arXiv:2602.01175v1 [math.NA] 1 Feb 2026

用于 Navier–Stokes–Darcy 模型及相关两相流的全新线性、解耦和能量耗散格式 *

XIAOLI LI†, JIE SHEN‡, 和XINHUI WANG§

摘要。我们采用预测-校正框架，为 Navier–Stokes–Darcy 模型及相关两相流构造高效的原始能量耗散格式。在校正步骤中引入一种新的松弛技术，以确保原始能量耗散，从而保证速度和水头的数值解在 $l^\infty(L^2)$ 和 $l^2(H^1)$ 范数下无条件有界。在每个时间步，格式只需依次求解一系列常系数线性方程。我们严格证明了这些格式具有原始能量耗散性，并以 Navier–Stokes–Darcy 模型的一阶格式为例，进行了严格的误差分析。最后，我们开展了一系列基准数值实验，以展示所提方法的精度、稳定性和有效性。

关键词。Navier–Stokes–Darcy 模型；两相流；能量耗散；误差估计

AMS 学科分类。76D05,76T10, 65M12

1. 引言。流体-多孔介质系统在工业过程和地球物理系统中有着广泛应用，因此受到大量研究关注 [24, 33, 14, 27, 21, 32]。耦合流体-多孔介质系统可通过数学模型描述：自由流采用不可压缩纳维–斯托克斯方程，多孔介质中的流动采用达西定律，并通过界面条件耦合，以满足基本守恒律：质量连续性和动量平衡；切向滑移行为则由 Beavers–Joseph–Saffman（BJS）条件描述 [5, 22]。

自由流-多孔介质耦合系统的数值模拟已成为地下工程和环境水文学中的重要工具。构造保结构格式至关重要，因为数值解必须忠实逼近耦合模型的精确解。研究人员已投入大量精力，开发 Navier–Stokes–Darcy 模型的数值方法[1, 3, 12, 4, 19, 22, 42, 45, 36, 8]。例如，McCurdy 等人 [33]对覆盖在饱和多孔介质之上的流体中的热对流进行了线性和非线性稳定性分析，研究了完全对流与流体主导对流之间的转变。他们进一步开发了粗粒化模型和全非线性格式，以预测耦合流体-多孔介质系统中的对流模式 [34]。Rui 和 Zhang [37] 设计了一种稳定化混合有限元方法，用于求解含溶质输运的耦合 Stokes–Darcy 系统。Chen 等人 [8] 提出了两个用于耦合 Stokes–Darcy 方程的二阶隐式-显式格式，并证明了它们的无条件稳定性。最近，Chen 等人[10] 为扩展的 Cahn–Hilliard–Navier–Stokes–Darcy–Boussinesq 系统引入了一类全解耦数值格式，使纳维–斯托克斯方程、达西方程、热方程和 Cahn–Hilliard 方程能够在每个时间步独立求解。另一方面，Qiu 等人 [36] 针对具有 Beavers–Joseph 界面和缺陷边界条件的时变 Navier–Stokes–Darcy 模型提出了一种区域分解法，并严格证明了其收敛性。

据我们所知，以上所有研究在处理纳维–斯托克斯方程中的非线性对流项时，都采用隐式处理或隐式–显式（IMEX）处理，因此每个时间步都需要求解非线性系统，或系数随时间变化的线性系统。从

*本研究部分得到了国家自然科学基金委员会（项目编号：12271302、12131014、W2431008 和 12371409）以及山东省优秀青年科学家自然科学基金（项目编号：ZR2024JQ030）的资助。

† 山东大学数学学院与密码学和数字经济安全国家重点实验室，中国山东济南，250100。电子邮箱：xiaolimath@sdu.edu.cn。

‡通讯作者。东方理工大学数学科学学院，中国宁波。电子邮箱：jshen@eitech.edu.cn。§山东大学数学学院，中国山东济南，250100。电子邮箱：xinhuiwang0108@163.com。

计算角度而言，在不施加稳定性约束的前提下显式处理非线性项是非常理想的。例如，基于标量辅助变量（SAV）方法 [41, 40], 提出的纳维–斯托克斯方程 IMEX格式 [31, 28],，在显式处理非线性项的同时实现了无条件能量稳定性。改进版本见 [30, 29]。基于 [30], 中的思路，Jiang 和 Yang [25, 26] 开发了适用于 Stokes–Darcy 流动集合的高效人工可压缩集合格式，而 Wang等人 [43] 则构造了用于 Navier–Stokes–Darcy 模型的新型 IMEX格式，在时间上结合 SAV 方法，在空间上采用有限元方法。然而，这些方法都只能保持修正能量，该能量不同于模型的原始能量。此外，求解由此产生的线性系统 [25, 26] 的计算成本通常约为经典算法的两倍。虽然存在一类能够保持原始能量耗散的拉格朗日乘子方法 [11], ，但其实现需要求解非线性代数系统。据我们所知，目前尚无研究针对 Navier–Stokes–Darcy 模型，对非线性对流项和耦合界面项进行线性、解耦且显式的离散化，同时仍保持原始能量耗散，更遑论提供收敛性分析。

将 Navier–Stokes–Darcy 模型的方法扩展到 Cahn–Hilliard–Navier–Stokes–Darcy 系统，对于在实际应用中准确模拟多相流动力学至关重要。后者模型 [17, 44, 7, 20, 9, 16] 纳入了 Cahn–Hilliard 方程，该方程描述相分离过程。尽管这显著增加了数学和计算复杂度，但它为污染物输运和石油采收等应用提供了更全面的框架。针对这一高度非线性的多物理场模型开发能量耗散格式，凸显了我们方法更广泛的适用性。

本文的主要目标是为 Navier–Stokes–Darcy 模型构造线性原始能量耗散格式，并将其扩展到两相流问题。本文的主要贡献如下:

- 我们通过提出一种新的松弛技术，为 Navier–Stokes–Darcy 模型构造了一阶和二阶线性预测–校正格式。这些格式是解耦的，在每个时间步只需依次求解一组具有常系数的线性微分方程。它们保持模型的原始能量，从而保证速度和水头在 $l^\infty(L^2)$ 范数和 $l^2(H^1)$ 范数下无条件有界。

- 两种格式均被证明是唯一可解且无条件稳定的，对时间步没有任何限制。此外，我们为一阶格式建立了最优误差估计。

- 我们将所提出的框架推广到 Cahn–Hilliard–Navier–Stokes–Darcy 相场模型。这一推广保留了原有格式的关键特性，包括线性性以及对原始能量的保持。

本文其余部分组织如下。第2节给出 Navier–Stokes–Darcy 模型的表述，并建立其能量稳定性。在第3节中，我们引入一阶和二阶线性、解耦且原始能量耗散的格式。第4节给出理论分析，通过数学归纳法证明无条件能量稳定性、解的存在性，以及速度、水头和能量的最优收敛。第5节将该方法推广到带有相场动力学的 Cahn–Hilliard–Navier–Stokes–Darcy 模型。最后，第6节将所提出的三种数值格式推广到 EMAC 公式，并给出数值实验，例如收敛测试、过滤过程以及浮力驱动的气泡动力学。最后一节给出若干结论。

2. Navier–Stokes–Darcy 模型。我们先介绍一些基本定义。考虑一个有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2$, 3，其中包含一个自由流动区域 Ω_f 和一个多孔介质区域 Ω_p。我们用 $\Gamma = \partial\Omega_f \cap \partial\Omega_p$表示这两个区域之间的界面 Γ，并定义 $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_p \cup \Gamma$。这里，界面 Γ 上从 Ω_f 指向 Ω_p 的单位法向量定义为 $\mathbf{n} = \mathbf{n}_f = -\mathbf{n}_p$。为简化记号，我们进一步定义 $\Gamma_f = \partial\Omega_f \backslash \Gamma$, $\Gamma_p = \partial\Omega_p \backslash \Gamma$。

2.1. 模型定义与概念。在自由流动区域 Ω_f中，流体满足不可压缩的纳维–斯托克斯方程。

$$\partial_t \mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \mathbf{f}_f, \quad \text{in } \Omega_f \times (0,T], \tag{2.1}$$
$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \quad \text{in } \Omega_f \times (0,T], \tag{2.2}$$
$$\mathbf{u}(\mathbf{x},0) = \mathbf{u}^0, \quad \text{in } \Omega_f, \tag{2.3}$$
$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{0}, \quad \text{on } \Gamma_f \times (0,T]. \tag{2.4}$$

这里，系数 ν 表示运动黏度，与雷诺数 Re成反比。终止时间记为 $T>0$。$\mathbf{u}$ 和 p 分别表示 Ω_f 中自由流的速度和压力。$\mathbf{u}^0$ 表示初始解。函数 $\mathbf{f}_f$ 表示外部体力。

在多孔介质区域 Ω_p 中，流动由达西定律支配。

$$S_0\partial_t\phi - \nabla\cdot(\mathbb{K}\nabla\phi) = f_p, \quad \text{in } \Omega_p \times (0,T], \tag{2.5}$$
$$\phi(\mathbf{x},0) = \phi^0, \quad \text{in } \Omega_p, \tag{2.6}$$
$$\phi(\mathbf{x},t) = 0, \quad \text{on } \Gamma_p \times (0,T], \tag{2.7}$$

其中，ϕ 是 Ω_p 中的水头，S_0 是比质量储水系数，f_p 是源汇项，ϕ^0 是初始解，水力传导率张量 $\mathbb{K}$ 是对称正定矩阵。

在自由流动区域与多孔介质区域之间的界面 Γ 上，我们施加以下界面条件：

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} + \mathbb{K}\nabla\phi\cdot\mathbf{n} = 0, \quad \text{on } \Gamma\times(0,T], \tag{2.8}$$
$$p - \nu\mathbf{n}\cdot(\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}) + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 = g\phi, \quad \text{on } \Gamma\times(0,T], \tag{2.9}$$
$$-\nu\boldsymbol{\tau}\cdot(\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}) = \alpha\sqrt{\frac{\nu g}{tr(\mathbb{K})}}(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\tau}), \quad \text{on } \Gamma\times(0,T]. \tag{2.10}$$

第一个方程表示界面 Γ上的速度法向分量连续性，即质量守恒。第二个条件表示法向力平衡。特别地，这里考虑惯性力，即 Lions界面条件 [34, 12, 19, 33]。最后一个方程是 Beavers–Joseph–Saffman 界面条件 [2, 38]。

我们用 $(\cdot,\cdot)_X$（其中 $X = f$或 p）表示 Ω_X 中的 L^2 内积，并用 $\|\cdot\|_X$ 表示 Ω_X 中相应的 L^2 范数。此外，我们定义

$$H_f = \{\mathbf{v}\in(H^1(\Omega_f))^d : \mathbf{v}|_{\Gamma_f} = 0\}, \qquad H_p = \{\psi\in H^1(\Omega_p) : \psi|_{\Gamma_p} = 0\},$$
$$Q_f = L^2(\Omega_f), \qquad W = H_f \times H_p.$$

接下来，Navier–Stokes–Darcy 模型 (2.1)-(2.10) 的弱形式描述如下：$\forall\, t\in(0,\ T]$，求 $\mathbf{u}\in H_f$，$p\in Q_f$，$\phi\in H_p$使得

$$\begin{cases} (\partial_t\mathbf{u},\mathbf{v})_f + gS_0(\partial_t\phi,\psi)_p + \nu(\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{v})_f - (p,\nabla\cdot\mathbf{v})_f + a(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v}) + \alpha\sqrt{\dfrac{\nu g}{tr(\mathbb{K})}}\displaystyle\int_\Gamma(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\tau})(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\tau})ds \\ \qquad + g(\mathbb{K}\nabla\phi,\nabla\psi)_p + c_\Gamma(\mathbf{v},\phi) - c_\Gamma(\mathbf{u},\psi) = (\mathbf{f}_f,\mathbf{v})_f + g(f_p,\psi)_p, \qquad \forall\mathbf{v}\in H_f,\ \psi\in H_p, \\ (\nabla\cdot\mathbf{u},q)_f = 0, \qquad \forall q\in Q_f, \\ (\mathbf{u}(\mathbf{x},0),\mathbf{v})_f = (\mathbf{u}^0,\mathbf{v})_f, \qquad \forall\mathbf{v}\in H_f, \\ (\phi(\mathbf{x},0),\psi)_p = (\phi^0,\psi)_p, \qquad \forall\psi\in H_p, \end{cases} \tag{2.11}$$

