda(\alpha,\beta,s)$ 关于 α 的偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\widehat{\lambda}(\alpha,\beta,s)=3\alpha A^2+A^3-3A-\alpha+2\beta AB, \tag{A.14}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\widehat{\lambda}(\alpha,\beta,s)=6A^2+6\alpha A-4+2\beta B. \tag{A.15}$$

我们从子情形 (iii-3) 开始。

引理A.9（子情形 (iii-3)）。若 $0<\beta<1/2, 1\le\alpha<3/2, (\alpha-1)^2+\beta^2\ge1/4,\widehat{\ }$和 $B<0$，则有 $\lambda(\alpha,\beta,s)>0$。注意，在此情形下 $(A,B)\neq(1,0)$。

证明。在下面的计算中，我们经常使用 Mathematica。

我们将证明 $\frac{\partial}{\partial\alpha}\qquad\widehat{\lambda}(\alpha,\beta,s)>0$。

首先，注意到 $\alpha\ge1+\sqrt{1/4-\beta^2}$由不等式（$\alpha-1$）$^2+\beta^2\ge1/4$，因为$\alpha\ge1$。

由于 $A=\alpha+$余弦$\,s/2\ge1/2$由 $\alpha\ge1$，且 $B=\beta+$正弦 $s/2\ge\beta-1/2$，由（A.15）可得

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\widehat{\lambda}(\alpha,\beta,s)\ge3/2+3-4+2\beta(\beta-1/2)=2(\beta-1/4)^2+3/8>0.$$

因此，$\frac{\partial}{\partial\alpha}\widehat{\lambda}$（$\alpha$，$\beta$，$s$）关于 α递增。由于 $\alpha\ge1+\sqrt{1/4-\beta^2}$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}\widehat{\lambda}(\alpha,\beta,s)\ge&\frac{\partial}{\partial\alpha}\widehat{\lambda}\left(1+\sqrt{1/4-\beta^2},\beta,s\right)\\=&\frac{1}{8}p_1(\beta,s)+\frac{1}{8}q_1(\beta,s)\sqrt{1/4-\beta^2},\end{aligned} \tag{A.16}$$

其中我们令

$$\begin{aligned}p_1(\beta,s):=&-4(7\cos s+20)\beta^2+4\sin s(\cos s+2)\beta\\&+\cos^2 s(\cos s+12)+33\cos s+24,\\q_1(\beta,s):=&-16\beta^2+8\beta\sin s+12\big(\cos^2 s+6\cos s+6\big).\end{aligned}$$

p_1（β，s）和 q_1（β，s）都是关于 β的二次函数，其对称轴$\beta=$正弦 $_s$（余弦 $_{s+2}$~~) 2 (7 余~~弦$_{s+20}$）和 $\beta=$（正弦 s）$/4$，分别为。由于正弦 $s=2$（$B-\beta$）<0，我们得出 p_1（β，s）和 q_1（β，s）关于 $\beta>0$ 递减。此外，由于我们有 q_1（$1/2$，s）$=4\left(3$（余弦$\,s+3$）$^2-10+$正弦 $s\right)\ge4$，函数 q_1（β，s）在 $0<s<1/2$时为正。由于函数 $\sqrt{1/4-\beta^2}$在 $0<\beta<1/2$时也为正且递减，我们得出 p_1（β，s）$+q_1$（β，s）$\sqrt{1/4-\beta^2}$关于 β递减。

由于 $\beta=B-$正弦$\,s/2<-$(正弦 s)$/2$，我们有

$$\begin{aligned}&p_1(\beta,s)+q_1(\beta,s)\sqrt{1/4-\beta^2}\\>&p_1\big(-(\sin s)/2,s\big)+\frac{1}{2}q_1(-(\sin s)/2,s)|\cos s|\\=&2\cos s(5\cos^2 s+18\cos s+12)+2(5\cos^2 s+18\cos s+16)|\cos s|.\\=&\begin{cases}-8\cos s & (\text{if }\cos s\le0),\\4\cos s(5\cos^2 s+18\cos s+14) & (\text{if }\cos s>0),\end{cases}\\\ge&0.\end{aligned}$$

由 (A.16) 可得 $\frac{\partial}{\partial\alpha}\widehat{\lambda}(\alpha,\beta,s)>0$。

现在，由于 $\alpha\ge1+\sqrt{1/4-\beta^2}$，我们有

$$\widehat{\lambda}(\alpha,\beta,s)\ge\check{\lambda}(\beta,s):=\widehat{\lambda}(1+\sqrt{1/4-\beta^2},\beta,s)=p_2(\beta,s)+q_2(\beta,s)\sqrt{1/4-\beta^2},$$

其中我们令

$$\begin{aligned}p_2(\beta,s) :=&\beta^4+\beta^3\sin s-\frac{1}{4}\left(5\cos^2 s+14\cos s+6\right)\beta^2+\frac{\sin s}{4}(2\cos s+5)\beta\\&+\frac{1}{16}\left(2\cos^3 s+11\cos^2 s+18\cos s+17\right)\\q_2(\beta,s) :=&-\frac{1}{2}(\cos s+4)\beta^2+\frac{\sin s}{2}(\cos s+2)\beta\\&+\frac{1}{8}\left(\cos^3 s+12\cos^2 s+27\cos s+8\right).\end{aligned}$$

根据注 A.6，我们知道 $\pi+s_0<s<2\pi-s_0$。因此，我们将证明：当 $0<\beta<1/2$ 和 $\pi+s_0<s<2\pi-s_0$ 时，$\breve{\lambda}(\beta,s)>0$。

我们有

$$\frac{\partial}{\partial\beta}q_2(\beta,s)=-(\cos s+4)\beta+\frac{\sin s}{2}(\cos s+2)<0, \tag{A.17}$$

由于正弦 $s<0$。由于正弦 $s=2(B-\beta)<-2\beta$，我们也有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\beta}p_2(\beta,s) =&4\beta^3+3\beta^2\sin s-\frac{1}{2}\left(5\cos^2 s+14\cos s+6\right)\beta+\frac{\sin s}{4}(2\cos s+5),\\<&-\frac{\beta}{2}\left(5\cos^2 s+16\cos s+11\right)=-\frac{\beta}{2}(5\cos s+11)(\cos s+1)<0.\end{aligned} \tag{A.18}$$

由 (A.17) 和 (A.18)，我们得出：$p_2(\beta,s)$ 和 $q_2(\beta,s)$ 都关于 β 递减。

现在，我们考虑以下两种情况：(I) $3\pi/2\le s<2\pi-s_0$ 和 (II) $\pi+s_0<s<3\pi/2$。

(I) $3\pi/2\le s<2\pi-s_0$ 的情形。注意，在这种情形下 $\cos s\ge 0$。

由于 $q_2(\beta,s)$ 关于 β 单调递减，且 $\cos s\ge 0$，我们有

$$\begin{aligned}q_2(\beta,s) >&q_2(1/2,s)\\=&\frac{1}{8}\left(\cos^3 s+12\cos^2 s+26\cos s+2\cos s\sin s+4\sin s+4\right)\\\ge&\frac{1}{8}\left(\cos^3 s+12\cos^2 s+2\cos s(13+\sin s)\right)\ge 0.\end{aligned}$$

由于 $\sqrt{1/4-\beta^2}$ 也为正且单调递减，我们得出 $q_2(\beta,s)\sqrt{1/4-\beta^2}$ 关于 β 单调递减。因此，在这种情形下，$\breve{\lambda}(\beta,s)$ 关于 β 单调递减。由于 $\beta<-(\sin s)/2$ 且 $\cos s\ge 0$，我们有

$$\begin{aligned}\breve{\lambda}(\beta,s) >&\breve{\lambda}\big(-(\sin s)/2,s\big)\\=&p_2\big(-(\sin s)/2,s\big)+q_2\big(-(\sin s)/2,s\big)(\cos s)/2\\=&\frac{\cos^2 s}{2}(\cos s+2)(\cos s+3)\ge 0.\end{aligned}$$

因此，当 $3\pi/2\le s<2\pi-s_0$ 时，$\breve{\lambda}(\beta,s)>0$。

(II) $\pi+s_0<s<3\pi/2$ 的情形。注意，在这种情形下 $\cos s<0$。

Mathematica 计算

$$\breve{\lambda}(\beta,s)\times\left(\frac{\sqrt{1-4\beta^2}-\cos s}{B}\right)^2=\widetilde{p}_2(\beta,s)+\widetilde{q}_2(\beta,2)\sqrt{1-4\beta^2}$$

with

$$\widetilde{p}_2(\beta,s) :=-4\beta^4+\beta^2(3\cos^2 s+6\cos s+8)-4\beta\sin s(\cos s+3)$$

$$-\frac{1}{4}(2\cos^3 s+9\cos^2 s-2\cos s-17),$$

$\widetilde{q}_2(\beta,s):=-\beta^2(\text{余弦 } s-4)-2\beta\,\text{正弦 } s(\text{余弦 } s+3)-\frac{1}{4}(\text{余弦}^3 s+8\,\text{余弦}^2 s+7\,\text{余弦 } s-8)$。

由于 $\sin s(\cos s+3)$ 和 $2\cos^3 s+9\cos^2 s-2\cos s-17$ 显然均为负，因此我们有

$$\widetilde{p}_2(\beta,s)>-4\beta^4+\beta^2(3\,\text{余弦}^2 s+6\,\text{余弦}\, s+8)=\beta^2\big(3(\text{余弦 } s+1)^2+5-4\beta^2\big)>0.$$

由于我们有 $\cos s-4<0$ 和 $\sin s(\cos s+3)<0$，因此我们也有

$$\widetilde{q}_2(\beta,s)>-\frac{1}{4}(\cos^3 s+8\cos^2 s+7\cos s-8)>-\frac{1}{4}(8\cos^2 s-8)>0,$$

其中第二个不等式成立，是因为 $\cos s<0$。

由于 $\sqrt{1-4\beta^2}-\cos s>0$，这表明 $\check{\lambda}(\beta,s)>0$ 在此情形下。

因此，我们最终得出：当 $\pi+s_0<s<3\pi/2$ 时，$\lambda(\beta,s)>0$，从而完成该引理的证明。□

引理 A.10（子情形 iii-4）。若 $0<\beta<1/2$、$1/2<\alpha<1$、$(\alpha-1)^2+\beta^2\geq 1/4$、$\widehat{\ }$ 且 $B<0$，则有 $\lambda(\alpha,\beta,s)>0$。注意，在此情形下 $(A,B)\neq(1,0)$。

