通过赋值构造的无挠层最优代数切锥

YOHEI HADA

arXiv:2602.01112v1 [math.AG] 1 Feb 2026

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 4 2.1. 渐近黎曼-罗赫定理 4 2.2. 斜率稳定性 11 3. 通过赋值解决延拓问题 15 3.1. 延拓 15 3.2. Hecke 变换 16 3.3. 最优赋值函数的唯一性 18 4. 例子 20 4.1. 沿单项式赋值的仿射平面上的最优代数切锥 21 4.2. 奇点上的最优代数切锥 21 致谢 22 参考文献 23

Abstract. 我们建立了一个赋值论框架，用于研究代数簇上无挠层的切锥。为分析这些对象，我们针对有限生成的 $\mathbb{R}$–分次代数上的有限生成 $\mathbb{R}_{\geq 0}$-分次模，引入斜率稳定性理论，其中包括 Harder–Narasimhan 过滤。利用该理论，我们证明，对于准正则赋值，存在一个由规范方式确定的无挠层切锥（除预期的等价歧义外）；这推广了 Chen–Sun [3]。

1. Introduction

在本文中，我们引入代数闭域 $\Bbbk$ 上有限生成 $\mathbb{R}_{\geq 0}$-分次代数上的有限生成 $\mathbb{R}$-分次模的斜率稳定性。随后，我们将其应用于证明：沿代数簇上以闭点为中心的准正则赋值，无挠层的最优代数切锥（由我们定义）的存在性与唯一性。这一结果将 Chen–Sun [3] 所引入的最优代数切锥概念远远推广到爆破赋值之外，即 ord_E，其中 E 为光滑点处爆破的例外除子，而这正是他们工作中所处理的情形。

我们的工作以 Chen–Sun [3],[4],[5],[6] 关于 Kähler 流形上配备容许HYM联络的反身层局部结构的一系列深刻结果为出发点

。容许HYM联络的概念由 Bando– Siu[2] 引入：

定义 1.1. 设 (X,ω) 是一个凯勒流形，且 E 是 X 上的一个自反层。设 $S\subset X$ 是 E 的非局部自由点集。

(i) E 上的一个**容许度量** 是 $E|_{X-S}$ 上的度量 h，满足：对于任意 $x\in X$，存在 x 的一个开邻域 U，使得：

- 曲率张量 F_h 在 $U-S$ 上平方可积。
- 曲率张量 $\sqrt{-1}\Lambda F_h$ 的迹在 $U-S$ 上有界。(ii) E 上的容许度量称为**容许埃尔米特–爱因斯坦度量**（简称容许埃尔米特-爱因斯坦度量），如果存在常数 $\lambda\in\mathbb{R}$，使得 $\sqrt{-1}\Lambda F_h=\lambda\cdot I_E$，其中 I_E 是 E 上的恒等态射。(iii) 容许埃尔米特-爱因斯坦度量的陈联络称为**容许埃尔米特–杨–米尔斯联络**（简称容许HYM联络）。

对于紧致凯勒流形上的反身层，容许度量总是存在的。Bando–Siu[2] 证明了，反身层的斜率多项稳定性等价于容许埃尔米特-爱因斯坦度量的存在（小林-希钦对应）。

在 Chen-Sun 的工作中，他们引入了容许 HYM 联络的解析切锥这一概念。设 E 是 $B=B(1)=\{z\in\mathbb{C}^n\mid\|z\|<1\}$ 上一个仅在点 0 处有奇点的反身层，且 A 是 E 的容许 HYM 联络。对于 $\lambda>0$，我们有 $\lambda\colon B(\lambda^{-1})\to B; z\mapsto\lambda\cdot z$ 并且 $\lambda^*A=:A_\lambda$。根据乌伦贝克紧性，存在一个子列 (λ_i) 和一列规范变换 (g_i)，使得 $\lambda_i\to 0$，且 $g_i^*A_{\lambda_i}$ 收敛到 $(\mathbb{C}^n-\{0\})-\Sigma$ 上的某个 HYM 联络，其中 Σ 是 $\mathbb{C}^n-\{0\}$ 的解析子集，在 $\mathbb{C}^*$ 作用下保持不变，并且具有局部有限的实余维 4 豪斯多夫测度。根据 Bando[1], 的可去奇点定理，存在反身层 E_∞ 和容许 HYM 联络 A_∞，定义在 $(\mathbb{C}^n,\omega_0)$ 上，其中 ω_0 是 $\mathbb{C}^n$ 上的欧氏度量。进一步取子列后，A_λ 的杨-米尔斯能量收敛到一个形如 $|F_{A_\infty}|^2d\mathrm{vol}_{\omega_0}+8\pi^2\nu$ 的拉东测度，其中 ν 支持于 $\Sigma\cup\{0\}$ 上。ν 在 $\mathbb{C}^n$ 上诱导出一个 $\mathbb{C}^*$- 等变闭链，它可写成 $\mathbb{P}^{n-1}$ 上余维 2 闭链 Σ_b 的锥。

ˆ另一方面，设 E 是 $B=B(1)$ 上的一个自反层，且 $\pi\colon B\to B$ 是在 0 处的一个ˆˆ爆破。Chen–Sun [3] 将 E 的延拓定义为 B 上的一个自反层 E，它在 $B-D$ 上与 $\pi^*E|_{\hat{B}-D}$ 同构，其中 $D\subset B$ 是例外除子，并将 $E|_D$ 称为代数切锥。此外，他们将所有延拓上的泛函 Φ 定义为ˆˆˆ $\Phi(E)=\mu_{\max}(E|_D)-\mu_{\min}(E|_D)$，其中 μ 是极化簇（D, $N_{D/\hat{B}}$）上层的斜率。Chen–Sun [3] 证明存在一个延拓ˆˆE，使得 $\Phi(E)\in[0,1)$，称为最优延拓；并且，将最优延拓的 HNF 分次层 $\mathrm{gr}^{HNF}(\hat{}E|_D)$ 拉回到 $\mathbb{P}^{n-1}\cong D$ 的锥上后，不依赖于最优延拓的选择。

此外，Chen–Sun [6] 证明，E_∞ 实际上是将 D 上的 Harder–Narasimhan 和 Jordan–H¨older 滤过的分次层拉回到锥上所得层的自反包

（或 Harder–Narasimhan–Seshadri 滤过）$\mathrm{gr}^{HNS}(\hat{}E|_D)$，它是最优扩张的，并且 Σ_b 是由上述层的自反包的余核所诱导的循环。

本文旨在将 Chen–Sun 的代数切锥理论拓展到更广泛的赋值论框架中。

对于域 k 上有限生成整环 R 的任意有限生成赋值 $v\colon R \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$，我们可以关联一个多重分次的 $\mathbb{G}_m^r$-等变退化 $\pi\colon \mathfrak{X} \to T$，其中 T 是维数为 $\dim(T) = r$ 的环面簇，而 r 是 v 的秩。令 $M(v) \subset \mathbb{R}$ 为由子半群 $\Gamma := v(R - \{0\}) \subset \mathbb{R}$ 生成的加法子群。作为阿贝尔群，$M(v)$ 同构于 $\mathbb{Z}^r$。设 $M(v)_{\mathbb{R}} = M(v) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$，且 $N(v) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M(v), \mathbb{Z})$。令 $\sigma \subset N(v)_{\mathbb{R}} := N(v) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 为由下式定义的锥

$$\sigma = \{\phi \in N(v)_{\mathbb{R}} \mid \langle \phi, \gamma \rangle \geq 0, \forall \gamma \in \Gamma\}.$$

那么，由 $\sigma \subset N(v)$ 关联的仿射环面簇 $T(\sigma)$ 是 $\mathrm{Spec}(\Bbbk[\sigma^\vee \cap M(v)])$。注意，$\sigma^\vee \cap M(v)$ 是子半群 $\Gamma \subset M(v)$ 的饱和化，即 $\gamma \in \sigma^\vee \cap M(v)$ 当且仅当 $\gamma \in M(v)$ 且存在某个 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得 $k\gamma \in \Gamma$。因此，$\Gamma^s := \sigma^\vee \cap M(v)$ 可视为 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 的子半群。令 $\mathcal{R}$ 为一个 $\Bbbk[\Gamma^s]$- 代数，其定义如下:

$$\mathcal{R} := \bigoplus_{\gamma \in M(v)} \mathfrak{a}_\gamma(v) t^{-\gamma},$$

其中 $\mathfrak{a}_\gamma(v) := \{f \in R \mid v(f) \geq \gamma\}$。那么，$\mathcal{R}$ 是有限生成的 $\Bbbk[\Gamma^s]$-代数，因此我们有

$$\pi : \mathfrak{X} := \mathrm{Spec}(\mathcal{R}) \to T(\sigma).$$

现在，$\mathfrak{X}$ 带有自然的 $(\mathbb{G}_m)^r$-作用，π 是 $(\mathbb{G}_m)^r$-等变的，而将 π 限制到 $\pi^{-1}((\mathbb{G}_m)^r)$ 后，与 $\mathrm{Pr}_2 : \mathrm{Spec}(R) \times (\mathbb{G}_m)^r \to (\mathbb{G}_m)^r$ $(\mathbb{G}_m)^r$-等变同构。注意，对于 $w \in N(v) \cap \sigma$，w 通过定义下式确定一个族 $\pi_w\colon \mathfrak{X}_w \to \mathbb{A}^1$

$$\mathfrak{X}_w = \mathrm{Spec}\left(\bigoplus_{\gamma \in \Gamma^s} \mathfrak{a}_s(v) t^{-w(s)} \right) \to \mathbb{A}^1_t.$$

在 $N(v)_{\mathbb{R}}$ 中存在由包含映射 $M(v) \to \mathbb{R}$ 定义的典范元 ξ。该向量 ξ 称为 v 的 **Reeb 向量**。此外还应注意，对 $(\pi\colon \mathfrak{X} \to T(\sigma), \xi)$ 完全决定了 v。

从这一视角出发，我们考虑沿以闭点 $x \in X$ 为中心的有限生成赋值，对 $X = \mathrm{Spec}(R)$ 上无挠层的退化。对于 X 上的无挠层 $E = M^\sim$，我们可以通过自然同构 $\mathfrak{X}|_{(\mathbb{G}_m)^r} \cong X \times (\mathbb{G}_m)^r$ 与第一投影的复合，将 E 拉回到 $\mathfrak{X}|_{(\mathbb{G}_m)^r}$。我们将沿 v 的 E 退化定义为该层到 $\mathfrak{X}$ 上无挠层的 $(\mathbb{G}_m)^r$- 等变延拓。此定义与 E 在 [3] 中的延拓定义一致。根据 $(\mathbb{G}_m)^r$-作用的权分解，它对应于定义 3.1 中定义在 M 上的几何 v-赋值。

然而，由于我们沿除子延拓模，延拓并不唯一。因此，我们有一个问题：对于给定的模，沿有限生成赋值是否存在规范延拓?