其中

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})=((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v},\mathbf{w})_f-\frac{1}{2}\int_\Gamma(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{w}\cdot\mathbf{n})ds,\qquad\forall\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in H_f,$$
$$c_\Gamma(\mathbf{v},\phi)=g\int_\Gamma\phi\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}ds,\qquad\forall\mathbf{v}\in H_f,\ \phi\in H_p.$$

LEMMA 2.1. 令 $\mathbf{u}\in H_f$ 和 $\nabla\cdot\mathbf{u}=0$，则有 *[43]*

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v})=0,\quad\forall\mathbf{v}\in H_f.\tag{2.12}$$

LEMMA 2.2. 对于非线性对流项 $a(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$，当 $d=2$、3*[39, 13]*时，以下不等式成立：

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})\le C\|\mathbf{u}\|_{1,f}\|\mathbf{v}\|_{1,f}\|\mathbf{w}\|_{1,f},\tag{2.13}$$
$$a(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})\le C\|\mathbf{u}\|_{0,f}\|\mathbf{v}\|_{2,f}\|\mathbf{w}\|_{1,f},\tag{2.14}$$
$$a(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})\le C\|\mathbf{u}\|_{2,f}\|\mathbf{v}\|_{0,f}\|\mathbf{w}\|_{1,f};\tag{2.15}$$

且当 $d=2$ 时，有

$$\left|\int_\Gamma(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{w}\cdot\boldsymbol{n}_f)ds\right|\le C\|\mathbf{u}\|_{0,f}^{1/2}\|\mathbf{u}\|_{1,f}^{1/2}\|\mathbf{v}\|_{0,f}^{1/2}\|\mathbf{v}\|_{1,f}^{1/2}\|\mathbf{w}\|_{0,f}^{1/2}\|\mathbf{w}\|_{1,f}^{1/2},\tag{2.16}$$
$$a(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})\le C\|\mathbf{u}\|_{0,f}^{1/2}\|\mathbf{u}\|_{1,f}^{1/2}\|\mathbf{v}\|_{0,f}^{1/2}\|\mathbf{v}\|_{1,f}^{1/2}\|\mathbf{w}\|_{1,f},\tag{2.17}$$

其中 $C>0$ 是一个常数。

2.2. 能量耗散律。下面证明，当$\mathbf{f}_f=\mathbf{0}$ 且 $f_p=0$时，问题 (2.11) 是能量耗散的。事实上，将$\mathbf{v}=\mathbf{u}$ 和 $\psi=\phi$ 代入 (2.11)，得到

$$(\partial_t\mathbf{u},\mathbf{u})_f+gS_0(\partial_t\phi,\phi)_p+\nu(\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{u})_f+a(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{u})+\alpha\sqrt{\frac{\nu g}{tr(\mathbb{K})}}\int_\Gamma(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\tau})^2ds$$
$$+g(\mathbb{K}\nabla\phi,\nabla\phi)_p+c_\Gamma(\mathbf{u},\phi)-c_\Gamma(\mathbf{u},\phi)=0,\qquad\forall\mathbf{v}\in H_f,\ \psi\in H_p.$$

由 (2.12) 可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|_f^2+\frac{gS_0}{2}\frac{d}{dt}\|\phi\|_p^2=-\nu(\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{u})_f-\alpha\sqrt{\frac{\nu g}{tr(\mathbb{K})}}\int_\Gamma(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\tau})^2ds-g(\mathbb{K}\nabla\phi,\nabla\phi)_p\le0.\tag{2.18}$$

换言之，我们有

$$\frac{dE}{dt}\le0,\quad\text{where }E=\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|_f^2+\frac{gS_0}{2}\|\phi\|_p^2.$$

3. 能量稳定格式。为了构造高效且无条件能量稳定的格式，我们引入一个标量辅助变量 $\xi(t)\equiv1$，用作松弛因子，并通过重新表述能量耗散律来扩展原系统 (2.11)：

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|_f^2+\frac{gS_0}{2}\frac{d}{dt}\|\phi\|_p^2=\xi(t)\Big(-\nu(\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{u})_f-\alpha\sqrt{\frac{\nu g}{tr(\mathbb{K})}}\int_\Gamma(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\tau})^2ds-g(\mathbb{K}\nabla\phi,\nabla\phi)_p\Big).\tag{3.1}$$

3.1. 格式 I: 一阶格式。现在，我们采用预测-校正方法，为扩展系统（即 (2.11) 和 (3.1)）构造一个一阶格式，如下所示:

˜步骤 *1*（预测）。给定 $(\mathbf{u}^n, p^n, \phi^n)$ 和 $(\tilde{\mathbf{u}}^n, \phi^n)$，对于任意 $(\mathbf{v}\ q, \psi)\ \in\ H_f \times Q_f \times H_p$，求满足以下条件的 $(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, p^{n+1}, \tilde{\phi}^{n+1})$

$$\left(\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}-\tilde{\mathbf{u}}^n}{\Delta t}, \mathbf{v}\right)_f + \nu(\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \nabla\mathbf{v})_f + \alpha\sqrt{\frac{\nu g}{tr(\mathbb{K})}}\int_\Gamma(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\cdot\boldsymbol{\tau})(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\tau})ds - (p^{n+1}, \nabla\cdot\mathbf{v})_f$$
$$+ a(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) + c_\Gamma(\mathbf{v}, \phi^n) = (\mathbf{f}_f^{n+1}, \mathbf{v})_f, \tag{3.2}$$
$$(\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, q)_f = 0, \tag{3.3}$$
$$gS_0\left(\frac{\tilde{\phi}^{n+1}-\tilde{\phi}^n}{\Delta t}, \psi\right)_p + g(\mathbb{K}\nabla\tilde{\phi}^{n+1}, \nabla\psi)_p - c_\Gamma(\mathbf{u}^n, \psi) = g(f_p^{n+1}, \psi)_p. \tag{3.4}$$

步骤 *2*（修正）。记

$$\tilde{E}^{n+1} = \frac{1}{2}\|\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|_f^2 + \frac{gS_0}{2}\|\tilde{\phi}^{n+1}\|_p^2, \tag{3.5}$$

并令

$$E^{n+1} = \xi^{n+1}\tilde{E}^{n+1}, \tag{3.6}$$

其中 ξ^{n+1} 是 1 的一个近似值，满足线性代数方程

$$\frac{E^{n+1}-E^n}{\Delta t} = -\xi^{n+1}\left(\nu\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|_f^2 + \alpha\sqrt{\frac{\nu g}{tr(\mathbb{K})}}\int_\Gamma(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\cdot\boldsymbol{\tau})^2ds + g\|\sqrt{\mathbb{K}}\nabla\tilde{\phi}^{n+1}\|_p^2\right). \tag{3.7}$$

最后，我们通过以下方式更新 $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ 和 $\tilde{\phi}^{n+1}$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \sqrt{\xi^{n+1}}\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \qquad \phi^{n+1} = \sqrt{\xi^{n+1}}\tilde{\phi}^{n+1}. \tag{3.8}$$

THEOREM 3.1. 若 $E^n \geq 0$，则有 $\xi^{n+1} \geq 0$, $E^{n+1} \geq 0$。因此，格式 *(3.2)-(3.8)* 会耗散原始能量，如(3.7)所示。此外，我们有

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{u}^{k+1}\|_f^2 + \frac{gS_0}{2}\|\phi^{k+1}\|_p^2 + \Delta t\sum_{n=0}^{k}\left(\nu\|\nabla\mathbf{u}^{n+1}\|_f^2 + \alpha\sqrt{\frac{\nu g}{tr(\mathbb{K})}}\int_\Gamma(\mathbf{u}^{n+1}\cdot\boldsymbol{\tau})^2ds + g\|\sqrt{\mathbb{K}}\nabla\phi^{n+1}\|_p^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\|\mathbf{u}^0\|_f^2 + \frac{gS_0}{2}\|\phi^0\|_p^2 \leq C, \tag{3.9}$$

其中，$C > 0$ 是一个依赖于初始条件 ϕ^0 和$\mathbf{u}^0$的常数。

证明。由于 $E^n \geq 0$、$\tilde{E}^{n+1} \geq 0$ 和 $E^{n+1} = \xi^{n+1}\tilde{E}^{n+1}$，由 (3.7) 可立即推出

$$\xi^{n+1} = \frac{E^n}{\tilde{E}^{n+1} + \Delta t\mathbb{I}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\phi}^{n+1})} \geq 0, \tag{3.10}$$

其中，$\mathbb{I}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\phi}^{n+1}) = \nu\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|_f^2 + \alpha\sqrt{\frac{\nu g}{tr\,\mathbb{K}()}}\int_\Gamma(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\cdot\boldsymbol{\tau})^2ds + g\|\sqrt{\mathbb{K}}\nabla\tilde{\phi}^{n+1}\|_p^2 \geq 0$。

结合 (3.7) 和 (3.10)，可得

$$\frac{E^{n+1}-E^n}{\Delta t} = -\xi^{n+1}\mathbb{I}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\phi}^{n+1}) \leq 0, \tag{3.11}$$

这表明原始能量是耗散的。

另一方面，将（3.7）从 $n=0$ 到 $n=k$ 求和，可得

$$E^{k+1}+\Delta t\sum_{n=0}^{k}\xi^{n+1}\mathbb{I}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1},\tilde{\phi}^{n+1})=E^0\le C,$$

这意味着（3.9）。 □

3.2. 方案 II：二阶格式。 类似地，我们可以基于 Crank-Nicolson 公式和 Adam-Bashforth公式构造如下二阶格式:

步骤 *1*（预测）。 给定 $(\mathbf{u}^{n-1},\phi^{n-1})$, $(\mathbf{u}^n,p^n,\phi^n)$ 和 $(\tilde{}\mathbf{u}^n,\tilde{\phi}^n)$，对于任意 $(\mathbf{v}\ q,\psi)\in H_f\times Q_f\times H_p$, 求 $(\tilde{}\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}, \tilde{\phi}^{n+1})$，使其满足

$$\left(\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}-\tilde{\mathbf{u}}^n}{\Delta t},\mathbf{v}\right)_f+\nu\left(\nabla\left(\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}+\mathbf{u}^n}{2}\right),\nabla\mathbf{v}\right)_f+\alpha\sqrt{\frac{\nu g}{tr(\mathbb{K})}}\int_\Gamma\left(\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}+\mathbf{u}^n}{2}\cdot\boldsymbol{\tau}\right)(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\tau})ds$$
$$-\left(\frac{p^{n+1}+p^n}{2},\nabla\cdot\mathbf{v}\right)_f+a(\tilde{\mathbf{u}}^{n+\frac12},\tilde{\mathbf{u}}^{n+\frac12},\mathbf{v})+c_\Gamma(\mathbf{v},\tilde{\phi}^{n+\frac12})=\left(\frac{\mathbf{f}_f^{n+1}+\mathbf{f}_f^n}{2},\mathbf{v}\right)_f,\tag{3.12}$$

$$(\nabla\cdot\tilde{}\mathbf{u}^{n+1},\ q)_f=0,\tag{3.13}$$

$$gS_0\left(\frac{\tilde{\phi}^{n+1}-\tilde{\phi}^n}{\Delta t},\psi\right)_p+g\left(\mathbb{K}\nabla\frac{\tilde{\phi}^{n+1}+\phi^n}{2},\nabla\psi\right)_p-c_\Gamma(\tilde{\mathbf{u}}^{n+\frac12},\psi)=g\left(\frac{f_p^{n+1}+f_p^n}{2},\psi\right)_p,\tag{3.14}$$

其中 $\tilde{}\mathbf{u}^{n+\frac12}=\frac32\mathbf{u}^n-\frac12\mathbf{u}^{n-1}$ 且 $\tilde{\phi}^{n+\frac12}=\frac32\phi^n-\frac12\phi^{n-1}$。

步骤 *2*（修正）。记

$$\tilde{E}^{n+1}=\frac12\|\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|_f^2+\frac{gS_0}{2}\|\tilde{\phi}^{n+1}\|_p^2,\tag{3.15}$$

并设

$$E^{n+1}=\xi^{n+1}\tilde{E}^{n+1},\tag{3.16}$$

其中 ξ^{n+1} 是对 1 的一个近似，满足线性代数方程

$$\frac{E^{n+1}-E^n}{\Delta t}=-\xi^{n+1}\left(\nu\left\|\nabla\left(\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}+\mathbf{u}^n}{2}\right)\right\|_f^2+\alpha\sqrt{\frac{\nu g}{tr(\mathbb{K})}}\int_\Gamma\left(\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}+\mathbf{u}^n}{2}\cdot\boldsymbol{\tau}\right)^2ds\right.$$
$$\left.+g\left\|\sqrt{\mathbb{K}}\nabla\frac{\tilde{\phi}^{n+1}+\phi^n}{2}\right\|_p^2\right).\tag{3.17}$$

