arXiv:2602.01080v1 [math.CO] 1 Feb 2026

避开 n-元组

Sam Adriaensen * Ferdinand Ihringer † William J. Martin ‡Ralihe R. Villagr´an ‡

2026年2月3日

摘要

设给定 $n \geq 2$ 和 $q \geq 2$。集合 $X = \mathbb{Z}_q^n$ 在汉明度量 $d(\cdot,\cdot)$下是一个直径为 n 的度量空间。我们要寻找一个最小集合 $S \subseteq X$，使其能够"避开"每个 q元n元组，即每个 $x \in X$ 到 S中至少一个元素的距离为 n。因此，我们的目标是计算图 $G(n,q)$的全支配数 $f(n,q)$，该图的顶点集为 X，边集为 $\{xy \,\|\, d(x,y) = n\}$。我们给出了该数的构造和界，并证明对于某些常数 $2 = C_2 > C_3 \geq \cdots$，有 $f(n,q) = C_q^{(1+o(1))n}$；目前我们只能估计这些常数。

关键词：汉明距离；覆盖阵；全支配。**2020年MSC学科分类代码：**
05B40, 05B15, 05B99, 05C69, 94B65.

1 Introduction

考虑一个整数 $q \geq 2$ 和环 $\mathbb{Z}_q = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$。我们将 $\mathbb{Z}_q^n$ 的元素称为q元 n元组。两个 q元 n元组 x 和 y之间的汉明距离，记作 $d(x,y)$，等于 x和 y 对应位置上的元素不同的位置数。在 [1], 中，作者对完全二部图的帽子猜测数的研究使他们证明：对于 $\mathbb{Z}_q$上任意一个至多含有 $e^{n/q}$ n个 S 的集合，都存在一个 n元组 $y \in \mathbb{Z}_q^n$，使得对于所有 $x \in S$ [1, , $d(x,y) < n$ （引理 3.3]）。我们将用另一种方式表述这一结果。若 $d(x,y) = n$，则称 $x \in \mathbb{Z}_q^n$ 回避 $y \in \mathbb{Z}_q^n$；若每个q元 n元组 y 都被某个 $x \in S$回避，则称 $S \subseteq \mathbb{Z}_q^n$ 为回避集。我们将最小回避集的大小记为

*布鲁塞尔自由大学数学与数据科学系，Pleinlaan 2, 1050 Elsene, 比利时。作者获得弗兰德斯研究基金会（FWO）提供的博士后研究奖学金12A3Y25N。sam.adriaensen@vub.be

†南方科技大学数学系，中国广东省深圳市。ihringer@sustech.edu.cn

‡伍斯特理工学院数学科学系，美国马萨诸塞州伍斯特。martin@wpi.edu, rvillagran@wpi.edu

$\mathbb{Z}_q^n$乘以 $f(n,\ q)$。因此，我们可以将 [1, 引理 3.3] 解释为 $f(n,\ q)\ > e^{n/q}$。本文将进一步考察函数 $f(n,\ q)$。

注意，如果 $q=2$，那么每个 n-元组只回避一个 n-元组，因此显然有 $f(n,\ 2)\ =2^n$，我们将重点讨论 $q>2$ 的情况。

我们还指出，如果定义图 $G(n,\ q)$，其顶点集为 $\mathbb{Z}_q^n$，且 x 与 y 相邻当且仅当 $d(x,\ y)\ =n$，那么 $\mathbb{Z}_q^n$ 中的回避集 S 与 $G(n,\ q)$ 中的全控制集完全相同；也就是说，$G(n,\ q)$ 的每个顶点在 S 中都有一个邻点。

2 The asymptotics

我们使用渐近记号 $g(n)\ =o(h(n))$ 表示 $\lim_{n\to\infty} g(n)/h(n)\ =0$。

定理1。对于每个整数 $q\ \geq\ 2$，都存在一个常数 $C_q\ =\inf_{n\geq 1}\sqrt[n]{f(n,q)}$，使得 $\overline{f(n,q)}\ =C_q^{(1+o(1))n}$。此外，序列 $(C_q)_{q\geq 2}$ 是非递增的。

