arXiv:2602.01057v1 [cs.CV] 1 Feb 2026

用于断层重建的放射性三维高斯射线追踪

Ling Chen 独立研究者

Bao Yang 南方医科大学

摘要

三维高斯泼溅（*3DGS*）近年来已成为计算机视觉领域一种颇具前景的渲染技术。通过将椭圆加权平均（*EWA*）泼溅的原理应用于现代可微分流水线，*3DGS* 实现了实时、高质量的新视角合成。在此基础上，*R^2-Gaussian* 通过校正积分偏差，将 *3DGS* 范式扩展至断层重建，并在计算机断层扫描（*CT*）中取得了最先进的性能。为实现可微分性，*R^2-Gaussian* 采用局部仿射近似：将每个三维高斯局部映射为探测器上的一个二维高斯，并通过阿尔法混合合成投影。然而，仿射近似可能降低重建的定量精度，并使非线性几何校正难以融入。为解决这些局限，我们提出了一种基于三维高斯射线追踪的断层重建框架。与基于泼溅的模型相比，我们的方法具有两项主要优势：（*i*）以解析方式计算射线穿过三维高斯基元的线积分，避免局部仿射压缩，从而得到物理一致性更高的前向投影模型；（*ii*）射线追踪公式能够显式控制射线的起点和方向，便于精确应用非线性几何校正，例如正电子发射断层成像（*PET*）中使用的弧形校正。这些特性拓展了基于高斯函数的重建方法在更广泛的实际断层成像系统中的适用性，同时提高了投影精度。

1. 引言

断层成像模态，例如计算机断层扫描（计算机断层扫描）[17, 20, 46] 和正电子发射断层成像（正电子发射断层成像） [3, 5, 42], 广泛应用于医学诊断、工业无损检测和科学研究。其主要目标是准确重建受检对象内部的三维解剖结构或功能分布。对于计算机断层扫描，经典的解析算法，例如 Feldkamp–Davis–Kress（FDK） [14] 具有计算效率高，但在稀疏投影、高噪声水平或束硬化等物理效应的影响下，图像质量会严重下降。对于正电子发射断层成像，统计迭代方法（例如有序子集期望最大化（OSEM） [18, 35], ）能够对成像物理过程和泊松测量噪声进行建模；与解析方法相比，这类方法可获得更高的图像质量。然而，其性能高度依赖系统矩阵的准确性，而系统矩阵可能难以获取或存储成本高昂。

近年来，计算机视觉领域的隐式神经表示（例如神经辐射场（NeRF） [10, 27, 30,48], ）通过学习从空间坐标到辐射度和密度的连续映射，为三维重建开创了新范式。然而，这些方法通常需要较长的训练和渲染时间，因此难以满足临床或工业场景对快速周转的需求，实用性受到限制。迈向实用化的一项重要进展是 3D 高斯泼溅（3DGS） [21, 23, 38, 41, 47], ，它以大量显式且可优化的三维高斯基元取代隐式多层感知机。每个基元由位置、方向、尺度、不透明度和视角相关系数参数化；可微分光栅化流水线将这些高斯投影到图像平面，并结合经典的椭圆加权平均（EWA）泼溅 [52, 53] 与基于梯度的优化，通过 Alpha 合成对其进行混合。3DGS 在保持高视觉质量的同时，大幅加快了训练速度，并实现了新视角的实时合成。

受这些能力的启发，研究人员将高斯表示应用于断层重建。R^2-Gaussian [49] 是一个典型示例，它通过解决原始基于溅射的投影中的积分偏差，将3D高斯泼溅应用于CT重建。在该框架中，场景由高斯表示，其属性对应于物理量（例如衰减），并对高斯参数进行优化，使栅格化投影与测得的扫描数据相匹配。R^2-Gaussian通过引入一种与各视角更为一致的投影模型，在CT上展现出良好的高分辨率重建效果。与3D高斯泼溅类似，R^2-Gaussian采用局部仿射近似：将三维高斯局部映射为探测器上的二维高斯，映射方式通过仿射

变换实现，并对各项贡献进行累积，以执行标准的Alpha合成。这种近似简化了梯度计算并提高了效率，但也可能降低积分的精确性——这对于要求高精度的定量成像而言是个问题。此外，一些真实成像系统具有特定的几何特征，例如PET探测器呈圆柱形排列 [43]。在正电子发射断层成像中，符合伽马探测会形成响应线（LOR），可能需要进行弧形校正 [9]，以使探测器几何结构与重建假设相协调。依赖局部仿射溅射的方法难以在正弦图中精确处理此类非均匀分箱间隔，因此在精确几何建模至关重要的系统中，其适用性受到限制。

为解决这些局限性，我们提出了一种基于三维高斯射线追踪的断层重建框架 [12, 31]。如图所示，该框架适用于断层重建，且实现简单。1不同于通过局部仿射近似投影到二维屏幕空间，我们的方法回归断层成像的物理基元——光线追踪和精确线积分，从而带来两项主要优势：

精确的投影模型。我们推导并实现了射线穿过三维高斯基元时精确线积分的解析表达式，消除了局部仿射近似，提高了数值一致性。**兼容不同的扫描仪几何结构**。三维高斯射线追踪能够显式控制射线的起点和方向，使我们可以在射线设置过程中精确适配不同的扫描仪几何特征，从而使该方法适用于正电子发射断层成像等成像系统。

我们在正电子发射断层成像和计算机断层扫描两种模态上，对所提出的框架进行了定量和定性评估。对于正电子发射断层成像，我们开展了：(i) 分析式美国国家电气制造商协会（NEMA）模体 [4]模拟，以评估重建性能；(ii) 三点源蒙特卡罗模拟，以研究弧形校正与非弧校正的影响；以及 (iii) 使用真实正电子发射断层成像数据进行定性评估。对于计算机断层扫描，我们在与 R^2-Gaussian 相同的合成数据集和真实世界数据集上开展实验，并使用三维PSNR和三维SSIM指标比较重建质量。

2. 相关工作

2.1. 断层重建

断层重建算法的核心目标是根据外部采集的投影数据重建内部结构的图像，主要分为解析方法和迭代方法。以 FDK 为代表的解析方法[36], 基于严格的数学模型，计算效率高，是数据完整且信噪比高的场景中的标准算法。迭代方法 [44] 采用统计模型，例如 OSEM，通过连续迭代逐步逼近最优解，在处理数据不完整或信噪比较低的情况时具有显著优势。