最后，我们通过以下方式更新 $\tilde{}\mathbf{u}^{n+1}$ 和 $\tilde{\phi}^{n+1}$

$$\mathbf{u}^{n+1}=\sqrt{\xi^{n+1}}\tilde{\mathbf{u}}^{n+1},\qquad\phi^{n+1}=\sqrt{\xi^{n+1}}\tilde{\phi}^{n+1}.\tag{3.18}$$

与定理 3.1 的证明类似，我们可以得到以下结果:

THEOREM 3.2. 若 $E^n\ge0$，则有 $\xi^{n+1}\ge0$, $E^{n+1}\ge0$。因此，格式 *(3.12)-(3.18)* 如(3.17)所示耗散原始能量。

4. 误差分析。 本节的主要目标是对**格式 I**(3.2)-(3.8)进行误差分析。下文中，我们用 $C>0$ 表示与 Δt无关的通用常数，其取值可能因上下文而异。为简便起见，在理论分析中我们假设水力传导率张量 $\mathbb{K}=K\mathbb{I}$，其中 $K>0$ 为标量系数，$\mathbb{I}$ 表示单位张量。

假设问题 (2.11) 的精确解和初始数据满足如下正则性:

$$\begin{cases} \mathbf{u}\in L^\infty(0,T;H^2(\Omega_f)),\quad \partial_t\mathbf{u}\in L^2(0,T;H^2(\Omega_f)),\quad \partial_{tt}\mathbf{u}\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_f)),\\ p\in L^2(0,T;H^1(\Omega_f)),\\ \phi\in L^\infty(0,T;H^2(\Omega_p)),\quad \partial_t\phi\in L^2(0,T;H^2(\Omega_p)),\quad \partial_{tt}\phi\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_p)),\\ \mathbf{u}(t^0)\in L^2(\Omega_f),\quad \phi(t^0)\in L^2(\Omega_p),\quad \mathbf{f}_f\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_f)),\quad f_p\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_p)). \end{cases} \tag{4.1}$$

对于后续的误差分析，我们仅考虑二维情形。推广到三维更具挑战性，将在未来的工作中讨论。

4.1. 粗略误差估计。 数值解与精确解之间的误差定义如下:

$$\begin{aligned} &e_E^{n+1}=E^{n+1}-E(t^{n+1}),\quad e_{\mathbf{u}}^{n+1}=\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}(t^{n+1}),\quad e_\phi^{n+1}=\phi^{n+1}-\phi(t^{n+1}),\\ &\tilde{e}_E^{n+1}=\tilde{E}^{n+1}-E(t^{n+1}),\quad \tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}=\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}-\mathbf{u}(t^{n+1}),\quad \tilde{e}_\phi^{n+1}=\tilde{\phi}^{n+1}-\phi(t^{n+1}). \end{aligned}$$

我们令 $\tilde{\mathbf{u}}^0=\mathbf{u}(t^0)$ 和 $\tilde{\phi}^0=\phi(t^0)$，因此容易看出

$$\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^0\|_f+\|\tilde{e}_\phi^0\|_p=0,\quad |e_E^0|=0.$$

LEMMA 4.1. 给定 $1\le k\le T/\Delta t-1$，我们假设如下误差估计成立

$$\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^m\|_f+\|\tilde{e}_\phi^m\|_p\le\hat{C}\Delta t^{\frac{1}{4}},\quad m=1,\cdots,k, \tag{4.2}$$

$$|e_E^m|\le C^*\Delta t^{1-\epsilon},\quad 0<\epsilon<1/2,\quad m=1,\cdots,k, \tag{4.3}$$

其中 $C>0$ 和 $C^*>0$ 是两个与 Δt 无关的固定常数。然后，在正则性假设 *(4.1)* 下，且当 Δt 充分小时，我们有

$$\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|_f+\|\tilde{e}_\phi^{k+1}\|_p\le\hat{C}\Delta t^{\frac{1}{4}}, \tag{4.4}$$

其中 $\hat{C}>0$ 是 (4.2)中的常数。

证明。令 $1\le n\le k$。根据假设 (4.2)-(4.3)，我们可以推导出

$$0<\frac{1}{2}E(t^n)\le\tilde{E}^n\le\frac{3}{2}E(t^n). \tag{4.5}$$

此外，根据定理 3.1 和正则性 (4.1)，我们有

$$\xi^n=\frac{E^n}{\tilde{E}^n}\le\frac{2E^n}{E(t^n)}\le C_1^2, \tag{4.6}$$

其中 $C_1>0$ 是一个与 Δt 无关的固定常数。由（2.11）可推得

$$\left(\frac{\mathbf{u}(t^{n+1})-\mathbf{u}(t^n)}{\Delta t},\mathbf{v}\right)_f+\nu(\nabla\mathbf{u}(t^{n+1}),\nabla\mathbf{v})_f+\alpha\sqrt{\frac{\nu g}{tr(\mathbb{K})}}\int_\Gamma(\mathbf{u}(t^{n+1})\cdot\boldsymbol{\tau})(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\tau})ds$$

$$
\begin{aligned}
&-(p(t^{n+1}),\nabla\cdot\mathbf{v})_f + a(\mathbf{u}(t^{n+1}),\mathbf{u}(t^{n+1}),\mathbf{v}) + c_\Gamma(\mathbf{v},\phi(t^{n+1}))\\
&=(\mathbf{f}_f^{n+1},\mathbf{v})_f + R_u^{n+1}(\mathbf{v}),
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

其中 $R_u^{n+1}(\mathbf{v}) = \left(\frac{\mathbf{u}(t^{n+1}) - t^n}{\Delta t} - \frac{\partial \mathbf{u}(\,)\,\mathbf{u}(t^{n+1})}{\partial t}, \mathbf{v}\right)_f$. 将 (4.7) 从 (3.2) 中相减，可得

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}-\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n}}{\Delta t},\mathbf{v}\right)_f + \nu(\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1},\nabla\mathbf{v})_f + \alpha\sqrt{\frac{\nu g}{tr(\mathbb{K})}}\int_\Gamma(\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\cdot\boldsymbol{\tau})(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\tau})ds\\
&-(p^{n+1}-p(t^{n+1}),\nabla\cdot\mathbf{v})_f + a(\mathbf{u}^n,\mathbf{u}^n,\mathbf{v}) - a(\mathbf{u}(t^{n+1}),\mathbf{u}(t^{n+1}),\mathbf{v})\\
&+c_\Gamma(\mathbf{v},\phi^n) - c_\Gamma(\mathbf{v},\phi(t^{n+1})) = -R_{\mathbf{u}}^{n+1}(\mathbf{v}).
\end{aligned}
$$

在上式中取 $\mathbf{v}=\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}$，得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\Delta t}\left(\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_f^2 - \|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n}\|_f^2 + \|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}-\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n}\|_f^2\right) + \nu\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_f^2 + \alpha\sqrt{\frac{\nu g}{tr(\mathbb{K})}}\int_\Gamma(\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\cdot\boldsymbol{\tau})^2 ds\\
&=-R_{\mathbf{u}}^{n+1}(\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}) - a(\mathbf{u}^n,\mathbf{u}^n,\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}) + a(\mathbf{u}(t^{n+1}),\mathbf{u}(t^{n+1}),\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}) - c_\Gamma(\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1},\phi^n) + c_\Gamma(\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1},\phi(t^{n+1}))\\
&=\sum_{i=1}^{3} I_i.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

现在，我们依次估计 (4.8) 右端的各项。根据引理 2.2、柯西-施瓦茨不等式和杨氏不等式，可得

$$
|I_1| = |-R_{\mathbf{u}}^{n+1}(\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1})| \le \epsilon_{\mathbf{u}}\nu\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_f^2 + C\Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|\partial_{tt}\mathbf{u}\|_{-1,f}^2 dt,
$$

$$
\begin{aligned}
|I_2| &= |-a(\mathbf{u}^n,\mathbf{u}^n,\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}) + a(\mathbf{u}(t^{n+1}),\mathbf{u}(t^{n+1}),\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1})|\\
&= |a(\mathbf{u}(t^{n+1})-\mathbf{u}(t^n),\mathbf{u}(t^{n+1}),\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}) - a(e_{\mathbf{u}}^n,\mathbf{u}(t^{n+1}),\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}) + a(\mathbf{u}^n,\mathbf{u}(t^{n+1})-\mathbf{u}(t^n),\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1})\\
&\quad - a(e_{\mathbf{u}}^n,e_{\mathbf{u}}^n,\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}) - a(\mathbf{u}(t^n),e_{\mathbf{u}}^n,\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1})|\\
&\le C\|\mathbf{u}(t^{n+1})-\mathbf{u}(t^n)\|_f\|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{2,f}\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_f + C\|e_{\mathbf{u}}^n\|_f\|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{2,f}\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_f\\
&\quad + C\|\mathbf{u}^n\|_f\|\mathbf{u}(t^{n+1})-\mathbf{u}(t^n)\|_{2,f}\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_f + C\|e_{\mathbf{u}}^n\|_f^{1/2}\|\nabla e_{\mathbf{u}}^n\|_f^{1/2}\|e_{\mathbf{u}}^n\|_f^{1/2}\|\nabla e_{\mathbf{u}}^n\|_f^{1/2}\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_f\\
&\quad + C\|\mathbf{u}(t^n)\|_{2,f}\|e_{\mathbf{u}}^n\|_f\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_f\\
&\le \epsilon_{\mathbf{u}}\nu\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_f^2 + C\|e_{\mathbf{u}}^n\|_f^2 + C\|\nabla e_{\mathbf{u}}^n\|_f^2\|e_{\mathbf{u}}^n\|_f^2 + C\Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|\partial_t\mathbf{u}\|_f^2 dt + C\Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|\partial_t\mathbf{u}\|_{2,f}^2 dt,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|I_3| &= |-c_\Gamma(\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1},\phi^n) + c_\Gamma(\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1},\phi(t^{n+1}))|\\
&\le |c_\Gamma(\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1},\phi(t^{n+1})-\phi(t^n))| + |c_\Gamma(\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1},e_\phi^n)|\\
&\le \epsilon_{\mathbf{u}}\nu\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_f^2 + C\|e_\phi^n\|_p\|\nabla e_\phi^n\|_p + C\Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|\partial_t\phi\|_{1,p}^2 dt.
\end{aligned}
$$

我们注意到，仍有一些剩余项需要分析。根据正则性˜性质 (4.1) 以及 (4.5)–(4.6) 中 E^n 和 ξ^n 的有界性，我们得到

$$
\|e_{\mathbf{u}}^n\|_f = \|\sqrt{\xi^n}\tilde{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}(t^n)\|_f \le \|\sqrt{\xi^n}(\tilde{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}(t^n))\|_f + \|(\sqrt{\xi^n}-1)\mathbf{u}(t^n)\|_f
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C_1\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^n\|_f + C\left|\frac{\xi^n-1}{\sqrt{\xi^n}+1}\right| \\
&\leq C_1\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^n\|_f + C\left|\frac{E^n-E(t^n)}{\tilde{E}^n}\right| + C\left|\frac{E(t^n)-\tilde{E}^n}{\tilde{E}^n}\right| \\
&\leq C\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^n\|_f + C\|\tilde{e}_{\phi}^n\|_p + C|e_E^n|. \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

类似地，我们还可以得到

$$
\begin{aligned}
&\|e_{\phi}^n\|_p \leq C\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^n\|_f + C\|\tilde{e}_{\phi}^n\|_p + C|e_E^n|, \qquad (4.10)\\
&\|\nabla e_{\mathbf{u}}^n\|_f \leq C_1\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^n\|_f + C\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^n\|_f + C\|\tilde{e}_{\phi}^n\|_p + C|e_E^n|, \qquad (4.11)\\
&\|\nabla e_{\phi}^n\|_p \leq C_1\|\nabla\tilde{e}_{\phi}^n\|_p + C\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^n\|_f + C\|\tilde{e}_{\phi}^n\|_p + C|e_E^n|. \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

