含真空的一维标量守恒律的全离散跟驰近似

M. DI FRANCESCO、S. FAGIOLI、V. IORIO、M.D. ROSINI

摘要。我们提出一种用于一维标量守恒律的全离散粒子近似。在对宏观速度作出适当的单调性假设后，我们构造了一族与真空相容的时间离散粒子方程，并证明，由粒子设定得到的适当分段常数密度重构收敛于宏观标量守恒律的唯一熵弱解。

arXiv:2602.01145v1 [math.AP] 1 Feb 2026

1. 引言

采用基于粒子的方法和拉格朗日方法近似一维标量守恒律的熵解，已有悠久而丰富的历史。给定初始密度 $\overline{\rho}\colon \mathbb{R} \to [0, R]$，其中 $R > 0$，我们考虑如下柯西问题

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho\, v(\rho)) = 0, \\ \rho(x,0) = \overline{\rho}(x), \end{cases} \tag{1}$$

其中，速度函数 $v\colon [0,R] \to \mathbb{R}$ 被假设为严格递减。方程 (1) 包含经典的 Lighthill-Whitham-Richards模型，也涵盖更广泛的交通和人群动力学、浅水、沉降、颗粒沉降以及斜面上颗粒流的连续介质描述，参见 [37, 40, 26, 44, 10, 36, 42, 23, 24, 22, 41] 及其中的参考文献。

一种自然的拉格朗日离散由跟随领航者（FTL）系统给出

$$\begin{aligned} &\dot{x}_N(t) = v(0), \\ &\dot{x}_i(t) = v\left(\frac{\ell}{x_{i+1}(t) - x_i(t)}\right), \quad i \in \{0, \dots, N-1\}, \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\ell = \|\overline{\rho}\|_{L^1}/N$，且 $N \in \mathbb{N}$。请注意，为最右侧粒子设定独立的动力学，旨在捕捉从宏观描述过渡到基于粒子的描述时所具有的迎风特性。具体而言，所得格式的迎风性并非由速度 v 本身的符号决定——我们可以假设该速度为负——而是由其单调性决定。引入拉格朗日密度后，这一点会更加清楚

$$R(z,t) = \rho\big(X(z,t), t\big),$$

其中 $X(\cdot, t)$ 表示累积分布函数的伪逆

$$F(x,t) = \int_{-\infty}^{x} \rho(y,t)\, \mathrm{d}y.$$

形式上，将守恒律改写为拉格朗日坐标后，可得 R 满足以下标量守恒律

$$\partial_t R + R^2\, v'(R)\, \partial_z R = 0.$$

当 $v'(R) < 0$时，该方程的特征速度在 z变量下为负，这意味着特征线朝着 z减小的方向传播。换言之，给定拉格朗日位置处的 R 演化取决于位于 z中前方的数值。这表明，拉格朗日表述（以及粒子近似）中的有效迎风方向由 v'的符号决定，而非由 v 本身的符号决定。数值示例见图1。

标量守恒律的宏观与微观描述之间的严格联系在过去几十年中已得到广泛研究。大量文献提出了一种概率方法，例如见 [20,21, 33] 及其参考文献。非线性守恒律的动力学近似也已在 [38]中完成。注意，最初在 [9, 10] 中引入的波前追踪算法（另见 [4, 5, 16, 27] 及其参考文献）同样基于微观—宏观二分，尽管其性质与本文所考虑的不同。

多粒子极限理论带来了另一种影响深远的视角， [7, 14]。特别是，在[14]中，作者严格推导出非线性标量守恒律 (1) 可由微观 FTL 系统 (2) 得到。他们证明，与该粒子系统相关的适当离散化密度收敛于 (1) 的唯一 Kruzhkov 熵解。他们的分析依赖于离散 BV 估计和离散的 Oleˇınik 型不等式，

2020 数学主题分类。 35L60, 35L03, 65M12, 76A30.关键词与短语。 标量守恒律，确定性粒子近似，Theta 方法，熵解。

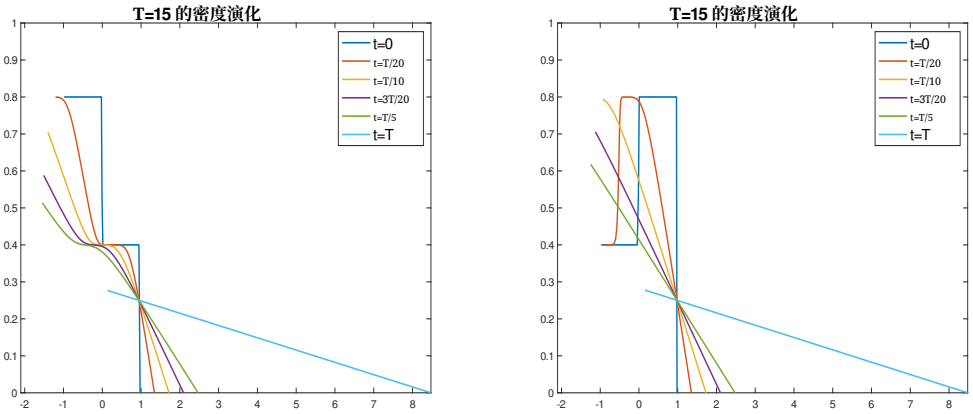


图1。近似解 ρ_n 在不同时间绘制，对应于 $v(\rho) = \frac{1}{2} - \rho$，初始数据为 $\bar{\rho}(x) = 0.8\,\mathbf{1}_{[-1,0)}(x) + 0.4\,\mathbf{1}_{[0,1)}(x)$（左）和 $\bar{\rho}(x) = 0.4\,\mathbf{1}_{[-1,0)}(x) + 0.8\,\mathbf{1}_{[0,1)}(x)$（右）。我们采用下文（3）中所述格式的隐式版本（$\theta = 0$），其中 $\ell = 0.012$ 和 $\tau = 0.01$。密度 ρ_n 取值既有大于 1/2的，也有小于 1/2的；因此，速度 $v(\rho_n)$ 既取负值，也取正值。此外，ρ_n 近似于（1）的精确解，显示出格式中的正确迎风性质。

这些性质已在离散层面得到体现。上述方法也已扩展到不同背景下的其他方程，参见 [3, 11, 12, 13, 15, 18, 17, 19] 及其中的参考文献。

这些收敛结果基于连续时间 粒子动力学。在数值实现该格式时，时间离散不可避免，而显式欧拉近似只有在初始密度严格为正的假设下才能保持稳定，见 [27, 29, 28, 30]。

本文旨在通过采用一种通用的 θ 方法，引入对方程 (1) 的全离散 多粒子近似，从而克服这些局限：

$$x_i^{m+1} = x_i^m + \tau\left(\theta\, v\left(\frac{\ell}{x_{i+1}^m - x_i^m}\right) + (1-\theta)\, v\left(\frac{\ell}{x_{i+1}^{m+1} - x_i^{m+1}}\right)\right), \qquad i \in \{0, \dots, N-1\}, \tag{3}$$

并对最右侧粒子施加适当的条件。上文中，$\ell = \|\overline{\rho}\|_{L^1}/N$，其中 $N \in \mathbb{N}$，τ 表示时间步长，而 $\theta \in [0,1]$ 是隐式欧拉（$\theta = 0$）、克兰克–尼科尔森（$\theta = 1/2$）与显式欧拉（$\theta = 1$）格式之间的插值参数。这类格式在常微分方程和抛物型方程的数值处理中十分经典 [39, 25, 32, 8],，但据作者所知，此前尚未研究过将其用于双曲守恒律的基于粒子的近似，尤其是在存在真空的情况下。

本文的主要贡献在于为全离散粒子系统建立了兼容真空的稳定性框架，并证明适当的分片常数近似收敛于方程 (1) 的熵解。具体而言，在适当的 CFL 型条件下（见下文 (15)），我们证明了对于所有 $\theta \in [0,1]$,，全离散粒子动力学均具有全局适定性。这使得真空可以得到自然处理，同时不损害格式的稳定性。随后，我们针对适当重构的全离散密度，证明了 L^∞ 和 BV 估计；这些估计对于粒子数和时间步数均一致，从而将 [14] 的紧性理论推广到了全离散情形。结合离散稳定性、紧性论证和最优输运工具，我们证明，由格式 (3) 适当构造的全离散密度在 $L^1_{t,\,x}$ 中强收敛于方程 (1) 的唯一 Kruzhkov 熵解，且无需对初始密度 ρ 施加严格正的下界。这里需要指出的是，在 CFL 型条件下，解可以收敛到弱解；而要收敛到熵解，则需要施加一项技术性限制：即时间步长 τ 必须比粒子尺度 ℓ 趋于零得更快。这一要求比标准 CFL 型条件更严格。尽管自然的双曲尺度规定了数值关系 $\tau = \mathcal{O}(\ell)$，熵解的识别可能要求时间比空间更快地趋于零，例如，参见依赖紧性论证或变量倍增技巧的文献 [35, 5]。在我们的情形下，条件 $\tau = o(\ell)$ 纯属技术和分析上的限制，与格式的性质无关。乍看之下，该条件似乎隐含着抛物尺度，因而暗示存在数值黏性。然而，这种情况不可能发生，因为该格式收敛于唯一熵解，从而排除了任何人工黏性。

总体而言，这项工作首次为标量守恒律提供了全面的全离散跟随领导者近似，该近似在真空存在时保持稳定，并且与广泛的时间离散化相兼容。通过这种方式，它统一并拓展了 [14, 28], 中开启的方法，为所考虑的方程建立了稳健的数值与解析框架。

本文组织如下。第2节列出所有必要的假设，并介绍精确的粒子设定及其全局适定性；后者等价于定义离散化密度的可能性，见定理 2.2。随后，我们在定理2.5中陈述关于收敛到熵弱解的主要结果。第3节和第4节专门用于证明上述结果。特别地，在第3节中，我们给出一致的 L^∞ 和 BV 界，从而能够证明定理 2.2；而第4节包含证明定理2.5所需的全部要素。附录A给出了一个关于 L^1、 BV 与1-Wasserstein空间之间插值的技术引理。

2. 数值粒子格式与主要结果

在本节中，我们介绍数值格式，并证明相应的离散密度在全局上是良定义的，见定理 2.2。我们还证明，该格式产生一列收敛于柯西问题 (1) 的熵解的离散密度，见定理2.5。

2.1. 格式。 用 $L^\infty_c(\mathbb{R})$ 表示（关于勒贝格测度的）具有紧支集的本质有界函数空间。用 $R>0$ 表示最大密度。我们将在以下基本假设下进行

$$v \in C^1([0,R]), \qquad v'(\rho)<0 \quad \forall \rho \in [0,R], \tag{4}$$

$$\overline{\rho} \in L^\infty_c(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R}), \qquad 0 \leqslant \overline{\rho}(x) \leqslant R \text{ for a.e. } x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

固定时间范围 $T>0$、两个正整数 $M, N \in \mathbb{N}$ 以及参数 $\theta \in [0,1]$。然后我们令

$$x_i^{m+1} = x_i^m + \tau\left(\theta\, v\big(R_i^m\big) + (1-\theta)\, v\big(R_i^{m+1}\big)\right), \quad i \in \{0,\dots,N\},\ m \in \{0,\dots,M-1\}, \tag{6}$$

其中

$$R_i^m = \begin{cases} \dfrac{\ell}{x_{i+1}^m - x_i^m} & \text{if } i \in \{0,\dots,N-1\}, \\ 0 & \text{if } i = N, \end{cases} \qquad m \in \{0,\dots,M\}, \tag{7}$$

and

$$\tau = T/M, \qquad \ell = L/N, \qquad L = \big\|\overline{\rho}\big\|_{L^1}. \tag{8}$$

系统 (6) 与初始条件

$$x_i^0 = \overline{x}_i, \qquad i \in \{0,\dots,N\}, \tag{9}$$

其中初始位置递归定义如下

$$\begin{cases} \overline{x}_0 = \min\big(\operatorname{supp}(\overline{\rho})\big), \\ \overline{x}_{i+1} = \min\left\{ x \geqslant \overline{x}_i \ :\ \displaystyle\int_{\overline{x}_i}^{x} \overline{\rho}(y)\,\mathrm{d}y \geqslant \ell \right\}, \qquad i \in \{0,\dots,N-1\}. \end{cases} \tag{10}$$

注意到

$$x_N^{m+1} = x_N^m + \tau\, v(0) = \overline{x}_N + t^{m+1}\, v(0), \qquad m \in \{0,\dots,M-1\}, \tag{11}$$

其中

$$t^m = m\,\tau.$$

注 2.1. 为了有效求解粒子系统 (6)-(9)，注意到给定时刻 $t^m = m\tau$ 的粒子构形$x_0^m < \ldots < x_N^m$，时刻 t^{m+1}, $x_0^{m+1} < \ldots < x_N^{m+1}$ 的粒子位置可由(6) 和(9)推出。事实上，位置 x_N^{m+1} 可由恒等式 (11) 明确得出。然后，只要已知位置 x_i^m, x_{i+1}^m 和 x_{i+1}^{m+1}，位置 x_i^{m+1} 也就确定了。为此，将(6) 写为

$$x_i^{m+1} - (1-\theta)\,\tau\, v\left(\frac{\ell}{x_{i+1}^{m+1} - x_i^{m+1}}\right) = x_i^m + \theta\,\tau\, v\left(\frac{\ell}{x_{i+1}^m - x_i^m}\right)$$

并注意到映射

$$\left(-\infty, x_{i+1}^{m+1} - \frac{\ell}{R}\right] \ni x \mapsto x - (1-\theta)\,\tau\, v\left(\frac{\ell}{x_{i+1}^{m+1} - x}\right) \tag{12}$$

连续可微，其导数为

$$1 - (1-\theta)\,\tau\, v'\left(\frac{\ell}{x_{i+1}^{m+1} - x}\right)\frac{\ell}{\left(x_{i+1}^{m+1} - x\right)^2} \geqslant 1$$

鉴于假设 (4)，映射(12) 是可逆的，因此位置 x_i^{m+1} 可由标准隐函数定理良好定义。

我们用 $[v]_{\mathrm{Lip}}$ 表示 v 的 Lipschitz 常数，并令

$$V = \|v\|_{L^\infty} = \max\{|v(0)|, |v(R)|\}. \tag{13}$$

我们强调，速度 $v(\rho)$ 可以为负，即 $v(\rho) \in \mathbb{R}$。这一假设在交通流建模中并不常见，但为了在数学和建模框架下获得更一般的结果，我们倾向于不将速度限制为非负。

与格式 (6)-(9) 相关的离散密度定义在 $\mathbb{R} \times [0,T)$ 上：

$$\rho_N^M(x,t) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{N-1} R_i^m \, \mathbf{1}_{[x_i^m, x_{i+1}^m)}(x) \, \mathbf{1}_{[t^m, t^{m+1})}(t) \tag{14}$$

