arXiv:2602.01071v1 [math.AP] 1 Feb 2026

纳维–斯托克斯方程中的涡量拉伸与扩散模型中的信息耗散：从偏微分方程视角进行的重新表述

TSUYOSHI YONEDA

Abstract. 本文提出一种新的纳维–斯托克斯方程中涡量拉伸的逆时间表述，该表述基于受得分函数扩散模型启发的偏微分方程框架。我们将时间反演所产生的不适定反向拉普拉斯算子吸收到由得分函数表示的漂移项中，从而以拉格朗日方式表述逆时间动力学。通过轴对称涡量拉伸场的离散拉格朗日流，利用神经网络学习得分函数，并据此构造反向时间粒子轨迹。数值结果表明，初始位置的信息在压缩方向上迅速丢失，而在拉伸方向上则相对得以保留。

1. Introduction: Vortex Dynamics of Navier–Stokes Flows Based on Diffusion Models

三维湍流中的涡旋生成与拉伸是流体动力学中最基本的过程之一。根据经典涡量拉伸理论，涡量通过与局部应变场相互作用而增强，同时又因黏性扩散而扩散并变得平滑。这类正向时间演化的涡动力学相对来说已得到充分理解。相比之下，逆问题——即如何从给定的初始涡量分布中形成相干涡管结构——仍远未得到充分理解。其主要原因在于纳维–斯托克斯方程固有的不可逆性。

近年来，基于分数的扩散模型在机器学习领域迅速发展，并成功地对与正向时间动力学相对应的逆问题进行了建模。一个尤为值得注意的事实是，描述扩散模型的正向时间福克–普朗克方程，在数学上与描述伯格斯涡管的涡量方程完全相同，差别仅在于系数。这种结构等价性为涡动力学与扩散模型中的生成过程直接建立了理论桥梁。本研究利用这种对应关系，从扩散模型的视角构建了一个新的理论框架，以理解纳维–斯托克斯流中的涡旋形成过程。具体而言，应变场决定了能在多大程度上重建初始

Date: 2026年2月3日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：76D05；次要分类：68T07；第三分类：35K10。*Key words and phrases.* 扩散模型、纳维–斯托克斯方程、涡量拉伸。

涡量分布，即从后续时刻观测到的相干涡结构中重建初始涡量分布的能力，也就是逆问题的可逆程度。从这一视角出发，本研究提出以下两个基本问题：

(1) 从时间反向的角度考察涡动力学时，哪些类型的应变场能够保留初始涡量分布中的最多信息，反之又有哪些会耗散最多信息？(2) 如何定量刻画给定应变场对应的“信息耗散率”，它又揭示了湍流中涡结构的组织方式？

为初步探讨这些问题，本研究旨在深入了解

在轴对称纳维–斯托克斯流中，受 Burgers型应变场拉伸的涡如何随时间回溯，以及在多大程度上能够重建原始涡量分布。

研究结果提供了一种关于涡动力学的新颖信息论视角，并将经典涡拉伸理论拓展至受现代扩散模型启发的可逆框架。

2. A Reformulation of Diffusion Models Based on Partial Differential Equation Theory

在本节中，我们从偏微分方程的视角重新表述扩散模型，同时尽量减少概率概念的使用。

2.1. 具有黏性的轴对称涡量方程。考虑给定的稳态轴对称速度场 $U_r = U_r(r,\ z)$ 和 $U_z = U_z(r,\ z)$，其满足以下无散条件（也可以考虑含时情形，但此处略去）：

$$\frac{1}{r}\partial_r(rU_r) + \partial_z U_z = 0.$$

于是，具有黏性的轴对称涡量方程的 z 分量（记为 ω_z）可写为

$$\partial_t\omega_z + U_r\,\partial_r\omega_z + U_z\,\partial_z\omega_z = \omega_z\,\partial_z U_z + \omega_r\,\partial_r U_z + \nu\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \partial_z^2\right)\omega_z. \tag{1}$$