对于光滑点处的爆破赋值情形，上述 Chen–Sun [3]提出的最优延拓 [6]回答了这个问题，并表明它实际上对应于可容许 HYM 联络重缩放后的极限。本文将最优延拓的概念推广到以仿射簇上闭点为中心的准正则赋值，并证明存在唯一的如下形式的最优延拓（见 3.12）：

定理 1.2。设 R 是代数闭域 $\Bbbk$ 上的仿射整环，且$v \in \mathrm{Val}_{x,X}$ 是以闭点 $x \in X :=\mathrm{Spec}(R)$为中心、指数为 δ的准正则赋值，即 $v(K(R)^\times) = \delta \cdot \mathbb{Z}$。对于任意无挠 R–模 M，存在一个ˆ层 E，定义在 $\mathfrak{X} = \mathrm{Spec}(\mathrm{Rees}_v(R))$ 上，并且 $M^\sim$ 在 $\mathrm{Spec}(R)$ $\mathbb{G}_m$上等变延拓，使得

$$\Phi(\hat{E}|_{\mathfrak{X}_0}) := \mu_{\max}(\hat{E}|_{\mathfrak{X}_0}) - \mu_{\min}(\hat{E}|_{\mathfrak{X}_0}) < \delta.$$

ˆ此外，满足上述不等式的 $E|_{\mathfrak{X}_0}$ 的 ***Harder–Narasimhan*** 滤过的分次模是唯一的，唯一性仅差每个直和项的分次变换；其中，分次模的 ***Harder-Narasimhan*** 滤过定义于 ***2.14***，$\mu_{\max}$ 和 $\mu_{\min}$ 分别定义为 M_1 和 M/M_{l-1} 的斜率（定义见 ***2.12***），$(M_i)_{i=1}^l$ 是 M 的 ***Harder- Narasimhan*** 滤过，而对应于$\mathbb{G}_m$-等变ˆ层 $E|_{\mathfrak{X}_0}$ 的分次模。

本文安排如下。第 2 节中，我们证明有限生成 $\mathbb{R}$-分次模在有限生成$\mathbb{R}_{\geq 0}$-分次代数上的渐近 Riemann– Roch 型定理（其中代数定义在$\Bbbk$ 上），并引入这些模的稳定性概念。第 3 节中，我们定义 v-赋值的概念，该概念对应于（并推广了）Chen–Sun [3], 中的延拓概念，并证明主定理。第 4 节中，我们给出一个超出 Chen–Sun 原有框架的具体例子。

本文中，我们固定一个基域 $\Bbbk$，除非另有说明，所有代数、概形和态射均定义在 $\Bbbk$ 上。此外，我们假设 $\Bbbk$ 是代数闭的。

2. Preliminaries

设 $\Gamma \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是一个有限生成子半群，$R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ 是一个有限生成的分次整环，且 $R_0 = \Bbbk$。设 $M = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{R}} M_\lambda$ 是一个有限生成的 $\mathbb{R}$-分次 R-模。本节旨在建立 M 的稳定性概念；当 $\Gamma = \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\Lambda = \mathbb{Z}$时，该概念等价于 μ-稳定性。

在此之前，我们先定义一些记号：

定义 2.1. 设 R, M 如上。对于 $\lambda \in \mathbb{R}$，定义新的分次 R-模$M(\lambda)$为 $M(\lambda)_t = M_{\lambda+t}$。

2.1. **渐近黎曼-罗赫定理**。在本小节中，我们为所研究的情形建立一个黎曼-罗赫型公式。

定理 2.2 (黎曼-罗赫)。 设 $R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ 是一个定义在$\Bbbk$上的 n 维有限生成整环，且 $M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ 是一个有限生成分次 R-模。存在某个常数 $a_n, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ ，满足以下性质：

$$\dim(M_{\leq x}) = \frac{a_n(M)}{n!}x^n + O(x^{n-1})$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^n}\int_1^T \left(\dim(M_{\leq x}) - \frac{a_n(M)}{n!}x^n - \frac{a_{n-1}(M)}{(n-1)!}x^{n-1}\right) dx = 0,$$

其中 $M_{\leq x} := \bigoplus_{\lambda\leq x} M_\lambda$。此外， $a_n(M) = 秩(M)a_n(R)$。

首先，我们准备一些基本引理。

引理 2.3. 设 r 为 M的秩。则存在 λ_1，……， $\lambda_r \in \Lambda$ 以及一个单射

$$\bigoplus_{i=1}^{r} R(-\lambda_i) \to M$$

其余核为挠模。

证明. 取 M的一个齐次生成元 $\{m_1, \ldots, m_N\}$。则 $K(R)$-向量空间 $M \otimes_R K(R)$由 $\{m_i \otimes 1\}_{i=1}^N$张成。因此存在某个 i_1，……， $i_r \in \{1, \ldots, N\}$ 使得 $\{m_{i_1} \otimes 1, \ldots, m_{i_r} \otimes 1\}$ 是 $M \otimes_R K(R)$ 的基。设 $\lambda_i := \deg(m_i)$。于是我们得到满足所需性质的单射。□

引理 2.4. 设 $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{R}_{>0}$ 和 $R = \Bbbk[x_1^{(\gamma_1)}, \ldots, x^{(\gamma_n)}{}_n\ ]$ 为多项式代数，其中 $\deg(x_i) = \gamma_i$。则

$$\dim(R_{\leq x}) = \frac{1}{n!\prod_{i=1}^n \gamma_i}x^n + O(x^{n-1})$$

证明。我们对 n 使用归纳法证明这一点。当 $n = 1$ 时，

$$\dim(R_{\leq x}) = \lfloor\frac{x}{\gamma_1}\rfloor + 1.$$

因此这显然成立。假设（$n-1$）情形已得证。那么我们有

$$\begin{aligned}
\dim(R_{\leq x}) =& \#\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \mid \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i \leq x\} \\
=& \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{x}{\gamma_n}\rfloor} \dim(\Bbbk[x_1^{(\gamma_1)}, \ldots, x_{n-1}^{(\gamma_n)}]_{\leq x-\gamma_n k}) \\
=& \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{x}{\gamma_n}\rfloor} \frac{(x-\gamma_n k)^{n-1}}{(n-1)!\gamma_1\ldots\gamma_{n-1}} + O(x^{n-1}) \\
=& \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{x}{\gamma_n}\rfloor} \frac{\left\{\gamma_n k + (x - \gamma_n\lfloor\frac{x}{\gamma_n}\rfloor)\right\}^{n-1}}{(n-1)!\gamma_1\ldots\gamma_{n-1}} + O(x^{n-1})
\end{aligned}$$

$$=\frac{x^n}{n!\gamma_1\dots\gamma_n}+O(x^{n-1})$$

□

命题 2.5. 设 $n:=\dim(R)$。那么，对于任意有限生成的 $\mathbb{R}$ 分次模M，存在某个常数 $a_n(M)\geq 0$ 使得

$$\dim(M_{\leq x})=\frac{a_n(M)}{n!}x^n+O(x^{n-1}).$$

此外， $a_n(M)=$秩$(M)a_n(R)$。

证明。 设 (α_n) 表示满足 $R=M$、$\dim(R)=n$ 情形的命题，(β_n) 表示满足 $\dim(R)=n$ 的命题。(α_0) 和 (β_0) 显然成立。

步骤 1 首先，我们证明 $(\alpha_n)\wedge(\beta_{n-1})$ 蕴含 (β_n)。假设 (α_n) 和 (β_{n-1}) 已得证，且 $\dim(R)=n$。取一个正合序列

$$0\to\bigoplus_{i=1}^{r}R(-\lambda_i)\to M\to Q\to 0$$

如引理 2.3 所示。于是 Q 的支集包含在 $\mathrm{Spec}(R)$ 的余维为 ≥ 1 的子概形中。假设 (β_{n-1})，对 Q 的关联素理想个数使用归纳法，我们可以证明 $\dim(Q_{\leq x})=O(x^{n-1})$。事实上，若 $\mathrm{Ass}(Q)=\{P\}$，则 Q 是 P 主初等的，并且有 Jordan-Hölder 序列 $0=Q_0\subset Q_1\subset\cdots\subset Q_l$，其中 $l=\mathrm{length}(Q)$。每个商模 Q_i/Q_{i-1} 都同构于 $(R/P)(\lambda_i)$，作为分次 (R/P)-模。因此，由假设 (β_{n-1}) 可得

$$\dim(Q_{\leq x})=\sum_i\dim(Q_i/Q_{i-1})_{\leq x}=O(x^{n-1}).$$

此外，通过这一论证我们得到

$$\dim(Q_{\leq x})=\left(\sum_P\frac{\mathrm{length}(H^0_P(Q))a_{n-1}(R/P)}{(n-1)!}\right)x^{n-1}+O(x^{n-2}),$$

其中求和遍历 Q 的所有满足 $\mathrm{ht}(P)=1$ 的关联素理想。因此,

$$\dim(M_{\leq x})=\sum_{i=1}^{r}\dim(R_{\leq x-\lambda_i})=\frac{\mathrm{rank}(M)a_n(R)}{n!}x^n+O(x^{n-1}).$$