证明。固定一个整数 $q\ \geq\ 2$。若 S_n 和 S_m 分别是 $\mathbb{Z}_q^n$ 和 $\mathbb{Z}_q^m$ 的最小回避集，则 $S_n\times S_m$（即由 $\mathbb{Z}_q^{n+m}$ 中的向量构成的集合，其中每个向量都由 S_n 中的任意一个向量与 S_m 中的一个向量拼接而成）是 $\mathbb{Z}_q^{n+m}$ 的回避集。显然可得 $f(n+m,q)\ \leq\ f(n,q)f(m,q)$。特别地，序列 $(\ln\ f(n,q))_{n\in\mathbb{N}}$ 是次可加的。根据 Fekete 次可加引理，$\lim_{n\to\infty}\ln f(n,q)/n$ 存在，且等于 $L_q=\inf_{n\geq 1}\ln f(n,q)/n$。因此 $\ln\ f(n,q)\ =(1+o(1))nL_q$。定义 $C_q=e^{L_q}=\inf_{n\geq 1}\sqrt[n]{f(n,q)}$。于是可得 $f(n,q)\ =C_q^{(1+o(1))n}$。

现在注意到，如果 S 是 $\mathbb{Z}_q^n$ 的回避集，那么它也是 $\mathbb{Z}_{q+1}^n$ 的回避集（这里将 $\mathbb{Z}_q$ 的元素与整数 1、……、q 对应起来，从而可以将 S 看作 $\mathbb{Z}_{q+1}^n$ 的子集）。这意味着 $f(n,\ q)$ 关于 q 单调不增，因此，$C_q\ =\inf_{n\geq 1}\sqrt[n]{f(n,\ q)}$ 关于 q 也单调不增。 □

因此，为了理解 $f(n,\ q)$ 的渐近行为，我们研究常数 C_q。对 $f(n,\ q)$ 的任何上界都会转化为对 C_q 的上界。为此，我们求出$n<q$时的 $f(n,\ q)$。

引理 2。若 $n<q$，则 $f(n,q)\ =n+1$。

证明。首先证明 $f(n,\ q)\ >n$。若 S 是 $\mathbb{Z}_q^n$ 中由 n 个顶点组成的集合，记作 x_1、……、x_n，那么我们可以构造一个向量 y，使得 $y(i)\ =x_i(i)$；显然，S 中没有任何向量能够回避它。

另一方面，如果 S 由 $n+1$ 1的标量倍数组成，则 S 是一个回避集，因为每个 n元组至多有 n 个不同的项。 □

我们得到如下的界。

命题 3。对于 $q\geq 2$，我们有 $1+\frac{1}{q-1}\leq C_q\leq\sqrt[q-1]{q}=1+\frac{\ln\ \frac{q}{q-1}}{}+o\left(\frac{1}{q}\right)$。

证明。 由于每个 q 元 n 元组都回避 $(q-1)^n$ q 元 n 元组，如果 S是 $G(n,\ q)$ 中的回避集，那么 $|S|(q-1)^n \geq q^n$，由此可得 $f(n,\ q) \geq \left(\frac{q}{q-1}\right)^n$。这意味着 $C_q \geq \frac{q}{q-1}$。

另一方面， $C_q = \inf_{n\geq 1} \sqrt[n]{f(n,q)} \leq \sqrt[q-1]{f(q-1,q)} = \sqrt[q-1]{q}$。利用指数函数的泰勒级数，我们看到 $\sqrt[q-1]{q} = e^{\ln \frac{q}{q-1}} = 1 + \ln\frac{q}{q-1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\ln \frac{q}{q-1}\right)^k = 1 + \ln\frac{q}{q-1} + o(1/q)$。

□

3 Small parameters

引理 4. 若 $q \geq 3$，则 $f(q,q) \leq 2q-1$。

证明。 设 e_i 表示 $\mathbb{Z}_q^q$ 中的标准基向量。考虑集合

$$S = \{a\mathbf{1} \mid\mid a = 1, \ldots, q-1\} \cup \{e_i \mid\mid i = 1, \ldots, q\}.$$