我们将上述涡量方程改写为带有反应项和外部强迫项的二维 Fokker–Planck 方程：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r}\big(B_r(r,z)\,\rho\big) - \frac{\partial}{\partial z}\big(B_z(r,z)\,\rho\big) + \nu\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}\right) + S(r,z)\rho + F(r,z). \tag{2}$$

通过比较方程（1）和（2），我们得到

$$\rho = \omega_z,\quad B_r = U_r - \frac{\nu}{r},\quad B_z = U_z,\quad S = \partial_r B_r + 2\,\partial_z B_z + \frac{\nu}{r^2},\quad F = \omega_r\,\partial_r U_z.$$

对于 Burgers 型应变场，我们有 $U_r = -ar$ 和 $U_z = 2az$ $(a > 0)$，由此得到 $F = 0$。

2.2. 时间反演偏微分方程的推导。这里我们设 $f = (B_r, B_z)$ 和$x = (x_1, x_2) = (r, z)$。为匹配实现中使用的记号，我们定义$\sigma := \sqrt{2\nu}$。为简单起见，我们考虑没有外力的情况，即 $F = 0$。那么，密度 $\rho(t, x)$ 满足

$$\partial_t \rho(t,x) = -\nabla_x \cdot \big(f(x)\,\rho(t,x)\big) + \frac{\sigma^2}{2}\,\Delta_x \rho(t,x) + S(x)\rho(t,x), \qquad t > 0. \tag{3}$$

这是正向福克–普朗克方程。若对该方程进行简单的时间反转，并通过直接计算来表述相应的逆问题，则所得的关于反向“时间”的偏微分方程会显式包含反向拉普拉斯算子，因此显然是不适定的。正确表述逆问题的关键，是将这个反向拉普拉斯算子改写为漂移项的一部分。首先，固定终止时间 $T > 0$ 并定义

$$\tau = T - t, \qquad \rho^*(\tau, x) := \rho(T - \tau, x).$$

Then

$$\partial_\tau \rho^*(\tau,x) = -\partial_t \rho(t,x)\big|_{t=T-\tau}.$$

代入 (3)，得到

$$\begin{aligned} \partial_\tau \rho^*(\tau,x) &= -\Big(-\nabla_x \cdot \big(f(x)\,\rho(t,x)\big) + \frac{\sigma^2}{2}\,\Delta_x \rho(t,x) + S(x)\rho(t,x)\Big)_{t=T-\tau} \\ &= \nabla_x \cdot \big(f(x)\,\rho^*(\tau,x)\big) - \frac{\sigma^2}{2}\,\Delta_x \rho^*(\tau,x) + S(x)\rho^*(\tau,x), \end{aligned} \tag{4}$$

这就是方程的时间反转形式。另一方面，在反向时间变量 τ 下，具有漂移项 $b(\tau, x)$ 的非扩散˜方程可写为

$$\partial_\tau \rho^*(\tau,x) = -\nabla_x \cdot \big(\tilde{b}(\tau,x)\,\rho^*(\tau,x)\big) + S(x)\rho^*(\tau,x). \tag{5}$$

由于 (4) 和 (5) 都是关于同一个 $\rho^*(\tau, x)$ 的偏微分方程，它们的右端必须相同。因此，我们要求

$$\nabla_x \cdot \big(f\,\rho^*\big) - \frac{\sigma^2}{2}\,\Delta_x \rho^* \;=\; -\nabla_x \cdot \big(\tilde{b}\,\rho^*\big). \tag{6}$$

我们希望将左端写成散度形式。通过标准计算可知，令

$$\tilde{b}\rho^* = -f\rho^* + \frac{\sigma^2}{2}\nabla_x \rho^*,$$

方程（6）成立。因此，在 $\rho^*(\tau, x) > 0$ 的区域内，漂移项可写为

$$\tilde{b}(\rho_0, t, x) = -f(x) + \frac{\sigma^2}{2}\,\frac{\nabla_x \rho^*(t,x)}{\rho^*(t,x)} = -f(x) + \frac{\sigma^2}{2}\,\nabla_x \log \rho^*(t,x). \tag{7}$$