并通过连续性延拓至 $t = T$。正如下一个定理所示，ρ_N^M 在全局范围内定义良好；证明见第 3 节。

定理 2.2。考虑一个速度函数 $v\colon [0,R] \to \mathbb{R}$ 和一个初始密度 $\overline{\rho}\colon \mathbb{R} \to [0,R]$，它们分别满足(4)和(5)。固定时间范围 $T > 0$、参数 $\theta \in [0,1]$ 以及两个正整数 M、$N \in \mathbb{N}$，使其满足以下 *CFL* 型条件

$$\theta \, N \, T \, [v]_{\mathrm{Lip}} \, R^2 < L \, M, \tag{15}$$

其中 $L = \|\overline{\rho}\|_{L^1(\mathbb{R})}$。在这种情况下，离散密度 (14) 在 $\mathbb{R} \times [0,T]$ 上有良好定义，并满足以下估计

$$(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T] \implies 0 \leqslant \rho_N^M(x,t) \leqslant R, \tag{16}$$

$$m \in \{0, \dots, M-1\} \implies \mathrm{TV}\left[\rho_N^M(\,\cdot\,, t^{m+1})\right] \leqslant \mathrm{TV}\left[\rho_N^M(\,\cdot\,, t^m)\right] \leqslant \mathrm{TV}\left[\overline{\rho}\right]. \tag{17}$$

此外

$$0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T \implies \left\| \rho_N^M(\,\cdot\,, t_2) - \rho_N^M(\,\cdot\,, t_1) \right\|_{L^1} \leqslant C \, (t_2 - t_1 + \tau)^{1/2}, \tag{18}$$

其中 τ 由(8)$_l$ 给出，且 $C = 4\left(2\,\mathrm{TV}\left[\overline{\rho}\right] \; L\,V\right)^{1/2}$。

2.2. **主要结果**。现在我们可以陈述主要结果了，该结果表明离散密度(14)收敛于柯西问题(1)的熵解，详见第4节。为完整起见，我们回顾弱解和熵解的定义。

定义2.3。柯西问题(1) 的弱解是一个连续映射 $\rho\colon [0,T] \to L_c^\infty(\mathbb{R})$，并满足

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\rho(x,t)\,\partial_t\varphi + f(\rho)\,\partial_x\varphi\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} \overline{\rho}(x)\,\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x = 0$$

对于每个检验函数 $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times [0,T)])$，其中 $f(\rho) = \rho\, v(\rho)$。

众所周知，标量守恒律的弱解通常并不唯一。施加熵容许条件后，便可恢复唯一性；这些条件能够选出具有物理意义的解，并确保解对于初始数据的扰动具有稳定性。在标量情形下，熵解在 Kruzhkov 意义下是唯一的；例如参见 [5, 10, 34]。

定义 2.4. 柯西问题(1) 的熵解是连续映射 $\rho\colon [0,T] \to L_c^\infty(\mathbb{R})$，并满足

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(|\rho - k|\,\partial_t\varphi + \mathrm{sign}(\rho - k)\,(f(\rho) - f(k))\,\partial_x\varphi\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} \overline{\rho}(x)\,\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x \geqslant 0 \tag{19}$$

对每个 $k \in [0,R]$ 以及每个非负检验函数 $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times [0,T)])$ 均成立，其中 $f(\rho) = \rho\, v(\rho)$。

下面给出定理，证明见第 4 节。

定理2.5. 设速度函数 $v\colon [0,R] \to \mathbb{R}$ 和初始密度 $\overline{\rho}\colon \mathbb{R} \to [0,R]$ 分别满足(4)和(5)。固定时间范围 $T > 0$、参数 $\theta \in [0,1]$ 以及两个满足 *CFL* 型条件的正整数单调序列$(M_n)_n$、$(N_n)_n \in \mathbb{N}$

$$\theta \, N_n \, T \, [v]_{\mathrm{Lip}} \, R^2 < L \, M_n, \tag{20}$$

其中 $L = \|\overline{\rho}\|_{L^1}$。如果

$$\lim_{n \to +\infty} N_n = +\infty,$$

则离散密度序列 $(\rho_n)_n$ 连同

$$\rho_n = \rho_{N_n}^{M_n}, \tag{21}$$

参见 (14)，收敛（至多取一个子序列）到柯西问题(1)的一个弱解。此外，*if*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{N_n}{M_n}=0, \tag{22}$$

那么，离散密度 $(\rho_n)_n$ （整体）序列收敛到柯西问题(1)的唯一熵解。

注 2.6. 原则上，只需在定理 *2.5* 中证明极限是一个熵解即可。事实上，只需在(19)中取 $k=0$ 和 $k=R$，便可推出任何熵解也是弱解。然而，获得弱解所需的假设比恢复熵解所需的假设限制更少，参见(22)。因此，将这两种情形分开处理更为方便。

3. 粒子格式的适定性与稳定性估计

本节旨在证明定理 2.2 及其中列出的估计。

3.1. 的一致有界性 R_i^m。原则上，如果任一差值 $x_{i+1}^m-x_i^m$超出区间 $[\ell/R,+\infty)$，则方程 (6)-(9) 的解可能在有限次迭代后不再存在。事实上，在这种情况下，式 (7) 中给出的量 R_i^m要么未定义，要么落在函数 v的定义域 $[0,R]$ 之外。因此，为了证明对所有离散时间 $t^m=m\tau,\ m\in\{1,\dots,M\}$均全局存在，我们需要证明量 $R_i^m,i\in\{0,\dots,N-1\},\ m\in\{0,\dots,M\}$ 属于 $[0,R]$，这正是本节的目标。

根据假设，CFL 型条件 (15) 成立，即

$$\theta\,N\,T\,[v]_{\mathrm{Lip}}\,R^2<L\,M \quad\Longleftrightarrow\quad \left(\theta\,[v]_{\mathrm{Lip}}\,R^2\right)\tau<\ell. \tag{23}$$

为后文使用，我们引入

$$d_i^m=x_{i+1}^m-x_i^m,\qquad i\in\{0,\dots,N-1\}. \tag{24}$$

注意到 $R_i^m=\ell/d_i^m$ 对所有 $i\in\{0,\dots,N-1\}$ 成立。

引理 3.1. $R_i^0\in(0,R]$ 对所有 $i\in\{0,\dots,N-1\}$。

证明。 固定 $i\in\{0,\dots,N-1\}$。由 (7)、初始位置的定义 (9)、(10) 以及 $(5)_2$，我们有

$$R_i^0=\frac{\ell}{\overline{x}_{i+1}-\overline{x}_i}=\fint_{\overline{x}_i}^{\overline{x}_{i+1}}\overline{\rho}(y)\,\mathrm{d}y\leqslant\left\|\overline{\rho}\right\|_{L^\infty}\leqslant R.$$

最后，由 (10) 我们有 $\overline{x}_{i+1}-\overline{x}_i>0$，因为 $\ell>0$ 且 $\overline{\rho}\in BV(\mathbb{R})$ 由 $(5)_1$；因此 $R_i^0>0$ 由 (7) 和 (9)。 □

引理 3.2. 对所有 $m\in\{0,\dots,M-1\}$，我们有

$$0<R_{N-1}^{m+1}\leqslant R_{N-1}^m\leqslant R. \tag{25}$$

证明。 我们将 v 的定义扩展到整个区间 $\mathbb{R}$，令所有 $\rho<0$ 都满足 $v(\rho)=v(0)$，所有 $\rho>R$ 都满足 $v(\rho)=v(R)$。由引理 3.1 可知，$0<R_{N-1}^0\leqslant R$。现在假设

$$0<R_{N-1}^m\leqslant R \quad\Longleftrightarrow\quad d_{N-1}^m\geqslant\ell/R.$$

由 (11) 和 $(6)_{i=N-1}$，我们有

$$\begin{aligned}d_{N-1}^{m+1}&=x_N^{m+1}-x_{N-1}^{m+1}=\left(x_N^m+\tau\,v(0)\right)-\left(x_{N-1}^m+\theta\,\tau\,v\left(R_{N-1}^m\right)+(1-\theta)\,\tau\,v\left(R_{N-1}^{m+1}\right)\right)\\&=d_{N-1}^m+\tau\left(v(0)-\theta\,v\left(R_{N-1}^m\right)-(1-\theta)\,v\left(R_{N-1}^{m+1}\right)\right)\\&\geqslant d_{N-1}^m,\end{aligned}$$

其中，最后一个估计由观察到对任意 $\rho\in\mathbb{R}$ 都有 $v(\rho)\leqslant v(0)$，并回忆起 $\theta\in[0,1]$ 而得。因此，$d_{N-1}^{m+1}\geqslant d_{N-1}^m\geqslant\ell/R>0$，从而 $0<R_{N-1}^{m+1}\leqslant R_{N-1}^m\leqslant R$。□

命题3.3。 假设满足 *CFL* 型条件(23)。则有

$$0<R_i^m\leqslant R\qquad \textit{for all } i\in\{0,\dots,N-1\}\ \textit{and}\ m\in\{0,\dots,M\}. \tag{26}$$

证明。 我们通过对所有 $\rho<0$ 设定 $v(\rho)=v(0)$，并对所有 $\rho>R$ 设定 $v(\rho)=v(R)$，将 v 的定义扩展到整个区间 $\mathbb{R}$。注意，(26) 等价于满足 $d_i^m\geqslant\ell/R$。回顾引理 3.1 和引理 3.2 可知，对于所有 $i\in\{0,\dots,N-1\}$，都有 $d_i^0\geqslant\ell/R$；对于所有 $m\in\{0,\dots,M\}$，都有 $d_{N-1}^m\geqslant\ell/R$。反设存在 $m+1\in\{1,\dots,M\}$，使得对于某个 $i\in\{0,\dots,N-2\}$，(26) 不成立。不失一般性，假设 $m+1$ 是 (26) 首次不成立的离散时间，并且 i 是满足 $d_i^{m+1}<\ell/R$ 的最大指标。由 (6)、v 的单调性以及假设 $d_i^{m+1}<\ell/R\leqslant d_{i+1}^{m+1}$，可得

$$d_i^{m+1}=d_i^m+\theta\,\tau\left(v\left(\ell/d_{i+1}^m\right)-v\left(\ell/d_i^m\right)\right)+(1-\theta)\,\tau\left(v(\ell/d_{i+1}^{m+1})-v(\ell/d_i^{m+1})\right)\geqslant d_i^m+\alpha\left(d_{i+1}^m-d_i^m\right), \tag{27}$$

其中

$$\alpha = \theta\,\tau\,\frac{v\Big(\ell/d_{i+1}^m\Big) - v\big(\ell/d_i^m\big)}{d_{i+1}^m - d_i^m}.$$

由于 v 递减，映射 $d \mapsto v(\ell/d)$ 递增，因此

$$\alpha = \theta\,\tau\,\frac{v\Big(\ell/d_{i+1}^m\Big) - v\big(\ell/d_i^m\big)}{d_{i+1}^m - d_i^m} \geqslant 0.$$

我们断言 $\alpha < 1$。事实上，由 R_i^m, $R_{i+1}^m \leqslant R$ 和 (23) 可得

$$\alpha = \theta\,\tau\,\frac{v\Big(R_{i+1}^m\Big) - v\big(R_i^m\big)}{\frac{\ell}{R_{i+1}^m} - \frac{\ell}{R_i^m}} \leqslant \theta\,\tau\,[v]_{\mathrm{Lip}}\,\frac{\Big|R_{i+1}^m - R_i^m\Big|}{\ell\left|\frac{1}{R_{i+1}^m} - \frac{1}{R_i^m}\right|} = \theta\,\frac{N\,T}{L\,M}\,[v]_{\mathrm{Lip}}\,R_i^m\,R_{i+1}^m \leqslant \theta\,\frac{N\,T}{L\,M}\,[v]_{\mathrm{Lip}}\,R^2 < 1.$$

因此，我们有 $\alpha \in [0,1)$。由 $\min\{d_i^m, d_{i+1}^m\} \geqslant \ell/R$ 和 (27) 可得

$$d_i^{m+1} \geqslant d_i^m + \alpha\left(d_{i+1}^m - d_i^m\right) = d_i^m\,(1-\alpha) + \alpha\,d_{i+1}^m \geqslant \ell/R,$$

这与我们的假设 $d_i^{m+1} < \ell/R$矛盾。 □

根据命题3.3，量 R_i^m由 R 一致有界且严格大于零。因此，粒子系统 (6)-(9) 可在所有离散时间 t^m, $m \in \{0,\dots,M-1\}$重新启动，因为粒子 x_i^m的位置始终与 $(-\infty, x_{i+1}^m)$ 的边界至少相距固定量 ℓ/R。因此，按构造定义的 (14) 中的离散密度 $\rho_N^M(x,t)$ 在 $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T]$ 上全局有定义，并满足估计 (16)。

3.2. ***BV*-估计**。 本小节旨在对 ρ_N^M 在某个紧嵌入于 $L^1(\mathbb{R}\times[0,T])$ 的函数空间中给出进一步的一致估计。守恒律数值方法中的标准工具是估计 ρ_N^M 在 x 中的全变差。为便于后文使用，定义

$$\rho_N^m(x) = \rho_N^M(x,t^m) = \sum_{i=0}^{N-1} R_i^m\,\mathbf{1}_{[x_i^m,\,x_{i+1}^m)}(x), \qquad m \in \{0,\dots,M\}. \tag{28}$$

对于固定的 $m \in \{0,\dots,M\}$, ρ_N^m 关于空间变量 x 的全变差为

$$\mathrm{TV}\big[\rho_N^m\big] = R_0^m + \sum_{i=0}^{N-2}\Big|R_{i+1}^m - R_i^m\Big| + R_{N-1}^m.$$

在 给出我们的 *BV* 估计之前，为便于后文使用，我们先推导出 R 的离散演化律 $_i^m$:

$$R_i^{m+1} - R_i^m = -\tau\,\frac{R_i^m\,R_i^{m+1}}{\ell}\left[\theta\left(v\big(R_{i+1}^m\big) - v\big(R_i^m\big)\right) + (1-\theta)\left(v\Big(R_{i+1}^{m+1}\Big) - v\big(R_i^{m+1}\big)\right)\right], \tag{29}$$

对 $i \in \{0,\dots,N-1\}$。随后，我们给出式 (28) 中重构密度的 *BV* 界 .