CT和PET重建算法的选择，深受其底层物理原理和数据特征的影响。CT测量X射线的确定性衰减，可获得高质量数据，因此FDK长期以来一直是其主流算法；迭代方法主要用于低剂量CT场景，以抑制噪声。相比之下，PET测量的是服从泊松分布的随机符合计数，这意味着其数据本质上具有较低的信噪比。因此，迭代方法成为PET绝对主导的重建技术，因为它能够有效处理噪声，并允许纳入物理校正。

2.2. R^2-高斯

R^2-高斯将此前用于神经渲染的显式高斯基元引入断层重建任务。该方法提出了适应X射线成像物理特性的高斯表示和前向投影流程。不同于典型的3D高斯泼溅，R^2-Gaussian通过处理积分偏差，重新推导了从三维各向异性高斯到二维探测器平面的投影关系。这构建了一个与辐射传输更加一致的辐射高斯核公式。在此公式的基础上，Zha等人 [49] 实现了一个用于断层重建的三维高斯泼溅框架。

关于缩放积分偏差，R^2-高斯函数的核心思想是通过三维高斯泼溅重建三维密度体。该方法修正了3D高斯泼溅中的密度不一致问题，确保单个高斯函数对像素的贡献在不同投影角度下保持一致。为保证效率，R^2-高斯函数通常会结合稀疏加速策略（如视锥剔除），以减少需要进行Alpha合成的图元数量。

2.3. 三维高斯射线追踪

三维高斯射线追踪将场景视为三维高斯基元的体积集合 [15, 31, 50]。它直接计算光线与基元交点，并沿像素光线计算相应积分，而不是将高斯泼溅到屏幕空间后再进行近似混合。通过构建包围体层次结构（BVH） [29] 并利用高性能GPU光线追踪硬件，该方法为每个像素投射射线，并分批处理按深度排序的交点；若应用于断层重建，则可省略排序过程。

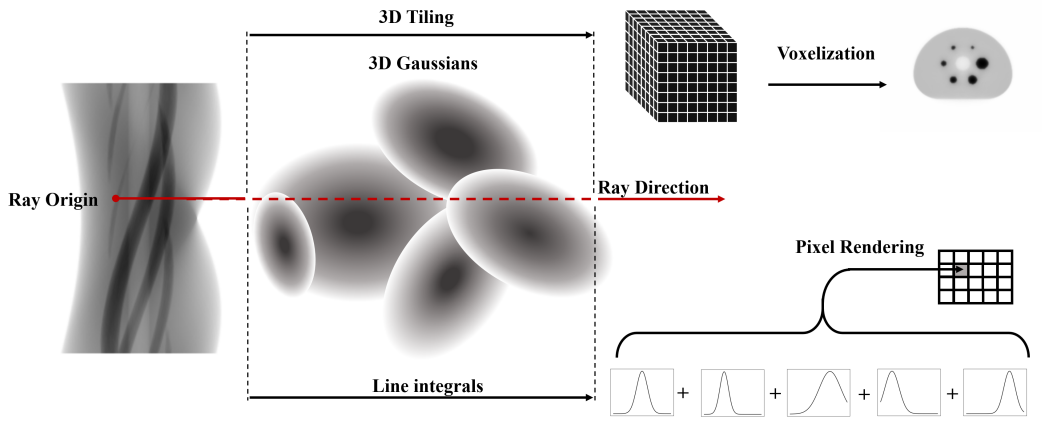


图 1. 用于断层重建的三维高斯射线追踪概述。给定扫描仪几何结构后，即可确定每条射线的起点和方向。沿每条射线，我们通过解析积分该射线所遇到的所有三维高斯基元的贡献来计算像素值。通过优化高斯参数，使渲染投影与测量投影相匹配，再将优化后的高斯进行体素化，即可得到断层重建结果。

与基于泼溅的流程相比，光线追踪具有三项关键优势：第一，它能够自然且准确地计算沿射线的线积分和透射率，从而避免高斯互不重叠的假设。第二，不仅三维高斯核，更紧凑的核（例如 Epanechnikov 核） [11], 也可应用于光线追踪 [12]。第三，我们可以非常灵活地定义射线原点和方向，从而使该方法兼容扫描仪的不同几何特征。因此，对于需要物理一致性更高的投影或复杂几何校正的应用场景，三维高斯射线追踪在数值精度和灵活性方面相较传统三维高斯泼溅展现出显著优势。

3. 方法

本节概述 R²-Gaussian 的预备知识，以及我们在正电子发射断层成像（PET）图像重建中遇到的局限性。随后，我们将详细推导用于断层重建的三维高斯射线追踪。

R²-高斯。R²-高斯的核心创新在于推导出适用于高斯函数的密度一致积分，揭示了标准三维高斯泼溅公式中一种此前未被发现的积分偏差。这种偏差源于高斯投影积分中的近似，导致密度恢复出现显著的不一致。为解决这一问题，R²-高斯引入协方差相关因子来缩放密度，从而实现准确的密度恢复。然而，投影过程仍依赖于局部仿射近似：

$$I_r(\mathbf{r}) \approx \sum_{i=1}^{M} \int G_i\left(\tilde{\mathbf{x}} \mid \rho_i, \phi(\mathbf{p}), \mathbf{J}_i \mathbf{W} \mathbf{\Sigma}_i \mathbf{W}^\top \mathbf{J}_i^\top\right) dx_2, \tag{1}$$

其中，G_i 表示一个三维高斯核，$\tilde{\mathbf{x}} = [x_0, x_1, x_2]$ 表示射线空间中的一个坐标点。此外，ρ_i、$\boldsymbol{p}_i$和 $\mathbf{\Sigma}_i$ 分别是对应于中心密度、位置和协方差的可学习参数。此外，$\mathbf{J}_i$ 是局部近似矩阵，$\mathbf{W}$ 是视图变换矩阵。

固有局限性。将 R²-Gaussian 应用于 PET 图像重建时，该成像模态独特的物理特性带来了若干挑战。R²-Gaussian 最初是为锥束或平行束 CT 重建而设计的。在 PET 中，跨层 LOR[13, 25], ，也就是环差非零的 LOR，会产生斜投影，因此需要通过剪切变换更新投影器；这种更新很容易实现。一个关键考量是进行弧形校正，因为 PET 扫描仪中的探测器呈圆柱形排列，必须进行此项校正。如图 2所示，这种几何结构会导致正弦图中的探测箱间距不均匀，因此前向投影模型必须准确表示圆柱形排列的探测器以及 LOR 间距的变化。传统 3D高斯泼溅方法依赖局部仿射近似，难以适用于此类弧形校正投影。3D高斯泼溅的断层成像版本，即 R²-Gaussian，也存在同样的局限性。尽管可以采用保守重采样，但这会降低原始测量投影的保真度。此外，PET 是一种定量成像模态，重建精度会直接影响临床测量指标，例如标准摄取值（SUV）——