这一漂移项源自反向拉普拉斯算子，并显式依赖于初始密度 ρ_0。量 $\nabla_x \log \rho^*(t, x)$ 称为（时间反向的）得分函数。用偏微分方程表示，我们可以写成

$$\partial_\tau \rho^* = -\nabla \cdot \Big(\tilde{b}\rho^*\Big) + S\rho^*.$$

汇总这些结果可知，问题最终归结为求解以下以拉格朗日流表示的偏微分方程组：

$$\partial_\tau(\rho^* \circ \Phi) = \Big(-\nabla \cdot \tilde{b} + S\Big)(\rho^* \circ \Phi), \tag{8}$$

$$\partial_\tau \Phi = \tilde{b} \circ \Phi. \tag{9}$$

˜回顾一下，漂移项 b 取决于 ρ_0，因此构成了一个由初始条件参数化的函数族。原则上，必须解决这样一个问题：对于给定的终端密度$\rho(T, \cdot)$，是否存在与之对应的初始密度 ρ_0 。这是一个困难且极具非平凡性的问题。我们不直接处理这一问题，而是将机器学习作为一种突破性方法：对于每个（x, t），通过学习从这个依赖于初始条件的函数族中选取适当的值。

注 1。 正如反复强调的那样，对方程进行纯粹的确定性操作会得到

$$\begin{aligned} \partial_\tau(\rho^* \circ \Phi) &= \Big(-\frac{\sigma^2}{2}\Delta + \nabla \cdot f + S\Big)(\rho^* \circ \Phi), \\ \partial_\tau \Phi &= -f \circ \Phi, \end{aligned}$$

其中明确涉及反向拉普拉斯算子。因此，这样的偏微分方程是不适定的，在数学上没有意义。

2.3. 通过热方程解的离散拉格朗日流表示重新表述得分函数。 首先，为简单起见，我们考察由热方程生成的得分函数及其离散拉格朗日流表示。这里采用的偏微分方程分析完全是标准的。本质上，扩散项由热核表示，而时间参数 t 的阶则根据抛物缩放进行评估。 $\mathbb{R}^d$ 上的热方程为

$$\partial_t \rho(t,x) = \nu \Delta_x \rho(t,x), \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,$$

其基本解为

$$G(t,x) = \frac{1}{(4\pi\nu t)^{d/2}} \exp\Big(-\frac{|x|^2}{4\nu t}\Big),$$

这可以视为具有狄拉克δ函数初始条件的解。在考虑离散拉格朗日流时，只需关注与该狄拉克δ函数初始数据相对应的时刻 Δt的解。换言之，我们希望估计一个流体粒子在时刻 Δt的位置 $\tilde{x}$ ；该粒子在初始时刻位于位置 x 。这由以下概率密度（即热方程的解 ρ ）描述：

$$\rho(\Delta t, \tilde{x}) = \frac{1}{(4\pi\nu\Delta t)^{d/2}} \exp\Big(-\frac{|\tilde{x} - x|^2}{4\nu\Delta t}\Big).$$

该表达式可以自然地改写为离散拉格朗日流的形式，即

$$\tilde{x} = x + \sqrt{2\nu\Delta t}\,\varepsilon, \qquad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, I),$$

其中 ε 表示高斯噪声。相应地，在离散拉格朗日流中，˜速度 b表示为

$$b(x,\tilde{x}) := \frac{x-\tilde{x}}{\Delta t} = 2\nu\nabla_{\tilde{x}}\log\rho(\Delta t,\tilde{x}) = -\sqrt{\frac{2\nu}{\Delta t}}\varepsilon.$$