于是我们得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\Delta t}\left(\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_f^2 - \|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^n\|_f^2 + \|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}-\tilde{e}_{\mathbf{u}}^n\|_f^2\right) + \nu\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_f^2 + \alpha\sqrt{\frac{\nu g}{tr(\mathbb{K})}}\int_\Gamma(\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\cdot\boldsymbol{\tau})^2 ds\\
&\leq 3\epsilon_{\mathbf{u}}\nu\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_f^2 + \epsilon_\phi gK\|\nabla\tilde{e}_{\phi}^n\|_p^2 + C\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^n\|_f^2 + C|e_E^n|^2 + C\|\tilde{e}_{\phi}^n\|_p^2 + C\|\nabla e_{\mathbf{u}}^n\|_f^2\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^n\|_f^2\\
&\quad + C\|\nabla e_{\mathbf{u}}^n\|_f^2\|\tilde{e}_{\phi}^n\|_p^2 + C\|\nabla e_{\mathbf{u}}^n\|_f^2|e_E^n|^2 + C\Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|\partial_{tt}\mathbf{u}\|_{-1,f}^2 dt + C\Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|\partial_t\mathbf{u}\|_f^2 dt\\
&\quad + C\Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|\partial_t\mathbf{u}\|_{2,f}^2 dt + C\Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|\partial_t\phi\|_{1,p}^2 dt. \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

现在，我们关注水头的误差估计。考虑精确解 $\phi(t^{n+1})$ 所满足的方程。

$$
gS_0\left(\frac{\phi(t^{n+1})-\phi(t^n)}{\Delta t},\psi\right)_p + g(\mathbb{K}\nabla\phi(t^{n+1}),\nabla\psi)_p - c_\Gamma(\mathbf{u}(t^{n+1}),\psi) = g(f_p^{n+1},\psi)_p + R_\phi^{n+1}(\psi), \qquad (4.14)
$$

其中 $R_\phi^{n+1}(\psi) = gS_0\left(\frac{\phi(t^{n+1})-\phi^{t^n}}{\Delta t} - \frac{\partial\phi(t^{n+1})}{\partial t},\psi\right)_p$。从 (3.4) 中减去 (4.14)，我们得到

$$
gS_0\left(\frac{\tilde{e}_{\phi}^{n+1}-\tilde{e}_{\phi}^n}{\Delta t},\psi\right)_p + g(\mathbb{K}\nabla\tilde{e}_{\phi}^{n+1},\nabla\psi)_p - c_\Gamma(\mathbf{u}^n,\psi) + c_\Gamma(\mathbf{u}(t^{n+1}),\psi) = -R_\phi^{n+1}(\psi).
$$

将 $\psi = \tilde{e}_{\phi}^{n+1}$ 代入上述方程，得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{gS_0}{2\Delta t}\left(\|\tilde{e}_{\phi}^{n+1}\|_p^2 - \|\tilde{e}_{\phi}^n\|_p^2 + \|\tilde{e}_{\phi}^{n+1}-\tilde{e}_{\phi}^n\|_p^2\right) + gK\|\nabla\tilde{e}_{\phi}^{n+1}\|_p^2\\
&= -R_\phi^{n+1}(\tilde{e}_{\phi}^{n+1}) + c_\Gamma(\mathbf{u}^n,\tilde{e}_{\phi}^{n+1}) - c_\Gamma(\mathbf{u}(t^{n+1}),\tilde{e}_{\phi}^{n+1}).
\end{aligned}
$$

利用柯西-施瓦茨不等式和杨氏不等式，可得

$$
|I_4| = |-R_\phi^{n+1}(\tilde{e}_{\phi}^{n+1})| \leq \epsilon_\phi gK\|\nabla\tilde{e}_{\phi}^{n+1}\|_p^2 + C\Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|\partial_{tt}\phi\|_{-1,p}^2 dt,
$$

$$
\begin{aligned}
|I_5| &= |c_\Gamma(\mathbf{u}^n,\tilde{e}_{\phi}^{n+1}) - c_\Gamma(\mathbf{u}(t^{n+1}),\tilde{e}_{\phi}^{n+1})|\\
&\leq |c_\Gamma(e_{\mathbf{u}}^n,\tilde{e}_{\phi}^{n+1})| + |c_\Gamma(\mathbf{u}(t^{n+1})-\mathbf{u}(t^n),\tilde{e}_{\phi}^{n+1})|
\end{aligned}
$$

$$\leq \epsilon_\phi gK\|\nabla\tilde{e}_\phi^{n+1}\|_p^2 + C\|\nabla e_{\mathbf{u}}^n\|_f\|e_{\mathbf{u}}^n\|_f + C\Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|\partial_t\mathbf{u}\|_{1,f}^2 dt$$

$$\leq \epsilon_\phi gK\|\nabla\tilde{e}_\phi^{n+1}\|_p^2 + C\|e_{\mathbf{u}}^n\|_f^2 + \frac{\epsilon_{\mathbf{u}}\nu}{C_1^2}\|\nabla e_{\mathbf{u}}^n\|_f^2 + C\Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|\partial_t\mathbf{u}\|_{1,f}^2 dt.$$

回顾（4.10）–（4.12），可得以下结果

$$\begin{aligned}
&\frac{gS_0}{2\Delta t}\left(\|\tilde{e}_\phi^{n+1}\|_p^2 - \|\tilde{e}_\phi^n\|_p^2 + \|\tilde{e}_\phi^{n+1} - \tilde{e}_\phi^n\|_p^2\right) + gK\|\nabla\tilde{e}_\phi^{n+1}\|_p^2 \\
&\leq 2\epsilon_\phi gK\|\nabla\tilde{e}_\phi^{n+1}\|_p^2 + \epsilon_{\mathbf{u}}\nu\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^n\|_f^2 + C\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^n\|_f^2 + C\|\tilde{e}_\phi^n\|_p^2 + C|e_E^n|^2 \\
&\quad + C\Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|\partial_{tt}\phi\|_{-1,p}^2 dt + C\Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|\partial_t\mathbf{u}\|_{1,f}^2 dt. \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

将 (4.13) 和 (4.15) 相加，取 $\epsilon_{\mathbf{u}} = \frac{1}{8}$，$\epsilon_\phi = \frac{1}{6}$，对 n 从 0 到 k 求和，然后将两边乘以 $2\Delta t$，可得

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|_f^2 + \sum_{n=0}^{k}\nu\Delta t\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_f^2 + \sum_{n=0}^{m}2\alpha\sqrt{\frac{\nu g}{tr(\mathbb{K})}}\Delta t\int_\Gamma(\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\cdot\boldsymbol{\tau})^2 ds + gS_0\|\tilde{e}_\phi^{k+1}\|_p^2 + \sum_{n=0}^{k}gK\Delta t\|\nabla\tilde{e}_\phi^{n+1}\|_p^2 \\
&\leq \sum_{n=0}^{k}C\Delta t\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^n\|_f^2 + \sum_{n=0}^{k}C\Delta t\|\tilde{e}_\phi^n\|_p^2 + \sum_{n=0}^{k}C\Delta t|e_E^n|^2 + \sum_{n=0}^{k}C\Delta t\|\nabla e_{\mathbf{u}}^n\|_f^2\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^n\|_f^2 \\
&\quad + \sum_{n=0}^{k}C\Delta t\|\nabla e_{\mathbf{u}}^n\|_f^2\|\tilde{e}_\phi^n\|_f^2 + \sum_{n=0}^{k}C\Delta t\|\nabla e_{\mathbf{u}}^n\|_f^2|e_E^n|^2 + \sum_{n=0}^{k}\Delta t\Big\{C\Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|\partial_{tt}\mathbf{u}\|_{-1,f}^2 dt \\
&\quad + C\Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|\partial_t\mathbf{u}\|_f^2 dt + C\Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|\partial_t\mathbf{u}\|_{2,f}^2 dt + C\Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|\partial_t\phi\|_{1,p}^2 dt \\
&\quad + C\Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|\partial_{tt}\phi\|_{-1,p}^2 dt + C\Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|\partial_t\mathbf{u}\|_{1,f}^2 dt\Big\}. \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

根据假设 (4.3) 和定理 3.1，并应用离散 Gronwall 引理，可得

$$\begin{aligned}
\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|_f^2 &+ \sum_{n=0}^{k}\nu\Delta t\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_f^2 + \sum_{n=0}^{m}2\alpha\sqrt{\frac{\nu g}{tr(\mathbb{K})}}\Delta t\int_\Gamma(\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\cdot\boldsymbol{\tau})^2 ds \\
&+ gS_0\|\tilde{e}_\phi^{k+1}\|_p^2 + \sum_{n=0}^{k}gK\Delta t\|\nabla\tilde{e}_\phi^{n+1}\|_p^2 \leq C\Delta t^{2(1-\epsilon)}. \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

因此，当 Δt 充分小时，使得 $\Delta t^{3/4-\epsilon} \leq \hat{C}/C$，可得

$$\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|_f + \|\tilde{e}_\phi^{k+1}\|_p \leq C\Delta t^{1-\epsilon} \leq \hat{C}\Delta t^{\frac{1}{4}},$$

由此完成证明。 □

4.2. 精细误差估计。基于引理 4.1 中建立的粗略误差估计，我们将采用归纳过程推导精细误差分析。

THEOREM 4.2. 给定 $1 \leq k \leq T/\Delta t - 1$，当 Δt 充分小时，下列误差估计成立

$$|e_E^{k+1}| + \|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|_f + \|\tilde{e}_\phi^{k+1}\|_p \leq C\Delta t, \qquad (4.18)$$

$$\|e_{\mathbf{u}}^{k+1}\|_f + \|e_{\phi}^{k+1}\|_p \le C\Delta t. \tag{4.19}$$

证明。我们容易得到，(4.2) 和 (4.3) 对 $m = 0$ 成立。接下来，我们假设 (4.2) 和 (4.3) 对给定的 $m = k$, $\forall 1 \le k \le T/\Delta t - 1$ 成立。下面，我们将证明 (4.2) 和 (4.3) 对 $\hat{m} = k+1$ 以相同的常数 C 和 C^* 成立。

对于任意 $0 \le n \le k$，由引理 4.1 可得

$$0 < \frac{1}{2}E(t^{n+1}) \le \tilde{E}^{n+1} \le \frac{3}{2}E(t^{n+1}). \tag{4.20}$$

由 (3.1) 和 (3.7)，我们还可得关于 E 的以下误差方程:

$$\frac{e_E^{n+1} - e_E^n}{\Delta t} = \frac{dE(t^{n+1})}{dt} - \frac{E(t^{n+1}) - E(t^n)}{\Delta t} - \xi^{n+1}\mathbb{I}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\phi}^{n+1}) + \mathbb{I}(\mathbf{u}(t^{n+1}), \phi(t^{n+1})),$$

其中 $\mathbb{I}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\phi}^{n+1}) = \nu\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|_f^2 + \alpha\sqrt{\frac{\nu g}{tr\,\mathbb{K}()}}\int_\Gamma(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\cdot\boldsymbol{\tau})^2 ds + gK\|\nabla\tilde{\phi}^{n+1}\|_p^2$。

将上述方程两边乘以 e_E^{n+1}，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\Delta t}\left(|e_E^{n+1}|^2 - |e_E^n|^2 + |e_E^{n+1} - e_E^n|^2\right) \\
&= (-\xi^{n+1}\mathbb{I}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\phi}^{n+1}) + \mathbb{I}(\mathbf{u}(t^{n+1}), \phi(t^{n+1})))e_E^{n+1} + \left(\frac{dE(t^{n+1})}{dt} - \frac{E(t^{n+1}) - E(t^n)}{\Delta t}\right)e_E^{n+1} \\
&\le C|e_E^{n+1}|^2 + C\Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}} |E_{tt}|^2 dt + I_6,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
I_6 &= \left|-\xi^{n+1}\mathbb{I}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\phi}^{n+1}) + \mathbb{I}(\mathbf{u}(t^{n+1}), \phi(t^{n+1}))\right| |e_E^{n+1}| \\
&\le \left|\frac{E^{n+1}}{\tilde{E}^{n+1}}\left(\mathbb{I}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\phi}^{n+1}) - \mathbb{I}(\mathbf{u}(t^{n+1}), \phi(t^{n+1}))\right)\right| |e_E^{n+1}| \\
&\quad + \left|\mathbb{I}(\mathbf{u}(t^{n+1}), \phi(t^{n+1}))\left(1 - \frac{E^{n+1}}{\tilde{E}^{n+1}}\right)\right| |e_E^{n+1}| := I_{6,1} + I_{6,2}.
\end{aligned}$$