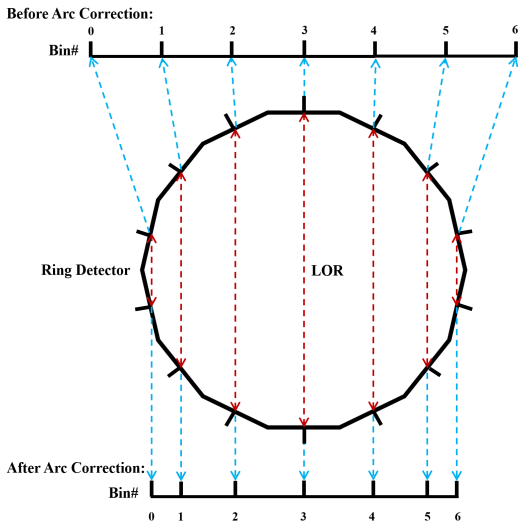


图 2. 圆柱形探测器排列的示例，会导致正弦图中的切向探测箱间距不均匀。弧形校正前的正弦图相当于将弧形探测器拉直成一条直线（上图）。然而，探测箱之间的实际间距，即沿弦测量的间距，并不均匀（下图）。

，这类指标用于评估代谢活性。 [39],因此，投影模型必须保持较高的定量准确性，并避免采用可能损害诊断可靠性或导致密度估计产生偏差的近似方法。

3.1. 总体框架

这些局限促使我们采用一种断层重建模型，该模型不仅能够提供更准确的线积分，还能在射线对齐方面具备几何灵活性。因此，我们采用三维高斯射线追踪进行断层重建。通过光线追踪，我们可以精确地解析计算线积分，无需近似，同时还能灵活地定义射线起点。下面推导沿一条射线对三维各向异性高斯进行积分的解析表达式。

设单个各向异性三维高斯函数，将常数归一化因子并入密度标量，写作：

$$G(\boldsymbol{x}) = \exp\Big(-\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\Big), \qquad (2)$$

其中， $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ 表示射线空间中的一个坐标点， $\boldsymbol{\mu}$是控制三维高斯椭球位置的均值， $\boldsymbol{\Sigma}$ 是协方差，可分解为缩放矩阵 $\boldsymbol{S}$ 和旋转矩阵$\boldsymbol{R}$： $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{RSS}^\top \boldsymbol{R}^\top$。由于可学习的密度标量 ρ可在优化过程中进行调整，并会在线积分中与三维高斯核相乘，因此无需显式处理归一化项[1] $(2\pi)^{3/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}$。

射线 $\boldsymbol{r}(t)$由射线原点 $\boldsymbol{o}$和射线方向 $\boldsymbol{d}$参数化：

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{o} + t\boldsymbol{d}, \qquad (3)$$

其中 $t \in \mathbb{R}$、 $\boldsymbol{o} \in \mathbb{R}^3$ 和 $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^3$。我们将所有三维高斯函数的线积分表示为：

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{r}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{M} \rho_i \cdot G_i\left(\boldsymbol{r}(t)\right)\, dt, \\ I(\boldsymbol{o},\boldsymbol{d}) &= \sum_{i=1}^{M} \rho_i \cdot \int_{-\infty}^{\infty} G_i\left(\boldsymbol{o}+t\boldsymbol{d}\right)\, dt, \end{aligned} \qquad (4)$$

其中 $I(\boldsymbol{r})$表示沿射线 $\boldsymbol{r}$渲染得到的像素值， M 是射线空间中的三维高斯函数数量，而 ρ_i是第 i个三维高斯的中心密度。

3.2. 沿射线的二次指数项

我们考虑不含密度的单个高斯函数的线积分：

$$\dot{I}(\boldsymbol{o},\boldsymbol{d}) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(-\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{o}+t\boldsymbol{d}-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{o}+t\boldsymbol{d}-\boldsymbol{\mu})\Big)\, dt, \qquad (5)$$

定义 $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{o} - \boldsymbol{\mu}$。代入指数项可得：

$$\begin{aligned} \text{exponent} &= -\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{o}+t\boldsymbol{d}-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{o}+t\boldsymbol{d}-\boldsymbol{\mu}) \\ &= -\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\delta}+t\boldsymbol{d})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\delta}+t\boldsymbol{d}) \\ &= -\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\delta}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\delta} + 2t\,\boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\delta} + t^2\,\boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{d}). \end{aligned} \qquad (6)$$

由于 $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ 是对称的，因此 $\boldsymbol{\delta}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\delta}$。这里，我们定义：

$$\begin{aligned} A &= \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{d}, \\ B &= \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\delta}, \\ C &= \boldsymbol{\delta}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\delta}. \end{aligned} \qquad (7)$$

将式（7）代入式（6，可得沿射线的指数的二次型：

$$\text{exponent} = -\tfrac{1}{2}(C + 2Bt + At^2). \qquad (8)$$

3.3. 闭式积分

将二次表达式代入式（5），积分变为：

$$\begin{aligned}\dot{I}(\boldsymbol{o},\boldsymbol{d}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(-\tfrac{1}{2}(C+2Bt+At^2)\Big)\,dt,\\ &= \exp\Big(-\tfrac{1}{2}C\Big)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\tfrac{1}{2}(2Bt+At^2)\Big)\,dt,\\ &= \exp\Big(-\tfrac{1}{2}C\Big)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\tfrac{1}{2}A(t+\tfrac{B}{A})^2+\tfrac{B^2}{2A}\Big)\,dt,\\ &= \exp\Big(-\tfrac{1}{2}(C-\tfrac{B^2}{A})\Big)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\tfrac{1}{2}A(t+\tfrac{B}{A})^2\Big)\,dt.\end{aligned} \tag{9}$$

令 $h = t + \frac{B}{A}$。剩余积分是标准高斯积分：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\tfrac{1}{2}Ah^2\Big)\,dh = \sqrt{\tfrac{2\pi}{A}}. \tag{10}$$