步骤 2 其次，我们证明 (β_{n-1}) 蕴含 (α_n)。根据分次代数的诺特正规化定理，我们有某个分次 $\Bbbk$-代数$S:=k[x_1^{(\gamma_i)},\dots,x^{(\gamma_n)}{}_n\ ]\subset R$的包含，使得 R是有限生成的分次 S-模。因此，由引理 2.3，我们得到正合序列

$$0\to\bigoplus_{i=1}^{r}S(-\gamma_i)\to R\to Q\to 0$$

其中各项都是分次 S-模，且 Q是一个挠 S-模。按照步骤 1 中的论证可得

$$\dim(Q_{\leq x}) = O(x^{n-1}).$$

因此，利用引理 2.4，可得

$$\dim(R_{\leq x}) = \frac{r}{n!\gamma_1 \dots \gamma_n} x^n + O(x^{n-1}).$$

□

在我们的设定中，可以用自然的方式为 R 赋予一个赋值 v ，即 $v(\sum_\gamma f_\gamma) = \min\{\gamma \in \Gamma \mid f_\gamma \neq 0\}$，或者 $v(f) = \infty$ if $f = 0$。那么， $a_n(R)$ 无非就是 $\mathrm{vol}(v)$。

定义 2.6. 我们称 $a_n(R)$ 为分次代数 R 的**体积**，有时也将其记作 $\mathrm{vol}(R)$。

现在，我们可以证明定理 2.2 的第一步。

定理 2.7. 设 $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}_{>0}$，且 $S = \Bbbk[x_1^{(\gamma_1)}, \dots, x^{(\gamma_n)}{}_n]$。那么我们有

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^n} \int_0^T \left(\dim(S_{\leq x}) - \frac{x^n}{n!\gamma_1 \dots \gamma_n} - \frac{(\sum_{i=1}^n \gamma_i) x^{n-1}}{2(n-1)! \prod_{i=1}^n \gamma_i} \right) dx = 0$$

证明。 我们通过对 n 进行归纳法来证明此定理。若 $n = 1$，则有

$$\dim(S_{\leq x}) - \frac{x}{\gamma_1} = 1 - \left\{ \frac{x}{\gamma_1} \right\},$$

其中 $\{\lambda\}$ 是 λ 的小数部分。因此，

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\dim(S_{\leq x}) - \frac{x}{\gamma_1} \right) dx =& \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{T}{\gamma_1} \rfloor - 1} \int_{\gamma_1 k}^{\gamma_1 (k+1)} \left(k + 1 - \frac{x}{\gamma_1} \right) dx + o(1) \\ =& \frac{1}{T} \frac{\gamma_1}{2} \cdot \lfloor \frac{T}{\gamma_1} \rfloor + o(1) \\ \to& \frac{1}{2} \qquad (T \to \infty) \end{aligned}$$

假设该命题已对 $(n-1)$ 维 S 得证。令 $S' = \Bbbk[x_1^{(\gamma_1)}, \dots, x^{(\gamma_{n-1})}{}_{n-1}] \subset S$ 为由 $x_1, \dots, x_{n-1}$ 生成的 S 的分次子代数。于是我们有

$$\dim(S_{\leq x}) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x}{\gamma_n} \rfloor} \dim(S'_{\leq x - \lambda_n k}).$$

根据归纳假设，

$$\begin{aligned}\dim(S_{\le x})-\frac{x^n}{n!\gamma_1\dots\gamma_n}=&\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{x}{\gamma_n}\rfloor}\left(\dim(S'_{\le x-\lambda_n k})-\frac{(x-\gamma_n k)^{n-1}}{(n-1)!\gamma_1\dots\gamma_{n-1}}\right)\\&+\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{x}{\gamma_n}\rfloor}\frac{(x-\gamma_n k)^{n-1}}{(n-1)!\gamma_1\dots\gamma_{n-1}}-\frac{x^n}{n!\gamma_1\dots\gamma_n}\\=&\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{x}{\gamma_n}\rfloor}\left(\frac{(\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i)(x-\gamma_n k)^{n-2}}{2(n-2)!\gamma_1\dots\gamma_{n-1}}+R(x-\gamma_n k)\right)\\&+\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{x}{\gamma_n}\rfloor}\frac{(x-\gamma_n k)^{n-1}}{(n-1)!\gamma_1\dots\gamma_{n-1}}-\frac{x^n}{n!\gamma_1\dots\gamma_n}\\=&\frac{(\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i)x^{n-1}}{2(n-1)!\gamma_1\dots\gamma_n}+\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{x}{\gamma_n}\rfloor}R(x-\gamma_n k)\\&+\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{x}{\gamma_n}\rfloor}\frac{(x-\gamma_n k)^{n-1}}{(n-1)!\gamma_1\dots\gamma_{n-1}}-\frac{x^n}{n!\gamma_1\dots\gamma_n}+O(x^{n-2}),\end{aligned}$$

其中，函数 $R(x)$ 满足以下性质：

(i) $R(x)=O(x^{n-2})$
(ii) $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^{n-1}}\int_0^T R(x)dx=0.$

根据欧拉-麦克劳林求和公式，我们有

$$\int_0^{\frac{x}{\gamma_n}}\left(t-\lfloor t\rfloor-\frac{1}{2}\right)\frac{d}{dt}(x-\gamma_n t)^{n-1}dt=\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{x}{\gamma_n}\rfloor-1}(x-\gamma_n k)^{n-1}+\frac{1}{2}x^{n-1}-\frac{x^n}{n\gamma_n}.$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x^n}\int_0^{\frac{x}{\gamma_n}}\left(t-\lfloor t\rfloor-\frac{1}{2}\right)\frac{d}{dt}(x-\gamma_n t)^{n-1}dt\\=&-\frac{(n-1)\gamma_n}{x^n}\int_0^{\frac{x}{\gamma_n}}\left(t-\lfloor t\rfloor-\frac{1}{2}\right)(x-\gamma_n t)^{n-2}dt\\=&-(n-1)\int_0^1\left(\frac{xu}{\gamma_n}-\left\lfloor\frac{xu}{\gamma_n}\right\rfloor-\frac{1}{2}\right)u^{n-2}du\\\to&\ 0\qquad(x\to\infty).\end{aligned}$$

我们在最后一行用到了黎曼-勒贝格引理。因此，可以写成

$$\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{x}{\gamma_n}\rfloor}\frac{(x-\gamma_n k)^{n-1}}{(n-1)!\gamma_1\dots\gamma_{n-1}}-\frac{x^n}{n!\gamma_1\dots\gamma_n}=\frac{x^{n-1}}{2(n-1)!\gamma_1\dots\gamma_{n-1}}+r(x),$$

其中 $r(x) = O(x^{n-1})$，且

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^n} \int_0^T r(x)dx = 0.$$

因此，我们得到

$$\dim(S_{\leq x}) - \frac{x^n}{n!\gamma_1 \dots \gamma_n} = \frac{(\sum_{i=1}^n \gamma_i)x^{n-1}}{2(n-1)!\gamma_1 \dots \gamma_n} + r(x) + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x}{\gamma_n} \rfloor} R(x - \gamma_n k) + O(x^{n-2})$$

最后，我们需要估计和 $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x}{\gamma_n} \rfloor} R(x - \gamma_n k)$。

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{T^n} \int_0^T \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x}{\gamma_n} \rfloor} R(x - \gamma_n k)dx \right| &= \left| \frac{1}{T^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x}{\gamma_n} \rfloor} \int_{\gamma_n k}^T R(x - \gamma_n k)dx \right| \\
&= \left| \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x}{\gamma_n} \rfloor} \frac{1}{T^{n-1}} \int_0^{T-\gamma_n k} R(x)dx \right| \\
&= \left| \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x}{\gamma_n} \rfloor} \left(1 - \frac{\gamma_n k}{T}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{(T - \gamma_n k)^{n-1}} \int_0^{T-\gamma_n k} R(x)dx \right|
\end{aligned}$$

由于 $R(x) = O(x^{n-2})$，积分 $|\frac{1}{T^{n-1}} \int_0^T R(x)dx|$ 由某个常数 $C > 0$ 所界。取任意一个 $\epsilon > 0$，则存在某个 $\delta > 0$ 使得

$$\left| \frac{1}{T^{n-1}} \int_0^T R(x)dx \right| < \epsilon$$

对任意 $T > \delta$ 均成立。因此，对于 $T \gg 0$，我们得到

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{T^n} \int_0^T \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x}{\gamma_n} \rfloor} R(x - \gamma_n k)dx \right| &\leq \frac{C}{T} \sum_{\frac{T-\delta}{\gamma_n} < k \leq \frac{T}{\gamma_n}} \left(1 - \frac{\gamma_n k}{T}\right)^{n-1} + \frac{\epsilon}{\gamma_n} \cdot \left(1 - \frac{\delta}{T}\right) \\
&\to \frac{\epsilon}{\gamma_n} \qquad (T \to \infty)
\end{aligned}$$

现在，$\epsilon > 0$ 是任意的。因此，我们得到了所需的推论。 □

注记 2.8。 上述论证表明，即使权重 γ_i 是无理数，平均过程也会自然消除计数函数的振荡部分。特别是，$\dim(S_{\leq x})$ 通常既不是多项式，也不是关于 x 的准多项式，但平均系数 a_n 和 a_{n-1} 仍然定义良好，并且随分次权重 (γ_i) 连续变化。这一观察使我们能够将渐近黎曼–罗赫公式推广到有理情形之外；更具概念性地说，它表明 Ces`aro 平均为一般有限生成的 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 分次代数的渐近增长提供了一种规范的正则化。另请注意，

$$a_{n-1}(S) = \frac{1}{2} \operatorname{vol}(v) A(v),$$

其中 v 是分次代数 S的诱导赋值。

定理 *2.2* 的证明。 根据诺特正规化，只需证明情形 $R = \Bbbk[x_1^{(\gamma_1)}, \dots, x^{(\gamma_n)_n}]$. 令