我们证明 S 是一个回避集。取一个 n 元组 y。假设 y 不被 S 的任何n元组 $a\mathbf{1}$ 回避。则从 1 到 $q-1$ 的所有符号都出现在 y 中。因此，符号 0 至多出现一次。若它出现在位置 i，则 y 被 e_i回避。若符号 0 不出现，则选取一个满足 $y(i) = 2$ 的位置 i。于是 y 被 e_i回避。

□

命题 5。如果 n是偶数，那么

$$f(n,3) \leq 2^{n/2} + \sum_{i=1}^{\lceil n/4 \rceil} \binom{n/2}{2i-1} 2^{(n/2)-2i+1}.$$

证明。设 n 为偶数。记 $\tilde{0} = 01, \tilde{1} = 10, \bar{0} = 00, \bar{1} = 11, \bar{2} = 22$。定义

$$S_1 = \left\{\tilde{0}, \tilde{1}\right\}^{\frac{n}{2}}, \qquad S_2 = \left\{x \in \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}^{\frac{n}{2}} \mid\mid \text{the number of } i\text{'s with } x(2i) = 2 \text{ is odd}\right\}.$$

我们验证 $S = S_1 \cup S_2$ 是 $\mathbb{Z}_3^n$的回避集。取 $\mathbb{Z}_3^n$中的一个向量 y，并将 y 视为由 $n/2$ 个长度为 2 的块组成的向量。如果 y 中出现的块都不是 $\bar{0}$ 或 $\bar{1}$的形式，那么 y可被 S_1回避。事实上， y中出现的每个块要么属于 $\{10, 12, 20, 22\}$，此时它可被 0 回避；要么属于 $\{01, 02, 21\}$，此时它可被 1 回避。因此，我们可以用 0 和 1 形式的块构造一个 n元组 $x \in S_1$ 来回避 y。

现在假设 y 有一个块的形式为 0 或 1，例如第 i 个块。接下来我们验证 S_2 回避 y。事实上，长度为 2 的每个块至多包含 2 个不同的符号，因此它会被 0、1、2 中的某个块回避。因此，我们可以构造一个由 $\bar{0}$ 块 0、1、2 组成的向量 x，使其回避 y。如果 x 中等于 2 的块的数量为偶数，那么我们可以通过如下方式改变第 i 个块来修正这一点。首先考虑 y 的第 i 个块为 $\bar{0}$ 的情况。此时， x 的第 i 个块要么是 1，此时将其改为 2；要么是 2，此时将其改为 1。这样改变后的 x 中，2 出现的次数为奇数，因此它是 S_2 中回避 y的一个元素。 y 的第 i 个块为 1 的情况完全类似。

由此可知， S是 $\mathbb{Z}_3^n$的一个回避集。接下来，我们计算其大小。显然， S_1的大小为 $2^{n/2}$。对于给定的数 i，我们可以找到 $\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$中恰有 i^- 个条目等于 2 的 $\binom{n/2}{i}\cdot 2^{n/2-i}$ 个元素。因此，$S_1\cup S_2$ 的大小正如所述。 □

由此得到关于 $f(n,3)$ 的如下上界：

n	4	6	8	10	12	14	16
$f(n,3)\ \le$	8	21	56	153	428	1221	3563

接下来，我们给出一个表格，其中包含当 $q=3$或 $q=4$ 且 $n\le 8$时，关于 $f(n,q)$ 的一些上界和下界。这些界将我们的结果与一些计算机生成的数据相结合。我们再给出一个有用的工具。

引理 6. 函数 $f(n,q)$ 关于 n 严格递增。

证明。设 S 是 $\mathbb{Z}_q^n$ 的一个最小规模回避集。考虑去掉最后一个坐标的函数 $g:\mathbb{Z}_q^n\to\mathbb{Z}_q^{n-1}$，$x_1\ \dots\ x_n\ \mapsto\ x_1\ \dots\ x_{n-1}$，并设 S' 为 S 在 g 下的像。是中的一个最小规模回避集。考虑去掉最后一个坐标的函数 : : (, ,) (, ,)，并设 为 S在 g 下的像。若 $y'\in\mathbb{Z}_q^{n-1}$，则对某个 $y\in\mathbb{Z}_q^n$ 有 $y'=g(y)$，且 S包含某个回避 y 的 n-元组 x，从而 $x'=g(x)$ 回避 y'。因此， S' 是 $\mathbb{Z}_q^{n-1}$ 中的一个回避集。我们断言 S' 不是极小回避集。反设不然。取满足 $x'=g(x)\in\mathbb{Z}_q^{n-1}$ 的 $x=(x',x_n)\in S$。则存在一个元素 $y'\in\mathbb{Z}_q^{n-1}$，它被x'唯一地回避。但此时向量 $y=(y',x_n)$ 不被 S 回避，这是一个矛盾。因此我们可以得出 $f(n-1,q)<|S'|\le|S|=f(n,q)$。 □