命题 3.4。 假设 *CFL* 型条件 (23) 成立。那么，

$$\mathrm{TV}\big[\rho_N^{m+1}\big] \leqslant \mathrm{TV}\big[\rho_N^m\big] \leqslant \mathrm{TV}\big[\overline{\rho}\big]$$

对所有 $m \in \{0,\dots,M-1\}$ 均成立。

证明。 由于 $\rho_N^0(\cdot,0)$ 仅取 ρ的某些平均值 $R_i^0 = \fint_{x_i^0}^{x_{i+1}^0}\overline{\rho}(y)\,\mathrm{d}y$、 $i \in \{0,\dots,N-1\}$, 可以容易地证明 $\mathrm{TV}\big[\rho_N^0\big] \leqslant \mathrm{TV}\big[\overline{\rho}\big]$。我们计算

$$\begin{aligned}
\mathrm{TV}\big[\rho_N^{m+1}\big] - \mathrm{TV}\big[\rho_N^m\big] &= \big(R_0^{m+1} - R_0^m\big) + \big(R_{N-1}^{m+1} - R_{N-1}^m\big) + \sum_{i=0}^{N-2}\left(\Big|R_{i+1}^{m+1} - R_i^{m+1}\Big| - \Big|R_{i+1}^m - R_i^m\Big|\right)\\
&= \big(R_0^{m+1} - R_0^m\big) + \big(R_{N-1}^{m+1} - R_{N-1}^m\big) + \sum_{i=0}^{N-2}\mathrm{sign}\Big(R_{i+1}^{m+1} - R_i^{m+1}\Big)\big(R_{i+1}^{m+1} - R_i^{m+1}\big)\\
&\quad - \sum_{i=0}^{N-2}\mathrm{sign}\big(R_{i+1}^m - R_i^m\big)\big(R_{i+1}^m - R_i^m\big)\\
&= \big(R_0^{m+1} - R_0^m\big) + \big(R_{N-1}^{m+1} - R_{N-1}^m\big)
\end{aligned}$$

$$+\sum_{i=0}^{N-2}\operatorname{sign}\left(R_{i+1}^{m+1}-R_i^{m+1}\right)\left[\left(R_{i+1}^{m+1}-R_i^{m+1}\right)-\left(R_{i+1}^m-R_i^m\right)\right]$$
$$+\sum_{i=0}^{N-2}\left[\operatorname{sign}\left(R_{i+1}^{m+1}-R_i^{m+1}\right)-\operatorname{sign}\left(R_{i+1}^m-R_i^m\right)\right]\left(R_{i+1}^m-R_i^m\right)$$

从而

$$\begin{aligned}\mathrm{TV}\left[\rho_N^{m+1}\right]-\mathrm{TV}\left[\rho_N^m\right]=&\left(R_0^{m+1}-R_0^m\right)+\left(R_{N-1}^{m+1}-R_{N-1}^m\right)+\sum_{i=0}^{N-2}\operatorname{sign}\left(R_{i+1}^{m+1}-R_i^{m+1}\right)\left(R_{i+1}^{m+1}-R_{i+1}^m\right)\\&-\sum_{i=0}^{N-2}\operatorname{sign}\left(R_{i+1}^{m+1}-R_i^{m+1}\right)\left(R_i^{m+1}-R_i^m\right)\\&+\sum_{i=0}^{N-2}\left[\operatorname{sign}\left(R_{i+1}^{m+1}-R_i^{m+1}\right)-\operatorname{sign}\left(R_{i+1}^m-R_i^m\right)\right]\left(R_{i+1}^m-R_i^m\right).\end{aligned}$$

利用分部求和可得

$$\begin{aligned}\mathrm{TV}\left[\rho_N^{m+1}\right]-\mathrm{TV}\left[\rho_N^m\right]=&\left(R_0^{m+1}-R_0^m\right)+\left(R_{N-1}^{m+1}-R_{N-1}^m\right)\\&+\operatorname{sign}\left(R_{N-1}^{m+1}-R_{N-2}^{m+1}\right)\left(R_{N-1}^{m+1}-R_{N-1}^m\right)-\operatorname{sign}\left(R_1^{m+1}-R_0^{m+1}\right)\left(R_0^{m+1}-R_0^m\right)\\&+\left[\operatorname{sign}\left(R_1^{m+1}-R_0^{m+1}\right)-\operatorname{sign}\left(R_1^m-R_0^m\right)\right]\left(R_1^m-R_0^m\right)\\&+\sum_{i=1}^{N-2}\left[\operatorname{sign}\left(R_i^{m+1}-R_{i-1}^{m+1}\right)-\operatorname{sign}\left(R_{i+1}^{m+1}-R_i^{m+1}\right)\right]\left(R_i^{m+1}-R_i^m\right)\\&+\sum_{i=1}^{N-2}\left[\operatorname{sign}\left(R_{i+1}^{m+1}-R_i^{m+1}\right)-\operatorname{sign}\left(R_{i+1}^m-R_i^m\right)\right]\left(R_{i+1}^m-R_i^m\right).\end{aligned}\tag{30}$$

令

$$\begin{aligned}A_{N-1}=&\left[1+\operatorname{sign}\left(R_{N-1}^{m+1}-R_{N-1}^{m+1}\right)\right]\left(R_{N-1}^{m+1}-R_{N-1}^m\right),\\A_0=&\left[1-\operatorname{sign}\left(R_1^{m+1}-R_0^{m+1}\right)\right]\left(R_0^{m+1}-R_0^m\right)+\left[\operatorname{sign}\left(R_1^{m+1}-R_0^{m+1}\right)-\operatorname{sign}\left(R_1^m-R_0^m\right)\right]\left(R_1^m-R_0^m\right).\end{aligned}$$

注意到，(25)意味着对所有 $m\in\{0,\dots,M-1\}$ 都有 $R_{N-1}^{m+1}-R_{N-1}^m\leqslant 0$，这保证了 $A_{N-1}\leqslant 0$。引入记号

$$\Delta v_i^m=\begin{cases}\dfrac{v\left(R_{i+1}^m\right)-v\left(R_i^m\right)}{R_{i+1}^m-R_i^m} & \text{if } R_{i+1}^m\neq R_i^m,\\ v'\left(R_i^m\right) & \text{otherwise,}\end{cases}\qquad i\in\{0,\dots,N-2\},\ m\in\{0,\dots,M\}.$$

注意到 $\Delta v_i^m\leqslant 0$, $i\in\{0,\dots,N-2\}$, $m\in\{0,\dots,M\}$，根据 $v.$ 的单调性，利用 (29) 对项 $R_0^{m+1}-R_0^m$，A_0 可将其重排为

$$\begin{aligned}A_0=&\left[1-\operatorname{sign}\left(R_1^{m+1}-R_0^{m+1}\right)\right]\left[-\tau\frac{R_0^m\,R_0^{m+1}}{\ell}\right]\left[\theta\left(v\left(R_1^m\right)-v\left(R_0^m\right)\right)+(1-\theta)\left(v\left(R_1^{m+1}\right)-v\left(R_0^{m+1}\right)\right)\right]\\&+\left[\operatorname{sign}\left(R_1^{m+1}-R_0^{m+1}\right)-\operatorname{sign}\left(R_1^m-R_0^m\right)\right]\left(R_1^m-R_0^m\right)\\=&\left[1-\operatorname{sign}\left(R_1^{m+1}-R_0^{m+1}\right)\right]\left(\tau\frac{R_0^m\,R_0^{m+1}}{\ell}\right)(1-\theta)\left(-\Delta v_0^{m+1}\right)\left(R_1^{m+1}-R_0^{m+1}\right)\\&+\operatorname{sign}\left(R_1^{m+1}-R_0^{m+1}\right)\left[1-\tau\frac{R_0^m\,R_0^{m+1}}{\ell}\theta\left(-\Delta v_0^m\right)\right]\left(R_1^m-R_0^m\right)\\&+\left[\tau\frac{R_0^m\,R_0^{m+1}}{\ell}\theta\left(-\Delta v_0^m\right)-\operatorname{sign}\left(R_1^m-R_0^m\right)\right]\left(R_1^m-R_0^m\right).\end{aligned}$$

上面最后一个右端中的第一项非正，因为

$$\left[1-\operatorname{sign}\left(R_1^{m+1}-R_0^{m+1}\right)\right]\left(\tau\frac{R_0^m\,R_0^{m+1}}{\ell}\right)(1-\theta)\left(-\Delta v_0^{m+1}\right)\left(R_1^{m+1}-R_0^{m+1}\right)$$

$$= -2\left[R_0^{m+1}-R_1^{m+1}\right]_+\left(\tau\frac{R_0^m\,R_0^{m+1}}{\ell}\right)(1-\theta)\left(-\Delta v_0^{m+1}\right)\leqslant 0.$$

此外，由于 $0\leqslant -\Delta v_0^{m+1}\leqslant [v]_{\mathrm{Lip}}$，利用 CFL条件 (23) 以及命题3.3中的结果，我们可以推得

$$1-\tau\frac{R_0^m\,R_0^{m+1}}{\ell}\theta\left(-\Delta v_0^m\right)\geqslant 1-\tau\frac{R^2}{\ell}\theta\,[v]_{\mathrm{Lip}}>0,$$

因此，剩余各项有如下界

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sign}\left(R_1^{m+1}-R_0^{m+1}\right)\left[1-\tau\frac{R_0^m\,R_0^{m+1}}{\ell}\theta\left(-\Delta v_0^m\right)\right]\left(R_1^m-R_0^m\right)\\
&\quad+\left[\tau\frac{R_0^m\,R_0^{m+1}}{\ell}\theta\left(-\Delta v_0^m\right)-\operatorname{sign}\left(R_1^m-R_0^m\right)\right]\left(R_1^m-R_0^m\right)\\
&\leqslant\left[1-\tau\frac{R_0^m\,R_0^{m+1}}{\ell}\theta\left(-\Delta v_0^m\right)\right]\left|R_1^m-R_0^m\right|+\tau\frac{R_0^m\,R_0^{m+1}}{\ell}\theta\left(-\Delta v_0^m\right)\left|R_1^m-R_0^m\right|-\left|R_1^m-R_0^m\right|=0.
\end{aligned}$$

因此，也有 $A_0\leqslant 0$。

现在我们证明 右端(30)中的最后两行是非正的。由(29)，我们写成

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N-2}\left[\operatorname{sign}\left(R_i^{m+1}-R_{i-1}^{m+1}\right)-\operatorname{sign}\left(R_{i+1}^{m+1}-R_i^{m+1}\right)\right]\left(R_i^{m+1}-R_i^m\right)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{N-2}\left[\operatorname{sign}\left(R_{i+1}^{m+1}-R_i^{m+1}\right)-\operatorname{sign}\left(R_{i+1}^m-R_i^m\right)\right]\left(R_{i+1}^m-R_i^m\right)\\
&=\sum_{i=1}^{N-2}\operatorname{sign}\left(R_{i+1}^{m+1}-R_i^{m+1}\right)\left(1-\tau\frac{R_i^m\,R_i^{m+1}}{\ell}\theta\left(-\Delta v_i^m\right)\right)\left(R_{i+1}^m-R_i^m\right)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{N-2}\operatorname{sign}\left(R_i^{m+1}-R_{i-1}^{m+1}\right)\tau\frac{R_i^m\,R_i^{m+1}}{\ell}\theta\left(-\Delta v_i^m\right)\left(R_{i+1}^m-R_i^m\right)\\
&\quad-\sum_{i=1}^{N-2}\operatorname{sign}\left(R_{i+1}^m-R_i^m\right)\left(R_{i+1}^m-R_i^m\right)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{N-2}\left[\left[\operatorname{sign}\left(R_i^{m+1}-R_{i-1}^{m+1}\right)-\operatorname{sign}\left(R_{i+1}^{m+1}-R_i^{m+1}\right)\right]\tau\frac{R_i^m\,R_i^{m+1}}{\ell}(1-\theta)\left(-\Delta v_i^{m+1}\right)\right]\left(R_{i+1}^{m+1}-R_i^{m+1}\right).
\end{aligned}$$

现在，由于$0\leqslant -\Delta v_i^{m+1}\leqslant [v]_{\mathrm{Lip}}$，CFL条件(23)和命题3.3中的结果可推出

$$1-\tau\frac{R_i^m\,R_i^{m+1}}{\ell}\theta\left(-\Delta v_i^m\right)\geqslant 1-\tau\frac{R^2}{\ell}\theta\,[v]_{\mathrm{Lip}}>0.$$

因此，很容易得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N-2}\operatorname{sign}\left(R_{i+1}^{m+1}-R_i^{m+1}\right)\left(1-\tau\frac{R_i^m\,R_i^{m+1}}{\ell}\theta\left(-\Delta v_i^m\right)\right)\left(R_{i+1}^m-R_i^m\right)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{N-2}\operatorname{sign}\left(R_i^{m+1}-R_{i-1}^{m+1}\right)\tau\frac{R_i^m\,R_i^{m+1}}{\ell}\theta\left(-\Delta v_i^m\right)\left(R_{i+1}^m-R_i^m\right)-\sum_{i=1}^{N-2}\operatorname{sign}\left(R_{i+1}^m-R_i^m\right)\left(R_{i+1}^m-R_i^m\right)\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{N-2}\left[\left(1-\tau\frac{R_i^m\,R_i^{m+1}}{\ell}\theta\left(-\Delta v_i^m\right)\right)\left|R_{i+1}^m-R_i^m\right|+\tau\frac{R_i^m\,R_i^{m+1}}{\ell}\theta\left(-\Delta v_i^m\right)\left|R_{i+1}^m-R_i^m\right|-\left|R_{i+1}^m-R_i^m\right|\right]=0.
\end{aligned}$$

此外，我们有

$$\sum_{i=1}^{N-2}\left\{\left[\operatorname{sign}\left(R_i^{m+1}-R_{i-1}^{m+1}\right)-\operatorname{sign}\left(R_{i+1}^{m+1}-R_i^{m+1}\right)\right]\tau\frac{R_i^m\,R_i^{m+1}}{\ell}(1-\theta)\left(-\Delta v_i^{m+1}\right)\right\}\left(R_{i+1}^{m+1}-R_i^{m+1}\right)\leqslant 0.$$

至此，证明完毕。 □

注3.5. 在隐式情形 $\theta=0$中，成立 $\mathrm{TV}\left[\rho_N^{m+1}\right]\leqslant\mathrm{TV}\left[\rho_N^m\right]$，而无需假设任何CFL 型条件。这从该情形下(20)平凡成立这一事实即可看出。