证明。首先注意，由于 $\alpha<1$ 且 $0<\beta<1/2$，故有 $\alpha<1-\sqrt{1/4-\beta^2}$。又由注 A.6 可知 $\pi+s_0<s<2\pi-s_0$。

我们将证明 $\frac{\partial}{\partial\alpha}\widehat{\lambda}(\alpha,\beta,s)<0$。

由于我们有

$$\frac{\partial^3\widehat{\lambda}}{\partial\alpha^3}(\alpha,\beta,s)=12A+6\alpha+6A=24\alpha+9\cos s>0$$

由 (A.15) 可知，α 的函数 $\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}(\alpha,\beta,s)$ 在闭区间 $\left[1/2,1-\sqrt{1/4-\beta^2}\right]$ 上是向下凸的。这意味着 $\frac{\partial\widehat{\lambda}}{\partial\alpha}(\alpha,\beta,s)$ 小于或等于 $\max\left\{\frac{\partial\widehat{\lambda}}{\partial\alpha}(1/2,\beta,s),\ \frac{\partial\widehat{\lambda}}{\partial\alpha}(1-\sqrt{1/4-\beta^2},\beta,s)\right\}$。因此，只需证明 $\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}(1/2,\beta,s)$ 和 $\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}(1-\sqrt{1/4-\beta^2},\beta,s)$ 均为负数。

由 (A.14) 可得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\widehat{\lambda}}{\partial\alpha}(1/2,\beta,s)\\ =&(\cos s+1)\left(\beta+\frac{\sin s}{4}\right)^2+\frac{1}{16}\left(3\cos^3 s+13\cos^2 s-7\cos s-25\right),\end{aligned}$$

它关于 β 向下凸。由于 $0<\beta<1/2$，它小于

$$\begin{aligned}&\max\left\{\frac{\partial\widehat{\lambda}}{\partial\alpha}(1/2,0,s),\frac{\partial\widehat{\lambda}}{\partial\alpha}(1/2,1/2,s)\right\}\\ =&\frac{1}{8}\max\{\cos^3 s+6\cos^2 s-3\cos s-12,\\ &\qquad\cos^3 s+6\cos^2 s-\cos s+\sin(2s)+2\sin s-10\}\\ <&0,\end{aligned}$$

其中，不等式成立是因为 $\cos^3 s+6\cos^2 s-3\cos s-12$ 显然为负，而 $\cos^3 s+6\cos^2 s-\cos s+\sin(2s)+2\sin s-10<1+6+1+1+2\sin s-10<0$可由 $\sin s<0$ 推出（见注 A.6）。

接下来，我们证明 $\frac{\partial \widehat{\lambda}}{\partial \alpha}(1-\sqrt{1/4-\beta^2},\beta,s)<0$。我们写作

$$\frac{\partial \widehat{\lambda}}{\partial \alpha}(1-\sqrt{1/4-\beta^2},\beta,s)=p_3(\beta,s)+q_3(\beta,s)\sqrt{1/4-\beta^2}$$

with

$$\begin{aligned}p_3(\beta,s):=&-\frac{1}{2}(7\cos s+20)\beta^2+\frac{1}{2}\sin s(\cos s+2)\beta\\&+\frac{1}{8}(\cos^3 s+12\cos^2 s+33\cos s+24),\\q_3(\beta,s):=&2\beta^2-\beta\sin s-\frac{1}{2}(3\cos^2 s+18\cos s+18)\end{aligned}$$

由 (A.14)。

由于正弦 $s=2B-2\beta<-2\beta$，我们有 $\frac{\partial q_3}{\partial s}(\beta,s)=-\beta$ 余弦 $s+3$ 正弦 s(余弦 $s+3$) $<-\beta$(7 余弦 $s+18$) <0，因此 $q_3(\beta,s)$ 关于 s 递减。由于 $s>\pi+s_0$，由此可得

$$q_3(\beta,s)<q_3(\beta,\pi+s_0)=9\sqrt{1-4\beta^2}+10\beta^2-\frac{21}{2}.$$

由于 $|\beta|<1/2$，我们看到 $10\beta^2-21/2<0$ 与 $1-4\beta^2>0$。由于我们计算

$$\left(10\beta^2-21/2\right)^2-\left(9\sqrt{1-4\beta^2}\right)^2=100\beta^4+114\beta^2+117/4>0,$$

我们得出 $q_3(\beta,s)<0$，因此我们有 $q_3(\beta)\sqrt{1/4-\beta^2}<0$。

注意，如果我们能证明 $\left(q_3(\beta)\sqrt{1/4-\beta^2}\right)^2>(p_3(\beta,s))^2$，则我们将有 $\frac{\partial \widehat{\lambda}}{\partial \alpha}(1-\sqrt{1/4-\beta^2},\beta,s)=p_3(\beta,s)+q_3(\beta,s)\sqrt{1/4-\beta^2}<0$。因此我们将证明 $r_3(\beta,s):=(q_3(\beta,s))^2(1/4-\beta^2)-(p_3(\beta,s))^2>0$。

通过 Mathematica，我们计算

$$\begin{aligned}r_3(\beta,s)=&-4\beta^6+4\beta^5\sin s-\frac{\beta^4}{4}(21\cos^2 s+136\cos s+256)\\&+\frac{\beta^3}{2}\sin s(\cos^2 s-2\cos s+2)\\&-\frac{\beta^2}{8}(9\cos^4 s+104\cos^3 s+401\cos^2 s+548\cos s+246)\\&-\frac{\beta}{8}\sin s(\cos^4 s+14\cos^3 s+51\cos^2 s+54\cos s+12)\\&-\frac{1}{64}\big(\cos^6 s+24\cos^5 s+174\cos^4 s+408\cos^3 s-63\cos^2 s\\&\qquad-1008\cos s-720\big),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 r_3}{\partial \beta^2}(\beta,s)=&-120\beta^4+80\beta^3\sin s-3\beta^2(21\cos^2 s+136\cos s+256)\\&+3\beta\sin s(\cos^2 s-2\cos s+2)\\&-\frac{1}{4}(9\cos^4 s+104\cos^3 s+401\cos^2 s+548\cos s+246).\end{aligned}$$

由于根据引理 B.7，我们有 $21\cos^2 s+136\cos s+256>-136+256>0$、$\cos^2 s-2\cos s+2=(\cos^2 s-1)^2+1>0$ 和 $9\cos^4 s+104\cos^3 s+401\cos^2 s+548\cos s+246=\upsilon_2(\cos s)>0$，因此可得，当 $\pi+s_0<s<2\pi-s_0$ 且 $\beta>0$时，$\frac{\partial^2 r_3}{\partial \beta^2}(\beta,s)<0$。所以，函数 $r_3(\beta,s)$ 关于

β。因此，我们有 $r_3(\beta,s) > \min\left\{r_3(0,s)\ r_3\left(-(\sin s)/2,s\right)\right\}$，因为 $0<\beta=B-(\sin\ s)/2<-(\sin s)/2$。现在，我们有

$$\begin{aligned} r_3(0,s) = -\frac{1}{64}(&\cos^6 s + 24\cos^5 s + 174\cos^4 s + 408\cos^3 s - 63\cos^2 s \\ &- 1008\cos s - 720), \end{aligned}$$

$$r_3\left(-\frac{\sin s}{2},s\right) = \frac{1}{2}\cos^2 s(5\cos^2 s + 18\cos s + 14).$$

由引理 B.7，$r_3(0,s) = -v_1$(余弦 s)$/64 > 0$。由于 $5x^2+18x+14 = 5(x+9/5)^2 - 11/5$，函数 $5x^2+18x+14$ 对于 $|x|<1$ 大于其在 $x=-1$处的值，即 1。因此我们得出 $r_3\left(-\right.$(正弦 s)$/2,s\left.\right) > 0$，这证明了$r_3(\beta,s) > 0$。因此，不等式 $\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}(1-\sqrt{1/4-\beta^2},\beta,s) < 0$ 成立。

因此，我们看到 $\lambda(\alpha,\beta,s)$ 随着 α 的增大而减小，并由$\alpha < 1-\sqrt{1/4-\beta^2}$ 可得

$$\widehat{\lambda}(\alpha,\beta,s) \geq \widehat{\lambda}\left(1-\sqrt{1/4-\beta^2},\beta,s\right).$$

我们定义 $p_4(\beta,s)$ 和 $q_4(\beta,s)$，使得

$$\widehat{\lambda}\left(1-\sqrt{1/4-\beta^2},\beta,s\right) = p_4(\beta,s) + q_4(\beta,s)\sqrt{1/4-\beta^2},$$

也就是说，我们设

$$\begin{aligned} p_4(\beta,s) :=& \beta^4 + \beta^3\sin s - \frac{\beta^2}{4}(5\cos^2 s + 14\cos s + 6) + \frac{\beta}{4}\sin s(2\cos s + 5) \\ &+ \frac{1}{16}(2\cos^3 s + 11\cos^2 s + 18\cos s + 17), \\ q_4(\beta,s) :=& \frac{\beta^2}{2}(\cos s + 4) - \frac{\beta}{2}\sin s(\cos s + 2) - \frac{1}{8}(\cos^3 s + 12\cos^2 s + 27\cos s + 8). \end{aligned}$$

我们将证明 $p_4(\beta,s) > 0$。为此，我们计算

$$\frac{\partial p_4}{\partial\beta}(\beta,s) = 4\beta^3 + 3\beta^2\sin s - \frac{\beta}{2}(5\cos^2 s + 14\cos s + 6) + \frac{1}{4}\sin s(2\cos s + 5).$$

由于 $\beta <$ -(正弦 s)$/2$ 且正弦 $s<0$，我们有 $4\beta^3+3\beta^2$ 正弦 $s = \beta^2(4\beta+3$ 正弦 $s)$ $<\beta^2$ 正弦 $s<0$。由于 2 余弦 $s+5>0$ 且正弦 $s<-2\beta$，我们还得到

$$\begin{aligned} &-\frac{\beta}{2}(5\cos^2 s + 14\cos s + 6) + \frac{1}{4}\sin s(2\cos s + 5) \\ <&-\frac{\beta}{2}(5\cos^2 s + 16\cos s + 11) < 0, \end{aligned}$$

其中，最后一个不等式成立，是因为二次函数 $5x^2+16x+11$ $=5(x+8/5)^2-9/5$ 在 $|x|<1$ 时递增，且当 $x=-1$时等于 0。因此我们得出，对于 $0<\beta<-$(正弦 s)$/2$，有 $\frac{\partial}{\partial\beta}p_4(\beta,s) < 0$，于是得到

$$p_4(\beta,s) > p_4\left(-(\sin s)/2,s\right) = \frac{1}{4}\cos^2 s(\cos s + 2)(\cos s + 3) \geq 0.$$