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{r} R(-\lambda_i) \to M \to Q \to 0$$

如引理 2.3 中所述。于是我们有

$$\begin{aligned}\dim(M_{\leq x}) =& \sum_{i=1}^{r} \dim(R_{\leq x-\lambda_i}) + \dim(Q_{\leq x}) \\ =& \frac{\operatorname{rank}(M) a_n(R)}{n!} x^n - \frac{(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i) a_n(R) - \operatorname{rank}(M) a_{n-1}(R)}{(n-1)!} x^{n-1} \\ &+ \left(\sum_P \frac{\operatorname{length}(H^0_P(Q)) a_{n-1}(R/P)}{(n-1)!} \right) x^{n-1} + r(x)\end{aligned}$$

其中第三项中的求和遍及 Q的所有高度 1 关联素理想。

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^n} \int_0^T r(x)dx = 0.$$

令 $a_{n-1}(M)$ 为

$$a_{n-1}(M) := \operatorname{rank}(M) a_{n-1}(R) + \sum_P \operatorname{length}(H^0_P(Q)) a_{n-1}(R/P) - \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \right) a_n(R),$$

于是得到所需结论。 □

例 2.9（$\mathbb{Z}_{\geq 0}$分次情形）。设 R 是一个分次正规仿射整环。假设R由 1 次齐次元生成，即 R可写为 $R = \Bbbk[x_1, \dots, x_N]/I$，其中所有$x_i$的次数均为 1，且 I是 $k[x_1, \dots, x_n]$的一个齐次理想。

设 $X :=$ Spec(R)，且 $0 \in X$ 是对应于理想 $\mathfrak{m}_0 =$^（x_1、.....、x_n）的点。设 π: $X \to X$是以 0 为中心的吹起。则例外除子恰为 $E =$Proj(R)，余法丛为 $\mathcal{O}_E$(1)。由黎曼-罗赫定理，

$$h^0(\mathcal{O}_E(m)) = \frac{(-E)^{n-1} \cdot E}{(n-1)!} m^{n-1} - \frac{K_E \cdot (-E)^{n-2}}{2(n-2)!} m^{n-2} + O(m^{n-3}).$$

现在，我们可以写成

$$K_E + D = K_{\hat{X}} + E|E,$$

其中 D 是 E 上的一个有效 $\mathbb{Q}$-除子，称为 different。因此，

$$-\frac{1}{2} K_E \cdot (-E|_E)^{n-2} = \frac{1}{2}(K_{\hat{X}} + E) \cdot (-E)^{n-1} + \frac{1}{2} D \cdot (-E|_E)^{n-2} = \frac{1}{2} A(E)(-E)^{n-1} \cdot E + \frac{1}{2} D \cdot (-E|_E)^{n-2}.$$

因此，

$$\dim(R_{\leq x}) = \sum_{m=1}^{\lfloor x \rfloor} h^0(\mathcal{O}_E(m))$$

$$=\frac{(-E)^{n-1}\cdot E}{n!}\lfloor x\rfloor^n+\frac{(A(E)+1)(-E)^{n-1}\cdot E+D\cdot(-E|_E)^{n-2}}{2(n-1)!}\lfloor x\rfloor^{n-1}+O(x^{n-2}).$$

因此，令 $\frac{D\cdot(-E|_E)^{n-2}}{(-E)^{n-1}\cdot E}=\delta$，我们有

$$\frac{1}{T^n}\int_0^T\left(\dim(R_{\leq x})-\frac{(-E)^{n-1}\cdot E}{n!}x^n-\frac{(A(E)+\delta)(-E)^{n-1}\cdot E}{2(n-1)!}x^{n-1}\right)dx=0.$$

因此，在此情形下，我们有

$$\frac{a_{n-1}(R)}{a_n(R)}=\frac{1}{2}(A(E)+\delta),$$

$\hat{}$，并且 δ 衡量 $E\subset X$ 上奇点的严重程度。

2.2. **斜率稳定性**。在本小节中，我们介绍有限生成的无挠分次模在有限生成的 $\mathbb{R}_{\geq 0}$-分次整环（定义于 $\Bbbk$ 上）上的斜率稳定性概念。

定义 2.10。设 $R=\bigoplus_{\gamma\in\mathbb{R}_{\geq 0}}R_\gamma$ 为 $R_0=\Bbbk$ 上的有限生成分次整环。对于有限生成的 $\mathbb{R}$-分次 R-模 $M=\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{R}}M_\lambda$，定义 M 的次数如下

$$\deg(M)=a_{n-1}(M)-\operatorname{rank}(M)a_{n-1}(R).$$

命题 2.11。设 R 为 $R_0=\Bbbk$ 上的有限生成 $\mathbb{R}_{\geq 0}$-分次整环，且 M_1、M_2、M_3 为有限生成的 $\mathbb{R}$-分次 R-模。若存在短正合列

$$0\to M_1\to M_2\to M_3\to 0$$

分次 R-模，我们有

$$\deg(M_2)=\deg(M_1)+\deg(M_3),$$

也就是说，$\deg$ 延拓为阿贝尔范畴中$\mathbb{R}$-分次 R-模的 K_0群上的一个加性函数。

证明。只需证明 a_{n-1} 是可加的。这是显然的，因为

$$\dim(M_{2,\leq x})=\dim(M_{1,\leq x})+\dim(M_{3,\leq x})$$

□

定义 2.12。设 R,M如定义 2.10 中所述。进一步假设 $a_n(M)\neq 0$。定义 M 的斜率 $\mu(M)$为

$$\mu(M):=\frac{\deg(M)}{a_n(M)}.$$

定义 2.13。设 R, M 如定义 2.10 中所述，并进一步假设 M 是无挠的。那么，

(i) 若对 M的任意非零子模 N，均有 $\mu(N)\leq\mu(M)$，则 M 是**半稳定**的。

(ii) 若对 M的任意非平凡子模 N，均有 $\mu(N)<\mu(M)$，则 M 是**稳定**的。

我们可以在此设定下证明 Harder–Narasimhan 滤过：

定理 2.14 (Harder–Narasimhan 滤过).设 R 是 $R_0 = \Bbbk$ 上有限生成的 $\mathbb{R}_{\geq 0}$-分次整环。设 M 是有限生成的 $\mathbb{R}$-分次 R-模。则存在唯一的滤过

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_l = M$$

由分次子模构成，使得

(i) *Each of* M_i/M_{i-1} *is torsion free and semistable.*
(ii) $\mu(M_1) > \mu(M_2/M_1) > \cdots > \mu(M_l/M_{l-1})$.

该定理可由一个标准论证推出（参见 [7]）。在证明该定理之前，我们先指出以下命题。

命题 2.15. 设 R 是一个在 $R_0 = \Bbbk$ 上有限生成的 $\mathbb{R}_{\geq 0}$-分次整环。设 M_1、M_2、M_3 是有限生成的 $\mathbb{R}$-分次 R-模，且其秩为 ≥ 1。若存在一个短正合列

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

的分次模，则以下不等式成立：

$$\min\{\mu(M_1), \mu(M_3)\} \leq \mu(M_2) \leq \max\{\mu(M_1), \mu(M_3)\}.$$

此外，若 $\mu(M_1) \neq \mu(M_3)$，则这些不等式是严格不等式。

证明。 这是一个众所周知的推论，因为根据命题 2.11， a_n 和 deg 都是线性的。□

推论 2.16。 设 R 是一个在 $R_0 = \Bbbk$上有限生成的 $\mathbb{R}_{\geq 0}$-分次整环，且M_1、M_2 是两个半稳定的 $\mathbb{R}$-分次模。若存在一个非平凡态射

$$\phi : M_1 \to M_2$$

$\mathbb{R}$-分次模之间的态射，则有 $\mu(M_1) \leq \mu(M_2)$。

证明。 设 K 是 ϕ的核， Q 是 ϕ的像。于是得到一个短正合列

$$0 \to K \to M_1 \to Q \to 0$$

of $\mathbb{R}$-分次模。根据命题 2.15 以及 M_1的半稳定性，有

$$\mu(K) \leq \mu(M_1) \leq \mu(Q).$$

现在， M_2 也半稳定。因此有

$$\mu(M_1) \leq \mu(Q) \leq \mu(M_2)$$

如所欲证。 □

定理 *2.14* 的证明。首先，我们证明存在性。设 Σ 为 M 的所有非零分次子模的集合。在 Σ 上定义序 $\prec$ ，使得 $N_1 \prec N_2$ 当且仅当 $N_1 \subset N_2$ 且 $\mu(N_1) \leq \mu(N_2)$。由佐恩引理，我们可以取 $\prec$-极大子模。现在， $a_n(N) = \text{秩}(N) \cdot a_n(R) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot a_n(R)$。因此，我们可以取一个 $\prec$-极大子模 M_1 ，使得 $a_n(M_1)$ 在 $\prec$-极大子模中最小。我们证明该子模是

极大不稳定子模，即对任意 $N \in \Sigma$，有 $\mu(N) \leq \mu(M_1)$，且等号成立仅当 $N \subset M_1$。

假设存在 $N \in \Sigma$，使得 $\mu(N) \geq \mu(M_1)$。我们可以假设 N 是 $\prec$-极大的。M_1 的 a_n- 极小性表明 $N = M_1$ 或 $M_1 \not\subset N$。假设 $M_1 \not\subset N$。考虑以下短正合列

$$0 \to N \cap M_1 \to N \oplus M_1 \to N + M_1 \to 0.$$

我们得到

$$\begin{aligned} &a_n(N \cap M_1)(\mu(N \cap M_1) - \mu(N)) \\ =&a_n(M_1)(\mu(M_1) - \mu(N + M_1)) - (a_n(N + M_1) - a_n(M_1))(\mu(N + M_1) - \mu(N)). \end{aligned}$$