3.3. **时间振荡与紧性**。 我们回顾概率测度上输运距离的若干工具。设 $\rho \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{P}_c(\mathbb{R})$，其中 $\mathcal{P}_c(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}$ 上具有紧支撑的概率测度空间。我们将$F_\rho : \mathbb{R} \to [0, L]$ 设为

$$F_\rho(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(y)\,\mathrm{d}y$$

并将 $X_\rho : (0, L) \to \mathbb{R}$ 作为 F_ρ的伪逆，由下式给出

$$X_\rho(z) = \inf\{x \in \mathbb{R} \ : \ F_\rho(x) \geqslant z\}.$$

给定 $\mu, \eta \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{P}_c(\mathbb{R})$，我们回顾（见 [43] 与 [14, (18)]），μ 与η 之间的缩放的 1-Wasserstein 距离可计算为

$$d_1(\rho, \eta) = \left\| X_\rho - X_\eta \right\|_{L^1(0,L)}.$$

为记号简便起见，我们定义

$$F_N^m = F_{\rho_N^m}, \qquad\qquad X_N^m = X_{\rho_N^m}.$$

引理 3.6. 对所有 $m \in \{0, \dots, M\}$，我们有

$$X_N^m(z) = \sum_{i=0}^{N-1} \left(x_i^m + \frac{1}{R_i^m}(z - i\ell) \right) \mathbf{1}_{[i\ell,(i+1)\ell)}(z).$$

证明。 由(28)中 ρ_N^m 的定义，我们推出

$$F_N^m(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \left(i\ell + R_i^m \left(x - x_i^m \right) \right) \mathbf{1}_{[x_i^m, x_{i+1}^m)}(x).$$

由于 F_N^m是分段线性的，其伪逆 X_N^m亦然。此外，在每个区间 $(i\ell, (i+1)\ell)$ 上， X_N^m的斜率是 F_N^m 在区间 (x_i^m, x_{i+1}^m)上斜率的倒数。要求 X_N^m在其导数的间断点处连续，即可推出该断言。□

我们通过计算两个不同时间处的时间线性插值之间的 1-Wasserstein 距离来估计时间振荡，从而开始紧性论证。

命题 3.7. 对于所有 $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$ 我们有

$$d_1\left(\rho_N^M(\cdot, t_2), \rho_N^M(\cdot, t_1)\right) \leqslant 4L\,V\,\left(t_2 - t_1 + \tau\right).$$

证明。固定 $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$，并令 $0 \leqslant m_1 \leqslant m_2 \leqslant M$ 满足

$$t_1 \in [t^{m_1}, t^{m_1+1}), \qquad t_2 \in [t^{m_2}, t^{m_2+1}).$$

我们利用引理 3.6 计算

$$\begin{aligned}
&d_1\left(\rho_N^M(\cdot, t_2), \rho_N^M(\cdot, t_1)\right) = d_1\left(\rho_N^{m_2}, \rho_N^{m_1}\right) = \left\| X_N^{m_2} - X_N^{m_1} \right\|_{L^1(0,L)} \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{i\ell}^{(i+1)\ell} \left| x_i^{m_2} - x_i^{m_1} + \left(\frac{1}{R_i^{m_2}} - \frac{1}{R_i^{m_1}} \right)(z - i\ell) \right| \mathrm{d}z \leqslant \sum_{i=0}^{N-1} \left[\ell \left| x_i^{m_2} - x_i^{m_1} \right| + \frac{\ell^2}{2} \left| \frac{1}{R_i^{m_2}} - \frac{1}{R_i^{m_1}} \right| \right] \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \left[\ell \left| x_i^{m_2} - x_i^{m_1} \right| + \frac{\ell}{2} \left| (x_{i+1}^{m_2} - x_i^{m_2}) - (x_{i+1}^{m_1} - x_i^{m_1}) \right| \right] \leqslant 2\ell \sum_{i=0}^{N} \left| x_i^{m_2} - x_i^{m_1} \right|.
\end{aligned}$$

利用格式 (6)，我们有

$$x_i^{m_2} - x_i^{m_1} = \sum_{m=m_1}^{m_2-1} \left(x_i^{m+1} - x_i^m \right) = \begin{cases} \tau \displaystyle\sum_{m=m_1}^{m_2-1} \left(\theta\, v\left(R_i^m\right) + (1-\theta)\, v\left(R_i^{m+1}\right) \right) & \text{if } i \in \{0, \dots, N-1\}, \\ \tau(m_2 - m_1) v(0) & \text{if } i = N. \end{cases}$$

因此，由 (16) 可得估计

$$\left| x_i^{m_2} - x_i^{m_1} \right| \leqslant V\,\tau\,\left(m_2 - m_1\right)$$

其中 V由（13）给出，并由（8）可得

$$d_1\left(\rho_N^M(\cdot, t_2), \rho_N^M(\cdot, t_1)\right) \leqslant 2\ell\,V\,\tau\,\left(m_2 - m_1\right)(N+1) \leqslant 4L\,V\,(t^{m_2} - t^{m_1}) \leqslant 4L\,V\,\left(t_2 - t_1 + \tau\right).$$

证明至此结束。 □

接下来，我们通过计算 $\rho_N^M(\cdot, t_2)$和 $\rho_N^M(\cdot, t_1)$ 在两个不同时间 $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$的 L^1差，改进上述估计。

推论3.8。 对于所有 $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$，我们有

$$\left\|\rho_N^M(\cdot, t_2) - \rho_N^M(\cdot, t_1)\right\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant 4\left(2\mathrm{TV}\left[\overline{\rho}\right] L V\right)^{1/2} (t_2 - t_1 + \tau)^{1/2}.$$

证明。 该证明可由命题 3.7、引理 A.1 和命题 3.4 轻易得出。 □

4. Convergence to entropy solution

本小节专门用于证明定理2.5。

4.1. 紧 性。

在下一个命题中，我们证明该格式在子序列意义下的收敛 e.

命题4.1。 考虑一个速度函数 $v\colon [0, R] \to \mathbb{R}$ 和一个初始密度 $\overline{\rho}\colon \mathbb{R} \to [0, R]$，它们分别满足(4)和(5)。固定时间范围 $T > 0$、参数 $\theta \in [0, 1]$ 以及两个满足 *CFL* 型条件(20)的正整数单调序列 $(M_n)_n$、$(N_n)_n \in \mathbb{N}$

$$\theta\, N_n\, T\, [v]_{\mathrm{Lip}}\, R^2 < L\, M_n.$$

在此情形下，由(21) 定义的离散密度序列 $(\rho_n)_n$ 沿某一子序列在 $L^1(\mathbb{R} \times [0, T])$中强收敛到某个极限 $\rho \in L_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])$，并且对所有 $t \in [0, T]$ 成立

$$\|\rho(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant R, \qquad \mathrm{TV}[\rho(\cdot, t)] \leqslant \mathrm{TV}\left[\overline{\rho}\right]. \tag{31}$$

证明。 对于任意有理时间 $t \geqslant 0$，由 (16) 和 (17)，我们可以应用 Helly定理，参见 [5, 定理 2.3], ，构造一个子序列 $(\rho_{n_k}(\cdot, t))_k$，使其逐点收敛到某个满足 (31) 的 $\rho(\cdot, t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$。根据构造，若 $[\overline{a}, b] = \mathrm{supp}(\overline{\rho})$，则对于任意 $t \in [0, T]$，$\rho_{n_k}(\cdot, t)$ 的支集包含于 $[\overline{a} - VT, b + VT]$ 中，其中 V 在 (13) 中定义。因此，$(\rho_{n_k}(\cdot, t))_k$ 受 $x \mapsto R\mathbf{1}_{[\overline{a}-VT, \overline{b}+VT]}(x)$ 控制。于是，上述逐点收敛意味着在 $L^1(\mathbb{R})$ 中具有紧性。现在，对于任意 $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$，由 (18) 可得

$$\limsup_{k \to +\infty} \left\|\rho_{n_k}(\cdot, t_2) - \rho_{n_k}(\cdot, t_1)\right\|_{L^1(\mathbb{R})} \leqslant C(t_2 - t_1)^{1/2}$$

由 $C = 4\left(2\mathrm{TV}\left[\overline{\rho}\right] L V\right)^{1/2}$ 因为 $\tau_{n_k} = T/M_{n_k} \to 0$，见(8)1。因此，Arzelà-Ascoli定理的一个改进版本，参见例如 [2,命题3.3， 1], 即推出该断言。□

4.2. 收敛到弱解。

现在我们可以证明，命题4.1中 ρ 得到的极限是方程(1)意义下的弱解，具体定义见定义2.3。

对所有 $i \in \{0, \dots, N_n\}$，我们定义时间连续的插值曲线 $x_i\colon [0, T] \to \mathbb{R}$ 如下 s

$$x_i(t) = \begin{cases} x_i^m + \dfrac{t - t^m}{\tau_n}\left(x_i^{m+1} - x_i^m\right) & \text{if } t \in (t^m, t^{m+1}),\ m \in \{0, \dots, M_n - 1\}, \\ x_i^m & \text{if } t = t^m,\ m \in \{0, \dots, M_n\}, \end{cases} \tag{32}$$

其中 $\tau_n = T/M_n$。我们 注意到，根据(6)，对于所有 $m \in \{0, \dots, M_n - 1\}$ 和 $i \in \{0, \dots, N_n\}$，上述曲线满足 fy

$$x_i(t) - x_i^m = \frac{t - t^m}{\tau_n}\left(x_i^{m+1} - x_i^m\right) \qquad \text{if } t \in [t^m, t^{m+1}], \tag{33}$$

$$\dot{x}_i(t) = \frac{x_i^{m+1} - x_i^m}{\tau_n} = \theta\, v\left(R_i^m\right) + (1 - \theta)\, v\left(R_i^{m+1}\right) \qquad \text{if } t \in (t^m, t^{m+1}). \tag{34}$$

特别地，$\dot{x}_{N_n}(t) = v(0)$。此外，我们令

$$R_i(t) = \begin{cases} \dfrac{\ell_n}{x_{i+1}(t) - x_i(t)} & \text{if } i \in \{0, \dots, N_n - 1\}, \\ 0 & \text{if } i = N_n, \end{cases} \tag{35}$$

其中 $\ell_n = L/N_n$。注意到对任意 $m \in \{0, \dots, M_n\}$，有 $R_i(t^m) = R_i^m$、$i \in \{0, \dots, N_n - 1\}$。此外，由 (33)、(34) 和 (35)，对所有 $m \in \{0, \dots, M_n - 1\}$ 和 $i \in \{0, \dots, N_n - 1\}$

$$R_i(t) - R_i^m = -\frac{\tau_n}{\ell_n}\left(\frac{t - t^m}{\tau_n}\right) R_i(t)\, R_i^m\left(\dot{x}_{i+1}(t) - \dot{x}_i(t)\right) \qquad \text{if } t \in (t^m, t^{m+1}), \tag{36}$$

$$\dot{R}_i(t) = -\frac{R_i(t)^2}{\ell_n}\left(\dot{x}_{i+1}(t) - \dot{x}_i(t)\right) \qquad \text{if } t \in (t^m, t^{m+1}). \tag{37}$$

在下一个引理中，我们列出一些性质，这些性质将在后续结果的证明中得到广泛应用。

引理4.2。
(1) 对于任意的 $m \in \{0, \dots, M_n - 1\}$ 和 $i \in \{0, \dots, N_n\}$，我们有

$$t \in (t^m, t^{m+1}) \Longrightarrow \left|\dot{x}_i(t)\right| \leqslant V, \tag{38}$$

$$t \in [t^m, t^{m+1}] \Longrightarrow \left|x_i(t) - x_i^m\right| \leqslant \left|x_i^{m+1} - x_i^m\right| \leqslant \tau V, \tag{39}$$

其中，V是(13)中定义的常数。
(2) 对任意 $i \in \{0, \dots, N_n - 1\}$，有

$$t \in [0, T] \Longrightarrow 0 < R_i(t) \leqslant R. \tag{40}$$

(3) 对任意 $m \in \{0, \dots, M_n - 1\}$ 和 $i \in \{0, \dots, N_n - 1\}$，有

$$t \in (t^m, t^{m+1}) \Longrightarrow \left|R_i(t) - R_i^m\right| \leqslant \frac{\tau_n}{\ell_n} [v]_{\mathrm{Lip}} R_i(t) R_i^m \left[\theta \left|R_{i+1}^m - R_i^m\right| + (1-\theta)\left|R_{i+1}^{m+1} - R_i^{m+1}\right|\right]. \tag{41}$$

(4) 对任意 $m \in \{0, \dots, M_n - 1\}$，有

$$t \in (t^m, t^{m+1}) \Longrightarrow \sum_{i=0}^{N_n-1} \left|\dot{x}_{i+1}(t) - \dot{x}_i(t)\right| \leqslant [v]_{\mathrm{Lip}} \mathrm{TV}\left[\overline{\rho}\right]. \tag{42}$$

证明。 估计 (38) 可直接由 (34) 和命题3.3 得出。(39) 可直接由 (33) 和格式 (6) 的定义得出，同时也用到了命题3.3。

固定 $i \in \{0, \dots, N_n - 1\}$。取 $d_i(t) = x_{i+1}(t) - x_i(t)$，并注意到

$$t \in [t^m, t^{m+1}] \Longrightarrow 0 < \ell_n / R \leqslant \min\{d_i^m, d_i^{m+1}\} \leqslant d_i(t) \leqslant \max\{d_i^m, d_i^{m+1}\}$$

由 (32) 和命题3.3 可得，其中 d_i^m 在 (24) 中定义。注意到 $R_i(t) = \ell_n / d_i(t)$，因此

$$t \in [t^m, t^{m+1}] \Longrightarrow 0 < \min\{R_i^m, R_i^{m+1}\} \leqslant R_i(t) \leqslant \max\{R_i^m, R_i^{m+1}\} \leqslant R.$$

这个估计可直接推出 (40)。接着，(41) 可由 (36)、(34) 和 (6) 得出。最后，(42) 可由 (34) 和命题 3.4 得出。□

在下一个命题中，我们将证明命题4.1 中得到的极限 ρ 确实是柯西问题 (1) 的一个弱解，其意义见定义2.3。

命题 4.3. 设 $\rho_n = \rho_{N_n}^{M_n}$，其中 $(N_n)_n$、$(M_n)_n$ 满足 *CFL* 型条件 (15)，且 M_n、$N_n \nearrow +\infty$。假设 $(\rho_n)_n$ 在 $L^1(\mathbb{R} \times [0,T])$ 中收敛到某个极限 $\rho \in L_c^\infty(\mathbb{R} \times [0,T])$，并且满足 (31)。那么，$\rho$ 是 $\mathbb{R} \times [0,T]$上柯西问题 (1) 的弱解。

证明。 设 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0,T))$。根据构造，$\rho_n(\cdot, 0)$ 以弱* 测度的意义收敛到 ρ，因此由 (31)，当 $n \to +\infty$ 时，我们有

$$\lim_{n \to +\infty} \mathcal{W}^n = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \rho(x,t) \left(\partial_t \varphi(x,t) + v(\rho(x,t))\, \partial_x \varphi(x,t)\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} \overline{\rho}(x)\, \varphi(x,0)\, \mathrm{d}x,$$