现在，我们将证明 $p_4(\beta,s)^2 - \left(q_4(\beta,s)\sqrt{1/4-\beta^2}\right)^2 > 0$。注意到，这意味着 $\widehat{\lambda}(1-\sqrt{1/4-\beta^2},\beta,s) > 0$，因为 $p_4(\beta,s) > 0$。

多亏了 Mathematica，我们得到

$$\begin{aligned} &\frac{\beta-(\sin s)/2}{B}\left(p_4(\beta,s)^2 - \left(q_4(\beta,s)\sqrt{1/4-\beta^2}\right)^2\right) \\ =&2B\beta^7 + r_4(\beta,s), \end{aligned}$$

其中，我们设

$$\begin{aligned}
&r_4(\beta,s)\\
:=&-\beta^8-\frac{\beta^6}{4}(7\cos^2 s+20\cos s-2)-\frac{\beta^5}{4}\sin s(2\cos^2 s+16\cos s+23)\\
&-\frac{\beta^4}{16}(9\cos^4 s+24\cos^3 s-21\cos^2 s-100\cos s-128)\\
&-\frac{\beta^3}{16}\sin s(3\cos^4 s+16\cos^3 s+28\cos^2 s+40\cos s+65)\\
&-\frac{\beta^2}{64}(\cos^6 s+4\cos^5 s-8\cos^4 s-64\cos^3 s-123\cos^2 s-100\cos s-94)\\
&-\frac{\beta}{64}\sin s(9\cos^4 s+56\cos^3 s+78\cos^2 s-56\cos s-87)\\
&-\frac{1}{256}(\cos s-3)(\cos s-1)(\cos s+1)(\cos s+3)(\cos s+5)(3\cos s+5).
\end{aligned}$$

由于 $\beta-$(正弦 s)$/2<0$ 来自 $0<\beta<-$(正弦 s)$/2$，且 $2B\beta^7<0$，我们得出：若能证明 $r_4(\beta,s)<0$，则$p_4(\beta,s)^2-\left(q_4(\beta,s)\sqrt{1/4-\beta^2}\right)^2>0$。W

e have

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 r_4}{\partial\beta^2}(\beta,s)\\
=&-56\beta^6-\frac{15\beta^4}{2}(7\cos^2 s+20\cos s-2)-5\beta^3\sin s(2\cos^2 s+16\cos s+23)\\
&-\frac{3\beta^2}{4}(9\cos^4 s+24\cos^3 s-21\cos^2 s-100\cos s-128)\\
&-\frac{3\beta}{8}\sin s(3\cos^4 s+16\cos^3 s+28\cos^2 s+40\cos s+65)\\
&-\frac{1}{32}(\cos^6 s+4\cos^5 s-8\cos^4 s-64\cos^3 s-123\cos^2 s-100\cos s-94).
\end{aligned}$$

由于 2 余弦$^2 s+16$ 余弦 $s+23=2$(余弦 $s+4)^2-9>0$ 且 $-$正弦 $s>2\beta>0$，我们有

$$\begin{aligned}
&-56\beta^6-\frac{15\beta^4}{2}(7\cos^2 s+20\cos s-2)-5\beta^3\sin s(2\cos^2 s+16\cos s+23)\\
>&-\beta^4\left(56\beta^2+\frac{15}{2}(7\cos^2 s+20\cos s-2)-10(2\cos^2 s+16\cos s+23)\right)\\
=&-\beta^4\left(56\beta^2+\frac{5}{2}(13\cos^2 s-4\cos s-98)\right)>-\beta^4\left(14-\frac{405}{2}\right)>0
\end{aligned}$$

由于 $0<\beta<1/2$，其中我们利用 13 余弦$^2 s-4$ 余弦 $s-98<-81$，因为 $13x^2-4x-98$是凸的，并且当 $x=1$ 时等于 -89，当 $x=-1$时等于 -81。

由引理 B.7 可知，$\frac{\partial^2 r_4}{\partial\beta^2}(\beta,s)$中的最后三项均为正，从而证明了对于 $0<\beta<1/2$ 和 $\pi+s_0<s<2\pi-s_0$，$\frac{\partial^2 r_4}{\partial\beta^2}(\beta,s)>0$。

因此，函数 $r_4(\beta,s)$ 关于 β 对于 $0<\beta<-$(正弦 s)$/2$ 是向下凸的。由于我们有

$$\begin{aligned}
&r_4(0,s)\\
=&-\frac{1}{256}(\text{余弦 }s-3)(\text{余弦 }s-1)(\text{余弦 }s+1)(\text{余弦 }s+3)(\text{余弦 }s+5)(3\text{ 余弦}s+5)<0,
\end{aligned}$$

and

$$r_4\left(-\frac{\sin s}{2},s\right)=0,$$

我们得出结论，$r_4(\beta,s)<0$。

证明至此完成。 □

Appendix B. Technical lemmas

在本附录中，我们证明文中所用的若干引理。

引理 B.1. 积分 $\int_{\widehat{\mathbb{R}}} \underbrace{\frac{e^{(2z-1)t}}{t}}_{\text{双曲正弦 双曲正弦}(\gamma t/N)} dt$ 在 $-\frac{\mathrm{Re}\,\gamma}{2N} <$实部 $z <$实部 $\frac{\gamma}{2N}+1$ 时收敛。

证明。该证明与 [15, 引理 2.2] 的证明相同。

由于实部 $\gamma/N = b/N > 0$，我们有双曲正弦$(\gamma t/N) \underset{t\to\infty}{\sim} \frac{1}{2}\exp(\gamma t/N)$ 以及双曲正弦$(\gamma t/N) \underset{t\to-\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\exp(\gamma t/N)$。因此我们得出

$$\frac{e^{(2z-1)t}}{t\sinh t\sinh(\gamma t/N)} \underset{t\to\infty}{\sim} \frac{4}{t}\exp\big((2z-2-\gamma/N)t\big),$$
$$\frac{e^{(2z-1)t}}{t\sinh t\sinh(\gamma t/N)} \underset{t\to-\infty}{\sim} \frac{4}{t}\exp\big((2z+\gamma/N)t\big).$$

因此，该积分在实部$(2z-2-\gamma/N) < 0$且实部$(2z+\gamma/N) > 0$时收敛，也就是说，如果 $-$实部$\big(\gamma/(2N)\big) <$实部 $z <$实部$\big(\gamma/(2N)\big)+1$。证明完毕。 □

引理 B.2. 若 $\xi \in \Xi \cap \mathrm{Cl}(\Omega) = \{\xi \in \mathbb{C} \mid a > 0, 0 < b < \pi/2,$双曲余弦 a 余弦 $b > 1/2,$ 双曲余弦 $a -$ 余弦 $b \le 1/2\}$，则实部 $F(\sigma) < 0$。Ω 的定义见 (1.6)。

注 B.3. 若双曲余弦 $a -$ 余弦 $b \le 1/2,$ 则双曲余弦 a 余弦 $b \ge$ 双曲余弦 a(双曲余弦 $a - 1/2) > 1/2$。因此我们有

$$\Xi \cap \mathrm{Cl}(\Omega) = \{\xi \in \mathbb{C} \mid a > 0, 0 < b < \pi/2, \cosh a - \cos b \le 1/2\}.$$

设 $S(\xi) := a$实部 $S(\xi) + b$虚部 $S(\xi)$。由 $F(\sigma) = S(\xi)/\xi$，我们有实部 $F(\sigma) = \frac{1}{|\xi|^2}S(\xi)(a - b\sqrt{-1}) = \frac{1}{|\xi|^2}\widetilde{S}(\xi)$。因此，只需证明：若 $\xi \in \Xi \cap \mathrm{Cl}(\Omega)$，则 $\widetilde{S}(\xi) < 0$。

我们将证明分成两个子引理：子引理 B.4 和子引理 B.5。回顾一下，我们令 $a :=$实部 ξ 和 $b :=$虚部 ξ。

子引理 B.4。若 $\xi \in \Gamma$，也就是说，若 $a > 0, 0 < b < \pi/2,$ 且双曲余弦 a 余弦 $b > 1/2,$ 则函数 $S(\xi)$ 关于 a 单调递增。

子引理 B.5。假设 $\xi \in \Gamma$。若 ξ 位于曲线 $a =$反双曲余弦(余弦 $b + 1/2),$ 上，则 $S(\xi) < 0$。

在假设子引理 B.4 和 B.5 成立的情况下证明引理 B.2。我们将证明，若 $\xi \in \Xi \cap$闭包$(\Omega),$ 则 $S(\xi) < 0$。

根据子引理 B.4，区域 $\{\xi \in \mathbb{C} \mid S(\xi) < 0\} \cap \Gamma$ 位于曲线 $\{\xi \in \mathbb{C} \mid S(\xi) = 0\} \cap \Gamma$ 的左侧。

由于 $\cosh a - \cos b \le 1/2,$ 我们有 $\cos b \ge 1/2,$ 这意味着 $b \le \pi/3$。因此，区域 $\Xi \cap \mathrm{Cl}(\Omega)$ 可以表示为

$$\{a + b\sqrt{-1} \in \mathbb{C} \mid a > 0, 0 < b < \pi/3, \cosh a \cos b > 1/2, a \le \mathrm{arcosh}(\cos b + 1/2)\},$$

它位于 ab 平面中曲线 $a = \mathrm{arcosh}(\cos b + 1/2)$ 的左侧。

由于根据子引理 B.4，上述曲线位于曲线 $S(\xi) = 0$ 的左侧，我们得出结论：$\Xi \cap \mathrm{Cl}(\Omega)$ 位于区域 $\{\xi \in \mathbb{C} \mid S(\xi) < 0\} \cap \Gamma$ 中，引理得证。□

现在我们证明这些子引理。

子引理 B.4 的证明。我们将证明

$$\frac{\partial}{\partial a}\widetilde{S}(\xi)=\operatorname{Re}S(\xi)+a\frac{\partial}{\partial a}\operatorname{Re}S(\xi)+b\frac{\partial}{\partial a}\operatorname{Im}S(\xi)>0. \tag{B.1}$$

由（6.4），我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}\operatorname{Re}S(\xi)=&2\log\left|e^{(\xi+\varphi)/2}-e^{-(\xi+\varphi)/2}\right|,\\ \frac{\partial}{\partial a}\operatorname{Im}S(\xi)=&2\arg\left(e^{(\xi+\varphi)/2}-e^{-(\xi+\varphi)/2}\right).\end{aligned} \tag{B.2}$$