由 N 和 M_1 的 $\prec$-极大性可知，$\mu(N + M_1) < \mu(N)$ 且 $\mu(N + M_1) < \mu(M_1)$。因此，我们有

$$\mu(N \cap M_1) > \mu(N) \geq \mu(M_1).$$

令 $N' \in \Sigma$ 为 M_1 的 $\prec$-极大分次子模，使得 $N \cap M_1 \prec N'$；令 N'' 为 M 的 $\prec$-极大子模，使得 $N' \prec N''$。M_1 的 a_n-极小性推出 $N'' \not\subset M_1$，而 M_1 的 $\prec$-极大性推出 $M_1 \not\subset N''$。我们有 $N' \subset N'' \cap M_1$，因此上述论证表明 $\mu(N') \leq \mu(N'') < \mu(N'' \cap M_1)$。这与 N' 在 M_1 的子模中具有 $\prec$-极大性相矛盾。

注意，由于饱和化会增大斜率，M_1 是饱和分次半稳定子模，而 M_1 是 destabilizing 子模。因此，我们完成了 Harder–Narasimhan 滤过的第一步。取 $M_2 \subset M$ 为 M/M_1中 destabilizing 子模的原像。由以下短正合列

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_2/M_1 \to 0,$$

以及 $\mu(M_1) > \mu(M_2)$这一事实，根据命题 2.15，我们得到 $\mu(M_1) > \mu(M_2/M_1)$。如此继续下去，M 的诺特性质迫使这一过程终止。因此，我们得到了所需滤过的存在性。

其次，我们证明唯一性。设$(M_i)_{i=0}^{l}$ 和$(M'_j)_{j=0}^{l'}$ 是两个 Harder–Narasimhan 滤过。不失一般性，可假设 $\mu(M_1) \geq \mu(M'_1)$。设 $j \in \{0, 1, \ldots, l'\}$ 为满足 $M_1 \subset M'_j$的最小指标。于是我们得到一个半稳定模之间的非平凡态射 $M_1 \to M'_j/M'_{j-1}$。因此，根据推论 2.16，我们得到 $\mu(M_1) \leq \mu(M'_j/M'_{j-1})$。若 $j > 1$，则 $\mu(M'_1) \leq \mu(M_1) \leq \mu(M'_j/M'_{j-1}) < \mu(M'_1)$，矛盾。因此，$M_1 \subset M'_1$且 $\mu(M_1) = \mu(M'_1)$。设 $i \in \{0, 1, \ldots, l\}$ 为满足$M'_1 \subset M_i$的最小指标。若 $i > 1$，则同样的论证表明 $\mu(M'_1) < \mu(M_1)$，矛盾。因此，我们有$M_1 = M'_1$。继续这一论证，对任意 $i \in \{0, 1, \ldots, l\}$，我们有 $l = l'$和$M_i = M'_i$。□

最后，我们考察 deg 与对偶模之间的一些关系。

定义 2.17。设 $R = \bigoplus_{\gamma \geq 0} R_\gamma$是 $= R_0$ 𝕜 上的分次仿射整环，且 M, N是有限生成的分次 R-模。定义内部同态模 $\mathbf{Hom}_R(M, N)$为分次 R-模，其定义为

$$\mathrm{Hom}_R(M, N)_\lambda = \mathrm{Hom}_R(M(-\lambda), N).$$

若 $N = R$，记 $\mathrm{Hom}_R(M,R) = M^\vee$。函子 $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ 的右导出函子记为 $\{\mathrm{Ext}^i_R(M,-)\}_{i\geq 0}$

注意，由于 R 是诺特的且 M 是有限生成的，$M^\vee$ 在非分次意义下与对偶模一致。因此，将 Ext^i_R 与从 $\mathbb{R}$ 分次 R-模范畴到 R-模范畴的遗忘函子复合，记为 F，也与 Ext 和 F 的复合一致。我们有如下定理:

定理 2.18. 若 R 是正规的，则有

$$\deg(M^\vee) = -\deg(M)$$

首先，我们证明如下引理:

引理 2.19. 设 R 是正规整环，且 M 是 R上的有限生成挠模。则有

$$\mathrm{length}(H^0_P(\mathrm{Ext}^1_R(M,R))) = \mathrm{length}(H^0_P(M))$$

对任意高度为1的素理想 P。

证明。 由于 M 是有限的，我们可以在 P处局部化，并假设 R 是离散赋值环。记$P =(\pi)$。由离散赋值环上模的结构定理，我们有

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^{s} R/(\pi^{m_i})$$

对某些 m_1，.....， $m_s \in \mathbb{Z}_{>0}$。因此，我们可以假设对某个 $m > 0$有 $M = R/(\pi^m)$。由正合序列

$$0 \to R \xrightarrow{\pi^m} R \to R/(\pi^m) \to 0,$$

我们有

$$\mathrm{Ext}^1_R(R/(\pi^m), R) = R/(\pi^m).$$

因此该断言成立。 □

定理 *2.18* 的证明。设

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{r} R(-\lambda_i) \to M \to Q \to 0$$

为如引理 2.3 中的正合序列。取对偶，我们得到如下短正合列:

$$0 \to M^\vee \to \bigoplus_{i=1}^{r} R(\lambda_i) \to \mathrm{Ext}^1_R(Q,R) \to 0.$$

因此，由命题 2.11 和引理 2.18，我们得到

$$\deg(M^\vee) = \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i\right) a_n(R) - \sum_P \mathrm{length}(H^0_P(Q)) a_{n-1}(R/P) = -\deg(M)$$

□

3. Extension problem via valuations

3.1. 延拓。 本节中，我们引入 v-赋值函数和几何 v-赋值函数的概念。设 R 是 $\Bbbk$ 上的有限生成整环。对于以闭点 $x \in X =$ 为中心的 R 上的有限生成赋值 v，我们可以像引言中那样构造多重分次退化 $\mathfrak{X} :=$ 谱$(\mathcal{R}) \to T(\sigma)$。对于 R 上的有限生成无挠模 M，我们可以通过自然投影 $\pi : \mathfrak{X}|_{(\mathbb{G}_m)^r} \cong X \times \mathbb{G}_m^r \to X$ 将其拉回 $E = M^{\sim}$。我们引入几何 v-赋值函数的概念，它将 $\pi^* E$ 延拓为 $\mathfrak{X}$ 上的 $\mathbb{G}_m^r$-等变层，作为 M 的 Rees模。

定义 3.1. 设 R 是一个在 $\Bbbk$ 上的有限生成整环， M 是一个在 R上的无挠模。对于一个有限生成的 $\mathbb{R}$-赋值 v，其定义在 R 上，中心位于 Spec(R) 中的一个 a $\Bbbk$-值点处，函数 v_M : $M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 称为 v-赋值函数，当且仅当

(i) 对任意 $m_1, m_2 \in M$， $v_M(m_1 + m_2) \geq \min\{v_M(m_1)\ v_M(m_2)\}$。(ii) 对任意 $a \in R, m \in M$， $v_M(am) = v(a) + v_M(m)$。(iii) $v_M(m) = \infty$ 当且仅当 $m = 0$。(iv) 关联分次模

$$\mathrm{gr}_{v_M}(M) := \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{R}} M_{\geq \lambda}/M_{>\lambda}$$

是一个有限生成的 $\mathbf{gr}_v(R) := \bigoplus_{\lambda \geq 0} R_{\geq \lambda}/R_{>\lambda}$-模。

v 上所有 M 赋值函数构成的空间记为 $\mathbf{Val}_{v,\ M}$。如果 $v_M \in \mathbf{Val}_{v,\ M}$ 的值域包含于 $\mathbb{Z}\Gamma$，即由 $\Gamma := v(R - \{0\})$ 生成的 $\mathbb{R}$ 的子模，我们就称 v_M 是**几何的**，所有几何 v 赋值函数构成的集合记为 $\mathbf{Val}^g_{v,\ M}$。

注意，如果 v_M 是一个 v 赋值，那么 $\mathbf{gr}_{v_M}(M)$ 是一个挠无 $\mathbf{gr}_v(R)$ 模。对于 $v_M \in \mathbf{Val}^g_{v,\ M}$，我们可以将 Rees 模 $\mathbf{Rees}_{v_M}(M)$ 定义为

$$\mathrm{Rees}_{v_M}(M) := \bigoplus_{s \in M(v)} M_s t^{-s},$$

其中

$$M_s = \{m \in M \mid v_M(m) \geq s\}.$$

引理 3.2. 设 R 是 k 上的有限生成整环， M 是 R 上的挠无模。设 $v \in \mathrm{Val}_{X,\ x}$ 是 R 上一个以闭点 $x \in \mathrm{Spec}(R)$ 为中心的有限生成 $\mathbb{R}$ 赋值。那么，$\mathrm{Val}^g_{v,\ M}$ 是一个非空集合。

证明。由于 M 是挠无的，我们可以将 M 嵌入自由模 $R^{\oplus N}$ 中。设 v_f 是 $R^{\oplus N}$ 上定义的赋值，其定义为 $v_f((a_1, \ldots, a_N)) := \min_{1 \leq i \leq N}\{v(a_i)\}$。将 v_f 限制在 M 上，就得到 M 上的一个几何 v 赋值。□

定义 3.3. 设 R 是一个有限生成的 $\Bbbk$-整环， M 是一个无挠 R-模，且 v 是一个有限生成的 $\mathbb{R}$-赋值，其中心位于一个$\Bbbk$-值点上

Spec(R)。函数

$$\Phi : \mathrm{Val}_{v,M} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

定义为

$$\Phi(v_M) = \mu_{\max} - \mu_{\min},$$

其中， $\mu_{\max}$定义为M_1的斜率，而 $\mu_{\min}$为 M/M_{l-1}的斜率；其中 $(M_i)_{i=0}^l$是 $\mathrm{gr}_v(R)$-模 $M := \mathrm{gr}_{v_M}(M)$ 的 Harder–Narasimhan 滤过。