由（3.9）可知， E^{n+1} 关于 $E^{n+1} \le C$有界，并且由（4.20）可得

$$\begin{aligned}
I_{6,1} &= \left|\frac{E^{n+1}}{\tilde{E}^{n+1}}\left(\mathbb{I}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\phi}^{n+1}) - \mathbb{I}(\mathbf{u}(t^{n+1}), \phi(t^{n+1}))\right)\right| |e_E^{n+1}| \\
&\le C\left|\left(\mathbb{I}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tilde{\phi}^{n+1}) - \mathbb{I}(\mathbf{u}(t^{n+1}), \phi(t^{n+1}))\right)\right| |e_E^{n+1}| \\
&\le C\left|\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|_f + \|\nabla\mathbf{u}(t^{n+1})\|_f\right| \|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_f |e_E^{n+1}| \\
&\quad + C\left|\sqrt{\int_\Gamma(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\cdot\boldsymbol{\tau})^2 ds} + \sqrt{\int_\Gamma(\mathbf{u}(t^{n+1})\cdot\boldsymbol{\tau})^2 ds}\right| \left|\sqrt{\int_\Gamma(\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\cdot\boldsymbol{\tau})^2 ds}\right| |e_E^{n+1}| \\
&\quad + C\left|\|\nabla\tilde{\phi}^{n+1}\|_p + \|\nabla\phi(t^{n+1})\|_p\right| \left|\|\nabla\tilde{e}_{\phi}^{n+1}\|_p\right| |e_E^{n+1}|.
\end{aligned}$$

由粗略误差估计（4.17）和正则性（4.1）可知，$\|\nabla \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\|_f^2$、$\int_\Gamma(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}\cdot\boldsymbol{\tau})^2 ds$ 以及 $\|\nabla\tilde{\phi}^{n+1}\|_p^2$ 均有界，因此应用柯西–施瓦茨不等式和杨氏不等式可得

$$I_{6,1} \le C\left|e_E^{n+1}\right|^2 + \epsilon_{\mathbf{u}}\nu\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_f^2 + \epsilon_\Gamma\alpha\sqrt{\frac{\nu g}{tr(\mathbb{K})}}\int_\Gamma(\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\cdot\boldsymbol{\tau})^2 ds + \epsilon_\phi gK\|\nabla\tilde{e}_\phi^{n+1}\|_p^2.$$

另一方面，

$$\begin{aligned} I_{6,2} &= \left|\mathbb{I}(\mathbf{u}(t^{n+1}),\phi(t^{n+1}))\left(1-\frac{E^{n+1}}{\tilde{E}^{n+1}}\right)\right|\left|e_E^{n+1}\right| \\ &\le C\left|e_E^{n+1}\right|^2 + C\left|1-\frac{E^{n+1}}{\tilde{E}^{n+1}}\right|^2 \\ &\le C\left|e_E^{n+1}\right|^2 + C\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_f^2 + C\|\tilde{e}_\phi^{n+1}\|_p^2. \end{aligned}$$

结合上述不等式，我们得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\Delta t}\left(|e_E^{n+1}|^2 - |e_E^n|^2 + |e_E^{n+1}-e_E^n|^2\right) \\ &\le C|e_E^{n+1}|^2 + \epsilon_{\mathbf{u}}\nu\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_f^2 + \epsilon_\phi gK\|\nabla\tilde{e}_\phi^{n+1}\|_p^2 + \epsilon_\Gamma\alpha\sqrt{\frac{\nu g}{tr(\mathbb{K})}}\int_\Gamma(\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\cdot\boldsymbol{\tau})^2 ds \\ &\quad + C\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_f^2 + C\|\tilde{e}_\phi^{n+1}\|_p^2 + C\Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}}|E_{tt}|^2 dt. \end{aligned} \tag{4.21}$$

将 (4.13)、(4.15) 和 (4.21) 相加，令 $\epsilon_{\mathbf{u}} = \frac{1}{10}$、$\epsilon_\phi = \frac{1}{8}$、$\epsilon_\Gamma = \frac{1}{2}$，并对 n从 0 到 k求和，我们得到

$$\begin{aligned} &\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|_f^2 + \sum_{n=0}^k\nu\Delta t\|\nabla\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_f^2 + \sum_{n=0}^k\alpha\sqrt{\frac{\nu g}{tr(\mathbb{K})}}\Delta t\int_\Gamma(\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\cdot\boldsymbol{\tau})^2 ds + gS_0\|\tilde{e}_\phi^{k+1}\|_p^2 \\ &+ \sum_{n=0}^k gK\Delta t\|\nabla\tilde{e}_\phi^{n+1}\|_p^2 + |e_E^{k+1}|^2 \\ &\le \sum_{n=0}^k C\Delta t\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^n\|_f^2 + \sum_{n=0}^k C\Delta t\|\tilde{e}_\phi^n\|_p^2 + \sum_{n=0}^k C\Delta t|e_E^n|^2 + \sum_{n=0}^k C\Delta t\|\nabla e_{\mathbf{u}}^n\|_f^2\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^n\|_f^2 \\ &\quad + \sum_{n=0}^k C\Delta t\|\nabla e_{\mathbf{u}}^n\|_f^2\|\tilde{e}_\phi^n\|_f^2 + \sum_{n=0}^k C\Delta t\|\nabla e_{\mathbf{u}}^n\|_f^2|e_E^n|^2 + \sum_{n=0}^k C\Delta t|e_E^{n+1}|^2 \\ &\quad + \sum_{n=0}^k C\Delta t\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_f^2 + \sum_{n=0}^k C\Delta t\|\tilde{e}_\phi^{n+1}\|_p^2 + \sum_{n=0}^k\Delta t\Big\{C\Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|\partial_{tt}\mathbf{u}\|_{-1,f}^2 dt \\ &\quad + C\Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|\partial_t\mathbf{u}\|_f^2 dt + C\Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|\partial_t\mathbf{u}\|_{2,f}^2 dt + C\Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|\partial_t\phi\|_{1,p}^2 dt \\ &\quad + C\Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|\partial_{tt}\phi\|_{-1,p}^2 dt + C\Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|\partial_t\mathbf{u}\|_{1,f}^2 dt + C\Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}}|E_{tt}|^2 dt\Big\}. \end{aligned}$$

对上述不等式应用离散 Gronwall 引理，并利用正则性假设，可得到所需结果（4.18）。最后，回顾（4.9）和（4.10），可得到误差估计（4.19）。

还需验证假设（4.2）和（4.3）在 $m=k+1$ 下成立。当 Δt 足够小，使得 $\Delta t^{3/4} \leq \hat{C}/C$ 和 $\Delta t^{\epsilon} \leq C^*/C$ 时，由（4.18）可得

$$\|\tilde{e}_{\mathbf{u}}^{k+1}\|_f + gS_0\|\tilde{e}_{\phi}^{k+1}\|_p \leq C\Delta t \leq \hat{C}\Delta t^{1/4},$$
$$|e_E^{k+1}| \leq C\Delta t \leq C^*\Delta t^{1-\epsilon}, \quad 0<\epsilon<1/2.$$

因此，归纳过程完成。 □

5. 推广至 Cahn–Hilliard–Navier–Stokes–Darcy 模型。本节将上述线性原始能量耗散格式推广至更复杂的 Cahn–Hilliard–Navier–Stokes–Darcy 模型，从而提供一个更全面的框架，适用于污染物输运和提高采收率等应用。

在自由流体区域 Ω_f中，流体由 Cahn–Hilliard–Navier–Stokes 方程描述。

$$\partial_t \mathbf{u}_f + (\mathbf{u}_f \cdot \nabla)\mathbf{u}_f - \nu_f \Delta \mathbf{u}_f + \nabla p_f + \phi_f \nabla \mu_f = 0, \tag{5.1}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u}_f = 0, \tag{5.2}$$
$$\partial_t \phi_f + \nabla \cdot (\mathbf{u}_f \phi_f) - \nabla \cdot (M(\phi_f)\nabla \mu_f) = 0, \tag{5.3}$$
$$\mu_f + \lambda\epsilon\Delta\phi_f - \frac{\lambda}{\epsilon}G'(\phi_f) = 0, \tag{5.4}$$
$$\mathbf{u}_f|_{\Gamma_f} = 0, \qquad \mathbf{u}_f(\mathbf{x},0) = \mathbf{u}_f^0, \tag{5.5}$$
$$\nabla\phi_f \cdot \boldsymbol{n}|_{\Gamma_f} = 0, \qquad \phi_f(\mathbf{x},0) = \phi_f^0, \tag{5.6}$$
$$M(\phi_f)\nabla\mu_f \cdot \boldsymbol{n}|_{\Gamma_f} = 0, \qquad \mu_f(\mathbf{x},0) = \mu_f^0, \tag{5.7}$$

其中，$\mathbf{u}_f$ 和 p_f 分别表示自由流的速度和压力。相场函数为$\phi_i (i=f,\ p)$，相应的化学势为 $\mu_i (i=f,\ p)$。自由能 $G(\phi)$由双阱多项式定义，$G(\phi) = \frac{1}{4}(\phi^2-1)^2$。这里，$\nu_i (i=f,\ p)$为运动黏度，$\epsilon$ 表示界面宽度，$M(\phi_i)\ (i=f,\ p)$为与 ϕ_i相关的迁移率，而 λ 为弹性弛豫时间。

在多孔介质区域 Ω_p 中，流体满足 Cahn–Hilliard–Darcy 方程 s.

$$\chi^{-1}\partial_t \mathbf{u}_p + \mathbb{K}^{-1}\mathbf{u}_p + \nabla p_p + \phi_p \nabla \mu_p = 0, \tag{5.8}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u}_p = 0, \tag{5.9}$$
$$\partial_t \phi_p + \nabla \cdot (\mathbf{u}_p \phi_p) - \nabla \cdot (M(\phi_p)\nabla \mu_p) = 0, \tag{5.10}$$
$$\mu_p + \lambda\epsilon\Delta\phi_p - \frac{\lambda}{\epsilon}G'(\phi_p) = 0, \tag{5.11}$$
$$\mathbf{u}_p \cdot \boldsymbol{n}|_{\Gamma_p} = 0, \qquad \mathbf{u}_p(\mathbf{x},0) = \mathbf{u}_p^0, \tag{5.12}$$
$$\nabla\phi_p \cdot \boldsymbol{n}|_{\Gamma_p} = 0, \qquad \phi_p(\mathbf{x},0) = \phi_p^0, \tag{5.13}$$
$$M(\phi_p)\nabla\mu_p \cdot \boldsymbol{n}|_{\Gamma_p} = 0, \qquad \mu_p(\mathbf{x},0) = \mu_p^0, \tag{5.14}$$

其中，$\mathbf{u}_p$ 是速度，p_p 是水头，$\mathbb{K}$ 是水力传导率张量。χ 表示多孔介质的孔隙率。

界面条件定义如下。

$$\phi_f = \phi_p, \qquad \nabla\phi_f \cdot \boldsymbol{n} = \nabla\phi_p \cdot \boldsymbol{n}, \tag{5.15}$$
$$\mu_f = \mu_p, \qquad M(\phi_f)\nabla w_f \cdot \boldsymbol{n} = M(\phi_p)\nabla w_p \cdot \boldsymbol{n}, \tag{5.16}$$
$$\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{n}, \tag{5.17}$$
$$p_f - \nu_f \mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n}) + \frac{1}{2}|\mathbf{u}_f|^2 = p_p, \tag{5.18}$$

$$-\nu_f \boldsymbol{\tau}\cdot(\nabla \mathbf{u}_f\cdot\mathbf{n}) = \frac{\alpha\nu_f\sqrt{d}}{\sqrt{\nu_p tr(\mathbb{K})}}(\mathbf{u}_f\cdot\boldsymbol{\tau}). \tag{5.19}$$

我们还定义以下空间:

$$X_f = \{\mathbf{v}\in(H^1(\Omega_f))^d : \mathbf{v}|_{\Gamma_f}=0\}, \qquad X_p = \{\mathbf{v}\in(H^1(\Omega_p))^d : \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{n}|_{\Gamma_p}=0\},$$
$$M_f = L^2(\Omega_f), \qquad M_p = \{q\in H^1(\Omega_p) : \int_{\Omega_p} q d\mathbf{x}=0\}, \qquad Y = H^1(\Omega).$$