接下来，我们将证明 (i) $\frac{\partial}{\partial a}\operatorname{Re}\ S(\xi)\ >0$ 和 (ii) $\operatorname{Re}S(\xi)\ +b\frac{\partial}{\partial a}\operatorname{Im}\ S(\xi)$，以证明 (B.1) 中的不等式。

(i) $\frac{\partial}{\partial a}\operatorname{Re}S(\xi)>0.$

首先证明双曲余弦$(a+c)\ -$余弦$(b+d)\ >1/2$，其中我们按惯例设 $a:=\operatorname{Re}\ \xi, b:=\operatorname{Im}\xi, c:=\operatorname{Re}\ \varphi$，以及 $d:=\operatorname{Im}\ \varphi$。我们计算

$$\begin{aligned}\cosh(a+c)-\cos(b+d)=&\cosh a\cosh c+\sinh a\sinh c-\cos b\cos d+\sin b\sin d\\ >&\cosh a\cosh c-\cos b\cos d,\end{aligned} \tag{B.3}$$

因为根据引理 3.1，$a>0, c>0, 0<b<\pi/2$ 和 $0<d<\pi/2$。

由于根据 (1.8) 和 (1.9)，$\alpha=$双曲余弦 a余弦b以及 $\beta=$双曲正弦 a正弦 b，我们得到 $\left(\underline{\alpha}_{\text{余弦 }b}\right)^2-\left(\underline{\beta}_{\text{正弦 }b}\right)^2=1$，这意味着余弦$^2\,b$满足方程

$$x^2-(\alpha^2+\beta^2+1)x+\alpha^2=0. \tag{B.4}$$

类似地，由 $\left(\overline{\alpha}_{\text{双曲余弦 }a}\right)^2+\left(\overline{\beta}_{\text{双曲正弦 }a}\right)^2=1$，我们得出双曲余弦 a 也满足 (B.4)。因此我们得到

$$\begin{aligned}\cos^2 b=&\frac{\alpha^2+\beta^2+1-\sqrt{(\alpha^2+\beta^2+1)^2-4\alpha^2}}{2}\\ =&\frac{\alpha^2+\beta^2+1-\sqrt{\left((\alpha-1)^2+\beta^2\right)\left((\alpha+1)^2+\beta^2\right)}}{2},\\ \cosh^2 a=&\frac{\alpha^2+\beta^2+1+\sqrt{\left((\alpha-1)^2+\beta^2\right)\left((\alpha+1)^2+\beta^2\right)}}{2},\end{aligned}$$

因为双曲余弦$^2\,a>1>$余弦$^2\,b$。

类似地，由 (3.3) 和 (3.4)，我们有 $\left(\underline{\frac{\alpha-1/2}{\text{余弦 }d}}\right)^2-\left(\underline{\beta}_{\text{正弦 }d}\right)^2=1$ 以及 $\left(\overline{\frac{\alpha-1/2}{\text{双曲余弦 }c}}\right)^2+\left(\overline{\beta}_{\text{双曲正弦 }c}\right)^2=1$。所以余弦$^2\,d$和双曲余弦$^2\,c$都满足方程$x^2-\left((\alpha-1/2)^2+\beta^2+1\right)x+(\alpha-1/2)^2=0$，由此我们得到

$$\begin{aligned}\cos^2 d=&\frac{(\alpha-1/2)^2+\beta^2+1-\sqrt{\left((\alpha-1/2)^2+\beta^2+1\right)^2-4(\alpha-1/2)^2}}{2}\\ =&\frac{(\alpha-1/2)^2+\beta^2+1-\sqrt{\left((\alpha-3/2)^2+\beta^2\right)\left((\alpha+1/2)^2+\beta^2\right)}}{2}\\ \cosh^2 c=&\frac{(\alpha-1/2)^2+\beta^2+1+\sqrt{\left((\alpha-3/2)^2+\beta^2\right)\left((\alpha+1/2)^2+\beta^2\right)}}{2},\end{aligned}$$

理由与上文相同。

显然，$\cosh a$ 和 $\cosh c$ 关于 $\beta > 0$ 单调递增。由于我们有

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\cos^2 b = \beta\left(1 - \frac{\alpha^2+\beta^2+1}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2+1)^2-4\alpha^2}}\right) < 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial \beta}\cos^2 d = \beta\left(1 - \frac{(\alpha-1/2)^2+\beta^2+1}{\sqrt{\left((\alpha-1/2)^2+\beta^2+1\right)^2-4\alpha^2}}\right) < 0,$$

我们看到，$\cos^2 b$ 和 $\cos^2 d$ 关于 $\beta > 0$ 均单调递减。

因此，我们得出 $\cosh a \cosh c - \cos b \cos d$ 关于 $\beta > 0$ 单调递增，故由 (B.3) 可得

$$\begin{aligned}
&\cosh(a+c) - \cos(b+d)\\
>&\cosh a\cosh c - \cos b\cos d\Big|_{\beta=0}\\
=&\sqrt{\frac{\alpha^2+1+|(\alpha-1)(\alpha+1)|}{2}}\sqrt{\frac{(\alpha-1/2)^2+1+|(\alpha-3/2)(\alpha+1/2)|}{2}}\\
&-\sqrt{\frac{\alpha^2+1-|(\alpha-1)(\alpha+1)|}{2}}\sqrt{\frac{(\alpha-1/2)^2+1-|(\alpha-3/2)(\alpha+1/2)|}{2}}\\
=&\begin{cases}
-\alpha^2+\alpha/2+1 & (1/2<\alpha\le 1),\\
1/2 & (1<\alpha\le 3/2),\\
\alpha^2-\alpha/2-1 & (\alpha>3/2).
\end{cases}
\end{aligned}$$

由此可得 $\cosh(a+c) - \cos(b+d) > 1/2$。

接下来，我们将证明，若 w 满足不等式 $\cosh$ 实部 w $-\cos$ 虚部 $w > 1/2$，则 $\log\left|e^{w/2}-e^{-w/2}\right| > 0$。

记 $w := x + y\sqrt{-1}$，则有

$$\begin{aligned}
2\log\left|e^{w/2}-e^{-w/2}\right| &= \log\left(2\left|\cosh w - 1\right|\right)\\
&= \log\left(2\sqrt{(\cosh x\cos y - 1)^2 + \sinh^2 x \sin^2 y}\right)\\
&= \log\left(2\left|\cosh x - \cos y\right|\right) > 0.
\end{aligned}$$

现在，令 $w := \xi + \varphi$，由 (B.2) 可得

$$\frac{\partial}{\partial a}\operatorname{Re} S(\xi) > 0$$

如所需。

(ii) $S(\xi)$ 的实部 $+ b\frac{\partial}{\partial a}S(\xi)$ 的虚部 > 0。

写作 $R(\xi) := S(\xi)$ 的实部 $+ b\frac{\partial}{\partial a}S(\xi)$ 的虚部。

若 $b = 0$ 且 $0 < a \le \kappa :=$ 反双曲余弦$(3/2)$，则根据注1.4（另见引理 4.2]），φ 是纯虚数。因此，由 (1.4) 可得 $S(a)$ 的实部 $= \mathrm{Li}_2($ $e^{-a-\varphi})$ 的实部 $- \mathrm{Li}_2(e^{-a+\varphi})$ 的实部 $= \left(\mathrm{Li}_2(e^{-a-\varphi})\right.$ 的实部 $\left. - \mathrm{Li}_2(e^{-a-\varphi})\right) = 0$，其中 $\overline{w}$ 是 w的复共轭。根据 P. 186]，我们知道当 $a > \kappa$时，$S(a)$ 是实数且为正。

因此，我们得出 $R(\xi) \ge 0$ 当 $b = 0$。因此，如果我们能够证明$\frac{\partial}{\partial b}\operatorname{Re} R$ $(\xi) > 0$，就可以得出 $R(\xi) > 0$ 对于 $a > 0, 0 < b < \pi/2$。

现在，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial b}R(\xi)=&\frac{\partial}{\partial b}\operatorname{Re}S(\xi)+\frac{\partial}{\partial a}\operatorname{Im}S(\xi)+b\frac{\partial^2}{\partial a\,\partial b}\operatorname{Im}S(\xi)\\ =&b\frac{\partial^2}{\partial a^2}\operatorname{Re}S(\xi),\end{aligned}$$

其中第二个等式由柯西-黎曼方程得出：
$\frac{\partial}{\partial a}$实部 $S(\xi)$ $=\frac{\partial}{\partial b}$虚部 $S(\xi)$，以及 $\frac{\partial}{\partial b}$实部 $S(\xi)$ $=-\frac{\partial}{\partial a}$虚部 $S(\xi)$。我们将证明 $\frac{\partial^2}{\partial a^2}$实部 $S(\xi)>0$。由（6.4）可得

$$\frac{d^2}{d\xi^2}S(\xi)=(1+\varphi')\coth\bigl((\xi+\varphi)/2\bigr), \tag{B.5}$$

其中 $\varphi':=\frac{d}{d\xi}\varphi$。由余弦双曲 $\varphi=$余弦双曲 $\xi-1/2$，我们得到

$$\begin{aligned}\varphi'=&\frac{\sinh\xi}{\sinh\varphi}\\ =&\frac{(\sinh a\cos b+\sqrt{-1}\cosh a\sin b)(\sinh c\cos d-\sqrt{-1}\cosh c\sin d)}{|\sinh\varphi|^2}\\ =&\frac{\sinh a\sinh c\cos b\cos d+\cosh a\cosh c\sin b\sin d}{|\sinh\varphi|^2}\\ &+\sqrt{-1}\frac{\cosh a\sinh c\sin b\cos d-\sinh a\cosh c\cos b\sin d}{|\sinh\varphi|^2}.\end{aligned} \tag{B.6}$$

由半角公式可得

$$\coth(z/2)=\frac{\cosh z+1}{\sinh z}, \tag{B.7}$$

这意味着

$$\begin{aligned}&\coth\bigl((x+y\sqrt{-1})/2\bigr)\\ =&\frac{\cosh(x+y\sqrt{-1})+1}{\sinh(x+y\sqrt{-1})}\\ =&\frac{(1+\cosh x\cos y+\sqrt{-1}\sinh x\sin y)(\sinh x\cos y-\sqrt{-1}\cosh x\sin y)}{\sinh^2 x\cos^2 y+\cosh^2 x\sin^2 y}\\ =&\frac{\sin x-\sqrt{-1}\sin y}{\cosh x-\cos y}.\end{aligned}$$

因此我们有

$$\coth\bigl((\xi+\varphi)/2\bigr)=\frac{\sinh(a+c)-\sqrt{-1}\sin(b+d)}{\cosh(a+c)-\cos(b+d)}. \tag{B.8}$$