如果表中的条目是单个数字，那么它就是 $f(n,q)$ 的精确值。否则，该条目是一个包含 $f(n,q)$ 的区间。

n	2	3	4	5	6	7	8
$f(n,3)$	3	5	8	12	18	[28,30]	[29,54]
$f(n,4)$	3	4	7	10	[13,16]	[14,28]	[15,40]

表格告诉我们， $C_3\le\sqrt[6]{f(6,3)}=\sqrt[6]{18}<1.6\overline{189}$，而 $C_4\le\sqrt[5]{f(5,4)}=\sqrt[5]{10}<1.58\overline{49}$。表中的数值是使用 Gurobi，通过标准整数线性规划求得的。下面给出了 $f(5,3)$、$f(6,3)$ 和 $f(5,4)$ 的见证集。

$$\begin{pmatrix}0&1&1&0&2&2&0&1\\0&1&1&0&2&2&1&0\\0&1&0&1&0&1&2&2\\0&1&0&1&1&0&2&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&1&0&0&1&1&0&2&2&2&2&0&1&1&0&0&1&1&0&2\\0&1&1&0&0&1&1&0&2&2&2&2&1&0&0&1&1&0&0&1&2\\0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&1&0&2&2&2&2&0&1&0&1&2\\0&1&0&1&0&1&0&1&1&0&0&1&2&2&2&2&1&0&1&0&2\\0&1&0&0&1&0&1&1&0&1&0&1&0&1&0&1&2&2&2&2&2\\0&1&0&0&1&0&1&1&1&0&1&0&1&0&1&0&2&2&2&2&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

4 Skirting arrays

本节将回避集的概念扩展到回避数组。对于一个 n元组x 和一个子集 $T \subseteq \{1, \ldots, n\}$，我们将仅保留由 T 中元素标记的坐标位置后得到的 $|T|$元组记为 x_T。如果一个 $N \times n$ 数组 M 的元素取自 $\mathbb{Z}_q$，并且其强度为 t，则称其为回避数组，记作 SA(N; t, n, q)；若将 M 限制到 t 列所得到的每个子矩阵都回避 q元 t组，则称其满足此条件。也就是说，对于每个 t集 $T \subset \{1, \ldots, n\}$，每个$y \in \mathbb{Z}_q^t$至少有一行 x，使其与 x_T的距离达到最大值。令 SAN(t, n, q) 表示此类数组中行数 N 的最小值。这与第 VI 节 [2, 10]中的覆盖数组记法类似：强度为 t、有 N 行、~~n 列且元素取自大小为 q~~ 的字母表的覆盖阵，记作 CA(N; t, n, q)，是一种数组，其性质是：限制到任意 t 列后，所得的 $N \times t$ 数组包含每个可能的 t元组，且每个元组至少作为一行出现一次。（如果包含某个 t元组的行数为常数 λ，那么这个强度为 t 的覆盖阵实际上是一个强度为 t 的正交阵。）任意 CA(N; t, n, q) 的最小行数 N称为覆盖阵数 CAN(t, n, q)。注意，~~SAN(t, n, 2) = CAN(t, n, 2)~~。

引理 7。

$$\mathsf{SAN}(t, n, q) \leq \mathsf{CAN}(t, n, q) + 1 - (q-1)^t \ .$$

证明。令 M由 CA(N; t, n, q) 删除前 $(q-1)^t - 1$ 行后得到。若 y是任意一个 q元 n元组，且 $T \subset \{1, \ldots, n\}$ 是任意一组 t 个坐标，那么在与 y_T距离最大的 $(q-1)^t$$t$元组中，至少有一个仍作为 M某一行的限制 x_T 而保留下来。 □