那么，上述系统的弱形式为：求 $(\mathbf{u}f, p_f, \mathbf{u}p, p_p, \phi, w) \in (X_f\times M_f\times X_p\times M_p\times Y\times Y)$，使得对于任意 $(\mathbf{v}f, q_f, \mathbf{v}p, q_p, \psi, \omega) \in (X_f\times M_f\times X_p\times M_p\times Y\times Y)$,

$$(\partial_t\phi,\psi) - (\mathbf{u}\phi,\nabla\psi) + (M(\phi)\nabla\mu,\nabla\psi) = 0, \tag{5.20}$$

$$(\mu,\omega) - \lambda\epsilon(\nabla\phi,\nabla\omega) - \frac{\lambda}{\epsilon}(G'(\phi),\omega) = 0, \tag{5.21}$$

$$\chi^{-1}(\partial_t\mathbf{u}_p,\mathbf{v}_p)_p + \mathbb{K}^{-1}(\mathbf{u}_p,\mathbf{v}_p)_p + (\nabla p_p,\mathbf{v}_p)_p + (\phi_p\nabla\mu_p,\mathbf{v}_p)_p = 0, \tag{5.22}$$

$$-(\mathbf{u}_p,\nabla q_p)_p - \int_\Gamma (\mathbf{u}_f\cdot\mathbf{n})q_p ds = 0, \tag{5.23}$$

$$(\frac{\partial\mathbf{u}_f}{\partial t},\mathbf{v}_f)_f + a(\mathbf{u}_f,\mathbf{u}_f,\mathbf{v}_f) + \nu_f(\nabla\mathbf{u}_f,\nabla\mathbf{v}_f)_f - (p_f,\nabla\cdot\mathbf{v}_f)_f + \int_\Gamma p_p(\mathbf{v}_f\cdot\mathbf{n})ds$$
$$+ \frac{\alpha\nu_f\sqrt{d}}{\sqrt{\nu_p tr(\mathbb{K})}}\int_\Gamma(\mathbf{u}_f\cdot\boldsymbol{\tau})(\mathbf{v}_f\cdot\boldsymbol{\tau})ds + (\phi_f\nabla\mu_f,\mathbf{v}_f)_f = 0, \tag{5.24}$$

$$(\nabla\cdot\mathbf{u}_f, q_f)_f = 0. \tag{5.25}$$

容易验证，上述 Cahn–Hilliard–Navier–Stokes–Darcy 模型满足以下能量耗散律

$$\frac{dE}{dt} = -\nu_f\|\nabla\mathbf{u}_f\|_f^2 + \frac{\alpha\nu_f\sqrt{d}}{\sqrt{\nu_p tr(\mathbb{K})}}\int_\Gamma(\mathbf{u}_f\cdot\boldsymbol{\tau})^2 ds + \|\sqrt{\mathbb{K}^{-1}}\mathbf{u}_p\|_p^2 + M(\phi)\|\nabla\mu\|^2,$$

其中，原始能量定义为

$$E = \left(\frac{\lambda\epsilon}{2}\|\nabla\phi\|^2 + \frac{\lambda}{\epsilon}\int_\Omega G(\phi)d\mathbf{x}\right) + \left(\frac{1}{2}\|\mathbf{u}_f\|_f^2 + \frac{1}{2\chi}\|\mathbf{u}_p\|_p^2\right) := E_0 + E_1.$$

为了构造高效且无条件能量稳定的 Cahn–Hilliard–Navier–Stokes–Darcy 模型格式，我们引入一个标量辅助变量 $\xi(t)\equiv 1$，作为松弛因子，并通过重新表述的能量耗散律扩展该模型:

$$\frac{dE}{dt} = \xi(t)\left(-\nu_f\|\nabla\mathbf{u}_f\|_f^2 + \frac{\alpha\nu_f\sqrt{d}}{\sqrt{\nu_p tr(\mathbb{K})}}\int_\Gamma(\mathbf{u}_f\cdot\boldsymbol{\tau})^2 ds + \|\sqrt{\mathbb{K}^{-1}}\mathbf{u}_p\|_p^2 + M(\phi)\|\nabla\mu\|^2\right). \tag{5.26}$$

接下来，基本遵循**格式 I**的相同原理，我们为带有 (5.26) 的 (5.20)-(5.25) 扩展系统构造一个一阶格式。

格式 III：Cahn–Hilliard–Navier–Stokes–Darcy 模型的一阶格式
步骤 *1*（预测）。求解 $(\phi^{n+1},\mu^{n+1})\in(Y\times Y)$，使得

$$\left(\frac{\phi^{n+1}-\phi^n}{\Delta t},\psi\right) - (\mathbf{u}^n\phi^n,\nabla\psi) + (M(\phi^n)\nabla\mu^{n+1},\nabla\psi) = 0, \tag{5.27}$$

$$(\mu^{n+1},\omega)-\lambda\epsilon(\nabla\phi^{n+1},\nabla\omega)-\frac{\lambda}{\epsilon}(G'(\phi^n),\omega)=0. \tag{5.28}$$

求解 $(\tilde{\mathbf{u}}_p^{n+1},p_p^{n+1})\in(X_p\times M_p)$，使得

$$\chi^{-1}\left(\frac{\tilde{\mathbf{u}}_p^{n+1}-\tilde{\mathbf{u}}_p^{n}}{\Delta t},\mathbf{v}_p\right)_p+\mathbb{K}^{-1}(\tilde{\mathbf{u}}_p^{n+1},\mathbf{v}_p)_p+(\nabla p_p^{n+1},\mathbf{v}_p)_p+(\phi_p^{n+1}\nabla\mu_p^{n+1},\mathbf{v}_p)_p=0, \tag{5.29}$$

$$-(\tilde{\mathbf{u}}_p^{n+1},\nabla q_p)_p-\int_\Gamma(\mathbf{u}_f^n\cdot\mathbf{n})q_p ds=0. \tag{5.30}$$

求满足以下条件的 $(\tilde{\mathbf{u}}_f^{n+1},p_f^{n+1})\in(X_f\times M_f)$

$$\left(\frac{\tilde{\mathbf{u}}_f^{n+1}-\tilde{\mathbf{u}}_f^{n}}{\Delta t},\mathbf{v}_f\right)_f+a(\mathbf{u}_f^n,\mathbf{u}_f^n,\mathbf{v}_f)+\nu_f(\nabla\tilde{\mathbf{u}}_f^{n+1},\nabla\mathbf{v}_f)_f-(p_f^{n+1},\nabla\cdot\mathbf{v}_f)_f+\int_\Gamma p_p^{n+1}(\mathbf{v}_f\cdot\mathbf{n})ds$$
$$+\frac{\alpha\nu_f\sqrt{d}}{\sqrt{\nu_p tr(\mathbb{K})}}\int_\Gamma(\tilde{\mathbf{u}}_f^{n+1}\cdot\boldsymbol{\tau})(\mathbf{v}_f\cdot\boldsymbol{\tau})ds+(\phi_f^{n+1}\nabla\mu_f^{n+1},\mathbf{v}_f)_f=0, \tag{5.31}$$

$$(\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}_f^{n+1},q_f)_f=0. \tag{5.32}$$

步骤 *2*（修正）。记

$$\tilde{E}^{n+1}=\left(\frac{\lambda\epsilon}{2}\|\nabla\phi^{n+1}\|^2+\frac{\lambda}{\epsilon}\int_\Omega G(\phi^{n+1})d\mathbf{x}\right)+\left(\frac{1}{2}\|\tilde{\mathbf{u}}_f^{n+1}\|_f^2+\frac{1}{2\chi}\|\tilde{\mathbf{u}}_p^{n+1}\|_p^2)\right):=E_0^{n+1}+\tilde{E}_1^{n+1}, \tag{5.33}$$

并设

$$E^{n+1}=E_0^{n+1}+\xi^{n+1}\tilde{E}_1^{n+1}. \tag{5.34}$$

然后，由线性代数方程确定 ξ^{n+1}

$$\frac{E^{n+1}-E^n}{\Delta t}=-\xi^{n+1}\Big(\nu_f\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}_f^{n+1}\|_f^2+\frac{\alpha\nu_f\sqrt{d}}{\sqrt{\nu_p tr(\mathbb{K})}}\int_\Gamma(\tilde{\mathbf{u}}_f^{n+1}\cdot\boldsymbol{\tau})^2ds$$
$$+\|\sqrt{\mathbb{K}^{-1}}\tilde{\mathbf{u}}_p^{n+1}\|_p^2+M(\phi^{n+1})\|\nabla\mu^{n+1}\|^2\Big). \tag{5.35}$$

最后，设

$$\mathbf{u}_f^{n+1}=\sqrt{\xi^{n+1}}\tilde{\mathbf{u}}_f^{n+1},\qquad \mathbf{u}_p^{n+1}=\sqrt{\xi^{n+1}}\tilde{\mathbf{u}}_p^{n+1}. \tag{5.36}$$

类似地，可以构造**格式 III**的线性二阶版本，以保持原始能量的耗散。采用与定理 3.1 证明类似的方法，可以得到**格式 III**的以下稳定性结果：

THEOREM 5.1. 由(5.35)可知，格式 *(5.27)–(5.36)* 耗散原始能量。此外，我们有

$$\|\nabla\phi^{n+1}\|^2+\|\mathbf{u}_f^{n+1}\|_f^2+\|\mathbf{u}_p^{n+1}\|_p^2+\nu_f\sum_{n=0}^{k}\Delta t\|\nabla\mathbf{u}_f^{n+1}\|_f^2\le C, \tag{5.37}$$

其中 $C>0$ 是依赖于初始条件 ϕ^0、$\mathbf{u}_f^0$ 和 $\mathbf{u}_p^0$ 的常数。

6. 数值实验。 为了验证本文所提出数值格式的基本性质，我们进行了六项数值测试，分别关注这些格式的不同方面。我们对自由流以及多孔介质区域中流动的速度和压力选用 Taylor-Hood 元（**P2-P1**）。对于两相流，相函数和化学势均选用 P1 有限元。所有数值测试均使用开源有限元软件包 FreeFem ++ [23] 完成。

6.1. EMAC 公式。 [35]指出，如果离散速度近似并非严格无散，那么质量、动量和角动量等守恒量的误差可能会随时间迅速累积。最初为纳维–斯托克斯方程提出的 EMAC 公式 [6], 能够在离散情形下保持能量、动量和角动量守恒。由于 Taylor-Hood 元无法得到严格无散的速度近似，我们将采用下文介绍的 EMAC 公式。

按照 [35], 的提议，我们引入 $P = p - \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2$，并给出纳维–斯托克斯方程中对流项和压力的一种等价形式。

$$\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \nabla p = 2\mathbb{D}(\mathbf{u})\mathbf{u} + (\nabla\cdot\mathbf{u})\mathbf{u} + \nabla P,$$

其中，应变张量 $\mathbb{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)$。类似地，对于由方程 (2.1)-(2.10) 定义的问题，我们推导出采用 EMAC 公式的弱形式。对于 $\forall\ t \in (0,T]$，求 $\mathbf{u} \in H_f,\ P \in Q_f,\ \phi \in H_p$ 使得

$$\begin{cases} (\partial_t\mathbf{u},\mathbf{v})_f + gS_0(\partial_t\phi,\psi)_p + \nu(\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{v})_f - (P,\nabla\cdot\mathbf{v})_f + b(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v}) + \alpha\sqrt{\dfrac{\nu g}{tr(\mathbb{K})}}\displaystyle\int_\Gamma(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\tau})(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\tau})ds \\ \qquad + g(\mathbb{K}\nabla\phi,\nabla\psi)_p + c_\Gamma(\mathbf{v},\phi) - c_\Gamma(\mathbf{u},\psi) = (\mathbf{f}_\mathbf{f},\mathbf{v})_f + g(f_p,\psi)_p, \qquad \forall\mathbf{v}\in H_f,\ \psi\in H_p, \\ (\nabla\cdot\mathbf{u},q)_f = 0, \qquad \forall q\in Q_f, \\ (\mathbf{u}(\mathbf{x},0),\mathbf{v})_f = (\mathbf{u}^0,\mathbf{v})_f, \qquad \forall\mathbf{v}\in H_f, \\ (\phi(\mathbf{x},0),\psi)_p = (\phi^0,\psi)_p, \qquad \forall\psi\in H_p, \end{cases} \tag{6.1}$$

其中

$$b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = (2\mathbb{D}(\mathbf{u})\mathbf{v},\mathbf{w})_f + ((\nabla\cdot\mathbf{u})\mathbf{v},\mathbf{w})_f - \int_\Gamma(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{w}\cdot\mathbf{n})ds, \qquad \forall\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in H_f,$$
$$c_\Gamma(\mathbf{v},\phi) = g\int_\Gamma\phi\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}ds, \qquad \forall\mathbf{v}\in H_f,\ \phi\in H_p.$$

LEMMA 6.1. 非线性项 $b(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ 具有以下性质：

$$b(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{u}) = 0, \quad \forall\mathbf{u}\in H_f. \tag{6.2}$$

证明。由于非线性项 $b(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{u}) = (2\mathbb{D}(\mathbf{u})\mathbf{u},\mathbf{u})_f + ((\nabla\cdot\mathbf{u})\mathbf{u},\mathbf{u})_f - \int_\Gamma(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})ds$，利用格林公式可得

$$\begin{aligned} b(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{u}) &= (2\mathbb{D}(\mathbf{u})\mathbf{u},\mathbf{u})_f - (\mathbf{u},\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}))_f + \int_\Gamma(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})ds - \int_\Gamma(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})ds \\ &= (2(\nabla\mathbf{u})\mathbf{u},\mathbf{u})_f - (2(\nabla\mathbf{u})\mathbf{u},\mathbf{u})_f + \int_\Gamma(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})ds - \int_\Gamma(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})ds \\ &= 0, \qquad \forall\mathbf{u}\in H_f. \end{aligned}$$