注意，分母为正，因为 $\cosh(a+c)>1>\cos(b+d)$。

由 (B.6) 可知 $\operatorname{Re}\varphi' > 0$，由 (B.8) 可知 $\operatorname{Re}\coth\big((\xi+\varphi)/2\big) > 0$，因此由 (B.5) 得$\dfrac{\partial^2}{\partial a^2}\operatorname{Re} S(\xi) = \operatorname{Re}\coth\big((\xi+\varphi)/2\big) + \operatorname{Re}\coth\big((\xi+\varphi)/2\big) \times \operatorname{Re}\ \varphi' - \operatorname{Im}\coth\big((\xi+\varphi)/2\big) \times \operatorname{Im}\ \varphi' > \operatorname{Re}\coth\big((\xi+\varphi)/2\big) - \operatorname{Im}\coth\big((\xi+\varphi)/2\big) \times \operatorname{Im}\ \varphi' \sinh(a+c)\ + \sin(b+d)\operatorname{Im}\ \varphi' = \cosh(a+c) - \cos(b+d)\ 1 = |\sinh\ \varphi|^2\big(\cosh(a+c)\ - \cos(b+d)\big) \times \Big[\sinh(a+c)\ \big(\sinh^2 c\cos^2 d + \cosh^2 c\sin^2 d\big) + \sin(b+d)\ (\cosh\ a\sinh\ c\sin\ b\cos\ d - \sinh\ a\cosh c\cos\ b\sin\ d)\Big]$，其中最后一个等号用到了 (B.6)。现在，方括号中的表达式大于 $\sinh(a+c)\cosh^2 c\sin^2 d - \sin(b+d)\ \sinh\ a\cosh c\cos\ b\sin\ d) = \cosh\ c\sin\ d\big(\sinh(a+c)\cosh\ c\sin\ d - \sin(b+d)\ \sinh\ a\cos b\big)$(因为 $\cosh c > 1$ 且 $\cos\ b < 1$)$> \cosh c\sin\ d\big(\sinh(a+c)\ \sin\ d - \sin(b+d)\ \sinh\ a\big)$(因为 $\sinh(a+c)\ = \sinh\ a\cosh c + \cosh\ a\sinh\ c > \sinh\ a + \sinh\ c$，且 $\sin(b+d)\ = \sin\ b\cos d + \cos\ b\sin\ d < \sin\ b + \sin\ d$)$> \cosh c\sin\ d\big(\sinh\ a\sin\ d + \sinh\ c\sin\ d - \sin\ b\sinh\ a - \sin\ d\sinh\ a\big) = \cosh c\sin\ d\big(\sinh\ c\ \sin\ d - \sin\ b\sinh\ a\big) = 0$，最后一个等号由 (1.9) 和 (3.4) 得出。因此，我们得出 $\frac{\partial^2}{\partial a^2}\operatorname{Re} S(\xi)\ > 0$，而 (ii) 即得。

□

子引理 B.4 的证明。如前所述，令 $\kappa := $ 反双曲余弦$(3/2)$。显然，反双曲余弦(余弦 $b+1/2$) $< \kappa$，这意味着曲线 $a =$ 反双曲余弦(余弦 $b+1/2$) $(a > 0, 0 < b < \pi/3)$ 位于直线 $a = \kappa$ 的左侧。因此，只需证明竖直线段 $\kappa + b\sqrt{-1}\,(0 < b < \pi/3)$ 位于区域 $\{\xi \in \mathbb{C} \mid$ 实部 $F(\sigma)\ < 0\}$ 内。由于实部 $F(\sigma)\ =$ 实部 $\left(\frac{S(\xi)}{\xi}\right) = \frac{1}{|\xi|^2}$实部$\big(S(\xi)(a - b\sqrt{-1})\big) = \frac{1}{|\xi|^2}\big(a$实部 $S(\xi)\ + b$虚部 $S(\xi)\big)$，我们将证明 $Q(b) := \kappa Q_1(b) + Q_2(b)\ > 0$ 对 $0 < b < \pi/3$ 成立，其中我们令

$$\begin{aligned} Q_1(b) &:= \operatorname{Re} S(\xi_b), \\ Q_2(b) &:= b\operatorname{Im} S(\xi_b), \end{aligned}$$

以及 $\xi_b := \kappa + b\sqrt{-1}$。我们计算

$$\begin{aligned} Q_1'(b) &= \frac{d}{db}\operatorname{Re} S(\xi_b), \\ Q_2'(b) &= \operatorname{Im} S(\xi_b) + b\frac{d}{db}\operatorname{Im} S(\xi_b), \\ Q_1''(b) &= \frac{d^2}{db^2}\operatorname{Re} S(\xi_b), \\ Q_2''(b) &= 2\frac{d}{db}\operatorname{Im} S(\xi_b) + b\frac{d^2}{db^2}\operatorname{Im} S(\xi_b), \end{aligned} \tag{B.9}$$

$$Q_1^{(3)}(b) = \frac{d^3}{d\,b^3}\,\mathrm{Re}\,S(\xi_b), \tag{B.10}$$

$$Q_2^{(3)}(b) = 3\frac{d^2}{d\,b^2}\,\mathrm{Im}\,S(\xi_b) + b\frac{d^3}{d\,b^3}\,\mathrm{Im}\,S(\xi_b). \tag{B.11}$$

我们将证明 $Q_1^{(3)}(b)$ 和 $Q_2^{(3)}(b)$ 均为正数，这意味着$Q^{(3)}(b) > 0$。

我们将计算 $\frac{d^k}{d\,b^k}S(\xi_b)$，其中 $k = 1$、2、3。由于

$$\frac{d}{d\,\xi}S(\xi) = 2\log\bigl(2\sinh\bigl((\xi+\varphi)/2\bigr)\bigr)$$

由（6.4）以及 $\varphi' = \frac{\text{双曲正弦}\,\xi}{\text{双曲正弦}\,\varphi}$ 由（B.6），可得

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{d\,\xi^2}S(\xi)\\
=&2\frac{2\cosh\bigl((\xi+\varphi)/2\bigr)\times\bigl((1+\varphi')/2\bigr)}{2\sinh\bigl((\xi+\varphi)/2\bigr)}\\
=&\frac{\coth\bigl((\xi+\varphi)/2\bigr)(\sinh\xi+\sinh\varphi)}{\sinh\varphi}\\
=&\frac{\bigl(\cosh(\xi+\varphi)+1\bigr)(\sinh\xi+\sinh\varphi)}{\sinh(\xi+\varphi)\sinh\varphi}\\
=&\frac{1}{\sinh(\xi+\varphi)\sinh\varphi}\\
&\times(\cosh\xi\sinh\xi\cosh\varphi+\sinh^2\xi\sinh\varphi\\
&\quad+\cosh\xi\cosh\varphi\sinh\varphi+\sinh\xi\sinh^2\varphi+\sinh\xi+\sinh\varphi)\\
=&\frac{1}{\sinh(\xi+\varphi)\sinh\varphi}\\
&\times(\cosh\xi\sinh\xi\cosh\varphi+\cosh^2\xi\sinh\varphi+\cosh\xi\cosh\varphi\sinh\varphi+\sinh\xi\cosh^2\varphi)\\
=&\frac{1}{\sinh(\xi+\varphi)\sinh\varphi}\\
&\times\bigl(\cosh\xi(\sinh\xi\cosh\varphi+\cosh\xi\sinh\varphi)+\cosh\varphi(\cosh\xi\sinh\varphi+\sinh\xi\cosh\varphi)\bigr)\\
=&\frac{\cosh\xi+\cosh\varphi}{\sinh\varphi},
\end{aligned}$$

其中第二个等式中使用了（B.7）。此外，我们还有

$$\begin{aligned}
\frac{d^3}{d\,\xi^3}S(\xi) =&\frac{(\sinh\xi+\varphi'\sinh\varphi)\sinh\varphi-(\cosh\xi+\cosh\varphi)\varphi'\cosh\varphi}{\sinh^2\varphi}\\
=&2\frac{\sinh\xi}{\sinh\varphi}-\frac{\sinh\xi\cosh\varphi(\cosh\xi+\cosh\varphi)}{\sinh^3\varphi}.
\end{aligned}$$

令 $\varphi_b := \varphi\,\big|_{\xi:=\xi_b}$，可得

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\,b}S(\xi_b) =&2\sqrt{-1}\log\left(e^{(\xi_b+\varphi_b)/2}-e^{-(\xi_b+\varphi_b)/2}\right)\\
\frac{d^2}{d\,b^2}S(\xi_b) =&-\frac{\cosh\xi_b+\cosh\varphi_b}{\sinh\varphi_b},\\
\frac{d^3}{d\,b^3}S(\xi_b) =&-\sqrt{-1}\left(2\frac{\sinh\xi_b}{\sinh\varphi_b}-\frac{\sinh\xi_b\cosh\varphi_b(\cosh\xi_b+\cosh\varphi_b)}{\sinh^3\varphi_b}\right)
\end{aligned}$$

因为 $d\,\varphi_b/d\,b = \sqrt{-1}$。

因此，我们有

$$\frac{d^2}{d\,b^2}\text{虚部 } S(\xi_b) := -\text{虚部 } \Big(\text{双曲余弦 } \xi_b + \text{双曲余弦 } \varphi_b\Big)\ \text{双曲正弦}, \tag{B.12}$$

$$\frac{d^3}{d\,b^3}\operatorname{Re} S(\xi_b) := \operatorname{Im}\left(2\frac{\sinh\xi_b}{\sinh\varphi_b} - \frac{\sinh\xi_b\cosh\varphi_b(\cosh\xi_b+\cosh\varphi_b)}{\sinh^3\varphi_b}\right), \tag{B.13}$$

$$\frac{d^3}{d\,b^3}\operatorname{Im} S(\xi_b) := -\operatorname{Re}\left(2\frac{\sinh\xi_b}{\sinh\varphi_b} - \frac{\sinh\xi_b\cosh\varphi_b(\cosh\xi_b+\cosh\varphi_b)}{\sinh^3\varphi_b}\right). \tag{B.14}$$

我们令

$$\begin{aligned} X(\xi) :=& \frac{\sinh\xi}{\sinh\varphi},\\ Y(\xi) :=& \frac{\cosh\varphi}{\sinh\varphi},\\ Z(\xi) :=& \frac{\cosh\xi}{\sinh\varphi},\\ W(\xi) :=& Y(\xi)+Z(\xi) \end{aligned}$$