˜对于固定的目标点 x， $b(x,\ \tilde{x})$ 表示随时间反向、将位于 $\tilde{x}$ 的粒子在 Δt 之后拉向前一时刻最可能位置 x 的拉格朗日速度。第二个等式

$$2\nu\nabla_{\tilde{x}}\log\rho(\Delta t,\tilde{x}) = -\sqrt{\frac{2\nu}{\Delta t}}\varepsilon$$

将正向时间粒子轨迹中出现的高斯噪声，以及反向时间概率密度的最大似然梯度，解释为源自同一个高斯转移（这是从偏微分方程视角重新表述扩散模型时最重要的桥梁）。由此表达式，我们进一步得到

$$\nabla_{\tilde{x}}\cdot\tilde{b}(x,\tilde{x}) = -\frac{d}{\Delta t},$$

在连续极限 $\Delta t\to 0$ 下，该量发散至 $-\infty$ 。虽然热方程的反向时间过程在连续时间极限下是不适定的，但时间离散化使反向动力学变得明确。从这个意义上说，时间离散化不仅仅是数值近似，也是˜观察反向过程的一项必要操作。然而，如果通过取 $\Delta t\to 0$，将这一 b形式上代入拉格朗日流中，则可得到

$$\partial_\tau\Phi = \tilde{b}(x,\cdot)\circ\Phi,$$

这一定义不明确，因为在反向时间方向上的终点 x 显式地作为速度场中的变量出现。这一困难促使人们引入机器学习方法，以克服对 x 的依赖。

接下来，我们将这一系列计算推广到同时包含平流项和反应项的方程。

2.4. 含反应项的福克–普朗克方程解的离散拉格朗日流表示与得分函数表述。令 $p(t,x,y)$ 表示下述含反应项的福克–普朗克方程的基本解（为简单起见，我们考虑一维情形，但推广到高维情形是直接的）：

$$(10)\quad \begin{cases} \partial_t p(t,x,y) = -\partial_y\big(b(y)\,p(t,x,y)\big) + \dfrac{1}{2}\,\partial_y^2\big(a(y)\,p(t,x,y)\big) + S(y)p(t,x,y), \\ p(0,x,y) = \delta(y-x). \end{cases}$$

这里， x 是表示初始位置的空间参数，而未知函数 p 被视为 y的函数。在本节中，我们采用一种标准解析技术来研究抛物型方程基本解的短时行为，即**“通过弱形式对半群表示进行时间方向泰勒展开”**。这种方法证明，真实的基本解与高斯核具有相同的一阶短时间展开，

将（10）乘以测试函数 $\varphi(y)$，并关于 y分部积分，我们得到

$$\frac{d}{dt}\int p(t,x,y)\varphi(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} p(t,x,y)\left(b(y)\varphi'(y)+\frac{1}{2}a(y)\varphi''(y)+S(y)\varphi(y)\right)dy. \tag{11}$$

我们将右端出现的微分算子定义为

$$(L\varphi)(y) := b(y)\varphi'(y) + \frac{1}{2}a(y)\varphi''(y) + S(y)\varphi(y).$$

由初始条件可得

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(y-x)\,\varphi(y)\,dy = \varphi(x),$$

其中，积分按分布的意义理解。在$t=0$处对式（11）求值，可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int p(t,x,y)\varphi(y)\,dy\bigg|_{t=0} &= \int_{\mathbb{R}} \delta(y-x)\,(L\varphi)(y)\,dy \\ &= (L\varphi)(x) = b(x)\varphi'(x) + \frac{1}{2}a(x)\varphi''(x) + S(x)\varphi(x).\end{aligned}$$

因此，在 $t=0$处关于 t 作泰勒展开，可得 12

$$\int_{\mathbb{R}} p(\Delta t,x,y)\,\varphi(y)\,dy = \varphi(x) + \Delta t\Big(b(x)\varphi'(x) + \frac{1}{2}a(x)\varphi''(x) + S(x)\varphi(x)\Big) + o(\Delta t).$$