注 3.4. 泛函 Φ度量分次模 $\mathrm{gr}_{v_M}(M)$ 的不稳定性。特别地， $\Phi(v_M) = 0$当且仅当 $\mathrm{gr}_{v_M}(M)$ 按定义 2.13 的意义是半稳定的。

3.2. **赫克变换**。本小节中，我们考虑仿射整环R 上定义于 $\Bbbk$ 的模，其上带有秩 1 的有限生成赋值 $v \in \mathrm{Val}_{X,\,x}$（简称此类赋值为**准正则**），其中 x 是 $X = \mathrm{Spec}(R)$的一个闭点。设 $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ 为 v的指数，其定义为 $\delta = \min_{f,\,g \in R\setminus\{0\},\,v(f)\neq v(g)} |v(f) - v(g)|$。设 M为一个无挠 R 模，且 $v_M \in \mathrm{Val}_{v,\,M}^{g}$ 为一个几何 v-赋值泛函。注意，在此情形下，

$$\mathrm{gr}_{v_M}(M) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} M_{\geq \delta k}/M_{\geq \delta(k+1)}$$

成立。

定义 3.5. 设 R 是代数闭域 $\Bbbk$ 上的仿射整环，且 $v \in \mathrm{Val}_{X,\,x}$ 是以谱(R) 的一个闭点为中心的准正则赋值。设 M 是无挠 R-模，且 $v_M \in \mathrm{Val}_{v,\,M}^{g}$。设 $N \subset \mathrm{gr}_{v_M}(M)$ 是一个子模。 v_M 沿 N 的**赫克变换**（或**初等变换**）是由下列方程构造的函数 $v'_M : M \to \delta\cdot\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$：

$$v'_M(m) = \max\{k\delta \in \delta\cdot\mathbb{Z} \mid v_M(m) \geq k\delta \wedge p_{k\delta}(m) \in N_{k\delta}\},$$

其中 $p_{k\delta} : M_{\geq k\delta} \to M_{\geq k\delta}/M_{\geq (k+1)\delta}$ 是商映射。

注记 3.6. 设 $\mathfrak{X} := $ 谱($\mathrm{Rees}_v(R)$) 是由 v 诱导的仿射测试构形。~则我们可由 $(M,\ v_M)$ 构造一个 $\mathbb{G}_m$-等变层 $E = (\mathrm{Rees}_{v_M}(M))^{\sim}$。如下文所见，上述赫克变换的定义给出了 E 沿对应于 N 的 $E|_{\mathfrak{X}_0}$ 的子模的赫克变换~。参见 [3], 第 2.2 节。

在上述记号中，令 $M'_{\geq n\delta} \subset M$ 为由以下内容定义的 M 子模：

$$M'_{\geq n\delta} := \{m \in M \mid v'_M(m) \geq n\delta\} = p_{n\delta}^{-1}((\underline{N})_{n\delta}) + M_{\geq (n+1)\delta}.$$

于是得到自然的正合序列

$$0 \to M'_{\geq n\delta} \to M_{\geq n\delta} \to \frac{M_{\geq n\delta}/M_{\geq (n+1)\delta}}{(\underline{N})_{n\delta}} \to 0,$$

第三个模自然同构于

$$M_{\geq n\delta}/(M_{\geq (n+1)\delta} + p_{n\delta}^{-1}((\underline{N})_{n\delta})).$$

此外，我们还有如下短正合列：

$$0 \to \frac{M_{\geq(n+1)\delta}/M_{\geq(n+2)\delta}}{(\underline{N})_{(n+1)\delta}} \to M'_{\geq n\delta}/M'_{\geq(n+1)\delta} \to (\underline{N})_{n\delta} \to 0,$$

由于第一个单射由.....定义

$$M_{\geq(n+1)\delta}/(p^{-1}_{(n+1)\delta}((\underline{N})_{(n+1)\delta})+M_{\geq(n+2)\delta}) \to (p^{-1}_{n\delta}((\underline{N})_{n\delta})+M_{\geq(n+1)\delta})/(p^{-1}_{(n+1)\delta}((\underline{N})_{(n+1)\delta})+M_{\geq(n+2)\delta}).$$

特别地，以下命题成立：

命题 3.7. 设 R 是代数闭域 $\Bbbk$上的仿射整环，且$v \in \mathrm{Val}X,\ x$ 是以闭点 x 为中心的准正则赋值，其中该闭点属于 $\mathrm{Spec}(R)$。设 M 是一个无挠 R模，且 $v_M \in \mathrm{Val}^{g}_{v,\ M}$。设 N是$\mathrm{gr}_{v_M}(M) =: M$的子模，而$v'_M$ 是沿着N对 v_M 作出的赫克变换。我们有以下正合序列，其中各项都是$\mathrm{gr}_v(R)$-模：

$$0 \to (\underline{M}/\underline{N})(\delta) \to \underline{M'} \to \underline{N} \to 0,$$

其中 $\underline{M'} = \mathrm{gr}^{v'_M}(M)$。特别地，$v'_M \in \mathrm{Val}^{g}_{v,\ M}$若 N是 M的饱和子模.

因此，我们得到以下命题：

命题 3.8. 令 $R,\ x,\ v,\ M,\ v_M$ 如上面的命题所述。令 $(M_i)_{i=1}^{l}$ 为 M 的 ***HNF***。令 v'_M 为沿着 M_+对 v_M 作的赫克变换。于是我们得到以下不等式：

$$\Phi(v'_M) \leq \max\{\mu(\underline{M_2}/\underline{M_1}) - \mu_{\min}(\underline{M}), \mu(\underline{M_2}/\underline{M_1}) - \mu_{\max}(\underline{M}) + \delta, \Phi(v_M) - \delta\}$$

特别地，若 $\Phi(M') \geq \delta$，则得到 $\Phi(v'_M) < \Phi(v_M)$。

证明. 证明与 [3, 引理 3.2] 的证明相同。我们得到以下短正合列：

$$0 \to (\underline{M}/\underline{M_1})(\delta) \to \underline{M'} \to \underline{M_1} \to 0.$$

令 $(\underline{M'_j})_{j=1}^{l'}$为 M' 的 HNF。于是，我们有

$$\mu(\underline{M'_1}) \leq \max\{\mu(\underline{M_2}/\underline{M_1}) + \delta, \mu(\underline{M_1})\}$$

根据命题 2.15。另一方面，我们有一个正合序列

$$0 \to \underline{Q_1} \to \underline{M'}/\underline{M'_{l'-1}} \to \underline{Q_2} \to 0$$

对于某些商（M/M_1） (δ) $\to Q_1$， $M_1 \to Q_2$。因此我们有

$$-\mu_{\min}(\underline{M'}) \leq \max\{-\mu_{\min}(\underline{M}) - \delta, -\mu(\underline{M_1})\}.$$

因此，我们有

$$\Phi(v'_M) \leq \max\{\mu(\underline{M_2}/\underline{M_1}) - \mu_{\min}(\underline{M}), \mu(\underline{M_2}/\underline{M_1}) - \mu_{\max}(\underline{M}) + \delta, \Phi(v_M) - \delta\}$$

□

在这种情况下，我们可以证明 $a_n(R) \in \delta^{-n} \cdot \mathbb{Z}$。因此我们得到

$$\deg(\mathrm{gr}_{v_N}(N)) = \sum_P \mathrm{length}(H^0_P(Q))a_{n-1}(R/P) - (\sum \lambda_i)a_n(R) \in \delta^{-(n-1)}\mathbb{Z}$$

对于任意有限挠无模 N 和 $v_N \in \mathrm{Val}_{v,\ N}$ 满足 $v_N(N \setminus \{0\}) \subset \delta \cdot \mathbb{Z}$，或者由于 $\dim(M_{\leq \delta n})$ 关于 n 是准多项式，也可以利用通常的希尔伯特–塞缪尔理论证明这一点。因此，

$$\mu(\mathrm{gr}_{v_N}(N)) \in \frac{1}{r! a_n(R) \delta^{n-1}} \mathbb{Z}$$

对于任意满足秩$(N) \leq r$ 的 (N, v_N)，$v_N(N \setminus \{0\}) \subset \delta \cdot \mathbb{Z}$。特别地，若 v 是准正则赋值，则 $\Phi(v_M)$ 取离散值。结合命题 3.8，我们得到以下定理：

定理 3.9. 设 R 是代数闭域 $\Bbbk$ 上的仿射整环，且 $v \in \mathrm{Val}_{X,x}$ 是以闭点 x 为中心的准正则赋值，其中 x 属于 谱(R)，指数为 δ。设 M 是一个无挠 R 模。那么存在 $v_M \in \mathrm{Val}_{v,M}^{g}$，使得 $\Phi(v_M) \in [0, \delta)$。

定义 3.10. 设 R 是代数闭域 $\Bbbk$ 上的仿射整环，且 $v \in \mathrm{Val}_{x,X}$ 是以闭点 $x \in \mathrm{Spec}(R)$ 为中心、指数为 δ 的拟单项式赋值。设 M 是一个无挠 R 模。若 $\Phi(v_M) \in [0, \delta)$，则称 $v_M \in \mathrm{Val}_{v,M}^{g}$ 为**最优**。

3.3. **最优赋值函数的唯一性**。 在本小节中，我们证明以下定理：

定理 3.11. </style}设 是代数闭域 k 上的一个仿射整环，且$v \in \mathrm{Val}_{x,X}$ 是以闭点 $x \in X := \mathrm{Spec}(R)$ 为中心、指数为 δ 的拟单项式赋值。设 M 是一个无挠 R 模，且 $v_M, v'_M \in \mathrm{Val}_{v,M}^{g}$ 是两个最优v赋值函数。则以下结论成立：

(i) 若 $\Phi(v_M) + \Phi(v'_M) < 1$，则存在 $c \in \delta\mathbb{Z}$ 使得 $v'_M = v_M + c$。(ii) 否则，存在 $M'_{k'} \subset M' = \mathrm{gr}^{v'_M}(M)$，它出现在 M' 的 *HNF* 中，并且 v_M 是沿着 $M'_{k'}$ 对 v_M 作赫克变换后得到的平行移动。