□

REMARK 6.1. 我们可以将**格式 I、II 和 III** 中的三线性形式 $a(\cdot,\cdot,\cdot)$ 和 $(p^{n+1},\nabla\cdot\mathbf{v})f$ 替换为 $b(\cdot,\cdot,\cdot)$ 和 $(P^{n+1},\nabla\cdot\mathbf{v})f$，从而得到相应的 *EMAC* 格式。需要指出的是，针对**格式 I 、 II 和 III** 建立的稳定性结果对相应的 *EMAC* 格式同样成立。然而，误差分析还需要进一步研究。

6.2. 例 1：收敛性测试 A。我们首先将参数 $\nu=0.001$、$\mathbb{K}=\mathbb{I}$ 以及其他所有参数设为 1。我们将计算区域选为 $\Omega_f=[0,1]\times[0,1]$，$\Omega_p=[0,1]\times[-1,0]$。精确解以及相应的初始值和源项构造如下。

$$\begin{cases}\mathbf{u}=[\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2]=[x^2y^2\cos(t),-\dfrac{2}{3}xy^3\cos(t)],\\ p=cx^2(x-1)^2y^2(y-1)^2\cos(t),\\ \phi=cx^2(x-1)^2(y+1)^2y^2\cos(t).\end{cases}$$

我们取 $c=64\pi^2$，并考虑一系列空间网格尺寸 $h=1/16,\ 1/20,\ 1/24,\ 1/28,\ 1/32$，时间步为 $\Delta t=h^2$。相应的数值结果见图 6.1。如图 6.1 所示，收敛阶达到一阶，这与定理 4.2 一致。随后，我们取 $\Delta t=h/8$ 以检验**方案 II**的性能。这些结果同样见图 6.1，清楚地表明了二阶时间精度。

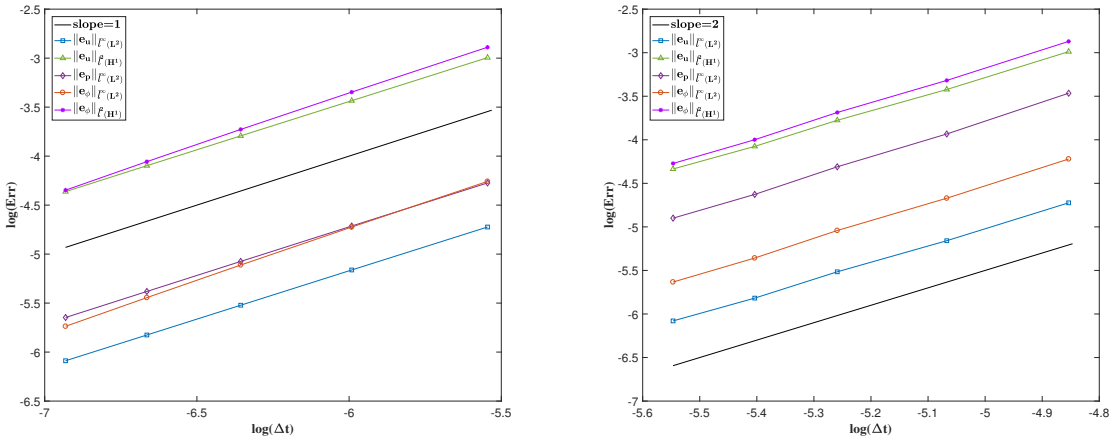

图 6.1：$T=0.5$（例 1）中数值误差和收敛率的比较。左：**格式 I**。右：**方案 II**。

6.3. 例 2：收敛性测试 B。在本例中，所有参数均与例 1 中的参数保持一致。解析解选为

$$\begin{cases}\mathbf{u}=[\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2]=\left[l\sin^2(\pi x)\sin(2\pi y)\cos(t),-l\sin(2\pi x)\sin^2(\pi y)\cos(t)\right],\\ p=\sin(\pi y)\cos(\pi x)\cos(t),\\ \phi=\sin(\pi x)\sin^2(\pi y)\cos(t).\end{cases}$$

使用**格式 I** 并采用 $l=1/20\pi^2$、$h=1/16,\ 1/20,\ 1/24,\ 1/28,\ 1/32$ 和 $\Delta t=h^2$ 得到的数值结果如图 6.2 所示。我们可以轻松得到一阶格式的时间收敛阶

格式。然后我们设定 $\Delta t = h/4$ ，以探究**方案 II**的收敛率，期望结果亦在图 6.2 中给出。

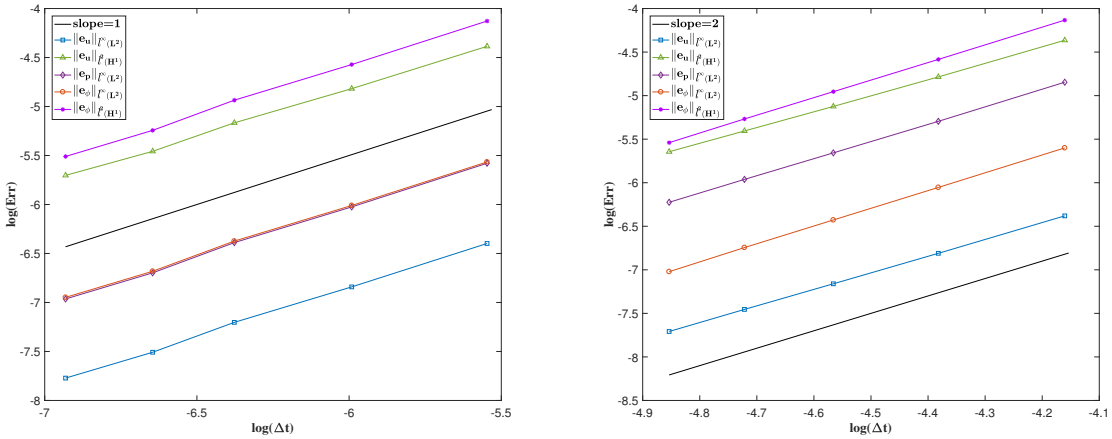

图 6.2： $T = 0.5$ 下数值误差与收敛率的比较（例 2）。左：**格式 I**。右：**方案 II**。

6.4. 示例 3：过滤流的数值模拟。在此示例中，我们研究不同水力传导系数对多孔介质中自由流的影响，这可视为对过滤器的简单模拟。具体而言，我们将采用**格式 I** 和 EMAC 公式，在多孔介质中选择低水力传导系数区域的不同位置和长度。我们将计算区域设为 $\Omega_f = [0,2] \times [1.5,2]$、$\Omega_p = [0,2] \times [0,1.5]$ 和 $\Gamma = [0,2] \times \{1.5\}$，终止时间为 $T = 0.5$、$\Delta t = 0.005$、$h = 1/80$，其他参数均设为 1。初始条件为$\mathbf{u}_f^0 = (0,\ 0.01x(x-2))$ $\phi^0 = 0$。

规定如下配置：对于情形 (a)–(f)，水力传导率在两个小矩形子区域内设为$K = 10^{-6}$，在其余区域设为 $K = 1$。对于情形 (g)，水力传导率张量定义为

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} \mathrm{rand}(x,y) & 0.1\mathrm{rand}(x,y) \\ 0.1\mathrm{rand}(x,y) & \mathrm{rand}(x,y) \end{bmatrix},$$

其中 rand(x, y) 表示区间 $(0, 1]$ 上的均匀分布随机变量 .

图 6.3 展示了在不同多孔介质构型中，具有对角水力传导率张量时由初始速度驱动的流体流动路径；图 6.4 则展示了具有随机水力传导率张量时的速度流线及 ξ 的时间演化。我们可以看到，在各种设置下，ξ 始终接近 1。如图所示，流动遇到第一个低水力传导率区域时，会沿着该区域的几何形状流动，并在其角落附近出现局部速度增大。在第二个低水力传导率区域内，也会出现类似的流动模式，包括角落处的加速。通过固定第一个区域的宽度并改变第二个矩形区域的宽度进行水平比较，可以发现，低水力传导率区域越宽，角落附近的速度增幅越明显。垂直比较也得出了类似结果。这种现象与流体动力学中的文丘里效应或气流动力学中的狭管效应相符。

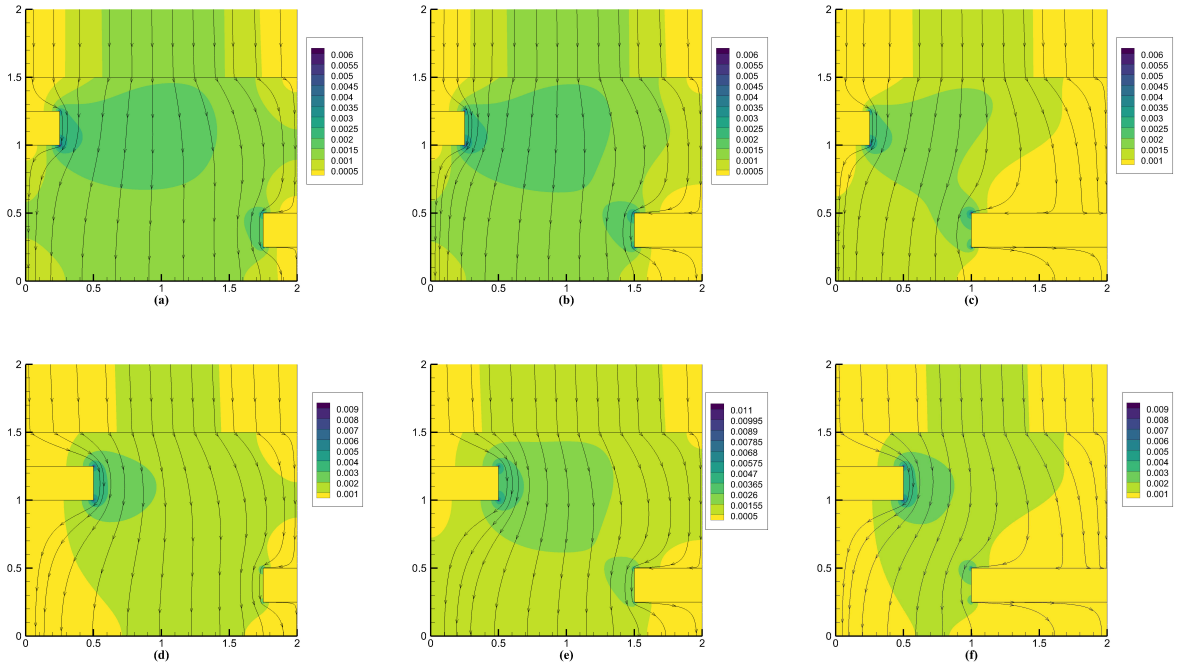

图 6.3：不同多孔介质构型中由初始速度驱动的速度场分布对比。

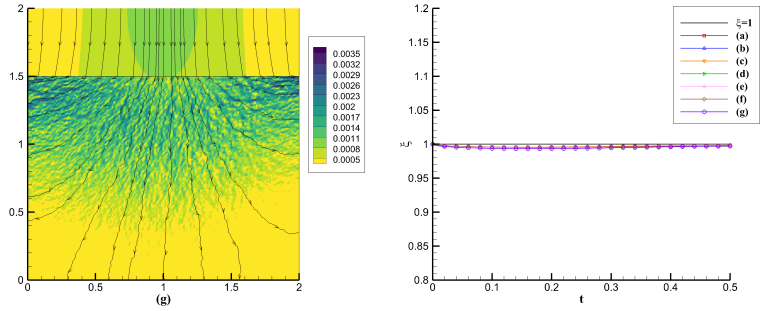

图 6.4：左：随机水力传导率张量下的速度场分布；右：不同设置下 ξ 的对比。

6.5. 示例 4：随机初始条件下的相分离动力学。在这个数值算例中，我们通过模拟 Cahn–Hilliard–Navier–Stokes–Darcy 模型的相分离动力学，验证采用 EMAC 公式的 **格式 III** 。初始相场变量设为

$$\phi^0 = y - 1 + 0.01 rand(x, y),$$

其中，$rand(x,\ y)$ 表示在 $[-1,1]$ 上服从均匀分布的随机变量，参数为 Δt =0.005，$h = 1/100$，$\nu_f = \nu_p = 0.1$，$\alpha = 0.01$，$\chi = 1$，$\lambda = 0.1$，$M(\phi) = \epsilon\sqrt{(1-\phi)^2+\epsilon^2}$，$\epsilon = 0.01$，以及水力传导率张量