接下来，我们考虑在点 x处冻结系数后得到的常系数方程:

$$\partial_t q = -b(x)\,\partial_y q + \frac{1}{2}a(x)\,\partial_y^2 q + S(x)q, \qquad q(0,y) = \delta(y).$$

由于这是一个线性方程，标准计算表明，其基本解可显式写为

$$q(t,y) = e^{S(x)t}\frac{1}{\sqrt{2\pi a(x)t}}\exp\left(-\frac{(y-b(x)t)^2}{2a(x)t}\right).$$

因此，

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} q(\Delta t, y-x)\varphi(y)\,dy \\ =&e^{S(x)\Delta t}\int_{\mathbb{R}} \varphi\big(x+b(x)\Delta t+\sqrt{a(x)\Delta t}\,z\big)\frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dz \\ =&\varphi(x)+\Delta t\Big(b(x)\varphi'(x)+\frac{1}{2}a(x)\varphi''(x)+S(x)\varphi(x)\Big)+O(\Delta t^{3/2}).\end{aligned} \tag{13}$$

注意， $\Delta t^{1/2}$ 阶项会消失，因为 $ze^{-z^2/2}$ 是一个奇函数。这是伊藤积分与当前弱近似共有的一个关键点。现在，我们用一个收敛到狄拉克δ函数的函数序列替换测试函数 φ 。考虑到该序列与$O(\Delta t^{3/2})$项之间的竞争，我们选择该序列，使得 $\Delta t^{3/2}$ 更快地收敛到零。通过比较（12）和（13），这就说明基本解 $p(\Delta t,\ x,\ \cdot)$与高斯核 G 具有相同的一阶短时间展开。

与上一节讨论的热核情形一样，我们得到离散拉格朗日流

$$\tilde{x} = x + b(x)\,\Delta t + \sqrt{a(x)\,\Delta t}\,\varepsilon, \qquad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0,1),$$

其中 ε 再次表示高斯噪声。得分函数的改写可以按照热核的相同方式推导。为了使讨论更贴近实现，我们现在令 $a = \sigma^2$ 为常数。于是，时刻 Δt 的偏微分方程解为

$$p(\Delta t, x, \tilde{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} \exp\big(S(x)\Delta t\big) \exp\Big(-\frac{\big|\tilde{x} - x - b(x)\,\Delta t\big|^2}{2\sigma^2\Delta t}\Big) + o(\Delta t).$$

由此表示公式可得以下得分函数:

$$\nabla_{\tilde{x}} \log p(\Delta t, x, \tilde{x}) = -\frac{\tilde{x} - x - b(x)\,\Delta t}{\sigma^2\Delta t}.$$

˜因此，我们可以适当地定义以下离散版本的漂移项 b，其中明确纳入了反向时间贡献:

$$\tilde{b}(x, \tilde{x}) := \frac{x - \tilde{x}}{\Delta t} = -b(x) + \sigma^2 \nabla_{\tilde{x}} \log p(\Delta t, x, \tilde{x}).$$

注 2. 总结迄今获得的见解，黏性轴对称涡量方程的离散拉格朗日流为

$$\boxed{\begin{aligned} R_{k+1} &= \left(U_r(R_k, Z_k) - \frac{\nu}{R_k}\right)\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon^{(r)}, \\ Z_{k+1} &= U_z(R_k, Z_k)\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon^{(z)}, \end{aligned}}$$