不失一般性，我们可以假设 $\delta = 1$。因此，我们在此情形下进行证明。令 $\mathrm{Rees}_v(R)$ 表示关于此赋值 v 的 R 的 Rees 代数，即

$$\mathrm{Rees}_v(R) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} R_k t^{-k},$$

其中 $R_k := R_k(v) := \{f \in R \mid v(f) \geq k\}$。注意，$\mathrm{Rees}_v(R)$ 通常不是正规于 $\tilde{}$。令 $M = \mathrm{Rees}_{v_M}(M)$ $M' = \mathrm{Rees}^{v'_M}(M)$ 表示 Rees 模，即

$$\tilde{M} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k t^{-k}, \tilde{M'} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M'_k t^{-k},$$

其中

$$M_k := \{m \in M \mid v_M(m) \geq k\}, M'_k := \{m \in M \mid v'_M(m) \geq k\}.$$

由于 v_M 和 v'_M 是 v-赋值， M 和 $M^{\tilde{}}$ 是有限生成的 $\mathrm{Rees}_v(R)$–模。此结论可通过标准的 Artin–Rees 论证得到。另请注意， v_M可由 $\tilde{M}$恢复，即简单地取 $v_M(m) = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid mt^{-k} \in \tilde{M}\}$。

令 $\pi:\mathfrak{X}:=$ 谱$(\mathrm{Rees}_v(R))\to\mathbb{A}^1$ 为自然投影。那么 π 是 $\mathbb{G}_m$-等变态射，并且存在自然的 $\mathbb{G}_m$-等变同构 $\mathfrak{X}|_{\mathbb{A}^1-\{0\}}=\pi^{-1}(\mathbb{A}^1-\{0\})\cong X\times\mathbb{G}_m$，即 $\pi:\mathfrak{X}\to\mathbb{A}^1$ 是一个仿射测试构形。设 $\tilde{E}$，$\tilde{E}'$ 是定义在 $\mathfrak{X}$ 上的相干层，由 M，M' 分别定义。那么 E, E' 赋予自然的 $\mathbb{G}_m$-作用。此外，还存在自然同构

$$\rho:\tilde{E}|_{\mathfrak{X}_{\mathbb{A}^1-\{0\}}}\cong p_1^*E\cong\tilde{E}'|_{\mathfrak{X}_{\mathbb{A}^1-\{0\}}},$$

其中，E 是由 M 和 p_1 关联到 X 上的层：$\mathfrak{X}_{\mathbb{A}^1-\{0\}}=X\times\mathbb{G}_m\to X$ 是第一个投影。在此情形下，ρ 可视为 $\mathfrak{X}-\mathfrak{X}_0$ 上 $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}(E,E')$ 的截面。现在，$D:=\mathfrak{X}_0$ 是 $\mathfrak{X}$ 上的 $\mathbb{G}_m$-不变卡蒂埃除子。因此，存在 $c\in\mathbb{Z}$，使得 ρ 延拓为 $\tilde{\rho}$：$E\to E'(cD)$，且 $\tilde{\rho}|_D\neq 0$。现在，$E'(cD)$ 是 $\mathbb{G}_m$–等变层，定义在 $\mathfrak{X}$ 上，由 $t^{-c}M'$ 关联得到，即由 v-赋值函数 v'_M+c 关联得到。通过 v'_M+c 重新取 v'_M 后，我们不妨假设 $c=0$。类似地，可以取某个 $l\in\mathbb{Z}$，使得 ρ^{-1} 延拓为 $\tilde{\rho}^{-1}:\tilde{E}'\to\tilde{E}(lD)$，且 $\tilde{\rho}^{-1}|_D\neq 0$。注意，延拓 $\tilde{\rho}^{-1}$ 的存在意味着，如果 $v'_M(m)\geq a$，则总有 $v_M(m)\geq a-l$。因此，在此情形下，对所有 $m\in M$，都有 $v'_M(m)\geq v_M(m)\geq v'_M(m)-l$。这意味着 l 必为非负数。令 $(M_i)_{i=0}^N$ 和 $(M'_j)_{j=0}^{N'}$ 分别为 $M:=\mathrm{gr}_{v_M}(M)$、$M':=\mathrm{gr}_{v'_M}(M)$ 的Harder–Narasimhan滤过。令 k 为满足性质 $\tilde{\rho}|_D(M_k)=0$ 的最大数。则存在一个非零映射

$$\tilde{\rho}_D:\underline{M_{k+1}}/\underline{M_k}\to\underline{M'},$$

即 $\mu_{\min}:=\mu_{\min}(v_M)\leq\mu_{k+1}:=\mu(\underline{M_{k+1}/M_k})\leq\mu'_{\max}=\mu_{\max}(v'_M)$。类似地，我们有 $\mu'_{\min}\leq\mu_{\max}-l$。因此我们有

$$0\leq l\leq\Phi(v_M)+\Phi(v'_M)<2$$

因此有两种情形：$l=0$ 或 $l=1$。

(i) 考虑 $l=0$ 的情形。首先注意到，$\tilde{\rho}^{-1}\circ\tilde{\rho}:\tilde{E}\to\tilde{E}(lD)$ 是乘以 t^l 的映射。事实上，若 $mt^{-d}\in\tilde{M}$，由于 $\rho:\tilde{M}[t^{-1}]\to\tilde{M}'[t^{-1}]$ 是恒等映射，我们有 $\tilde{\rho}(mt^{-d})=mt^{-d}$。若 $m't^{-d}\in\tilde{M}'$，同样的推理表明 $\tilde{\rho}(m't^{-d})=m't^{-d}\in\tilde{M}(l)[t^{-1}]$，而 $\tilde{M}(lD)$ 中限制到 $\mathfrak{X}|_{\mathbb{A}^1-\{0\}}$ 后为 $m't^{-d}$ 的元素只有 $m't^{-(d-l)}\otimes t^{-l}(\in M_{d-l}t^{-(d-l)}\otimes t^{-l})$ 本身，因为 $\tilde{M}(lD)$ 是无挠的。这说明 $\tilde{\rho}^{-1}\circ\tilde{\rho}(mt^{-d})=mt^{-(d-l)}\otimes t^{-l}$。若 $l=0$，那么 $\tilde{\rho}^{-1}\circ\tilde{\rho}$ 是恒等映射，$\tilde{\rho}\circ\tilde{\rho}^{-1}$ 也一样。因此，$\tilde{\rho}$ 是一个同构。注意，这说明了定理 3.11 的 (i)。

(ii) 接下来，考虑情形 $l=1$。由于 $\tilde{\rho}:E\to E'$ 是单射，我们将 E 视为 E' 的子层。注意，在此情形下，$v_M+1\geq v'_M\geq v_M$ 成立。因此，我们有

$$\begin{aligned}\tilde{M}'/\tilde{M}&=\bigoplus_d(M'_d/M_d)t^{-d}\\&=\bigoplus_d\frac{M'_d/M'_{d+1}}{M_d/M'_{d+1}}t^{-d}\end{aligned}$$

定义 $N := \bigoplus_d M_d/M'_{d+1} \subset M'$。容易证明，$v_M$是 v'_M 沿 N的赫克变换。因此，只需证明 N 出现在 M'的HNF 中。

令 $M'_{k'}$ 为 M' 的 HNF 中出现的极大子层，使得 $\tilde{\rho}^{-1}|_D(M'_{k'}) = 0$。于是有 $\mathrm{Im}(\tilde{\rho}|_D) = M'_{k'}$。事实上，若 $\mathrm{Im}(\tilde{\rho}|_D) \not\subset M'_{k'}$，则存在非平凡态射

$$\underline{M} \to \underline{M'}/\underline{M'_{k'}}$$

由 $\tilde{\rho}|_D$ 诱导。因此有 $\mu_{\min} \le \mu'_{k'+1}$。否则，存在非平凡态射

$$\underline{M'_{k'+1}}/\underline{M'_{k'}} \to \underline{M}(-1)$$

由 $\tilde{\rho}^{-1}|_D$ 诱导，且有 $\mu'_{k'+1} \le \mu_{\max} - 1$。然而，这些不等式表明

$$\Phi(v_M) \ge \mu'_{k'+1} + 1 - \mu_{\min} \ge 1.$$

这与假设 $\Phi(v_M) < 1$ 矛盾。因此，有 $\mathrm{Im}(\tilde{\rho}|_D) \subset M'_{k'}$。

另一方面，根据定义，$\mathrm{Im}(\tilde{\rho}|_D) = N$，且这也是 $\tilde{\rho}^{-1}|_D$ 的核。事实上，(i) 中的观察表明，$\rho_D^{-1}\colon M' \to M(-1)$ 由自然包含 $M'_d \subset M_{d-1}$ 给出。因此，我们有

$$\ker(\tilde{\rho}^{-1}|_D) = \bigoplus_d M_d/M'_{d+1} = \underline{N}.$$

因此，我们有 $N = \underline{\ker}(\tilde{\rho}|_D) \subset M'_{k'}$。根据定义，$M'_{k'} \subset \ker(\tilde{\rho}|_D)$ 成立。因此，我们得到定理 3.11 的 (ii)。□

由此，我们得到以下定理：

定理 3.12。设 R 是代数闭域 $\Bbbk$ 上的仿射整环，且$v \in \mathrm{Val}_{X,x}$ 是以闭点 $x \in X := \mathrm{Spec}(R)$ 为中心、指数为 δ 的准正则赋值。对于任意无挠 R–模 M，以下陈述成立：

*(*i*)* 存在 $v_M \in \mathrm{Val}^g_{v,M}$ 使得 $\Phi(v_M) \in [0, \delta)$。*(*ii*)* $\mathrm{gr}_{v_M}(M)$ 的 ***HNF*** 的分次模与 $v_M \in \mathrm{Val}^g_{v,M}$ 的选择无关，其中 $\Phi(v_M) \in [0, \delta)$ 允许对每个直和项的分次进行扭曲。