命题 8。对于任意 n 和 q，任意 $1 \leq v < q$

$$f(n, q) \leq q - v + \mathsf{SAN}(n + v - q, n, v).$$

证明。令 M为一个数组，由一个 SA(N; $n+v-q, n, v$) 后接 $\{a\mathbf{1} \mid\mid a = v+1, \ldots, q\}$ 组成。若 y 是任意一个 q元 n元组，且对每个 $i > v$至少有一个分量等于 i，那么 y中至多有 $n+v-q$个分量属于 $\{1, \ldots, v\}$，并且 SA($n + v - q, n, v$) 的某一行避开 y。 □

推论 9. $f(q,\ q) \leq$覆盖阵列$(t,\ q,\ v) - (q-1)^t$。

覆盖阵列数已得到广泛研究 [3]。然而，成为覆盖阵的要求远比我们所需的严格得多，即使考虑到我们可以将元组数量减少 $(q-1)^t - 1$。在表 1 中，我们给出一个 SA$(19; 4,\ 20,\ \mathbf{4})$。

因此，根据推论 9，$f(20,\ 20) \leq 35$。

$$A = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 1 & 1 & 4 & 1 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\
1 & 3 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 2 & 4 & 4 & 2 & 1 & 2 & 4 & 3 \\
1 & 3 & 4 & 4 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 & 4 & 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 3 & 4 & 4 & 1 & 4 & 4 & 2 & 3 & 4 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 4 & 2 & 1 \\
2 & 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 4 & 3 & 3 & 3 & 2 \\
2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 4 & 4 & 1 & 4 & 4 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 & 2 & 3 \\
2 & 3 & 1 & 4 & 2 & 1 & 4 & 4 & 3 & 1 & 2 & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\
2 & 3 & 3 & 4 & 3 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 3 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\
2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 4 & 1 \\
3 & 2 & 1 & 1 & 4 & 3 & 4 & 3 & 3 & 3 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 \\
3 & 2 & 1 & 4 & 3 & 3 & 1 & 2 & 4 & 3 & 3 & 4 & 1 & 4 & 3 & 2 & 4 & 4 & 3 & 4 \\
3 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 3 & 1 & 4 & 1 & 1 & 3 \\
3 & 3 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 & 4 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 4 & 3 & 2 & 2 & 1 \\
3 & 4 & 3 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 3 & 1 & 4 & 3 & 3 & 1 \\
4 & 1 & 1 & 3 & 1 & 4 & 2 & 2 & 4 & 2 & 3 & 2 & 4 & 4 & 4 & 1 & 4 & 2 & 4 & 1 \\
4 & 1 & 2 & 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 2 & 4 & 2 & 4 \\
4 & 2 & 2 & 2 & 4 & 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 4 & 4 & 3 & 3 & 4 & 2 \\
4 & 4 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 & 4 & 2 & 4 & 4 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2 & 2 & 3
\end{bmatrix}$$

表1：一个 SA(19; 4，20，4)。

5 Conclusion

本文提出了回避集的概念。未来仍有若干问题有待研究。

1. 求出常数 C_q的精确值，或者至少改进命题 3 中给出的界。 2. 找到小型回避数组的构造，并给出 SAN(t, n, q) 的界。 3. 在引理 6 中，我们证明了 $f(n, q) > f(n-1, q)$。在证明中，我们利用了这样一个事实：如果取 $\mathbb{Z}_q^n$ 中的一个回避集，并删除任意一个坐标，最终会得到 $\mathbb{Z}_q^{n-1}$ 中的一个回避集，且其中没有任何元素是必不可少的，也就是说，删除任意一个元素后，剩下的仍然是一个回避集。我们预期这一论证可以导出 $f(n, q) - f(n-1, q)$ 更好的下界。

References

[1] N. Alon 等，《图的帽子猜测数》，《组合论杂志 B 辑》144（2020），119–149。

[2] C. J. Colbourn 和 J. H.Dinitz, 《组合设计手册》（第2版）, Chapman & Hall/CRC, 2007。

[3]Colbourn 覆盖阵数表 https://github.com/ugroempi/CAs/blob/main/ColbournTables.md