其中 $\varepsilon^{(r)}$ 和 $\varepsilon^{(z)}$ 是相互独立的高斯随机变量。

2.5. **反向离散拉格朗日流和机器学习中出现的得分函数**。 在每个离散步骤 k，对前文推导出的得分函数进行简单的代数运算，即可得到以下递推关系:

$$x_k = x_{k+1} + \tilde{b}(x_k, x_{k+1})\,\Delta t.$$

这提供了反向时间拉格朗日流（9）的离散对应形式。然而，本研究的目标是将反向拉格朗日流表示为˜仅依赖于 x_{k+1}的闭式形式。为此，我们将 b(x_k， x_{k+1})近似为以下形式的函数

$$v(x_{k+1}, k).$$

此处， v 是一个以时间步 k 为条件的函数，实际中由神经网络表示。

注 3. 在标准扩散模型中，形如以下形式的递推关系

$$x_t = \sqrt{1-\beta_t}\,x_{t-1} + \sqrt{\beta_t}\,\varepsilon_t, \quad \beta_t \in (0,1), \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, I)$$

通常对此作出假设。定义

$$\alpha_t := 1 - \beta_t, \quad \bar{\alpha}_t := \prod_{s=1}^{t} \alpha_s,$$

直接计算（利用高斯噪声 ε_t 的独立性）可得

$$x_t = \sqrt{\bar{\alpha}_t}\, x_0 + \sqrt{1-\bar{\alpha}_t}\, \varepsilon, \qquad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, I).$$

该表达式以初始位置 x_0 和高斯噪声 ε 显式表示 x_t ，因此非常方便。然而，在当前设定中，纳维–斯托克斯方程构成了基础模型，因此该表示不再适用。

现在假设给定了 N 样本轨迹

$$\{x_k^{(n)}\}_{k=0}^{L-1}, \qquad n = 1, \dots, N,$$

这些轨迹由前向离散拉格朗日流得到。为了评估 v的近似精度，我们引入以下经验泛函:

$$\mathcal{J}[v] := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=0}^{L-1} \left| v\big(x_{k+1}^{(n)}, k\big) - \tilde{b}\big(x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}\big) \right|^2 .$$

通过最小化该泛函，我们得到

$$v^* := \arg\min_v \mathcal{J}[v],$$

相应的后向离散拉格朗日流为

$$\boxed{x_k = x_{k+1} + v^*(x_{k+1}, k)\, \Delta t}.$$

这样，利用从前向离散拉格朗日流中学习到的得分函数，构建了反向方向的生成动力学。

3. Implementation of backward-time dynamics for axisymmetric Navier–Stokes flows

本节介绍学习结果。

3.1. 超参数和评估指标设置。 我们首先介绍各种超参数设置。这里，我们使用 $\nu = 1$ 和 0.01 实现 Burgers型应变场，并使用 $a = 1$设置 $U_r = -ar, U_z = 2az$ 。时间区间$[0, T]$ 被划分为 L 步，时间步长为 $\Delta t = T/$（$L - 1$）。在当前实现中，我们设定 $T = 2$ 和 $L = 200$。流体粒子的初始位置通过尺度参数 $s > 0$ 指定，如下

$$(R_0, Z_0) = (e^{2aT} s, s),$$

并考察了 $s = 1$、2、 $\cdots$、11、12 这些情形。这样的选择确保初始时刻 R 的尺度与终止时间 Z 的尺度相匹配。在生成前向离散拉格朗日流（训练数据）时，凡是 R 在任何中间步骤变为负值的轨迹均予以舍弃。生成训练数据时，样本总数设为 $N = 10,$ 000，仅保留满足$R > 0$ 的轨迹（8,000 个训练样本和 2,000 个验证样本）。

初值重建误差采用相对平均绝对误差（MAE）进行评估，并以各分量的总位移进行归一化。例如，对于 R 分量，我们使用

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{|R_0^{(i)} - \hat{R}_0^{(i)}|}{\sum_{k=0}^{L-2} |R_{k+1}^{(i)} - R_k^{(i)}|}, \tag{14}$$

其中，$\hat{R}_0^{(i)}$ 是相应的预测值。对 Z 分量也采用相同的定义。针对每个尺度参数 s，进行了多次独立试验，并计算相对 MAE 的均值和标准差。为提高学习结果的可靠性，不断重复试验，直到 MAE 均值的相对标准误差（标准误差除以均值）降至约 6%，这大约需要运行 80 次。