其中

$$\mathcal{W}^n = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \rho_n(x,t) \left(\partial_t \varphi(x,t) + v\left(\rho_n(x,t)\right) \partial_x \varphi(x,t)\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} \rho_n(x,0)\, \varphi(x,0)\, \mathrm{d}x.$$

为了证明极限 ρ是柯西问题 (1) 的弱解，只需证明当 $n \to +\infty$时，$\mathcal{W}^n$ 收敛到零。利用 (34)，可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}^n = & \sum_{i=0}^{N_n-1} \left[\sum_{m=0}^{M_n-1} \int_{t^m}^{t^{m+1}} R_i^m \left(\int_{x_i^m}^{x_{i+1}^m} \partial_t \varphi(x,t)\, \mathrm{d}x + v\left(R_i^m\right)\left(\varphi\left(x_{i+1}^m, t\right) - \varphi\left(x_i^m, t\right)\right)\right) \mathrm{d}t \right. \\
& \left. + R_i^0 \int_{x_i^0}^{x_{i+1}^0} \varphi(x,0)\, \mathrm{d}x \right] \\
= & \mathfrak{M}^n + \mathfrak{E}_1^n + \mathfrak{E}_2^n + \mathfrak{E}_3^n + \mathfrak{E}_4^n,
\end{aligned}$$

与主项

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}^n = & \sum_{m=0}^{M_n-1} \sum_{i=0}^{N_n-1} \int_{t^m}^{t^{m+1}} R_i(t) \left(\int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} \partial_t \varphi(x,t)\, \mathrm{d}x + \dot{x}_i(t)\left(\varphi\left(x_{i+1}(t), t\right) - \varphi\left(x_i(t), t\right)\right)\right) \mathrm{d}t \\
& + \sum_{i=0}^{N_n-1} R_i^0 \int_{x_i^0}^{x_{i+1}^0} \varphi(x,0)\, \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

以及误差项

$$\mathfrak{E}_1^n = \sum_{m=0}^{M_n-1}\sum_{i=0}^{N_n-1}\int_{t^m}^{t^{m+1}} (R_i^m - R_i(t))\left(\int_{x_i^m}^{x_{i+1}^m} \partial_t\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x + \dot{x}_i(t)\left(\varphi\left(x_{i+1}^m,t\right)-\varphi\left(x_i^m,t\right)\right)\right)\mathrm{d}t,$$

$$\mathfrak{E}_2^n = \sum_{m=0}^{M_n-1}\sum_{i=0}^{N_n-1}\int_{t^m}^{t^{m+1}} R_i(t)\left(\int_{x_i^m}^{x_{i+1}^m} \partial_t\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x - \int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} \partial_t\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t,$$

$$\mathfrak{E}_3^n = \sum_{m=0}^{M_n-1}\sum_{i=0}^{N_n-1}\int_{t^m}^{t^{m+1}} R_i(t)\,\dot{x}_i(t)\left(\varphi\left(x_{i+1}^m,t\right)-\varphi\left(x_i^m,t\right)-\varphi\left(x_{i+1}(t),t\right)+\varphi\left(x_i(t),t\right)\right)\mathrm{d}t,$$

$$\mathfrak{E}_4^n = \sum_{m=0}^{M_n-1}\sum_{i=0}^{N_n-1}\int_{t^m}^{t^{m+1}} R_i^m\left(v\left(R_i^m\right)-\dot{x}_i(t)\right)\left(\varphi\left(x_{i+1}^m,t\right)-\varphi\left(x_i^m,t\right)\right)\mathrm{d}t.$$

我们利用 (32)、(35)、时间分部积分、(37) 和 (34) 计算主项 $\mathfrak{M}^n$，得到

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}^n &= \int_0^T \sum_{i=0}^{N_n-1} R_i(t)\left(\int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} \partial_t\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x + \dot{x}_i(t)(\varphi\left(x_{i+1}(t),t\right)-\varphi\left(x_i(t),t\right))\right)\mathrm{d}t + \sum_{i=0}^{N_n-1} R_i(0)\int_{x_i(0)}^{x_{i+1}(0)}\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^T \sum_{i=0}^{N_n-1} R_i(t)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)}\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\right) - \left(\varphi\left(x_{i+1}(t),t\right)\dot{x}_{i+1}(t)-\varphi\left(x_i(t),t\right)\dot{x}_i(t)\right)\right.\\
&\qquad\left. + \dot{x}_i(t)(\varphi\left(x_{i+1}(t),t\right)-\varphi\left(x_i(t),t\right))\right]\mathrm{d}t + \sum_{i=0}^{N_n-1} R_i(0)\int_{x_i(0)}^{x_{i+1}(0)}\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^T \sum_{i=0}^{N_n-1}\left[-\dot{R}_i(t)\int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)}\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x + R_i(t)\,\varphi\left(x_{i+1}(t),t\right)\left(\dot{x}_i(t)-\dot{x}_{i+1}(t)\right)\right]\mathrm{d}t\\
&= \int_0^T \sum_{i=0}^{N_n-1}\left[\frac{R_i(t)^2}{\ell_n}(\dot{x}_{i+1}(t)-\dot{x}_i(t))\int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)}\left(\varphi(x,t)-\varphi\left(x_{i+1}(t),t\right)\right)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t\\
&= \sum_{m=0}^{M_n-1}\int_{t^m}^{t^{m+1}}\sum_{i=0}^{N_n-1}\left[\frac{R_i(t)^2}{\ell_n}\left(\theta\left(v\left(R_{i+1}^m\right)-v\left(R_i^m\right)\right)+(1-\theta)\left(v\left(R_{i+1}^{m+1}\right)-v\left(R_i^{m+1}\right)\right)\right)\right.\\
&\qquad\left.\times\int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)}\left(\varphi(x,t)-\varphi\left(x_{i+1}(t),t\right)\right)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

注意，对所有 $i\in\{0,\dots,N_n-1\}$

$$\begin{aligned}
&\int_{t^m}^{t^{m+1}}\frac{R_i(t)^2}{\ell_n}\left|\int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)}\left(\varphi(x,t)-\varphi\left(x_{i+1}(t),t\right)\right)\mathrm{d}x\right|\mathrm{d}t\\
\leqslant &\int_{t^m}^{t^{m+1}}\frac{R_i(t)^2}{\ell_n}\left(\frac{1}{2}\left\|\partial_x\varphi\right\|_{L^\infty}\left(x_{i+1}(t)-x_i(t)\right)^2\right)\mathrm{d}t = \int_{t^m}^{t^{m+1}}\frac{1}{2}\left\|\partial_x\varphi\right\|_{L^\infty}\ell_n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left\|\partial_x\varphi\right\|_{L^\infty}\ell_n\,\tau_n.
\end{aligned}$$

因此，利用命题 3.4，我们得到

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{M}^n| &\leqslant \frac{1}{2}\left\|\partial_x\varphi\right\|_{L^\infty}\ell_n\tau_n\sum_{m=0}^{M_n-1}\sum_{i=0}^{N_n-1}\left(\theta\left|v\left(R_{i+1}^m\right)-v\left(R_i^m\right)\right|+(1-\theta)\left|v\left(R_{i+1}^{m+1}\right)-v\left(R_i^{m+1}\right)\right|\right)\\
&\leqslant \left(\frac{1}{2}\left\|\partial_x\varphi\right\|_{L^\infty}T\,[v]_{\mathrm{Lip}}\,\mathrm{TV}\left[\overline{\rho}\right]\right)\ell_n\to 0.
\end{aligned}$$

现在我们来估计误差项。利用 (41)、(38)、(40)，可得到关于 $\mathfrak{E}_1^n$ 的估计

$$\begin{aligned}
\left|\mathfrak{E}_1^n\right| &\leqslant \frac{\tau_n}{\ell_n}[v]_{\mathrm{Lip}}\left(\left\|\partial_t\varphi\right\|_{L^\infty}+V\left\|\partial_x\varphi\right\|_{L^\infty}\right)\\
&\quad\times\sum_{m=0}^{M_n-1}\sum_{i=0}^{N_n-1}\int_{t^m}^{t^{m+1}} R_i(t)\,R_i^m\left[\theta\left|R_{i+1}^m-R_i^m\right|+(1-\theta)\left|R_{i+1}^{m+1}-R_i^{m+1}\right|\right]\left(x_{i+1}^m-x_i^m\right)\mathrm{d}t\\
&\leqslant \left([v]_{\mathrm{Lip}}\left(\left\|\partial_t\varphi\right\|_{L^\infty}+V\left\|\partial_x\varphi\right\|_{L^\infty}\right)T\,R\,\mathrm{TV}\left[\overline{\rho}\right]\right)\tau_n\to 0,
\end{aligned}$$

其中我们用到了　命题 3.4。为了控制 $\mathfrak{E}_2^n$，我们对指标 i 作分部求和如下　　：

$$\begin{aligned}\left|\mathfrak{E}_2^n\right| &= \left|\sum_{m=0}^{M_n-1}\sum_{i=0}^{N_n-1}\int_{t^m}^{t^{m+1}} R_i(t)\left(\int_{x_{i+1}(t)}^{x_{i+1}^m}\partial_t\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x-\int_{x_i(t)}^{x_i^m}\partial_t\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\sum_{m=0}^{M_n-1}\int_{t^m}^{t^{m+1}}\left[\sum_{i=1}^{N_n-1}\left(R_{i-1}(t)-R_i(t)\right)\int_{x_i(t)}^{x_i^m}\partial_t\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\right.\right. \\ &\qquad \left.\left.+R_{N_n-1}(t)\int_{x_{N_n}(t)}^{x_{N_n}^m}\partial_t\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x-R_0(t)\int_{x_0(t)}^{x_0^m}\partial_t\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \left(T\,\mathrm{TV}\big[\overline{\rho}\big]\,\|\partial_t\varphi\|_{L^\infty}V+2T\,R\,\|\partial_t\varphi\|_{L^\infty}V\right)\tau_n\to 0,\end{aligned}$$

最后一个不等式由 (39)、(40) 和命题 3.4 得出。我们在 i 中对 $\mathfrak{E}_3^n$ 的估计也使用分部求和，具体如下:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_3^n &= \sum_{m=0}^{M_n-1}\sum_{i=0}^{N_n-1}\int_{t^m}^{t^{m+1}} R_i(t)\,\dot{x}_i(t)\left(\left(\varphi\left(x_{i+1}^m,t\right)-\varphi\left(x_{i+1}(t),t\right)\right)-\left(\varphi\left(x_i^m,t\right)-\varphi\left(x_i(t),t\right)\right)\right)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{m=0}^{M_n-1}\int_{t^m}^{t^{m+1}}\left[\sum_{i=1}^{N_n-1}\left(R_{i-1}(t)\,\dot{x}_{i-1}(t)-R_i(t)\,\dot{x}_i(t)\right)\left(\varphi\left(x_i^m,t\right)-\varphi\left(x_i(t),t\right)\right)\right. \\ &\qquad \left.+R_{N_n-1}(t)\,\dot{x}_{N_n-1}(t)\left(\varphi(x_{N_n}^m,t)-\varphi(x_{N_n}(t),t)\right)-R_0(t)\,\dot{x}_0(t)\left(\varphi(x_0^m,t)-\varphi(x_0(t),t)\right)\right]\mathrm{d}t \\ &= \sum_{m=0}^{M_n-1}\int_{t^m}^{t^{m+1}}\left[\sum_{i=1}^{N_n-1}\left(R_{i-1}(t)-R_i(t)\right)\dot{x}_{i-1}(t)\left(\varphi\left(x_i^m,t\right)-\varphi\left(x_i(t),t\right)\right)\right. \\ &\qquad +\sum_{i=1}^{N_n-1}R_i(t)\left(\dot{x}_{i-1}(t)-\dot{x}_i(t)\right)\left(\varphi\left(x_i^m,t\right)-\varphi\left(x_i(t),t\right)\right) \\ &\qquad \left.+R_{N_n-1}(t)\,\dot{x}_{N_n-1}(t)\left(\varphi(x_{N_n}^m,t)-\varphi(x_{N_n}(t),t)\right)-R_0(t)\,\dot{x}_0(t)\left(\varphi(x_0^m,t)-\varphi(x_0(t),t)\right)\right]\mathrm{d}t\end{aligned}$$

结合 (39) 和 (38)，可得估计

$$\left|\mathfrak{E}_3^n\right|\leqslant T\left(\mathrm{TV}\big[\overline{\rho}\big]\,\|\partial_x\varphi\|_{L^\infty}V^2+R\,2V\,\|\partial_x\varphi\|_{L^\infty}V+2\,RV\,\|\partial_x\varphi\|_{L^\infty}V\right)\tau_n\to 0.$$

至于最后一项，首先注意到，由 (34) 可得

$$\left|v\left(R_i^m\right)-\dot{x}_i(t)\right|=(1-\theta)\left|v\left(R_i^{m+1}\right)-v\left(R_i^m\right)\right|\leqslant(1-\theta)\,[v]_{\mathrm{Lip}}\left|R_i^{m+1}-R_i^m\right|.$$

此外，我们有

$$\left|R_i^m(\varphi\left(x_{i+1}^m,t\right)-\varphi\left(x_i^m,t\right))\right|\leqslant R_i^m\,\|\partial_x\varphi\|_{L^\infty}\left(x_{i+1}^m-x_i^m\right)=\ell_{N_n}\|\partial_x\varphi\|_{L^\infty}.$$

此外，由 (29) 可得

$$\left|R_i^{m+1}-R_i^m\right|\leqslant\frac{\tau_n}{\ell_n}\,[v]_{\mathrm{Lip}}\,R_i^m\,R_i^{m+1}\left[\theta\left|R_{i+1}^m-R_i^m\right|+(1-\theta)\left|R_{i+1}^{m+1}-R_i^{m+1}\right|\right],\tag{43}$$

由命题 3.3 和命题 3.4 可得

$$\sum_{i=0}^{N_n-1}\left|R_i^{m+1}-R_i^m\right|\leqslant\frac{\tau_n}{\ell_n}\,[v]_{\mathrm{Lip}}\,R^2\,\mathrm{TV}\big[\overline{\rho}\big].$$