因此，不含密度的单个高斯函数的线积分为：

$$\dot{I}(\boldsymbol{o},\boldsymbol{d}) = \sqrt{\tfrac{2\pi}{A}}\cdot\exp\Big(-\tfrac{1}{2}\big(C-\tfrac{B^2}{A}\big)\Big). \tag{11}$$

最后，所有高斯函数沿射线的线积分为：

$$\boxed{I(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{M}\rho_i\cdot\sqrt{\tfrac{2\pi}{A_i}}\cdot\exp\Big(-\tfrac{1}{2}\big(C_i-\tfrac{B_i^2}{A_i}\big)\Big)} \tag{12}$$

该表达式为三维高斯模型提供了可解析且可微的前向投影，并避免了基于泼溅的方法中常用的局部仿射投影近似。

4. 实验

4.1. 实验设置

PET数据集。 该PET数据集包含三个部分。首先，我们使用断层图像重建软件（STIR）v6.2 [40] 为西门子 Biograph mMR 扫描仪对 NEMA 模体进行解析模拟，并随后向正弦图中添加泊松噪声。STIR可以通过使用重叠插值法对原始投影进行重采样，模拟弧形校正正弦图。然后，为了通过三点源蒙特卡罗模拟研究弧形校正与非弧校正的影响，我们遵循美国医学物理学家协会（AAPM）发布的PET/CT验收测试与质量保证报告中的方案 [28], ，使用GEANT4断层发射应用程序（GATE）v9.2 [37]。在模拟中，三个点源分别位于（0，1）、（0，10）和（0，20）厘米，其中（0，0）厘米为扫描仪的等中心。模拟的停止条件是采集到500万计数。本次模拟使用的扫描仪为通用电气 Discovery 690。原始输出数据由STIR转换为正弦图，以便进行重建。最后，为进行定性评估，我们从合作机构获取了真实的脑部数据；该数据经机构审查委员会批准后使用，并且由于数据是回顾性分析且已匿名化，因此免除知情同意。

表 1. NEMA 模体重建时间对比。

方法	OSEM	R^2-高斯函数	我们的方法
时间（分钟）	17	**12**	35

CT 数据集。 为便于与 R^2-高斯函数进行比较，我们采用相同的合成和真实 CT 数据集来评估性能差异。为建立稀疏视角重建的基准，我们定义了 75、50 和 25 个视角的三种情形，并将其应用于合成数据和真实数据。合成数据源自 15 个包含自然和人工物体的不同 CT 体积数据，包括人体器官、动物、植物和人造物体。我们使用 TIGRE 工具箱 [7] 计算生成 X 射线投影，随后为其添加电子噪声模型。对于真实数据评估，我们使用了芬兰逆问题学会（FIPS）数据集中的三个物体，每个物体均包含 721 个真实投影。由于缺少确定的真值，我们对完整视角集应用 FDK 算法 [14]，生成伪真值体积数据。

实现细节。 用于断层重建的三维高斯射线追踪基于 PyTorch [34]和 NVIDIA OptiX 光线追踪引擎 v6.0 [33]实现。所有实验均使用 Adam 优化器 [1] ，并采用与 R^2-Gaussian [49]相同的高斯致密化与剪枝策略。进行光线追踪时，使用二十面体表示一个高斯函数。启用背面剔除，以触发自定义的 Anyhit 程序，累积每个高斯函数的解析积分。为加速训练过程，我们还会跳过贡献可忽略不计的高斯函数。所有任务均在 RTX 3080 Ti GPU 上进行。

4.2. 实验结果

NEMA模体包含六个大小不同的球体，中间有一个中空圆柱体。六个球体根据其内径从 0 到 5 编号，内径分别为 10 mm、13 mm、17 mm、22 mm、28 mm 和 37 mm。由于 R^2-高斯函数此前仅适用于平行束或锥束投影，我们对

投影器进行了更新，使其能够处理斜向投影，这对于在 PET重建中利用跨层 LOR 至关重要。此外，我们将其与 STIR 中的 OSEM 实现进行比较，作为基线。我们比较了三种重建结果：(1) 由 OSEM 重建的含噪 NEMA模体；(2) 由 R^2-高斯函数重建的含噪 NEMA模体；以及 (3) 由我们的方法重建的含噪 NEMA模体。我们从以下方面评估重建性能：(i) 信号背景比 (SBR)，(ii) 恢复的球体直径，以及 (iii) 各球体内的标准差。这些指标分别反映定量准确性、重建保真度和噪声水平。重建时间汇总于表 1中。由于基于泼溅的方法具有高度并行的特性，R^2-高斯函数是三种方法中速度最快的。OSEM 居中。我们的方法最慢，耗时几乎是 R^2-高斯函数的两倍。

表 2 总结了三种方法重建得到的球体直径。球体直径通过球体的半高全宽确定。从该表可以看出，R^2-高斯函数和 OSEM 的六个球体中，均有三个球体的直径误差小于 5%。值得注意的是，R^2-高斯函数完美重建了最小的球体（10 mm），而这通常是最具挑战性的目标。我们的方法有六个球体中的两个误差小于 5%，这表明在这些实验中，我们的方法恢复真实直径的能力略逊于 R^2-高斯函数和 OSEM。

球体与背景之间的活度比设为 4:1；信号背景比越接近 4，定量准确性越高。表 3 总结了所有球体的信号背景比结果。计算信号背景比时，我们使用测得的半高全宽作为球体直径，计算该直径范围内的平均活度，并将其除以 20×20×20背景体积的平均活度，得到信号背景比。从该表可以看出，在三种方法中，我们的方法定量准确性最高：六个球体中有五个的相对误差小于 5%。R^2-高斯函数排名第二，六个球体中有两个的误差在 5% 以内。OSEM 的信号背景比准确性最差，只有一个球体的误差在 5% 以内。

图3 展示了三种方法在各个球体内部的标准差，用于量化噪声水平。总体而言，OSEM 的标准差最低，表明其噪声抑制能力更强。我们的方法和 R^2- 高斯函数的标准差都较高，尤其是在较小的球体中，这表明这些区域的噪声水平较高。综合来看，结果体现出一种权衡：我们的方法在大多数球体上实现了最佳定量准确性，而 OSEM 的噪声最低；R^2-高斯函数则在某些情况下兼顾了良好的保真度与小物体表现。