3.2. **架构**。 在本研究中，我们采用了 Song 等人 [1, 2]提出的、基于连续时间随机微分方程的基于分数的生成模型框架。具体而言，我们采用了分数网络的正统实现，并采用了仅保留当前问题设定所需要素的最小架构。与基于人工智能的图像生成中所使用的、具有复杂空间结构的高维模型相比，此处所考虑的系统具有极低维结构，用于追踪二维离散拉格朗日流（R， Z）。因此，采用这种最小配置是完全合理的。

分数网络架构由一个多层感知机组成，以状态变量（R、 Z）和时间 t 作为输入。时间信息通过一种基于正弦和余弦函数的标准时间嵌入技术转换为潜在表示。随后，将这一时间嵌入表示与状态变量（R、 Z）的潜在表示拼接，并输入由多个全连接层和激活函数组成的主网络。由此得到一个在时间和空间上均连续的得分函数表示。输出对应于每个分量（R、 Z）的得分，单个网络可同时学习所有时间步 $k = 0$、.....、 $L-1$ 上的得分。

3.3. **学习结果（$\nu = 1$ 与 $\nu = 0.01$）**。 学习结果如下所示。

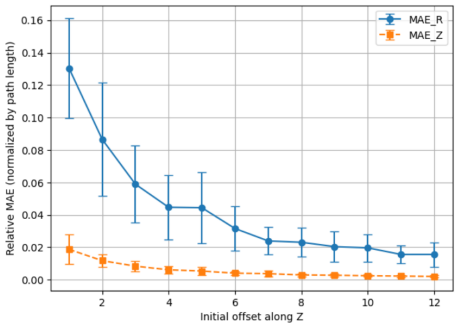


FIGURE 1. 学习结果（$\nu = 1$）

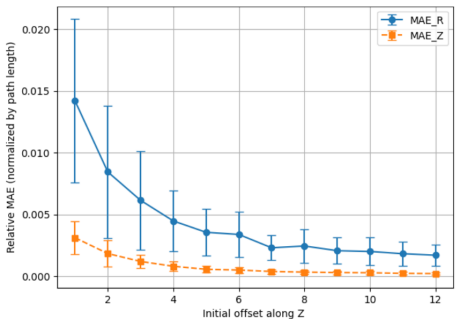


FIGURE 2. 学习结果（$\nu = 0.01$）

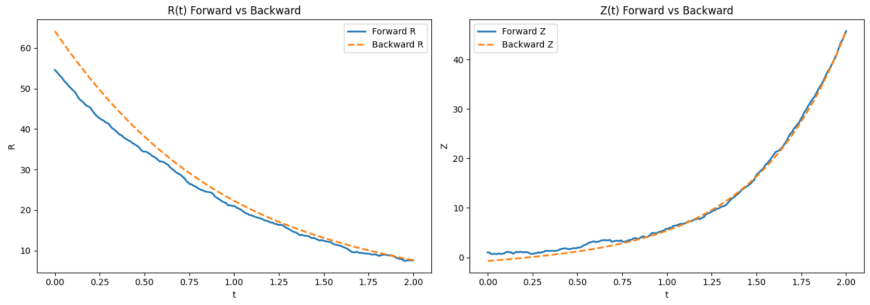


FIGURE 3. 示例（$\nu = 1,\ \ s = 1$）

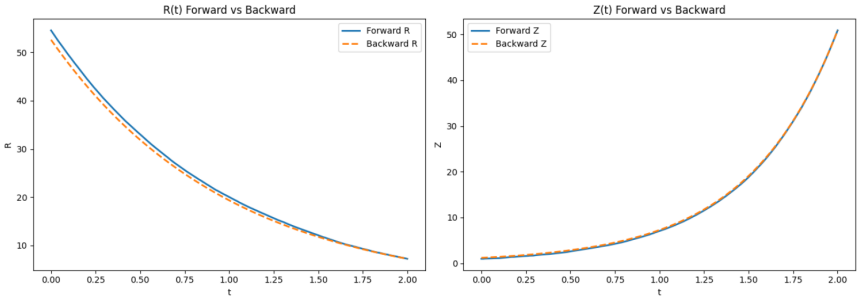


FIGURE 4. 示例（$\nu = 0.01,\ \ s = 1$）

比较图1（$\nu = 1$）和图2（$\nu = 0.01$）可见，无论 ν的值如何，图形都表现出自相似行为。在这两种情况下，R 方向上的相对平均绝对误差较大，表明随着轨迹接近轴，关于初始位置的信息显著丢失。相比之下，在Z 方向上，相对平均绝对误差总体较小且更稳定（与 R相比），表明关于初始位置的信息得到了较好的保留。

3.4.二维流动的附加实验。作为一项附加实验，我们还对如下二维流动（$a = 1$）进行了数值模拟（为方便起见，使用相同的记号 R 和 Z）：