结合上述估计与（43）及命题 3.4，可得

$$\begin{aligned}\left|\mathfrak{E}_4^n\right| &\leqslant (1-\theta)\,[v]_{\mathrm{Lip}}\,\ell_n\,\|\partial_x\varphi\|_{L^\infty}\sum_{m=0}^{M_n-1}\sum_{i=0}^{N_n-1}\int_{t^m}^{t^{m+1}}\left|R_i^{m+1}-R_i^m\right|\mathrm{d}t \\ &= (1-\theta)\,[v]_{\mathrm{Lip}}\,\ell_n\,\|\partial_x\varphi\|_{L^\infty}\,\tau_n\sum_{m=0}^{M_n-1}\sum_{i=0}^{N_n-1}\left|R_i^{m+1}-R_i^m\right| \\ &\leqslant\left((1-\theta)\,[v]_{\mathrm{Lip}}^2\,\|\partial_x\varphi\|_{L^\infty}\,T\,R^2\,\mathrm{TV}\big[\overline{\rho}\big]\right)\tau_n\to 0.\end{aligned}$$

证明至此结束。　□

4.3. **收敛到熵解**。为了完成定理2.5的证明，我们只需证明：若 $M_n, N_n \nearrow +\infty$ 满足 (20)、(22)，且 $(\rho_n)_n$ 在 $L^1(\mathbb{R}\times[0,T])$ 中强收敛并几乎处处收敛到 ρ，那么 ρ 就是柯西问题 (1) 按定义 2.4 意义下的唯一熵解。

命题 4.4。设 $(N_n)_n$、$(M_n)_n \subseteq \mathbb{N}$ 满足 M_n、$N_n \nearrow +\infty$，并满足 (22) 和 *CFL* 型条件(20)。假设如 (21) 所示的 $(\rho_n)_n$ 在 $L^1(\mathbb{R}\times[0,T])$ 中收敛到某个极限 $\rho \in L^\infty_c(\mathbb{R}\times[0,T])$，且满足(31)。那么，$\rho$ 是柯西问题(1) 在 $\mathbb{R}\times[0,T]$上的一个熵解。

证明。 我们首先注意到，(22)蕴含

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\tau_n}{\ell_n} = 0,$$

其中 $\tau_n = T/M_n$ 且 $\ell_n = L/N_n$。取满足 $\varphi \geqslant 0$的 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}\times[0,T))$，并令 $k \in [0,R]$。采用与命题 4.3 证明开头类似的论证，只需证明 $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{E}^n \geqslant 0$，其中

$$\mathcal{E}^n = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left[\left|\rho_n(x,t)-k\right| \partial_t\varphi(x,t) + \Phi_k\left(\rho_n(x,t)\right)\partial_x\varphi(x,t)\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} \left|\rho_n(x,0)-k\right|\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x,$$

与 $k\in[0,R]$ 以及

$$\Phi_k(\rho) = \operatorname{sign}(\rho-k)\left(f(\rho)-f(k)\right), \qquad\qquad f(\rho) = \rho\, v(\rho).$$

we通过引入（35）中给出的分段重构 $R_i(t)$ 来改写 $\mathcal{E}^n$，以便得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^n &= \sum_{m=0}^{M_n-1} \int_{t^m}^{t^{m+1}} \left[\int_{-\infty}^{x_0^m} \left(k\,\partial_t\varphi(x,t) + f(k)\,\partial_x\varphi(x,t)\right)\mathrm{d}x + \int_{x_{N_n}^m}^{+\infty} \left(k\,\partial_t\varphi(x,t) + f(k)\,\partial_x\varphi(x,t)\right)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t \\
&\quad + \sum_{m=0}^{M_n-1}\sum_{i=0}^{N_n-1} \int_{t^m}^{t^{m+1}} \left[\left|R_i^m-k\right| \int_{x_i^m}^{x_{i+1}^m} \partial_t\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x + \Phi_k\left(R_i^m\right)\left(\varphi\left(x_{i+1}^m,t\right)-\varphi\left(x_i^m,t\right)\right)\right]\mathrm{d}t \\
&\quad + k\int_{-\infty}^{x_0^0}\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x + k\int_{x_{N_n}^0}^{+\infty}\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x + \sum_{i=0}^{N_n-1}\left|R_i^0-k\right|\int_{x_i^0}^{x_{i+1}^0}\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x \\
&= \mathfrak{M}_1^n + \mathfrak{M}_2^n + \mathfrak{E}_1^n + \mathfrak{E}_2^n + \mathfrak{E}_3^n + \mathfrak{E}_4^n + \mathfrak{E}_5^n,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_1^n &= \int_0^T \int_{-\infty}^{x_0(t)} \left(k\,\partial_t\varphi(x,t) + f(k)\partial_x\varphi(x,t)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T\int_{x_N(t)}^{+\infty}\left(k\,\partial_t\varphi(x,t)+f(k)\,\partial_x\varphi(x,t)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad + k\int_{-\infty}^{x_0(0)}\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x + k\int_{x_{N_n}(0)}^{+\infty}\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x, \\
\mathfrak{M}_2^n &= \sum_{i=0}^{N_n-1}\int_0^T\left[\left|R_i(t)-k\right|\int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)}\partial_t\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x + \Phi_k\left(R_i(t)\right)\left(\varphi\left(x_{i+1}(t),t\right)-\varphi\left(x_i(t),t\right)\right)\right]\mathrm{d}t \\
&\quad + \sum_{i=0}^{N_n-1}\left|R_i(0)-k\right|\int_{x_i(0)}^{x_{i+1}(0)}\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}_1^n &= \sum_{m=0}^{M_n-1}\sum_{i=0}^{N_n-1}\int_{t^m}^{t^{m+1}}\left(\left|R_i^m-k\right|-\left|R_i(t)-k\right|\right)\left(\int_{x_i^m}^{x_{i+1}^m}\partial_t\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t, \\
\mathfrak{E}_2^n &= \sum_{m=0}^{M_n-1}\sum_{i=0}^{N_n-1}\int_{t^m}^{t^{m+1}}\left(\Phi_k\left(R_i^m\right)-\Phi_k\left(R_i(t)\right)\right)\left(\varphi\left(x_{i+1}^m,t\right)-\varphi\left(x_i^m,t\right)\right)\mathrm{d}t, \\
\mathfrak{E}_3^n &= \sum_{m=0}^{M_n-1}\sum_{i=0}^{N_n-1}\int_{t^m}^{t^{m+1}}\left|R_i(t)-k\right|\left(\int_{x_i^m}^{x_{i+1}^m}\partial_t\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x - \int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)}\partial_t\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t, \\
\mathfrak{E}_4^n &= \sum_{m=0}^{M_n-1}\sum_{i=0}^{N_n-1}\int_{t^m}^{t^{m+1}}\Phi_k\left(R_i(t)\right)\left(\varphi\left(x_{i+1}^m,t\right)-\varphi\left(x_i^m,t\right)-\varphi\left(x_{i+1}(t),t\right)+\varphi\left(x_i(t),t\right)\right)\mathrm{d}t, \\
\mathfrak{E}_5^n &= \sum_{m=0}^{M_n-1}\int_{t^m}^{t^{m+1}}\left[\int_{x_0(t)}^{x_0^m}\left(k\,\partial_t\varphi(x,t)+f(k)\,\partial_x\varphi(x,t)\right)\mathrm{d}x + \int_{x_N^m}^{x_N(t)}\left(k\,\partial_t\varphi(x,t)+f(k)\,\partial_x\varphi(x,t)\right)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

首先，我们按如下方式计算第一个主项 $\mathfrak{M}_1^n$。利用时间分部积分以及等式 $\dot{x}_{N_n}(t) = v(0)$，可得

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M}_1^n &= k\int_0^T \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{-\infty}^{x_0(t)} \varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\right) - \dot{x}_0(t)\,\varphi(x_0(t),t) + v(k)\,\varphi(x_0(t),t)\right]\mathrm{d}t \\
&\quad + k\int_0^T \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{x_{N_n}(t)}^{+\infty} \varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\right) + \dot{x}_{N_n}(t)\,\varphi(x_{N_n}(t),t) - v(k)\,\varphi(x_{N_n}(t),t)\right]\mathrm{d}t \\
&\quad + k\int_{-\infty}^{x_0(0)} \varphi(x,0)\,\mathrm{d}x + k\int_{x_{N_n}(0)}^{+\infty} \varphi(x,0)\,\mathrm{d}x \\
&= k\int_0^T \Big(\varphi(x_0(t),t)\left(v(k)-\dot{x}_0(t)\right) - \varphi(x_{N_n}(t),t)\left(v(k)-\dot{x}_{N_n}(t)\right)\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \widetilde{\mathfrak{M}}_1^n + \mathfrak{E}_6^n,
\end{aligned}
$$

with

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathfrak{M}}_1^n &= k\int_0^T \Big(\varphi(x_0(t),t)\left(v(k)-v\big(R_0(t)\big)\right) - \varphi(x_{N_n}(t),t)(v(k)-v(0))\Big)\,\mathrm{d}t, \\
\mathfrak{E}_6^n &= k\int_0^T \varphi(x_0(t),t)\left(v\big(R_0(t)\big)-\dot{x}_0(t)\right)\mathrm{d}t.
\end{aligned}
\tag{44}
$$

采用类似的策略，我们将 $\mathfrak{M}_2^n$ 写为：

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M}_2^n &= \sum_{i=0}^{N_n-1}\int_0^T \Bigg[\,\big|R_i(t)-k\big|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} \varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\right) - \varphi\big(x_{i+1}(t),t\big)\,\dot{x}_{i+1}(t) + \varphi\big(x_i(t),t\big)\,\dot{x}_i(t)\right) \\
&\qquad\qquad + \Phi_k\left(R_i(t)\right)\left(\varphi\big(x_{i+1}(t),t\big) - \varphi\big(x_i(t),t\big)\right)\Bigg]\mathrm{d}t \\
&\quad + \sum_{i=0}^{N_n-1}\big|R_i(0)-k\big|\int_{x_i(0)}^{x_{i+1}(0)} \varphi(x,0)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=0}^{N_n-1}\int_0^T \operatorname{sign}\big(R_i(t)-k\big)\Bigg[-\dot{R}_i(t)\int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} \varphi(x,t)\,\mathrm{d}x \\
&\qquad\qquad + \left[R_i(t)(v\big(R_i(t)\big)-\dot{x}_{i+1}(t)) - k(v(k)-\dot{x}_{i+1}(t))\right]\varphi\big(x_{i+1}(t),t\big) \\
&\qquad\qquad - \left[R_i(t)(v\big(R_i(t)\big)-\dot{x}_i(t)) - k(v(k)-\dot{x}_i(t))\right]\varphi\big(x_i(t),t\big)\Bigg]\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=0}^{N_n-1}\int_0^T \operatorname{sign}\big(R_i(t)-k\big)\Bigg[\frac{R_i(t)^2}{\ell_n}(\dot{x}_{i+1}(t)-\dot{x}_i(t))\int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} \varphi(x,t)\,\mathrm{d}x \\
&\qquad\qquad + \frac{R_i(t)^2}{\ell_n}(v\big(R_i(t)\big)-\dot{x}_{i+1}(t))\int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} \varphi\big(x_{i+1}(t),t\big)\,\mathrm{d}x \\
&\qquad\qquad - \frac{R_i(t)^2}{\ell_n}(v\big(R_i(t)\big)-\dot{x}_i(t))\int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} \varphi\big(x_i(t),t\big)\,\mathrm{d}x \\
&\qquad\qquad + k\left(\dot{x}_{i+1}(t)-v(k)\right)\varphi\big(x_{i+1}(t),t\big) + k\left(v(k)-\dot{x}_i(t)\right)\varphi\big(x_i(t),t\big)\Bigg]\mathrm{d}t \\
&= \widetilde{\mathfrak{M}}_2^n + \mathfrak{E}_7^n + \mathfrak{E}_8^n,
\end{aligned}
$$

with

$$
\widetilde{\mathfrak{M}}_2^n = k\sum_{i=0}^{N_n-1}\int_0^T \operatorname{sign}\big(R_i(t)-k\big)\left[(v(R_{i+1}(t))-v(k))\,\varphi\big(x_{i+1}(t),t\big) + \left(v(k)-v\big(R_i(t)\big)\right)\varphi\big(x_i(t),t\big)\right]\mathrm{d}t, \tag{45}
$$

$$
\mathfrak{E}_7^n = \sum_{i=0}^{N_n-1}\int_0^T \operatorname{sign}\big(R_i(t)-k\big)\,\frac{R_i(t)^2}{\ell_n}\left[(\dot{x}_{i+1}(t)-\dot{x}_i(t))\int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} \varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\right.
$$

$$- (\dot{x}_{i+1}(t) - v\big(R_i(t)\big) \int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} \varphi\big(x_{i+1}(t), t\big)\,\mathrm{d}x + (\dot{x}_i(t) - v\big(R_i(t)\big) \int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} \varphi\big(x_i(t), t\big)\,\mathrm{d}x \Bigg]\,\mathrm{d}t,$$

$$\mathfrak{E}_8^n = k \sum_{i=0}^{N_n-1} \int_0^T \operatorname{sign}\big(R_i(t) - k\big) \left[\big(\dot{x}_{i+1}(t) - v\big(R_{i+1}(t)\big)\big)\,\varphi(x_{i+1}(t), t) + \big(v(R_i(t)) - \dot{x}_i(t)\big)\,\varphi\big(x_i(t), t\big)\right]\mathrm{d}t.$$

现在我们估计各项 $\mathfrak{E}_i^n$、 $i = \{1, \dots, 8\}$，并证明当 $n \to +\infty$ 时它们趋于零。对于 $\mathfrak{E}_1^n$，利用对所有 a， b, $c \in \mathbb{R}$ 都有 $||a-c| - |b-c|| \leqslant |a-b|$，结合式 (41)、(40) 和命题 3.4，我们得到

$$\begin{aligned}
\left|\mathfrak{E}_1^n\right| &\leqslant \sum_{m=0}^{M_n-1} \sum_{i=0}^{N_n-1} \int_{t^m}^{t^{m+1}} \left|R_i^m - R_i(t)\right| \left(\int_{x_i^m}^{x_{i+1}^m} \left|\partial_t \varphi(x,t)\right| \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}t \\
&\leqslant \sum_{m=0}^{M_n-1} \sum_{i=0}^{N_n-1} \int_{t^m}^{t^{m+1}} \frac{\tau_n}{\ell_n} [v]_{\mathrm{Lip}}\, R\, R_i^m \left[\theta \left|R_{i+1}^m - R_i^m\right| + (1-\theta)\left|R_{i+1}^{m+1} - R_i^{m+1}\right|\right] \left\|\partial_t \varphi\right\|_\infty \left(x_{i+1}^m - x_i^m\right) \mathrm{d}t \\
&\leqslant T \sum_{i=0}^{N_n-1} \tau_n\, [v]_{\mathrm{Lip}}\, R \left[\theta \left|R_{i+1}^m - R_i^m\right| + (1-\theta)\left|R_{i+1}^{m+1} - R_i^{m+1}\right|\right] \left\|\partial_t \varphi\right\|_\infty \\
&\leqslant \left(T\, [v]_{\mathrm{Lip}}\, R\, \mathrm{TV}\big[\overline{\rho}\big]\, \left\|\partial_t \varphi\right\|_\infty\right) \tau_n \to 0.
\end{aligned}$$