图 4 绘制了各方法生成的 NEMA 模体重建结果沿中心水平线的线剖面

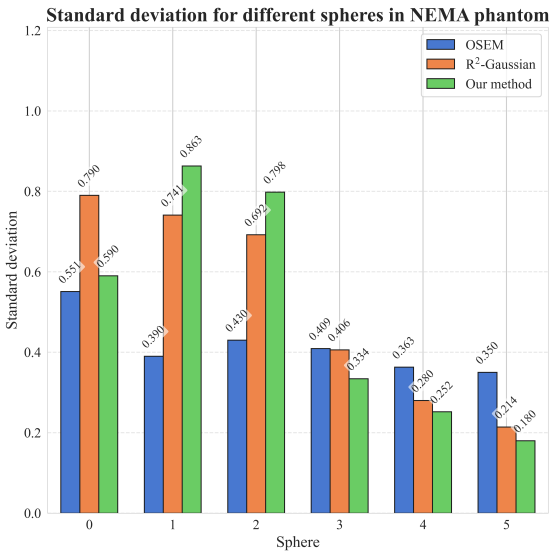


图3. OSEM、R^2-高斯函数和我们的方法在各个 NEMA体模球体内的标准差（数值越低，噪声抑制效果越好）。

。请注意，NEMA 模体的中心圆柱体是空的，因此其活度应为零。从右侧的线剖面可以直接比较这三种方法在中空圆柱体中保持零背景的效果：OSEM 在中空圆柱体内重建出的活度存在正偏差，如图 4a所示，这表明存在污染或背景偏移；R^2-高斯和我们的方法在该区域的活度均接近零，表明它们能更好地保留中空区域的低信号特性。OSEM 中的正偏差可能是由于散射和随机符合校正不完全造成的。不过，基于三维高斯函数的方法能够更有效地抑制此类偏差。

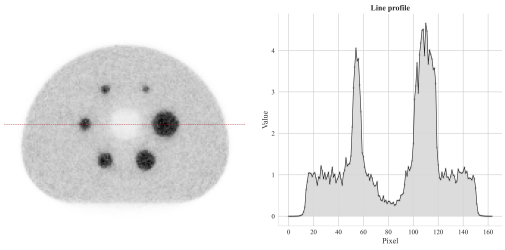
点源常用于测量PET系统的空间分辨率 [16], ，因为空间分辨率通常定义为点扩散函数（PSF）的半高全宽（FWHM） [2]，并通过空气中点源重建图像的线剖面计算得出。三点源蒙特卡罗模拟的结果如图所示。5。所有重建均采用我们的方法完成；图5a和图5b 分别显示了未进行和进行弧形校正的结果。我们还测量了三个点源的半高全宽。未校正弧形时，半高全宽分别为3.43、3.69和5.56像素。进行弧形校正后，分别为3.45、3.82和4.56像素。由于三个点源的活度设定相同，其重建值应当相近。弧形校正后的重建结果中，各值彼此更接近。结果表明，应用弧形校正可以改善空间分辨率和定量准确性 [9, 19],

表2. OSEM、R^2-高斯函数和我们的方法重建的各个NEMA体模球体的测量直径（mm）。括号内为相对于真值的相对误差。

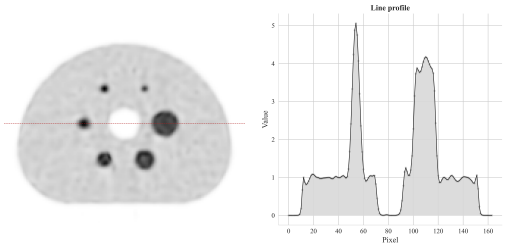
方法	球体0	球体1	球体2	球体3	球体4	球体5
OSEM	10.9 (8.9%)	13.7 (-21.4%)	**17.2 (1.2%)**	20.6(-6.3%)	**27.7 (-1.0%)**	**37.3 (0.7%)**
R^2-高斯函数	**10.0(-0.4%)**	10.8 (17.1%)	15.7 (-7.4%)	**21.3 (-3.4%)**	**28.4 (1.3%)**	39.2 (6.0%)
我们的方法	9.5 (-5.1%)	10.8 (16.6%)	15.1（-11.1%）	**21.2（-3.7%）**	**27.6（-1.3%）**	39.7（7.2%）

表 3. 使用 OSEM、R^2-高斯函数和我们的方法重建的每个 NEMA体模球体的信号背景比。括号内为相对于参考活度比（4:1）的百分比误差。

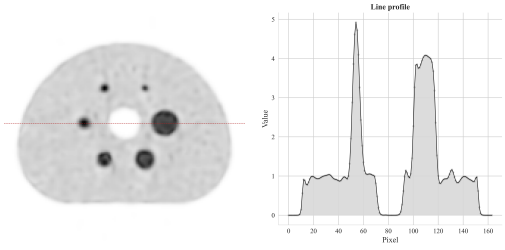
方法	球体0	球体1	球体2	球体3	球体4	球体5
OSEM	2.15（-46.3%）	3.14（-21.4%）	3.35（-16.1%）	3.75（-6.2%）	3.78（-5.4%）	**3.99（-0.2%）**
R^2-高斯函数	2.99 (-25.2%)	4.38 (9.6%)	**4.14 (3.4%)**	4.24 (6.1%)	4.20 (5.1%)	**4.06（1.5%）**
我们的方法	3.00（-24.5%）	**3.97（-0.7%）**	**3.90（-2.6%）**	**4.16（3.9%）**	**4.13（3.2%）**	**4.07（1.8%）**