$$\boxed{\begin{aligned} R_{k+1} &= -2aR_k\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon^{(r)}, \\ Z_{k+1} &= 2aZ_k\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon^{(z)}. \end{aligned}}$$

与三维情形相同，流体粒子的初始位置由尺度参数 $s > 0$ 指定为

$$(R_0, Z_0) = (e^{2aT}s, s),$$

并且我们考察了案例 $s = 1$、2、$\cdots$、11、12。学习结果如下所示。

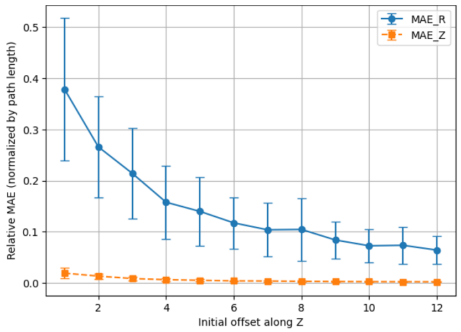


FIGURE 5. 学习结果（$\nu = 1$）

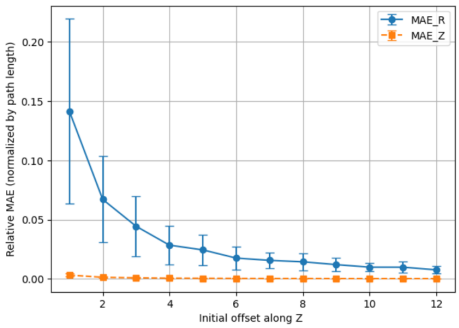


FIGURE 6. 学习结果（$\nu = 0.01$）

总体趋势与三维情形下观察到的几乎完全相同。

3.5. **结论**。这些学习结果表明，

> 在双曲应变场中，压缩方向上的动力学在不可逆地抹去有关初始位置的信息方面发挥着作用，而如此强烈的信息损失在拉伸方向上则不太可能发生。

未来的一个重要方向是将这一方法扩展到更一般的湍流中，并系统地研究：即使在未明确假设轴对称性的情况下，涡轴结构和涡旋几何排列是否仍会主导信息损失。

致谢。TY 的研究部分得到了 JSPS 科学研究资助基金 24H00186 的支持。

REFERENCES

[1] Y. Song、S. Ermon、 *Generative Modeling by Estimating Gradients of the Data Distribution*，《神经信息处理系统进展》，32（2019）11895–11907。[2] Y. Song、J. Sohl-Dickstein、D. P. Kingma、A. Kumar、S. Ermon 和 B. Poole， *Score-Based Generative Modeling through Stochastic Differential Equations*，国际学习表征会议，2021。

GRADUATE SCHOOL OF ECONOMICS, HITOTSUBASHI UNIVERSITY, 2-1 NAKA, KUNITACHI, TOKYO186-8601, JAPAN*Email address*: t.yoneda@r.hit-u.ac.jp