利用 $[\Phi_k]_{\mathrm{Lip}} = \left\|f'\right\|_\infty$，并由 (41)、(40) 和命题 3.4，我们得到估计

$$\begin{aligned}
\left|\mathfrak{E}_2^n\right| &\leqslant \left\|f'\right\|_\infty \sum_{m=0}^{M_n-1} \sum_{i=0}^{N_n-1} \int_{t^m}^{t^{m+1}} \left|R_i^m - R_i(t)\right| \left\|\partial_x \varphi\right\|_\infty \left(x_{i+1}^m - x_i^m\right) \mathrm{d}t \\
&\leqslant \left\|f'\right\|_\infty \sum_{m=0}^{M_n-1} \sum_{i=0}^{N_n-1} \int_{t^m}^{t^{m+1}} \tau_n\, [v]_{\mathrm{Lip}}\, R \left(\theta \left|R_{i+1}^m - R_i^m\right| + (1-\theta)\left|R_{i+1}^{m+1} - R_i^{m+1}\right|\right) \left\|\partial_x \varphi\right\|_\infty \mathrm{d}t \\
&\leqslant \left(\left\|f'\right\|_\infty T\, [v]_{\mathrm{Lip}}\, R\, \mathrm{TV}\big[\overline{\rho}\big]\, \left\|\partial_x \varphi\right\|_\infty\right) \tau_n \to 0.
\end{aligned}$$

关于 $\mathfrak{E}_3^n$，由 (39) 可得

$$\begin{aligned}
\left|\mathfrak{E}_3^n\right| &= \left|\sum_{m=1}^{M_n-1} \sum_{i=0}^{N_n-1} \int_{t^m}^{t^{m+1}} \left|R_i(t) - k\right| \left(\int_{x_{i+1}(t)}^{x_{i+1}^m} \partial_t \varphi\,\mathrm{d}x - \int_{x_i(t)}^{x_i^m} \partial_t \varphi\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \sum_{m=0}^{M_n-1} \sum_{i=0}^{N_n-1} \int_{t^m}^{t^{m+1}} R \left\|\partial_t \varphi\right\|_\infty \left(\left|x_{i+1}(t) - x_{i+1}^m\right| + \left|x_i(t) - x_i^m\right|\right) \mathrm{d}t \\
&\leqslant M_n\, N_n\, \tau_n\, R \left\|\partial_t \varphi\right\|_\infty 2\,\tau_n\, V \leqslant \left(2\,T\,L\,R \left\|\partial_t \varphi\right\|_\infty V\right) \frac{\tau_n}{\ell_n} \to 0.
\end{aligned}$$

至于前一项，由 (40)、(39) 可得

$$\begin{aligned}
\left|\mathfrak{E}_4^n\right| &= \left|\sum_{m=0}^{M_n-1} \sum_{i=0}^{N_n-1} \int_{t^m}^{t^{m+1}} \Phi_k(R_i(t)) \left[\varphi(x_{i+1}^m, t) - \varphi\big(x_{i+1}(t), t\big) - \big(\varphi\big(x_i^m, t\big) - \varphi\big(x_i(t), t\big)\big)\right] \mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \sum_{m=0}^{M_n-1} \sum_{i=0}^{N_n-1} \int_{t^m}^{t^{m+1}} \left\|f'\right\|_\infty \left|R_i(t) - k\right| \left\|\partial_x \varphi\right\|_\infty \left(\left|x_{i+1}^m - x_{i+1}(t)\right| + \left|x_i^m - x_i(t)\right|\right) \mathrm{d}t \\
&\leqslant \sum_{m=0}^{M_n-1} \sum_{i=0}^{N_n-1} \tau_n \left\|f'\right\|_\infty R \left\|\partial_x \varphi\right\|_\infty 2\tau_n V = \left(2\,T\,V\,L \left\|f'\right\|_\infty R \left\|\partial_x \varphi\right\|_\infty\right) \frac{\tau_n}{\ell_n} \to 0.
\end{aligned}$$

由于 $k > 0$和 v 是递减函数，由（39）可推得

$$\begin{aligned}
\left|\mathfrak{E}_5^n\right| &= k \sum_{m=0}^{M_n-1} \int_{t^m}^{t^{m+1}} \left[\int_{x_0(t)}^{x_0^m} (\partial_t \varphi + v(k)\partial_x \varphi)\,\mathrm{d}x + \int_{x_N^m}^{x_N(t)} (\partial_t \varphi + v(k)\partial_x \varphi)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}t \\
&\leqslant k \sum_{m=0}^{M_n-1} \int_{t^m}^{t^{m+1}} \left(\left\|\partial_t \varphi\right\|_\infty + V \left\|\partial_x \varphi\right\|_\infty\right) \left(\left|x_0^m - x_0(t)\right| + \left|x_N^m - x_N(t)\right|\right) \mathrm{d}t \\
&\leqslant \left(2\,k\,T(\left\|\partial_t \varphi\right\|_\infty + V \left\|\partial_x \varphi\right\|_\infty)V\right) \tau_n \to 0.
\end{aligned}$$

利用 (34)、(41)、(43)、(40) 和 (42)，我们估计

$$
\begin{aligned}
\left|\mathfrak{E}_7^n\right| &= \left| \sum_{m=0}^{M_n-1} \sum_{i=0}^{N_n-1} \int_{t^m}^{t^{m+1}} \operatorname{sign}\left(R_i(t)-k\right) \frac{R_i(t)^2}{\ell_n} \left[\left(\dot{x}_{i+1}(t)-\dot{x}_i(t)\right) \int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} \left(\varphi(x,t)-\varphi\left(x_{i+1}(t),t\right)\right) \mathrm{d}x \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \left(\dot{x}_i(t)-v\left(R_i(t)\right)\right) \int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} \left(\varphi(x_i(t),t)-\varphi\left(x_{i+1}(t),t\right)\right) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \sum_{m=0}^{M_n-1} \sum_{i=0}^{N_n-1} \int_{t^m}^{t^{m+1}} \operatorname{sign}\left(R_i(t)-k\right) \frac{R_i(t)^2}{\ell_n} \left[\left(\dot{x}_{i+1}(t)-\dot{x}_i(t)\right) \int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} \left(\varphi(x,t)-\varphi\left(x_{i+1}(t),t\right)\right) \mathrm{d}x \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \left[(1-\theta)\left(v\left(R_i^{m+1}\right)-v\left(R_i^m\right)\right)+v\left(R_i^m\right)-v\left(R_i(t)\right)\right] \int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} \left(\varphi(x_i(t),t)-\varphi\left(x_{i+1}(t),t\right)\right) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \sum_{m=0}^{M_n-1} \sum_{i=0}^{N_n-1} \int_{t^m}^{t^{m+1}} \frac{R_i(t)^2}{\ell_n} \left[\left|\dot{x}_{i+1}(t)-\dot{x}_i(t)\right| \left\|\partial_x\varphi\right\|_\infty \left(x_{i+1}(t)-x_i(t)\right)^2 \right. \\
&\qquad \left. + \left[(1-\theta)\left[v\right]_{\mathrm{Lip}} \left|R_i^{m+1}-R_i^m\right| + \left[v\right]_{\mathrm{Lip}} \left|R_i^m-R_i(t)\right| \right] \left\|\partial_x\varphi\right\|_\infty \left(x_{i+1}(t)-x_i(t)\right)^2 \right] \mathrm{d}t \\
&\leqslant \sum_{m=0}^{M_n-1} \sum_{i=0}^{N_n-1} \int_{t^m}^{t^{m+1}} \ell_n \left\|\partial_x\varphi\right\|_\infty \left[\left|\dot{x}_{i+1}(t)-\dot{x}_i(t)\right| \right. \\
&\qquad + \left[v\right]_{\mathrm{Lip}} \left[(1-\theta)\frac{\tau_n}{\ell_n} \left[v\right]_{\mathrm{Lip}} R_i^m R_i^{m+1} \left[\theta\left|R_{i+1}^m-R_i^m\right| + (1-\theta)\left|R_{i+1}^{m+1}-R_i^{m+1}\right|\right] \right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. + \frac{\tau_n}{\ell_n} \left[v\right]_{\mathrm{Lip}} R_i(t) R_i^m \left[\theta\left|R_{i+1}^m-R_i^m\right| + (1-\theta)\left|R_{i+1}^{m+1}-R_i^{m+1}\right|\right] \right] \right] \mathrm{d}t \\
&\leqslant \sum_{m=0}^{M_n-1} \sum_{i=0}^{N_n-1} \int_{t^m}^{t^{m+1}} \ell_n \left\|\partial_x\varphi\right\|_\infty \left[\left|\dot{x}_{i+1}(t)-\dot{x}_i(t)\right| \right. \\
&\qquad \left. + \left[v\right]_{\mathrm{Lip}} \left[(2-\theta)\frac{\tau_n}{\ell_n} \left[v\right]_{\mathrm{Lip}} R^2 \left[\theta\left|R_{i+1}^m-R_i^m\right| + (1-\theta)\left|R_{i+1}^{m+1}-R_i^{m+1}\right|\right] \right] \right] \mathrm{d}t \\
&\leqslant \left(\left\|\partial_x\varphi\right\|_\infty T \left[v\right]_{\mathrm{Lip}} \mathrm{TV}\left[\overline{\rho}\right]\right) \ell_n + \left(\left\|\partial_x\varphi\right\|_\infty T(2-\theta)\left[v\right]_{\mathrm{Lip}}^2 R^2 \mathrm{TV}\left[\overline{\rho}\right]\right) \tau_n \to 0.
\end{aligned}
$$

根据（34）、（41）、（43）、（40）和命题3.3，我们得到

$$
\begin{aligned}
\left|\mathfrak{E}_6^n\right| &= k \left| \sum_{m=0}^{M_n-1} \int_{t^m}^{t^{m+1}} \varphi(x_0(t),t) \left[\theta\left(v\left(R_0^{m+1}\right)-v\left(R_0^m\right)\right)+v\left(R_0(t)\right)-v\left(R_0^{m+1}\right)\right] \mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant k \sum_{m=0}^{M_n-1} \tau_n \left\|\varphi\right\|_\infty \left[v\right]_{\mathrm{Lip}} \left[\theta\left|R_0^{m+1}-R_0^m\right| + \left|R_0(t)-R_0^m\right| + \left|R_0^m-R_0^{m+1}\right|\right] \\
&\leqslant \left(k\,T \left\|\varphi\right\|_\infty \left[v\right]_{\mathrm{Lip}} (\theta+2) \left[v\right]_{\mathrm{Lip}} R^3\right) \frac{\tau_n}{\ell_n} \to 0.
\end{aligned}
$$

对于最后一项误差项，由 (34)、(41)、(43) 及命题 3.4，我们得到

$$
\begin{aligned}
\left|\mathfrak{E}_8^n\right| &\leqslant k \sum_{i=0}^{N_n-1} \int_0^T \left| \left(\dot{x}_{i+1}(t)-v\left(R_{i+1}(t)\right)\right) \varphi\left(x_{i+1}(t),t\right) - \left(\dot{x}_i(t)-v\left(R_i(t)\right)\right) \varphi\left(x_i(t),t\right) \right| \mathrm{d}t \\
&= k \sum_{m=0}^{M_n-1} \sum_{i=0}^{N_n-1} \int_{t^m}^{t^{m+1}} \left| \left((1-\theta)\left(v\left(R_{i+1}^{m+1}\right)-v\left(R_{i+1}^m\right)\right) + \left(v\left(R_{i+1}^m\right)-v\left(R_{i+1}(t)\right)\right) \right) \varphi\left(x_{i+1}(t),t\right) \right. \\
&\qquad \left. - \left((1-\theta)\left(v\left(R_i^{m+1}\right)-v\left(R_i^m\right)\right) + \left(v\left(R_i^m\right)-v\left(R_i(t)\right)\right) \right) \varphi\left(x_i(t),t\right) \right| \mathrm{d}t \\
&\leqslant k \sum_{m=0}^{M_n-1} \sum_{i=0}^{N_n-1} \int_{t^m}^{t^{m+1}} \left\|\varphi\right\|_\infty \left[v\right]_{\mathrm{Lip}} \left[(1-\theta)\left|R_{i+1}^{m+1}-R_{i+1}^m\right| + \left|R_{i+1}^m-R_{i+1}(t)\right| \right.
\end{aligned}
$$

$$+(1-\theta)\left|R_i^{m+1}-R_i^m\right|+\left|R_i^m-R_i(t)\right|\Big]\,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant k\sum_{m=0}^{M_n-1}\int_{t^m}^{t^{m+1}}\|\varphi\|_\infty\,[v]_{\mathrm{Lip}}^2\,\frac{\tau_n}{\ell_n}\,R^2\,\mathrm{TV}\big[\overline{\rho}\big]\,2(2-\theta)\,\mathrm{d}t$$
$$=\Big(k\,T\,\|\varphi\|_\infty\,[v]_{\mathrm{Lip}}^2\;R^2\,\mathrm{TV}\big[\overline{\rho}\big]\,2\,(2-\theta)\Big)\,\frac{\tau_n}{\ell_n}\to 0.$$

于是，(44) 与 (45) 中给出的 $\widetilde{\mathfrak{M}}_1^n$ 与 $\widetilde{\mathfrak{M}}_2^n$ 之和可化为

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathfrak{M}}_1^n+\widetilde{\mathfrak{M}}_2^n=k\Bigg[&\int_0^T\Big[\varphi(x_0(t),t)\left(v(k)-v\big(R_0(t)\big)\right)-\varphi(x_N(t),t)\,(v(k)-v(0))\Big]\,\mathrm{d}t\\&+\sum_{i=0}^{N_n-1}\int_0^T\mathrm{sign}\big(R_i(t)-k\big)\left[\left(v\big(R_{i+1}(t)\big)-v(k)\right)\varphi\big(x_{i+1}(t),t\big)+\left(v(k)-v\big(R_i(t)\big)\right)\varphi\big(x_i(t),t\big)\right]\mathrm{d}t\Bigg]\\=k\Bigg[&\int_0^T\varphi(x_0(t),t)\left(v(k)-v\big(R_0(t)\big)\right)\left(1+\mathrm{sign}\big(R_0(t)-k\big)\right)\mathrm{d}t\\&+\int_0^T\varphi(x_N(t),t)\,(v(0)-v(k))\left(1+\mathrm{sign}\big(R_{N-1}(t)-k\big)\right)\mathrm{d}t\\&+\sum_{i=1}^{N_n-1}\int_0^T\varphi\big(x_i(t),t\big)\left(v\big(R_i(t)\big)-v(k)\right)\left(\mathrm{sign}\big(R_{i-1}(t)-k\big)-\mathrm{sign}\big(R_i(t)-k\big)\right)\mathrm{d}t\Bigg]\geqslant 0,\end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