(a) OSEM。

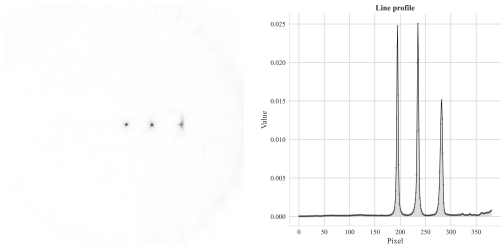


(b) R^2-高斯函数。

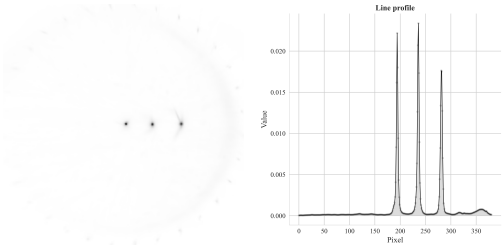


(c) 我们的方法。

图 4. 采用 (a) OSEM、(b) R^2-高斯函数和 (c) 我们的方法进行的NEMA模体正电子发射断层成像重建。对应的中央水平线剖面绘于右侧。



(a) 非弧形校正。

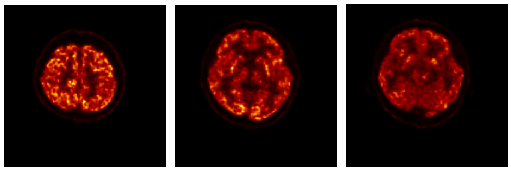


(b) 弧形校正。

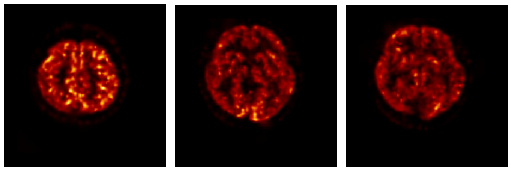
图5. 三点源正电子发射断层成像重建：(a) 未进行弧形校正；(b) 进行了弧形校正。从左到右，放射源分别位于(0,1)、(0,10)和(0,20)厘米处。右侧显示中心水平线剖面。

尤其是对于远离视野中心的放射源。

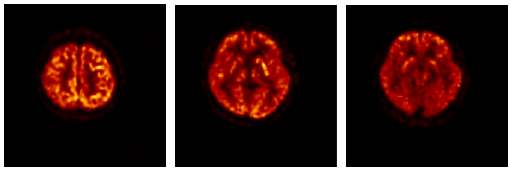
图 6 展示了对真实脑部数据进行的重建结果，方法为 (a) OSEM、（b）R^2-高斯函数和（c）我们的方法。从视觉效果来看，我们的方法在三者中呈现的细节最丰富。在左列中，我们的结果能更清晰地显示大脑皮层的脑沟和脑回。在中列中，我们的方法对壳核和尾状核的描绘最为清晰，而这两个结构对帕金森病和阿尔茨海默病的诊断十分重要 [8, 22], 。在右列中，OSEM和R^2-高斯函数重建在下边缘出现了伪影，而我们的重建没有。总体而言，在这三种方法中，我们的方法在更能抵抗数据噪声的同时，最能保留图像细节



(a) OSEM。



(b) R^2-高斯函数。



(c) 我们的方法。

图 6. 使用 (a) OSEM、(b) R^2-高斯函数和 (c) 我们的方法重建的真实脑PET数据。

表 4. 合成CT数据集上的性能比较。

方法	75 个视角		50 个视角		25 个视角	
	峰值信噪比	结构相似性	峰值信噪比	结构相似性	峰值信噪比	结构相似性
R^2-高斯函数	38.30	0.937	35.02	0.902	32.95	**0.866**
我们的方法	**39.36**	0.937	**35.13**	0.902	**32.99**	0.865

表5. 真实世界CT数据集上的性能比较。

方法	75 个视角		50 个视角		25 个视角	
	峰值信噪比	结构相似性	峰值信噪比	结构相似性	峰值信噪比	结构相似性
R^2-高斯函数	35.71	0.928	34.22	0.915	30.56	0.852
我们的方法	**35.79**	0.928	**34.30**	0.915	**30.68**	**0.856**

在真实PET数据重建中。

合成数据集和真实世界数据集上的CT重建结果分别汇总于表4和表5。R^2-高斯函数与我们的方法在结构相似性方面差异很小。在峰值信噪比方面，我们的方法在所有测试案例中均高于R^2-高斯函数。配对t检验表明，峰值信噪比的提升在统计学上显著（$p = 0.0048$）。

在实际应用中，临床CT通常采用定性解读，其定量准确性通常不如PET应用中那么关键。综合考虑重建质量与运行时间之间的权衡，对于速度至关重要的CT应用，R^2-Gaussian可能仍是更优选择。

对于PET重建，我们的方法展现出更高的定量准确性，也更灵活，能够适应各种扫描仪几何结构，因此更适用于需要精确几何建模的定量PET任务。

5. 局限性与未来工作

局限性。 与计算机断层扫描不同，公开可用的正电子发射断层成像数据集很少，而且正电子发射断层成像数据无法像计算机断层扫描数据那样轻易合成，因为正电子发射断层成像会检测成像对象内沿近乎 180° 相反方向发射的一对伽马光子。因此，本研究依赖解析模拟和蒙特卡罗模拟来近似真实测量。高保真蒙特卡罗模拟的计算成本极高，因此规模受限；解析模体模拟成本较低，但无法捕捉许多真实世界效应，例如散射和随机符合。此外，尽管三维高斯射线追踪的解析积分提高了物理保真度，但射线追踪实现的计算速度仍慢于高度并行的基于泼溅的实现。这会增加重建时间，并限制大规模实验的吞吐量。

未来工作。 下一步，我们将扩展投影算子，在射线追踪流程中显式建模衰减校正、散射和随机符合，并支持飞行时间（TOF）PET [45]。通过以可微方式纳入这些效应，我们希望推动该方法迈向完全定量的PET重建 [24]。我们还将研究实用的加速策略，例如改进BVH构建和采用混合精度计算，以缩短运行时间 [6]。

此外，近期研究表明，与扩散模型或学习先验相结合可以进一步提升重建质量 [26, 32, 51]。值得探索将基于扩散的正则化或生成式先验与三维高斯射线追踪相结合，在保持定量保真度的同时提升噪声抑制能力和感知质量。

6. 结论

在本研究中，我们提出了一种用于断层重建的三维高斯射线追踪框架。我们的方法通过沿每条射线计算三维高斯函数的解析线积分，避免了基于泼溅的方法所采用的局部仿射近似。该方法还可适配不同的扫描仪几何结构，从而无需对正弦图进行重采样即可进行PET重建，避免损害原始计数数据。得益于直接解析积分和更准确的几何建模，我们的方法在PET成像中展现出更高的定量准确性。