使得

$$\begin{aligned} Q_1^{(3)}(b) =& 2\operatorname{Im} X(\xi_b) - \operatorname{Im}\big(X(\xi_b)Y(\xi_b)W(\xi_b)\big),\\ Q_2^{(3)}(b) =& -3\operatorname{Im} W(\xi_b) - b\Big(2\operatorname{Re} X(\xi_b) - \operatorname{Re}\big(X(\xi_b)Y(\xi_b)W(\xi_b)\big)\Big) \end{aligned}$$

由 (B.10)、(B.11)、(B.12)、(B.13) 和 (B.14) 得。

由于双曲余弦 $\kappa = 3/2$，我们有双曲正弦 $\kappa = \sqrt{5}/2$。令 $t := \text{正切}(b/2)$，则有

$$\begin{aligned} \sin b =& \frac{2t}{1+t^2},\\ \cos b =& \frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{aligned}$$

由正切半角公式可得。由 (3.3) 和 (3.4)，我们有

$$\begin{aligned} \cosh c\cos d =& \frac{3}{2}\times\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{1}{2},\\ \sinh c\sin d =& \frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{2t}{1+t^2}. \end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned} \sinh c =& \frac{\sqrt{3t^4 - t^2 + t\sqrt{(t^4+t^2+4)(9t^2+5)}}}{\sqrt{2}(t^2+1)},\\ \cosh c =& \frac{\sqrt{5t^4 + 3t^2 + 2 + t\sqrt{(t^4+t^2+4)(9t^2+5)}}}{\sqrt{2}(t^2+1)},\\ \sin d =& \frac{\sqrt{-3t^4 + t^2 + t\sqrt{(t^4+t^2+4)(9t^2+5)}}}{\sqrt{2}(t^2+1)},\\ \cos d =& \frac{\sqrt{5t^4 + 3t^2 + 2 - t\sqrt{(t^4+t^2+4)(9t^2+5)}}}{\sqrt{2}(t^2+1)}. \end{aligned}$$

使用

$$X(\xi) = \frac{\sinh(\kappa+b\sqrt{-1})\sinh(c-d\sqrt{-1})}{|\sinh\varphi|^2},$$

$$Y(\xi) = \frac{\cosh(c+d\sqrt{-1})\sinh(c-d\sqrt{-1})}{|\sinh\varphi|^2},$$
$$Z(\xi) = \frac{\cosh(\kappa+b\sqrt{-1})\sin(c-d\sqrt{-1})}{|\sinh\varphi|^2},$$

Mathematical 计算

$$\begin{aligned}
&Q_1^{(3)}(2\arctan t)\\
=&\frac{\sqrt{5}(-2t^4-9t^2+5)}{2\sqrt{2}|\sinh\varphi(t)|^6\,(t^2+1)^5}\left(\frac{t}{\sqrt{(9t^2+5)(t^4+t^2+4)}-3t^3+11t}\right)^{3/2}\\
&\times\Big(t(27t^8-108t^6+263t^4+650t^2+140)\\
&\quad+(-9t^6+43t^4+70t^2+10)\sqrt{(9t^2+5)(t^4+t^2+4)}\Big),
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&Q_2^{(3)}(2\arctan t)\\
=&\frac{1}{\sqrt{2}(t^2+1)^6|\sinh\varphi|^6}\left(\frac{t}{\sqrt{(9t^2+5)(t^4+t^2+4)}-3t^3+11t}\right)^{3/2}\\
&\times\big(P_1(t)-(\arctan t)P_2(t)\big).
\end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}
P_1(t):=&(9t^2+5)(t^4+t^2+4)\Big[3t^2(21t^4-52t^2+35)\sqrt{(9t^2+5)(t^4+t^2+4)}\\
&+3t(-63t^8+107t^6-197t^4+115t^2+50)\Big],\\
P_2(t):=&(t^2+5)(t^2+1)\Big[t(-117t^6+98t^4+422t^2+95)\sqrt{(9t^2+5)(t^4+t^2+4)}\\
&+351t^{10}-821t^8+532t^6+3467t^4+1015t^2+100\Big].
\end{aligned}$$

注意到 t^2+1、$9t^2+5$、t^4+t^2+4 和 $\sqrt{(9t^2+5)(t^4+t^2+4)}$ 显然为正。另请注意，引理 B.8 表明，对于 $0<t<1/\sqrt{3}$，$-2t^4-9t^2+5$、$\sqrt{(9t^2+5)(t^4+t^2+4)}-3t^3+11t$、$27t^8-108t^6+263t^4+650t^2+140$、$-9t^6+43t^4+70t^2+10$、$21t^4-52t^2+35$、$-63t^8+107t^6-197t^4+115t^2+50$、$-117t^6+98t^4+422t^2+95$ 和 $351t^{10}-821t^8+532t^6+3467t^4+1015t^2+100$ 均为正。

由此可知，$P_1(t)$ 和 $P_2(t)$ 均为正。由于当 $t>0$ 时，$\arctan t<t$，我们有

$$\begin{aligned}
&P_1(t)-(\text{反正切}\,t)P_2(t)>P_1(t)-tP_2(t)=t(\\
&-2052t^{14}-1042t^{12}-5935t^{10}+1658t^8-36108t^6-19100t^4+7375t^2+2500)+(\\
&684t^{10}+82t^8+919t^6-6783t^4-1495t^2+1625)\sqrt{(9t^2+5)(t^4+t^2+4)}。
\end{aligned}$$

根据引理 B.9，当 $0<t<1/\sqrt{3}$ 时，上述括号中的表达式为正，因此我们得出 $P_1(t)-(\arctan t)P_2(t)>0$。

这表明，对于 $0<b<\pi/3$，$Q_1^{(3)}(b)>0$，且 $Q_2^{(3)}(b)>0$；因此我们得出，对于 $0<b<1/\sqrt{3}$，$Q^{(3)}(b)=\kappa Q_1^{(3)}(b)+Q_2^{(3)}(b)>0$。

因此，当 $0<b<1/\sqrt{3}$ 时，$Q''(b)$ 单调递增。通过 Mathematica，我们有 $Q''(0.1)=-1.84946\ldots<0$，且 $Q''(\pi/3)=3.28977\ldots>0$。所以

存在 $0.1 < b_0 < \pi_1$（事实上，通过 Mathematica 可得 $b_0 = 0.208854\ldots$），使得当 $0 < b < b_0$ 时，$Q''(b_0) = 0$，$Q''(b) < 0$，且当 $b_0 < b < \pi/3$ 时，$Q''(b) > 0$。

因此，我们看到，当 $0 < b < b_0$ 时，$Q'(b)$ 单调递减；当 $b_0 < b < \pi/3$ 时，单调递增。由于 $b = 0$ 时 $\xi_b = \kappa$ 且 $\varphi_b = 0$，根据 (1.4)，$S(\xi_b)$ 在 $b = 0$ 时为零。因此，由 (B.9) 可得 $Q'(0) = 0$。我们还通过 Mathematica 得到 $Q'(\pi/3) = 1.28288\ldots > 0$。因此，我们看到存在 b_1，满足 $b_0 < b_1 < \pi/3$，使得当 $0 < b < b_1$ 时，$Q'(b_1) = 0$，$Q'(b) < 0$；当 $b_1 < b < \pi/3$ 时，$Q'(b) > 0$。注意，我们通过 Mathematica 得到 $b_1 = 0.648548\ldots$。

因此我们得出，$Q(b)$在 $0 < b < b_1$时递减，在 $b_1 < b < \pi/3$时递增。由于 $Q(0) = 0$ 且根据 Mathematica，$Q(\pi/3) = -0.0762858\ldots$，我们最终得出，$Q(b) < 0$ 在 $0 < b < \pi/3$时成立。□

为证明引理 2.11，我们先准备一个引理。

引理 B.6. 设 $w \neq 1$ 是一个满足 $|w| \leq 1$的复数，且 $\arg w$ 是 w 的辐角，并满足 $-\pi < \arg w \leq \pi$。

那么我们有

$$(\arg w)/2 - \pi/2 \leq \arg(1-w) < 0 \qquad (if\ \mathrm{Im}\, w > 0), \tag{B.15}$$

$$0 < \arg(1-w) \leq (\arg w)/2 + \pi/2 \qquad (if\ \mathrm{Im}\, w < 0), \tag{B.16}$$

$$\arg(1-w) = 0 \qquad (if\ \mathrm{Im}\, w = 0), \tag{B.17}$$

其中，(B.15)中的等号和(B.16)中的等号仅在 $|w| = 1$时成立。

证明. 显然，若 $w < 1$ 是实数，则 $\arg(1-w) = 0$。因此我们假设 $\mathrm{Im}\, w \neq 0$。

考虑复平面中的三角形 $\triangle$OAP，其中 O 为原点，A：1，P：$w \neq 1$，其虚部为 $w \neq 0$，且 OP 为 $= |w| \leq 1$。由图1左图可得

$$\begin{aligned} 0 > \arg(1-w) &= -\angle\mathrm{OAP} \qquad (\text{if } \mathrm{Im}\, w > 0), \\ 0 < \arg(1-w) &= \ \ \angle\mathrm{OAP} \qquad (\text{if } \mathrm{Im}\, w < 0) \end{aligned} \tag{B.18}$$

因为 $1-w$ 由向量 $\overrightarrow{\text{PA}}$ 表示，而 $\arg(1-w)$ 是从直线 l 到 $\overrightarrow{\text{PA}}$ 的有向角，其中 l 与 OA 平行。

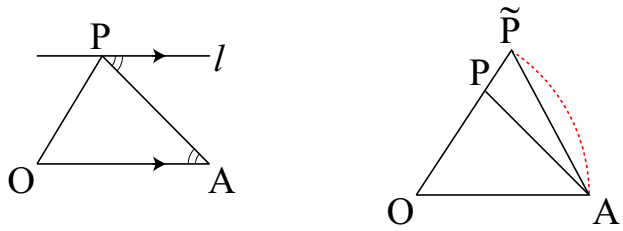

FIGURE 14. ∠OAP 等于 l 与 PA 之间的角，其中$\tilde{}$直线 l 与 OA 平行。OA $=$ OP $= 1$，且 OP ≤ 1。红色虚线弧是以 O 为圆心的单位圆。

现在我们有 $\angle\mathrm{OAP} = \pi - \angle\mathrm{AOP} - \angle\mathrm{OPA} \leq \pi - \angle\mathrm{AOP} - \angle\mathrm{OAP}$，因为 $\angle\mathrm{OPA} \geq \angle\mathrm{OPA} = \angle\mathrm{OAP} \geq \angle\mathrm{OAP}$，其中 P 是射线 OP 与$\tilde{}$单位圆的交点（如果 OP $= 1$，则 P $=$ P）。参见图1右图。注意，$\tilde{}$等式仅在 P $=$ P 时成立，即 OP $= 1$。因此我们得到 $\angle\mathrm{OAP} \leq (\pi - \angle\mathrm{AOP})/2$。然后由（B.18）可得（B.15）和（B.16）。□