注记 3.13. 本定理可视为 Chen–Sun [3] 的定理 1.4 (I)-(III) 的一个代数推广。事实上，若 X 在 x 处光滑，且 $v \in \mathrm{Val}_{X,x}$ 为爆破赋值，则由定理 3.12 (i)，我们有 $v_M \in \mathrm{Val}^g_{v,M}$ 的存在性，使得 $\Phi(v_M) < 1$，并且 $\mathrm{gr}^{HNF}(\mathrm{gr}_{v_M}(M))$ 在对每个直和项作扭变的意义下，与此类 v-赋值函数的选取无关。

4. Examples

本文最后通过一些简单的例子来说明主定理。第一个例子展示了在某个光滑点沿着一种

非爆破解析赋值的最优代数切锥。第二个例子展示了在奇点处沿着爆破赋值的最优代数切锥。

4.1. 仿射平面上沿单项式赋值的最优代数切锥。设 $X = \mathbb{A}^2_{\Bbbk} = \mathrm{Spec}(\Bbbk[x,y])$ 是定义在 $\Bbbk$ 上的仿射平面。设 $v\colon \Bbbk[x,y] \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 是由 $v(x) = 1, v(y) = 2$ 定义的单项式赋值。考虑 $T_X \cong \mathcal{O}_X^{\oplus 2} = (\Bbbk[x,y]^{\oplus 2})^{\sim}$ 的延拓问题。

首先，由于它是平凡向量丛，我们可以定义平凡的 v-赋值函数$v_0\colon \Bbbk[x,y]^{\oplus 2} \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$，其定义为 $v_0(e_1) = v_0(e_2) = 0$，其中 $e_1 = 1\oplus 0, e_2 = 0\oplus 1$。在 $\mathrm{gr}_v(\Bbbk[x,y]) = \Bbbk[x^{(1)}, y^{(2)}]$ 上的关联分次模是 $\mathrm{gr}_v(\Bbbk[x,y])^{\oplus 2}$。

然而，由于 $\mathcal{O}_X^{\oplus 2}$ 通过 $\partial_x \mapsto e_1, \partial_y \mapsto e_2$与 T_X 同构，赋值 v 所诱导的 $\mathbb{G}_m$在 X 上的作用给出了另一个 v赋值函数 $v_1 : \Bbbk[x,y]^{\oplus 2} \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$，其定义为 $v_1(e_1) = 1$, $v_1(e_2) = 2$，使得关联分次模为 $\mathrm{gr}_v(\Bbbk[x,y])(-1) \oplus \mathrm{gr}_v(\Bbbk[x,y])(-2)$。此模的 HNF 为

$$0 \subset \mathrm{gr}_v(\Bbbk[x,y])(-1) \subset \mathrm{gr}_v(\Bbbk[x,y])(-1)\oplus \mathrm{gr}_v(\Bbbk[x,y])(-2),$$

沿着 $\mathrm{gr}_v(\Bbbk[x,y])(-1)$对 v_1 作赫克变换，得到赋值 v_0+1。因此，在此情形下，可以明确验证最优代数切锥的唯一性。

4.2. 奇点处的最优代数切锥。设 C 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的亏格为 g 的光滑射影曲线，且 L 是 C上的非常丰线丛。设$\phi\colon C \to \mathbb{P}(H^0(C,L)) = \mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}(H^0(C,L)^\vee))$是由完全线性系 $|L|$定义的闭嵌入。令 $\mathbf{H}^0(C,L) := \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(H^0(C,L)^\vee))$，且 $\pi : U := \mathbf{H}^0(C,L) - \{0\} \to \mathbb{P}(H^0(C,L))$为自然投影。定义 X 为 $\pi^{-1}(\phi(C))$在 $\mathbf{H}^0(C,L)$中的闭包。则 X 自然同构于 $\mathrm{Spec}(R)$，其中 $R = \bigoplus_{m\geq 0} H^0(C,mL)$，且 X 具有自然的 $\mathbb{G}_m$作用。现在，$\pi\colon U \to \phi(C) \cong C$ 是对应于线丛 L^{-1}的主 $\mathbb{G}_m$丛。因此，我们有以下$\mathbb{G}_m$等变正合序列:

$$0 \to \mathcal{O}_U \to T_U \xrightarrow{d\pi} \pi^* T_C \to 0.$$

该短正合列下降为 C 上的短正合列，其扩张类为 $-2\pi\sqrt{-1}c_1(L) \in H^1(C, \Omega_C)$:

$$0 \to \mathcal{O}_C \to E \to T_C \to 0. \tag{1}$$

设 v 是 X 上由 $\mathbb{G}_m$-作用诱导的一个赋值，T 是与切层 T_X 相对应的分次模，其 $\mathbb{G}_m$-作用由 X 上的作用诱导；v_T 是 T 上由 T 的分次诱导的 v-赋值函数。则对于 $k \in \mathbb{Z}$，有 $H^0(C, E(k)) = T_k$。因此，E 的稳定性等价于分次模 T 的稳定性。

- 首先，考虑 $g = 0$ 的情形。在这种情形下，X 在顶点 0 处光滑，而正合序列 1 正是 $\mathbb{P}^1$ 的欧拉列，这表明 T 是半稳定的，即 v_T 是最优的。

• 其次，考虑 $g = 1$ 的情形。在这种情形下， X 在 X 的顶点 0 处具有对数典范奇点。正合序列 1 是 $\mathcal{O}_C$ 由自身作延拓得到的唯一非平凡延拓。这表明 v_T 是最优的。

• 最后，考虑 $g \geq 2$ 的情形。在这种情形下， X 在 X 的顶点 0 处具有非对数典范奇点。 E 是不稳定的，而正合序列 1 给出了 E 的 HNF。因此，为构造最优的 v-赋值函数，我们沿着极大不稳定子模执行赫克变换。在进行此步骤之前，我们先证明以下命题：

命题 4.1. 设 $R = \bigoplus_{k\geq 0} R_k$ 是定义在 $R_0 = \Bbbk$ 上的有限型分次环，且 $M = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} M_k$ 是有限生成的分次 R- 模。令 v_M 为与 M 的分次相关联的赋值。对于饱和分次子模 $N = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} N_k \subset M$，沿着 N 对 v_M 进行赫克变换后所得的赋值，其关联分次模为$N \oplus (M/N)(1)$。

证明。令 v'_M 为沿着 N 对 v_M 作的赫克变换。于是有 $M_{v'_M\geq k} = M_{\geq k+1} + N_{\geq k} = N_k \oplus M_{\geq k+1}$，其中 $M_{\geq k} = \bigoplus_{l\geq k} M_l$ 和 $N_{\geq k} = \bigoplus_{l\geq k} N_l$。因此，我们有

$$\mathrm{gr}_{v'_M}(M) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \frac{N_k \oplus M_{k+1} \oplus M_{\geq k+2}}{N_{k+1} \oplus M_{\geq k+2}} = N \oplus (M/N)(1).$$

□

根据构造，这个直和分解与正合序列 3.7 一致；在此情形下，该序列是如下短正合列：

$$0 \to (M/N)(1) \to \mathrm{gr}_{v'_M}(M) \to N \to 0.$$

如果我们对它作 再次通过 N 对 v'_M 作赫克变换，我们得到赋值 $v^{(2)}_M$ ，其定义为

$$M_{v^{(2)}_M\geq k} = N_k \oplus N_{k+1} \oplus M_{\geq k+2},$$

因此，我们有

$$\mathrm{gr}_{v^{(2)}_M}(M) = N \oplus (M/N)(2).$$

归纳地重复这一过程，我们得到 v-赋值函数 $v^{(l)}_M$ ($l \in \mathbb{Z}_{>0}$)，使得

$$\mathrm{gr}_{v^{(l)}_M}(M) = N \oplus (M/N)(l).$$

将此过程应用于我们的设定，我们得到一个最优的 v-赋值函数v'_T ，使得

$$\mathrm{gr}_{v'_T}(T) = R \oplus (T/R)\left(\left\lfloor \frac{2g-2}{\deg(L)} \right\rfloor\right)$$

由于 T/R是秩一分次模，且 $\mu(T/R) = (2-2g)/\deg(L)$，我们得到 v'_T是一个最优 v-赋值函数。

Acknowledgements

作者谨向 Yuji Odaka 致以诚挚的谢意，感谢他在本研究过程中始终给予指导与鼓励，并进行了许多富有启发性的讨论。作者

还要感谢 Eiji Inoue 提供宝贵的建议，并指出若干相关参考文献。作者感谢 Song Sun 在访问日本期间抽出时间讨论这一项目，并给予鼓励性的意见。

作者还感谢京都大学代数几何小组的成员所进行的有益讨论和提出的问题，尤其是在与本工作相关的研讨会报告期间。

References

[1] Shigetoshi Bando. 全纯向量丛的可去奇点。东北数学杂志，第二辑，43(1):61–67，1991。[2] Shigetoshi Bando 和 Yum-Tong Siu。稳定层与爱因斯坦–厄米特度量。1994。[3] Xuemiao Chen 和 Song Sun。反身层的代数切锥。国际数学研究通知，(24):10042–10063，2020。[4]Xuemiao Chen 和 Song Sun。厄米特–杨–米尔斯联络的奇点与 Harder–Narasimhan–Seshadri 滤过。杜克数学杂志，169(14):2629–2695，2020。[5] Xuemiao Chen 和 Song Sun。可容许厄米特–杨–米尔斯联络的解析切锥。几何与拓扑，25(4):2061–2108，2021。[6] Xuemiao Chen 和 Song Sun。反身层、厄米特–杨–米尔斯联络与切锥。数学发明，225(1):73–129，2021。[7] Daniel Huybrechts 和 Manfred Lehn。层模空间的几何。剑桥数学文库。剑桥大学出版社，第2版，2010。

联系方式：hada.yohei.63n@st.kyoto-u.ac.jp 京都大学数学系，
日本京都 606-8285。