参考文献

[1] Kingma DP Ba J Adam 等。随机优化的一种方法。arXiv 预印本 arXiv:1412.6980，1412(6)，2014。5[2] Go Akamatsu、Katsuhiko Mitsumoto、Takafumi Taniguchi、Yuji Tsutsui、Shingo Baba 和 Masayuki Sasaki。点扩散函数和飞行时间重建对氟代脱氧葡萄糖正电子发射断层成像中淋巴结转移标准摄取值的影响。《欧洲放射学杂志》，83 230，2014 1 226 6（）：–。[3] Dale L Bailey、Michael N Maisey、David W Townsend 和 Peter E Valk。正电子发射断层成像。施普林格，2005。1[4] Qinan Bao、Danny Newport、Mu Chen、David B Stout 和 Arion F Chatziioannou。基于 NEMA NU-4 标准对 Inveon 专用临床前 PET 断层扫描仪的性能评估。《核医学杂志》，50(3):401–408，2009。2[5] Rachel Bar-Shalom、Ana Y Valdivia 和 M Donald Blaufox。肿瘤学中的 PET 成像。载于《核医学研讨会》，第 150–185 页。爱思唯尔，2000。1[6] Louis Bavoil、Steven P Callahan、Aaron Lefohn、Joao LD Comba 和 Cl´audio T Silva。使用 k 缓冲区在图形处理器上实现多片段效应。载于《2007 年交互式三维图形与游戏研讨会论文集》，第 –104 页，2007 年 97 8 D。[7] Ander Biguri、Manjit Dosanjh、Steven Hancock 和 Manuchehr Soleimani。TIGRE：用于锥形束计算机断层成像图像重建的 MATLAB-GPU 工具箱。《生物医学物理与工程快报》，2(5):055010，2016。5[8] E Broussolle、C Dentresangle、P Landais、L Garcia-Larrea、P Pollak、B Croisile、O Hibert、F Bonnefoi、G Galy、JC Froment 等。壳核和尾状核的 18F-多巴摄取与帕金森病患者运动表现和认知表现的关系。《神经科学杂志》，166(2):141–151，1999。7[9] Ralph Buchert、Karl H Bohuslavizki、Harald Fricke、Janos Mester 和 Malte Clausen。PET 扫描仪性能评估：通过偏心均匀性测量测试几何弧校正。《欧洲核医学杂志》，27(1):83–90，2000。2，6[10] Yuanhao Cai、Jiahao Wang、Alan Yuille、Zongwei Zhou 和 Angtian Wang。结构感知的稀疏视角 X 射线三维重建。载于 IEEE/CVF 计算机视觉与模式识别会议论文集，第 11174–11183 页，2024。1[11] Chi-Yang Chu、Daniel J Henderson 和 Christopher F Parmeter。关于离散 Epanechnikov 核函数。《计算统计与数据分析》，116:79–105，2017。3[12] Jorge Condor、Sebastien Speierer、Lukas Bode、Aljaz Bozic、Simon Green、Piotr Didyk 和 Adrian Jarabo。别再泼洒你的高斯：用于建模和渲染散射介质与发光介质的体积光线追踪基元。《ACM 图形学汇刊》，44(1):1–17，2025。2，3[13] Michel Defrise 和 Paul Kinahan。三维正电子发射断层成像的数据采集与图像重建。载于《三维正电子发射断层成像理论与实践》，第 11–53 页。施普林格，1998。3[14] Lee A Feldkamp、Lloyd C Davis 和 James W Kress。实用锥束算法。《美国光学学会杂志A辑》，1(6):612–619，1984年。1, 5[15] Jian Gao、Chun Gu、Youtian Lin、Zhihao Li、Hao Zhu、Xun Cao、Li Zhang 和 Yao Yao。可重照明三维高斯函数：通过 BRDF 分解和光线追踪实现逼真的点云重照明。载于《欧洲计算机视觉会议》，第73–89 页。施普林格，2024年。2[16] Kuang Gong、Simon R Cherry 和 Jinyi Qi。关于采用迭代图像重建评估 PET 系统空间分辨率。《医学与生物学物理学》，61(6):N193，2016年。5, 6[17] Godfrey N Hounsfield。计算机医学成像。《科学》，210(4465):22–28，1980年。1[18] H Malcolm Hudson 和 Richard S Larkin。利用投影数据的有序子集加速图像重建。《IEEE医学影像汇刊》，13(4):601–609，1994年。1[19] Dan J Kadrmas。LOR-OSEM：基于原始响应线直方图的统计PET重建。《医学与生物学物理学》，49(20):4731，2004年。6[20] Avinash C Kak 和 Malcolm Slaney。计算机断层成像原理。工业与应用数学学会，2001年。1[21] Bernhard Kerbl、Georgios Kopanas、Thomas Leimk¨uhler 和 George Drettakis。用于实时辐射场渲染的三维高斯泼溅。《ACM图形学汇刊》，42(1):1–139，2023年。4[22] J Koivunen、A Verkkoniemi、S Aalto、Anders Paetau、J-P Ahonen、M Viitanen、K N° agren、J Rokka、M Haaparanta、Hannu Kalimo 等。PET淀粉样蛋白配体 [11c] PIB摄取在变异型阿尔茨海默病中主要表现为纹状体摄取增加。《脑》，131(7):1845–1853，2008年。7[23] Samuli Laine、Janne Hellsten、Tero Karras、Yeongho Seol、Jaakko Lehtinen 和 Timo Aila。用于高性能可微渲染的模块化基元。《ACM图形学汇刊》，39(6):1–14，2020年。1[24] Adriaan A Lammertsma。回归过去：定量PET成像的理由。《核医学杂志》，58(7):1019–1024，2017年。8[25] Robert M Lewitt、Gerd Muehllehner 和 Joel S Karp。通过多层面重分箱和轴向图像滤波进行三维PET图像重建。《医学与生物学物理学》，39(3):321，1994年。3[26] Xi Liu、Chaoyi Zhou 和 Siyu Huang。3DGS-Enhancer：利用视图一致的二维扩散先验增强无界三维高斯泼溅。《神经信息处理系统进展》，37:133305–133327，2024年。8[27] Yuxuan Long、Yulin Zhang、Hong Wang、Xiaodong Kuang、Hailiang Huang、Fan Rao、Huafeng Liu、Yefeng Zheng 和 Wentao Zhu。PD-INR：用于飞行时间PET重建的先验驱动隐式神经表征。载于《医学图像计算与计算机辅助干预——MICCAI 2025》。施普林格·自然瑞士，2025年。1[28] Benjamin P Lopez、David W Jordan、Brad J Kemp、Paul E Kinahan、Charles R Schmidtlein 和 Osama R Mawlawi。PET/CT验收测试与质量保证：AAPM第126任务组报告执行摘要。