现在我们可以利用引理 B.6 证明引理 2.11。

引理 2.11 的证明。我们照常令 $Z = X + Y\sqrt{-1}$ 和 $\xi = a + b\sqrt{-1}$。我们将证明下列不等式。

$$-\pi < D_1(Z) < \pi \qquad (\text{if } |X| < a), \tag{B.19}$$

$$D_2(Z) < 3\pi/2 \qquad (\text{if } X \geq a \text{ and } Y \leq b). \tag{B.20}$$

由于 $D_1\bigl(X + (Y + 2\pi)\sqrt{-1}\bigr) = D_1(X + Y\sqrt{-1})$ 且 $D_2\bigl(X + (Y + 2\pi)\sqrt{-1}\bigr) = D_2(X+Y\sqrt{-1})+2\pi$，因此只需证明 $b-2\pi < Y \leq b$ 的情形下的 (B.19) 和 (B.20)。

若 $X > -a$，则 $\mathrm{Re}(-\xi - Z) = -a - X < 0$；若 $|X| < a$，则 $\mathrm{Re}(-\xi + Z) = -a+X < 0$；若 $X \geq a$，则 $\mathrm{Re}(\xi - Z) = a - X \leq 0$。因此，当 $X > -a$ 时取 $w = e^{-\xi-Z}$，当 $|X| < a$ 时取 $w = e^{-\xi+Z}$，当 $X \geq a$ 时取 $w = e^{\xi-Z}$，即可使用引理 B.6。

需要考虑四种情况：(a) $-b < Y \leq b$，(b) $b - \pi < Y \leq -b$，(c) $-b - \pi < Y \leq b - \pi$，以及 (d) $b - 2\pi < Y \leq -b - \pi$。

(a) The case where $-b < Y \leq b$. Since $-2b \leq -b - Y < 0$, $-2b < -b + Y \leq 0$, and $0 \leq b - Y < 2b$, we have $\mathrm{Im}(e^{-\xi-Z}) = e^{-a-X}\sin(-b - Y) < 0$, $\mathrm{Im}(e^{-\xi+Z}) = e^{-a+X}\sin(-b+Y) \leq 0$, and $\mathrm{Im}(e^{\xi-Z}) = e^{a-X}\sin(b-Y) \geq 0$. We also have $\arg(e^{-\xi-Z}) = -b-Y$, $\arg(e^{-\xi+Z}) = -b+Y$, and $\arg(e^{\xi-Z}) = b - Y$. So we can use (B.16), (B.15), and (B.17) to obtain

$$0 < \arg(1 - e^{-\xi-Z}) < (-b - Y)/2 + \pi/2 \quad (X > -a), \tag{B.21}$$

$$0 \leq \arg(1 - e^{-\xi+Z}) < (-b + Y)/2 + \pi/2 \quad (|X| < a), \tag{B.22}$$

$$\arg(1 - e^{\xi-Z}) \leq 0 \qquad (X \geq a). \tag{B.23}$$

由 (B.21) 和 (B.22)，可得 $b < D_1(Z) < \pi$ 当 $|X| < a$ 时，进而得到 (B.19)。由 (B.21) 和 (B.23)，可得 $D_2(Z) < (Y-b)/2+3\pi/2 \leq 3\pi/2$ 当 $X \geq a$ 时，因为 $Y \leq b$，这意味着 (B.20)。

(b) $b - \pi < Y \leq -b$ 的情形。我们有 $0 \leq -b - Y < -2b + \pi$、$-\pi < -b + Y \leq -2b$ 和 $2b \leq b - Y < \pi$。因此 $\mathrm{Im}(e^{-\xi-X}) \geq 0$，$\mathrm{Im}(e^{-\xi+Z}) < 0$，且 $\mathrm{Im}(e^{\xi-Z}) > 0$。由于 $\arg(e^{-b-Y}) = -b - Y$、$\arg(e^{-b+Y}) = -b + Y$，且 $\arg(e^{b-Y}) = b - Y$，我们可以使用 (B.15)、(B.16) 和 (B.17) 得到

$$(-b - Y)/2 - \pi/2 < \arg(1 - e^{-\xi-Z}) \leq 0 \qquad (X > -a), \tag{B.24}$$

$$0 < \arg(1 - e^{-\xi+Z}) < (-b + Y)/2 + \pi/2 \quad (|X| < a), \tag{B.25}$$

$$\arg(1 - e^{\xi-Z}) < 0 \qquad (X \geq a). \tag{B.26}$$

因此，当 $|X| < a$ 时，由 (B.24) 和 (B.25) 得 $(b-Y)/2-\pi/2 < D_1(Z) < (b+Y)/2+\pi/2$。由于 $(b-Y)/2-\pi/2 \geq b-\pi/2$，且 $(b+Y)/2+\pi/2 \leq \pi/2$，故 (B.19) 成立。由 (B.24) 和 (B.26)，当 $X \geq a$ 时，我们有 $D_2(Z) < Y + \pi$。由 $Y \leq -b$，B.20 得证。 ( )

(c) The case where $-b - \pi < Y \leq b - \pi$. From $-2b + \pi \leq -b - Y < \pi$, $-2b - \pi < -b + Y \leq -\pi$, and $\pi \leq b - Y < 2b + \pi$, we have $\mathrm{Im}(e^{-\xi-Z}) > 0$, $\mathrm{Im}(e^{-\xi+Z}) \geq 0$, and $\mathrm{Im}(e^{\xi-Z}) \leq 0$. Since $\arg(e^{-\xi-Z}) = -b - Y$, $\arg(e^{-\xi+Z}) = -b + Y + 2\pi$, and $\arg(e^{\xi-Z}) = b - Y - 2\pi$ (except for the case $Y = b - \pi$; in that case $\mathrm{Im}(e^{\xi-Z}) = 0$ and $\arg(e^{\xi-Z}) = b - Y = \pi$), we use (B.15), (B.16), and (B.17) to obtain

$$(-b - Y)/2 - \pi/2 < \arg(1 - e^{-\xi-Z}) < 0 \quad (X > -a), \tag{B.27}$$

$$(-b + Y + 2\pi)/2 - \pi/2 < \arg(1 - e^{-\xi+Z}) \leq 0 \quad (|X| < a), \tag{B.28}$$

and

$$\text{(B.29)}\qquad \arg(1-e^{\xi-Z})\begin{cases} <(b-Y-2\pi)/2+\pi/2 & (X\geq a \text{ and } Y\neq b-\pi),\\ =0 & (X\geq a \text{ and } Y=b-\pi).\end{cases}$$

由 (B.27) 和 (B.28)，当 $|X|<a$ 时，我们有 $0<D_1(Z)<b<\pi/2$，故 (B.19) 成立。若 $X\geq a$，则由 (B.27) 和 (B.29)，当 $Y\neq b-\pi$ 时，我们有 $D_2(Z)<(Y+b)/2+\pi/2\leq b<\pi/2$，这是因为 $Y+b\leq 2b-\pi$；而当 $Y=b-\pi$ 时，则有 $D_2(Z)<Y+\pi=b<\pi$。

(d) The case where $b-2\pi<Y\leq -b-\pi$. From $\pi\leq -b-Y<-2b+2\pi$, $-2\pi<-b+Y\leq -2b-\pi$, and $2b+\pi\leq b-Y<2\pi$, we have $\mathrm{Im}(e^{-\xi-Z})\leq 0$, $\mathrm{Im}(e^{-\xi+Z})>0$, and $\mathrm{Im}(e^{\xi-Z})<0$. Since $\arg(e^{-\xi-Z})=-b-Y-2\pi$ (except for the case $Y=-b-\pi$; in that case $\mathrm{Im}(e^{-\xi-Z})=0$ and $\arg(e^{-\xi-Z})=-b-Y=\pi$), $\arg(e^{-\xi+Z})=-b+Y+2\pi$, and $\arg(e^{\xi-Z})=b-Y-2\pi$, from (B.16) and (B.15) we have

(B.30)

$$\begin{cases} 0<\arg(1-e^{-\xi-Z})<(-b-Y-2\pi)/2+\pi/2 & (X>-a \text{ and } Y\neq -b-\pi),\\ \arg(1-e^{-\xi-Z})=0 & (X>-a \text{ and } Y=-b-\pi),\end{cases}$$

(B.31)

$$(-b+Y+2\pi)/2-\pi/2<\arg(1-e^{-\xi+Z})<0 \qquad (|X|<a),$$

(B.32)

$$\arg(1-e^{\xi-Z})<(b-Y-2\pi)/2+\pi/2 \qquad (X\geq a).$$

如果 $|X|<a$，则由 (B.30) 和 (B.31)，我们有 $(Y+b)/2+\pi/2<D_1(Z)<(b-Y)/2-\pi/2$ 当 $Y\neq -b-\pi$，以及 $(Y+b)/2+\pi/2<D_1(Z)<b$ 当 $Y=-b-\pi$。由于 $(Y+b)/2+\pi/2>b-\pi/2$ 且 $(b-Y)/2-\pi/2<\pi/2$ 若 $Y\neq -b-\pi$，以及 $(Y+b)/2+\pi/2=0$ 且 $(b-Y)/2-\pi/2=b$ 若 $Y=-b-\pi$，我们得到 (B.19)。如果 $X\geq a$，则由 (B.30) 和 (B.32)，我们有 $D_2(Z)<0$ 当 $Y\neq -b-Y$，以及 $D_2(Z)<(b+Y)/2+\pi/2=0$ 当 $Y=-b-\pi$，这蕴含 (B.20)。

证明至此完成。 □

引理 B.7. 令

$$\begin{aligned}\upsilon_1(x)&:=x^6+24x^5+174x^4+408x^3-63x^2-1008x-720,\\ \upsilon_2(x)&:=9x^4+104x^3+401x^2+548x+246,\\ \upsilon_3(x)&:=9x^4+24x^3-21x^2-100x-128,\\ \upsilon_4(x)&:=3x^4+16x^3+28x^2+40x+65,\\ \upsilon_5(x)&:=x^6+4x^5-8x^4-64x^3-123x^2-100x-94.\end{aligned}$$

那么，对于$|x|<1$，我们有 $\upsilon_1(x)<0$, $\upsilon_2(x)>0$, $\upsilon_3(x)<0$, $\upsilon_4(x)>0$，以及 $\upsilon_5(x)<0$。