最后，利用熵解的唯一性并应用乌雷松子列原理，我们推出近似离散密度序列 $(\rho_n)_n$ 的整体收敛性，参见例如 [6,(7.6)]。

致谢

MDF 和 SF 得到了意大利“高性能计算、大数据与量子计算国家中心”第五专题“环境与自然灾害”的部分资助，以及意大利大学与研究部（MIUR）通过资助项目 PRIN 2020——项目编号 20204NT8W4“非线性演化偏微分方程、流体动力学与输运方程：理论基础与应用”提供的部分资助。MDF、SF 和 VI 还得到了 InterMaths 网络（www.intermaths.eu）的部分资助。MDF、SF 和 VI 也得到了 INdAM-GNAMPA 2025 项目（CUP E5324001950001）“演化模型的理论与应用：最优输运、变分方法与确定性粒子近似”的部分资助。SF 和 VI 得到了 INdAM-GNAMPA 2026 项目（CUP E53C25002010001）“反应–扩散–输运模型：从分析到应用”的部分资助。MDR 感谢以下项目提供的经费支持 （a）：PRIN 2022 项目 通过偏微分方程进行建模、控制与博弈 (D53D23005620006)，由欧盟“下一代欧盟”资助；（b）：INdAM - GNAMPA 研究项目 基于双曲方程组的交通、生物学与气体动力学模型，项目编号 CUP E5324001950001。

Appendix A. An interpolation inequality

引理 A.1. 固定 μ、$\eta\in\mathcal{P}_c(\mathbb{R})\cap BV(\mathbb{R})$。则有

$$\|\mu-\eta\|_{L^1}\leqslant 2\,(\mathrm{TV}[\mu]+\mathrm{TV}[\eta])^{1/2}\,d_1(\mu,\eta)^{1/2},$$

其中，$d_1(\mu,\eta)$ 是 μ 与 η之间的 1-*Wasserstein* 距离。

证明。 设 ξ_ε 为一族标准弗里德里希斯磨光子，并令

$$\mu_\varepsilon=\mu*\xi_\varepsilon,\qquad \eta_\varepsilon=\eta*\xi_\varepsilon.$$

显然，μ_ε 和 η_ε 属于索博列夫空间 $W^{1,\,1}(\mathbb{R})$。此外，[1, 定理 2.2] 表明，对所有 $\varepsilon>0$

$$\int_{\mathbb{R}}\left|\mu_\varepsilon'(x)\right|\mathrm{d}x\leqslant\mathrm{TV}[\mu],\qquad\qquad\int_{\mathbb{R}}\left|\eta_\varepsilon'(x)\right|\mathrm{d}x\leqslant\mathrm{TV}[\eta]\,.\tag{46}$$

现在，我们回顾插值不等式

$$\left\|u'\right\|_{L^1}\leqslant 2\left\|u''\right\|_{L^1}^{1/2}\|u\|_{L^1}^{1/2},\tag{47}$$

对于紧支撑的 $u\in W^{2,\,1}(\mathbb{R})$，该结论成立，参见 [31, 定理 6.4.1、引理 6.4.3]。令

$$F_\varepsilon(x)=\int_{-\infty}^x\mu_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y,\qquad\qquad G_\varepsilon(x)=\int_{-\infty}^x\eta_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y,$$

假设 μ 和 η 均为紧支撑，则差值 $F_\varepsilon - G_\varepsilon$ 属于 $L^1(\mathbb{R})$。此外，有

$$\left\|F_\varepsilon - G_\varepsilon\right\|_{L^1} = d_1(\mu_\varepsilon, \eta_\varepsilon).$$

在（47）中取 $u = F_\varepsilon - G_\varepsilon$，可得

$$\left\|\mu_\varepsilon - \eta_\varepsilon\right\|_{L^1} \leqslant 2\left\|\mu_\varepsilon' - \eta_\varepsilon'\right\|_{L^1}^{1/2} d_1(\mu_\varepsilon, \eta_\varepsilon)^{1/2} \leqslant 2\left(\left\|\mu_\varepsilon'\right\|_{L^1} + \left\|\eta_\varepsilon'\right\|_{L^1}\right)^{1/2} d_1(\mu_\varepsilon, \eta_\varepsilon)^{1/2},$$

进而，由（46）可知

$$\left\|\mu_\varepsilon - \eta_\varepsilon\right\|_{L^1} \leqslant 2(\mathrm{TV}[\mu] + \mathrm{TV}[\eta])^{1/2} d_1(\mu_\varepsilon, \eta_\varepsilon)^{1/2}.$$

由于 $\mu_\varepsilon \to \mu$ 和 $\eta_\varepsilon \to \eta$ 在 $L^1(\mathbb{R})$ 中局部强收敛，并且除一个子序列外几乎处处收敛，法图引理推出

$$\|\mu - \eta\|_{L^1} \leqslant \liminf_{\varepsilon \searrow 0} \left\|\mu_\varepsilon - \eta_\varepsilon\right\|_{L^1}.$$

接着注意到

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(x) - G_\varepsilon(x) &= \int_{-\infty}^{x} \left(\mu_\varepsilon(y) - \eta_\varepsilon(y)\right) \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_\varepsilon(z) \left(\mu(y-z) - \eta(y-z)\right) \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_\varepsilon(z) \int_{-\infty}^{x} \left(\mu(y-z) - \eta(y-z)\right) \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_\varepsilon(z) \left(F(x-z) - G(x-z)\right) \mathrm{d}z = \xi_\varepsilon * (F - G), \end{aligned}$$

其中

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \mu(y) \, \mathrm{d}y, \qquad G(x) = \int_{-\infty}^{x} \eta(y) \, \mathrm{d}y.$$

因此，[1,定理 2.2] 再次推出

$$d_1(\mu_\varepsilon, \eta_\varepsilon) = \left\|F_\varepsilon - G_\varepsilon\right\|_{L^1} \leqslant \|F - G\|_{L^1} = d_1(\mu, \eta),$$

至此，证明完成。 □

参考文献

[1] L. Ambrosio、N. Fusco 和 D. Pallara。有界变差函数与自由间断问题。牛津数学专著。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，2000 年。[2] L. Ambrosio、N. Gigli 和 G. Savaré。度量空间及概率测度空间中的梯度流。苏黎世联邦理工学院数学讲义。Birkhäuser 出版社，巴塞尔，第二版，2008 年。[3] B. Andreianov、M.D. Rosini 和 G. Stivaletta。关于具有线性成本的一维 Hughes 模型解的存在性、稳定性及多粒子近似。微分方程杂志，369：253–298，2023 年。[4] A. Bressan。通过波前追踪求守恒律系统的整体解。数学分析与应用杂志，170(2)：414–432，1992 年。[5] A. Bressan。双曲守恒律系统。牛津大学出版社，2000 年。[6] G.M. Coclite。标量守恒律。Springer 数学简明读物。施普林格，新加坡，[2024] ©2024。[7] R.M. Colombo 和 E. Rossi。关于交通流中的微观-宏观极限。帕多瓦大学数学研讨会汇刊，131：217–235，2014 年。[8] J. Crank 和 P. Nicolson。数值求解热传导型偏微分方程解的一种实用方法。剑桥哲学学会数学会刊，43(1)：50–67，1947 年。[9] C. M. Dafermos。守恒律初值问题解的多边形近似。数学分析与应用杂志，38：33–41，1972 年。[10] C. M. Dafermos。连续介质物理中的双曲守恒律。施普林格，第四版，2016 年。[11] M. Di Francesco、S. Fagioli 和 E. Radici。具有非线性迁移率的非局部输运方程的确定性粒子近似。微分方程杂志，266(5)：2830–2868，2019 年。[12] M. Di Francesco、S. Fagioli、M.D. Rosini 和 G. Russo。车辆与行人流宏观模型的跟随领头者近似。载于《活性粒子》。第 1 卷。理论、模型与应用进展，《建模、仿真、科学、工程与技术》，第 333–378 页。Birkhäuser/Springer，查姆，2017 年。[13] M. Di Francesco、V. Iorio 和 M. Schmidtchen。通过受排斥型莫尔斯势作用的非局部相互作用粒子近似二次多孔介质方程。SIAM 数学分析杂志，57(5)：4631–4679，2025 年。[14] M. Di Francesco 和 M.D. Rosini。通过多粒子极限从跟随领头者型模型严格推导非线性标量守恒律。理性力学与分析档案，217(3)：831–871，2015 年。[15] M. di Francesco 和 G. Stivaletta。带空间依赖通量的标量守恒律跟驰格式的收敛性。离散与连续动力系统，40(1)：233–266，2020 年。[16] R. J. DiPerna。非线性双曲守恒律系统解的整体存在性。微分方程杂志，20(1)：187–212，1976 年。[17] S. Fagioli 和 G. Favre。演化网络上的意见形成：将 DPA 方法应用于非局部交叉扩散偏微分-常微分方程系统。欧洲应用数学杂志，35(6)：748–775，2024 年。[18] S. Fagioli 和 E. Radici。通过确定性粒子近似构造具有非线性迁移率的聚集-扩散方程解。应用科学中的数学模型与方法，28(09)：1801–1829，2018 年。[19] S. Fagioli 和 O. Tse。关于具有非线性迁移率的非局部输运方程的梯度流与熵解。非线性分析，221：112904，2022 年。[20] P. A. Ferrari。非对称简单排斥过程中的激波涨落。概率论及相关领域，91(1)：81–101，1992 年。[21] P. L. Ferrari 和 P. Nejjar。临界标度下平坦初值 TASEP 中的激波涨落。统计物理杂志，160(4)：985–1004，2015 年。

[22] M. Garavello 和 B. Piccoli。网络上的交通流，AIMS 应用数学丛书第 1 卷。美国工业与应用数学学会（AIMS），斯普林菲尔德，密苏里州，2006 年。守恒律模型。[23] J. M. N. T. Gray。部分填充的缓慢旋转滚筒中的颗粒流。流体力学杂志，441：1–29，2001 年。[24] R. Haberman。数学模型，应用数学经典著作第 21 卷。工业与应用数学学会（SIAM），费城，宾夕法尼亚州，1998 年。机械振动、种群动力学与交通流：应用数学导论；1977 年原版的重印本。[25] E. Hairer、S.P. Nørsett 和 G. Wanner。常微分方程 II 的求解：刚性问题与微分代数问题，Springer 计算数学丛书第 14 卷。施普林格，柏林、海德堡，1996 年。[26] D. Helbing。交通及相关自驱动多粒子系统。现代物理评论，73：1067–1141，2001 年。[27] H. Holden 和 N. H. Risebro。双曲守恒律的前沿追踪，第 152 卷。施普林格，2015 年。[28] H. Holden 和 N. H. Risebro。跟驰模型的连续极限——一个简短证明。离散与连续动力系统，38(2)：715–722，2018 年。[29] H. Holden 和 N. H. Risebro。跟驰模型可视为交通流 Lighthill–Whitham–Richards模型的数值近似。网络与非均匀介质，13(3)：409–421，2018 年。[30] H. Holden 和 N. H. Risebro。非局部跟驰模型的连续极限。ESAIM：数学建模与数值分析，58(4)：1523–1539，2024 年。[31] L. Hörmander。非线性双曲微分方程讲义，Mathématiques & Applications（柏林）第 26 卷 *[数学与应用]*。施普林格出版社，柏林，1997 年。[32] W. Hundsdorfer 和 J.G. Verwer。时间依赖对流-扩散-反应方程的数值求解，Springer 计算数学丛书第 33 卷。施普林格，柏林、海德堡，2003 年。[33] C. Kipnis 和 C. Landim。相互作用粒子系统的标度极限，数学科学基础丛书第 320 卷 *[数学科学基础原则]*。施普林格出版社，柏林，1999 年。[34] S. N. Kružkov。多个独立变量中的一阶拟线性方程。苏联数学文集，10：217–243，1970 年。[35] N. N. Kuznetsov。计算一阶拟线性方程弱解的某些近似方法的精度。苏联计算数学与数学物理，16(6)：105–119，1976 年。[36] G. J. Kynch。沉降理论。法拉第学会汇刊，48：166–176，1952 年。[37] M. J. Lighthill 和 G. B. Whitham。关于运动波 II：长而拥挤道路上的交通流理论。伦敦皇家学会会刊。A 辑，229(1178)：317–345，1955 年。[38] P.-L. Lions、B. Perthame 和 E. Tadmor。多维标量守恒律及相关方程的动理学表述。美国数学学会杂志，7：169–191，1994 年。[39] A. Quarteroni 和 A. Valli。偏微分方程的数值近似，Springer 计算数学丛书第 23 卷。施普林格，柏林、海德堡，2008 年。[40] P. I. Richards。公路上的激波。运筹学，4(1)：42–51，1956 年。[41] M.D. Rosini。车辆流与人群动力学的宏观模型：理论与应用。理解复杂系统。施普林格，海德堡，2013 年。[42] S. B. Savage 和 K. Hutter。有限质量颗粒物质沿粗糙斜面的运动。流体力学杂志，199：177–215，1989 年。[43] C. Villani。最优输运：新旧理论，数学科学基础丛书第 338 卷。施普林格出版社，柏林，2009 年。[44] G. B. Whitham。线性波与非线性波。Wiley，纽约，1974 年。MARCO DI FRANCESCO - DISIM - 信息工程、计算机科学与数学系，拉奎拉大学，VIA VETOIO 1（COPPITO）67100 拉奎拉（AQ）- 意大利 电子邮箱：marco.difrancesco@univaq.it SIMONE FAGIOLI - DISIM - 信息工程、计算机科学与数学系，拉奎拉大学，VIA VETOIO 1（COPPITO）67100 拉奎拉（AQ）- 意大利 电子邮箱：simone.fagioli@univaq.it VALERIA IORIO - DISIM - 信息工程、计算机科学与数学系，拉奎拉大学

，VIA VETOIO 1（COPPITO）67100 拉奎拉（AQ） - 意大利
电子邮箱地址：valeria.iorio1@univaq.it

MASSIMILIANO D. ROSINI - 数学与计算机科学学院，玛丽亚·居里-斯克沃多夫斯卡大学，PLAC MARII CURIE-SKŁODOWSKIEJ 1，卢布林，20031，波兰；以及管理与工商管理系，基耶蒂-佩斯卡拉“G. D’ANNUNZIO”大学，VIALE PINDARO, 42，佩斯卡拉，65127，意大利电子邮箱地址：massimiliano.rosini@unich.it