Daniel Meister、Shinji Ogaki、Carsten Benthin、Michael J Doyle、Michael Guthe 和 Jiˇrı́ Bittner。光线追踪边界体积层次结构综述。载于《计算机图形论坛》，第683–712页。Wiley Online Library，2021年。2[30]Ben Mildenhall、Pratul P Srinivasan、Matthew Tancik、Jonathan T Barron、Ravi Ramamoorthi 和 Ren Ng。NeRF：将场景表示为用于视图合成的神经辐射场。《ACM通讯》，65(1):99–106，2021年。1[31] Nicolas Moenne-Loccoz、Ashkan Mirzaei、Or Perel、Riccardo de Lutio、Janick Martinez Esturo、Gavriel State、Sanja Fidler、Nicholas Sharp 和 Zan Gojcic。三维高斯光线追踪：快速追踪粒子场景。《ACM图形学汇刊》，43(6):1–19，2024年。2[32] Yuxuan Mu、Xinxin Zuo、Chuan Guo、Yilin Wang、Juwei Lu、Xiaofeng Wu、Songcen Xu、Peng Dai、Youliang Yan 和 Li Cheng。GSD：视图引导的高斯泼溅扩散，用于三维重建。载于《欧洲计算机视觉会议》，第55–72页。施普林格，2024年。8[33] Steven G Parker、James Bigler、Andreas Dietrich、Heiko Friedrich、Jared Hoberock、David Luebke、David McAllister、Morgan McGuire、Keith Morley、Austin Robison 等。OptiX：通用光线追踪引擎。《ACM图形学汇刊》，29(4):1–13，2010年。5[34] Adam Paszke、Sam Gross、Francisco Massa、Adam Lerer、James Bradbury、Gregory Chanan、Trevor Killeen、Zeming Lin、Natalia Gimelshein、Luca Antiga 等。PyTorch：一种命令式、高性能深度学习库。《神经信息处理系统进展》，32，2019年。5[35] E Rapisarda、V Bettinardi、Kris Thielemans 和 MC Gilardi。在用于PET的全三维OSEM重建算法中实现基于图像的点扩散函数。《医学与生物学物理学》，55(14):4131，2010年。1[36] Simon Rit、David Sarrut 和 Laurent Desbat。胸部运动补偿锥束CT重建中解析法与代数法的比较。《IEEE医学影像汇刊》，28(10):1513–1525，2009年。2[37] D Strulab、Giovanni Santin、Delphine Lazaro、Vincent Breton 和 Christian Morel。GATE（Geant4断层发射应用）：用于PET/SPECT的通用仿真平台。《核物理B：会议论文增刊》，125:75–79，2003年。5[38] Chinmay Talegaonkar、Yash Belhe、Ravi Ramamoorthi 和 Nicholas Antipa。体积一致的三维高斯光栅化。载于《计算机视觉与模式识别会议论文集》，第10953–10963页，2025年。1[39] Joseph A Thie。理解标准摄取值、其计算方法及其应用意义。《核医学杂志》，45(9):1431–1434，2004年。4[40]Kris Thielemans、Charalampos Tsoumpas、Sanida Mustafovic、Tobias Beisel、Pablo Aguiar、Nikolaos Dikaios 和 Matthew W Jacobson。STIR：断层图像重建软件，第2版。《医学与生物学物理学》，57(4):867，2012年。5

[41] Christopher Thirgood、Oscar Mendez、Erin Ling、Jon Storey 和 Simon Hadfield。Hypergs：高光谱三维高斯泼溅。载于《计算机视觉与模式识别会议论文集》，第5970–5979页，2025年。1[42] DW Townsend 等。临床PET成像的物理原理与技术。《新加坡医学科学院年鉴》，33(2):133–145，2004年。1[43] Timothy G Turkington。PET仪器设备简介。《核医学技术杂志》，29(1):4–11，2001年。2[44] Stefaan Vandenberghe、YVES D’Asseler、Rik Van de Walle、T Kauppinen、Michel Koole、Luc Bouwens、Koen Van Laere、Ignace Lemahieu 和 RA Dierckx。核医学中的迭代重建算法。《计算机化医学成像与图形学》，25(2):105–111，2001年。2[45] Stefaan Vandenberghe、Ekaterina Mikhaylova、Ester D’Hoe、Pieter Mollet 和 Joel S Karp。飞行时间PET的最新进展。《EJNMMI物理学》，3(1):3，2016年。8[46] Philip J Withers、Charles Bouman、Simone Carmignato、Veerle Cnudde、David Grimaldi、Charlotte K Hagen、Eric Maire、Marena Manley、Anton Du Plessis 和 Stuart R Stock。X射线计算机断层扫描。《自然评论：方法入门》，1(1):18，2021年。1[47] Zehao Yu、Anpei Chen、Binbin Huang、Torsten Sattler 和 Andreas Geiger。Mip-splatting：无混叠三维高斯泼溅。载于《IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议论文集》，第19447–19456页，2024年。1 – .[48] Ruyi Zha、Yanhao Zhang 和 Hongdong Li。Naf：用于稀疏视角锥形束计算机断层成像重建的神经衰减场。载于国际医学图像计算与计算机辅助干预会议论文集，第442–452页。施普林格，2022年。1[49] Ruyi Zha、Tao Jun Lin、Yuanhao Cai、Jiwen Cao、Yanhao Zhang 和 Hongdong Li。R^2-gaussian：用于断层重建的辐射高斯泼溅校正。arXiv预印本arXiv:2405.20693，2024 年。1, 2, 5[50] Chenxu Zhou 、Lvchang Fu、Sida Peng、Yunzhi Yan、Zhanhua Zhang、Yong Chen、Jiazhi Xia 和 Xiaowei Zhou。Lidar-rt：用于动态激光雷达再仿真的基于高斯的光线追踪。载于《计算机视觉与模式识别会议论文集》，第1538–1548页，2025年。2[51] Junsheng Zhou、Weiqi Zhang 和 Yu-Shen Liu。Diffgs：函数式高斯泼溅扩散。《神经信息处理系统进展》，37:37535–37560，2024年。8[52] Matthias Zwicker、Hanspeter Pfister、Jeroen Van Baar 和 Markus Gross。表面泼溅。载于第28届计算机图形学与交互技术年度会议论文集，第371–378页，2001年。1[53] Matthias Zwicker、Hanspeter Pfister、Jeroen Van Baar 和 Markus Gross。EWA泼溅。《IEEE可视化与计算机图形学汇刊》，8(3):223–238，2002年。1