证明。一阶导数 $\upsilon_1'(x)$ 的 $\upsilon_1(x)$ 等于 $6(x^5+20x^4+116x^3+204x^2-21x-168)$，并且由于 Mathematica 的计算，它在 $x=-11.3961\ldots$, $-5.29209\ldots$, $-2.80804\ldots$, -1.27925 和 $0.775472\ldots$ 处为零。由于 $\upsilon_1(x)$ 中 x^6 的系数为正，$\upsilon_1(x)$ 在 $(-1, 0.775472\ldots)$ 上递减，在 $(0.775472\ldots, 1)$ 上递增。由于当 $\upsilon_1(-1)=-32$ 且 $\upsilon_1(1)=-1184$ 时，我们得出 $\upsilon_1(x)<0$ 对于 $|x|<1$ 成立。

由于 $\upsilon_2'(x)=36x^3+312x^2+802x+548$，它在 $x=-4.34891\ldots$,$-3.23616\ldots$ 处为零，且 $-1.0816\ldots$ 由 Mathematica 得出。由于 $\upsilon_2(x)$ 中 x^4 的系数为正，因此它在 $(-1, 1)$ 上递增。由于 $\upsilon_2(-1)=4$，我们得出 $\upsilon_2(x)>0$对 $|x|<1$ 成立。

由于 $\upsilon_3'(x)=36x^3+72x^2-42x-100$，它在 $x=-1.77663\ldots$、$-1.36706\ldots$ 和 $1.1437\ldots$ 处为零（由 Mathematica 得出）。由于 x^4 在 $\upsilon_3(x)$ 中的系数为

正数，因此它关于 $|x|<1$ 单调递减。由于 $v_3(-1)=-64<0$，我们有 $v_3(x)<0$（当 $|x|<1$ 时）。

对于 $v_4(x)$，由于 $|x|<1$，我们可以看出 x^3 和 x 大于 -1，且 x^4 和 x^2 大于或等于 0。因此，我们得出 $v_4(x)>-16-40+65=9>0$。

为了证明 $v_5(x)<0$，我们首先注意到，对于 $|x|<1$，$x^6+4x^5-8x^4=x^4(x^2+4x-8)<1+4-8<0$。由于 $\frac{d}{dx}(-64x^3-123x^2-100x-94)=-192x^2-246x-100=-192\left(x+\frac{41}{64}\right)^2-\frac{1357}{64}<0$，可知 $-64x^3-123x^2-100x-94<\left(-64x^3-123x^2-100x-94\right)\Big|_{x=-1}=64-123+100-94=-53<0$。因此，我们得出，对于 $|x|<1$，$v_5(x)<0$。

证明完毕。 □

引理 B.8。令

$$\begin{aligned}
p_1(t) :=& -2t^4-9t^2+5,\\
p_2(t) :=& 21t^4-52t^2+35,\\
p_3(t) :=& -9t^6+43t^4+70t^2+10,\\
p_4(t) :=& -117t^6+98t^4+422t^2+95,\\
p_5(t) :=& 27t^8-108t^6+263t^4+650t^2+140,\\
p_6(t) :=& -63t^8+107t^6-197t^4+115t^2+50,\\
p_7(t) :=& 351t^{10}-821t^8+532t^6+3467t^4+1015t^2+100,\\
p_8(t) :=& \sqrt{(9t^2+5)(t^4+t^2+4)}-3t^3+11t.
\end{aligned}$$

那么，对于 $0<t<1/\sqrt{3}$，我们有 $p_i(x)>0\,(i=1,2,\ldots,8)$。

证明。由 $0<t<1/\sqrt{3}$，我们有

$$\begin{aligned}
p_1(t) >& -2/(\sqrt{3})^4-9/(\sqrt{3})^2+5=16/9>0,\\
p_2(t) >& -52/(\sqrt{3})^2+35=53/3>0,\\
p_3(t) >& -9/(\sqrt{3})^6+10=29/3>0,\\
p_4(t) >& -117/(\sqrt{3})^6+95=272/3>0,\\
p_5(t) >& -108/(\sqrt{3})^6+140=136>0,\\
p_6(t) >& -63/(\sqrt{3})^8-197/(\sqrt{3})^4+50=82/3>0,\\
p_7(t) >& -821/(\sqrt{3})^8+100=7279/81>0,\\
p_8(5) >& \sqrt{5\times 4}-3/(\sqrt{3})^3=2\sqrt{5}-1/\sqrt{3}>0.
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

引理 B.9。令

$$\begin{aligned}
q_1(t) :=& -2052t^{14}-1042t^{12}-5935t^{10}+1658t^8-36108t^6-19100t^4+7375t^2\\
&+2500\\
q_2(t) :=& 684t^{10}+82t^8+919t^6-6783t^4-1495t^2+1625
\end{aligned}$$

Then we have $q_i(t)>0$ $(i=1,2)$ *for* $0<t<1/\sqrt{3}$.

证明。与上文类似，我们有

$$q_2(t)>-6783/(\sqrt{3})^4-1495/(\sqrt{3})^2+1625=373>0.$$

对于 $q_1(t)$，我们将证明，当 $0 < x < 1/3$ 时， $\widetilde{q}_1(x) := q_1(\sqrt{x}) > 0$ 。由于我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{q}_1''(x) =& -4(21546x^5 + 7815x^4 + 29675x^3 - 4974x^2 + 54162x + 9550)\\ <& -4(-4974/3^2 + 9550) < 0,\end{aligned}$$

函数 $\widetilde{q}_1(x)$ 在 $0 < x < 1/3$ 上为向下凸。因此我们得出，$\widetilde{q}_1(x) < \min\{\widetilde{q}_1(0)\ \widetilde{q}_1(1/3)\} = \min\{2500, 1088000/729\} > 0$。

证明完毕。 □

REFERENCES

[1] J. E. Andersen 和 S. K. Hansen, *Asymptotics of the quantum invariants for surgeries on the figure 8 knot*, J. Knot Theory Ramifications（），第 – 期。MR 2221531

[2] N. G. de Bruijn, *Asymptotic methods in analysis*，第三版，Dover Publications, Inc.，纽约，1981年。MR 671583

[3] J. Dubois, *Non abelian twisted Reidemeister torsion for fibered knots*, Canad. Math. Bull. **49** 2006 1, 55 71 2198719（），第 – 期。MR

[4] L. D. Faddeev, *Discrete Heisenberg-Weyl group and modular group*, Lett. Math. Phys. 34（ 1995 3, 249 254 1345554），第 – 期。MR

[5] K. Habiro, *On the colored Jones polynomials of some simple links*, S⁻urikaisekikenky⁻usho K⁻oky⁻uroku（2000年），第1172期，34–43，体积猜想的最新进展（日文）（京都， 2000 1805727）。MR

[6] K. Hikami 和 H. Murakami, *Colored Jones polynomials with polynomial growth*, Commun. Contemp. Math. **10** 2008 1, 815 834 2468365（），增刊号，第 – 期。MR MR

[7] V. F. R. Jones, *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras*, 《Bull. Amer. Math. Soc.》（新系列） **12** 1985 1, 103 111 766964（），第 – 期。MR

[8] R. M. Kashaev, *The hyperbolic volume of knots from the quantum dilogarithm*, Lett. Math. Phys. **39** 1997 3, 269 275 1434238（），第 – 期。MR

[9] R. Kirby 和 P. Melvin, *The 3-manifold invariants of Witten and Reshetikhin-Turaev for* sl（2, **105** 1991 3, 473 545 1117149 复数域），Invent. Math.（），第 – 期。MR

[10] P. Kirk 和 E. Klassen, *Chern-Simons invariants of 3-manifolds decomposed along tori and the circle bundle over the representation space of* T^2 **153** 1993 ，Comm. Math. Phys.（），第3期，521 557 1218931 –。MR

[11] T. T. Q. Le, *Quantum invariants of 3-manifolds: integrality splitting and perturbative expansion*，，《Topology Appl.》（），**127** 2003 1 2, 125 152 1953323 第 - 期 –。MR

[12] H. Murakami, *The colored Jones polynomials and the Alexander polynomial of the figure-eight knot* **7** 2007 2, 249 269 2349300 ，JP J. Geom. Topol.（），第 – 期。MR

[13] ，*The coloured Jones polynomial the Chern-Simons invariant and the Reidemeister torsion of the figure-eight knot*，，《J. Topol.》（），第 – 期。MR **6** 2013 1, 193 216 3029425

[14] ，*The colored Jones polynomial of the figure-eight knot and an* SL(2; ℝ)*-representation*, arXiv:2312.00350，2023年。

[15] ，*The colored Jones polynomial of the figure-eight knot and a quantum modularity*, Canad. J. Math. 76（2024年），第2期，519–554。MR 4740925

[16] ，*The asymptotic behaviors of the colored Jones polynomials of the figure-eight knot, and an affine representation* **25** 2025 6, 3523 3583 4972719，Algebr. Geom. Topol.（），第 – 期。MR

[17] H. Murakami 和 J. Murakami, *The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot* **186** 2001 104 ，Acta Math.（），第 1, 85 1828373 –期。MR

[18] H. Murakami、J. Murakami、M. Okamoto、T. Takata 和 Y. Yokota, *Kashaev's conjecture and the Chern-Simons invariants of knots and links* **11** 2002 ，Experiment. Math.（），第3期，427 435 1959752 –。MR

[19] H. Murakami 和 A. T. Tran, *On the Asymptotic Behavior of the Colored Jones Polynomialof the Figure-Eight Knot Associated With a Real Number*, 低维拓扑与数论，Springer Proc. Math. Stat.，第456卷，Springer，新加坡，2025年，第175–209页。MR 4890558

[20] H. Murakami 和 Y. Yokota, *The colored Jones polynomials of the figure-eight knot and its Dehn surgery spaces* **607** 2007 47 68 2338120，J. Reine Angew. Math.（），–。MR

[21] ，*Volume conjecture for knots*，，《Springer 数学物理简明丛书》，第30卷，Springer，新加坡， 2018 3837111 。MR

[22] T. Ohtsuki, *On the asymptotic expansion of the Kashaev invariant of the* 5_2 *knot*, Quantum Topol. **7** 2016 4, 669 735 3593566（），第 – 期。MR

[23] J. Porti, *Torsion de Reidemeister pour les variétés hyperboliques*, Mem. Amer. Math. Soc. 128（1997年），第612期，x+139。MR 1396960

[24] R. Riley, *Nonabelian representations of 2-bridge knot groups*, 《牛津数学季刊》（2）35（1984年），第138期，191–208。MR 745421

Graduate School of Information Sciences, Tohoku University, Aramaki-aza-Aoba 6-3-09, Aoba-ku, Sendai 980-8579, Japan
Email address: hitoshi@tohoku.ac.jp