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

计算区域 $\Omega = [0,1]\times[0,2]$ 包括自由流区域 $\Omega_f = [0,1]\times[0,1]$ 和多孔介质区域 $\Omega_p = [0,1]\times[1,2]$。

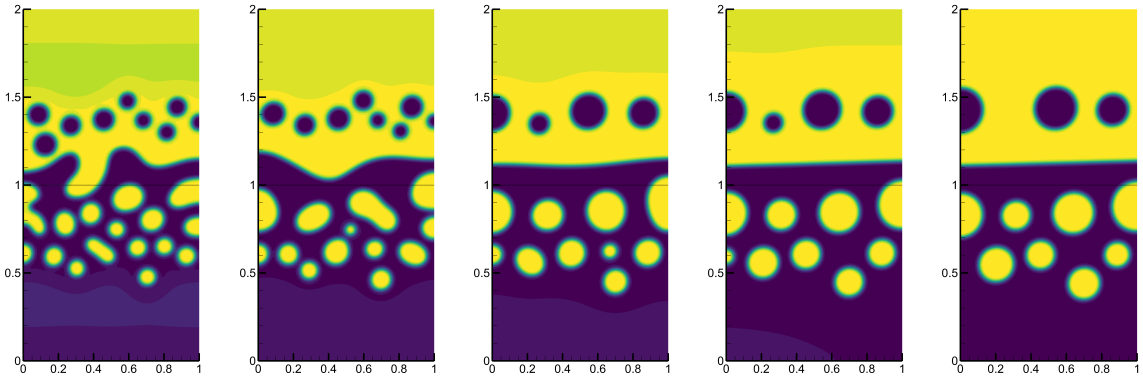

图 6.5：随机初始条件下 T=0.5、1、2、4、10 时的相场演化。

如图 6.5 所示，初始时刻，相场变量在整个区域内呈随机空间分布。随着时间演化，表面张力效应促使相分离逐步进行，形成具有清晰界面边界的不同区域。最终，系统演化为稳定且粗化的区域，使界面能最小化。

6.6. 例 5：表面张力驱动的液滴弛豫。该数值算例模拟了相弛豫现象。初始相场变量定义为

$$\phi^0 = \tanh\left(\frac{0.25 + 0.1\cos(n\arctan\frac{y-1}{x-0.5}) - \sqrt{(x-0.5)^2+(y-1)^2}}{\sqrt{2}\epsilon}\right),$$

计算区域及其他所有参数均与前一个算例保持一致，但黏度系数 $\nu_f = 0.1$、$\nu_p = 1$ 和 $\mathbb{K} = 0.01\mathbb{I}$ 除外。$n = 4$ 和 $n = 6$（其中 n 表示初始形状中的花瓣数）的结果分别见图 6.6 和图 6.7。如图所示，中央区域的初始液滴在表面张力作用下，随着时间推移逐渐演变为圆形，这与 Cahn–Hilliard–Navier–Stokes–Darcy 模型满足的能量耗散规律一致。此外，我们观察到，由于为自由流动区域和多孔介质区域指定了不同的黏度系数，自由流动区域中的相弛豫比多孔介质区域更快，这符合该模型的物理特性，并与 [16, 15, 18]一致。

6.7. 例 6：浮力驱动气泡上升。在本例中，我们研究由浮力驱动的双相流中的气泡动力学。我们在（5.1）和（5.8）的右侧添加浮力项 $\mathbf{B}(\phi - \bar{\phi})$，其中 $\mathbf{B} = (0,\ 5)^T$，而 $\bar{\phi}$ 表示空间平均序参数。计算区域及其他参数与例 5 一致。初始时，我们将相变量

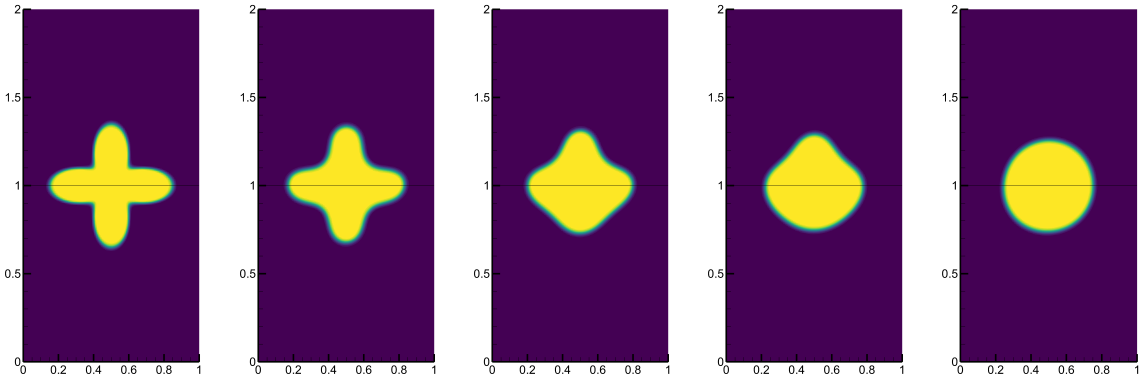

图 6.6：表面张力驱动的液滴弛豫（n=4），在 T=0 时，0.2、0.6、1、4。

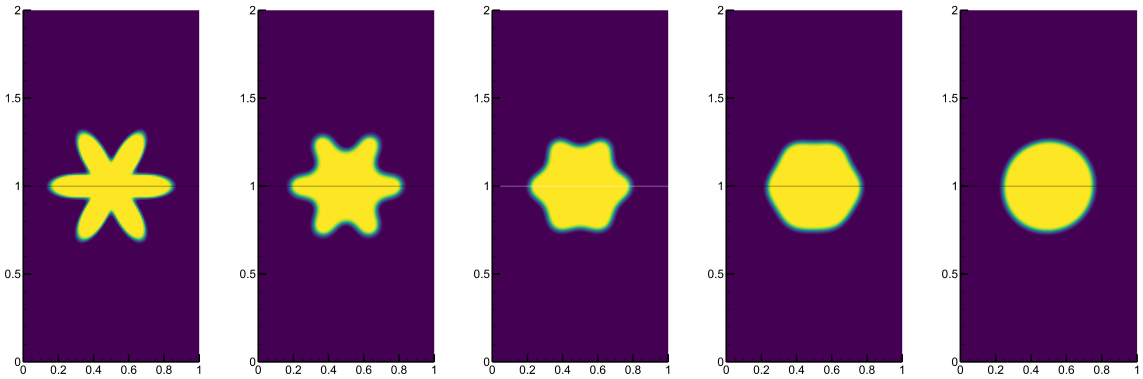

图 6.7：表面张力驱动的液滴弛豫（n=6），在 T=0 时，0.2、0.4、0.6、4。

设为

$$\phi^0 = \tanh\left(\frac{R - \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}{\sqrt{2}\epsilon}\right),$$

其中 $R = 0.3$， $x_0 = 0.5$， $y_0 = 0.5$。图 6.8 展示了气泡在浮力作用下于自由流动区域中逐渐上升至多孔介质区域的演变过程，并准确捕捉了气泡穿过两个区域之间界面的瞬间。

接下来，我们设定 $\mathbf{B} = (0,\ 8)^T$，并考虑自由流动区域中有两个初始气泡。如图 6.9 所示，两个气泡在浮力作用下上升，并在穿过界面时逐渐合并，这与 $[9,\ 16]$ 一致。

7. 结论。本文针对 Navier–Stokes–Darcy 模型和 Cahn–Hilliard–Navier–Stokes–Darcy 模型，在一种新的弛豫机制下提出了新颖的线性解耦数值格式。所提格式的一个主要优势是计算效率高，因为每个时间步只需求解常系数线性系统。这些格式的一项重要性质是无条件耗散原始能量。我们严格证明了所提格式的无条件稳定性，并以 Navier–Stokes–Darcy 模型的一阶

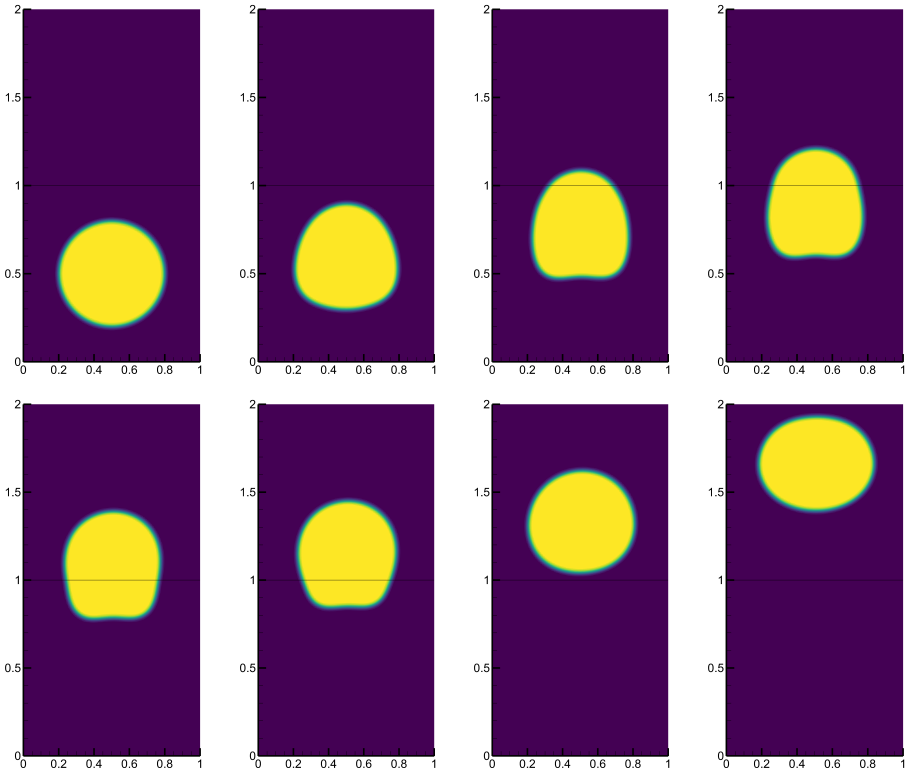

图 6.8：浮力驱动气泡上升，时刻为 T=0、0.4、1、1.4、2、2.2、2.8、4。

格式为例，推导了最优误差估计。

在数值实现中，我们采用了带有 EMAC 公式的有限元方法，该方法能够在离散层面上进一步保持质量、动量和角动量。我们给出了若干数值实验，验证了所提格式的基本性质与稳健性。

参考文献

[1] L. Badea, M. Discacciati, and A. Quarteroni, *Numerical analysis of the Navier–Stokes/Darcy coupling*, Numerische Mathematik, 115 (2010), 第195–227页。[2] G. S. Beavers and D. D. Joseph, *Boundary conditions at a naturally permeable wall*, 流体力学杂志, 30 (1967), 第197–207页。[3] M. Cai, M. Mu, and J. Xu, *Numerical solution to a mixed Navier–Stokes/Darcy model by the two-grid approach*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 47 (2009), 第3325–3338页。[4] Y. Cao,

Y. Chu X. He and M. Wei *Decoupling the stationary Navier–Stokes–Darcy system with the Beavers–* , , , , 《抽象与应用分析》, ( ), 第–页。
Joseph–Saffman interface condition 2013 1 10

[5] Y. Cao, M. Gunzburger F. Hua and X. Wang *Coupled Stokes–Darcy model with Beavers–Joseph interface* , , , , 《数学科学通讯》, ( ),
boundary condition 8 2010 1 25
第–页。[6] S. Charnyi, T. Heister M. A. Olshanskii and L. G. Rebholz *On conservation laws of Navier–Stokes Galerkin* , , , , 《计算物
discretizations 337 2017 289 308
理学杂志》, ( ), 第–页。[7] J. Chen, S. Sun, and X.-P. Wang, *A numerical method for a model of two-phase flow in a coupled free flow and*
porous media system 268 2014 1 16 , 《计算物理学杂志》, ( ), 第–页。

[8] W. Chen, M. Gunzburger, D. Sun, and X. Wang, *Efficient and long-time accurate second-order methods for the*
Stokes–Darcy system 51 2013 2563 2584 , SIAM Journal on Numerical
Analysis, ( ), 第–页。[9] W. Chen, D. Han, and X. Wang, *Uniquely solvable and energy stable decoupled numerical schemes for the Cahn–*

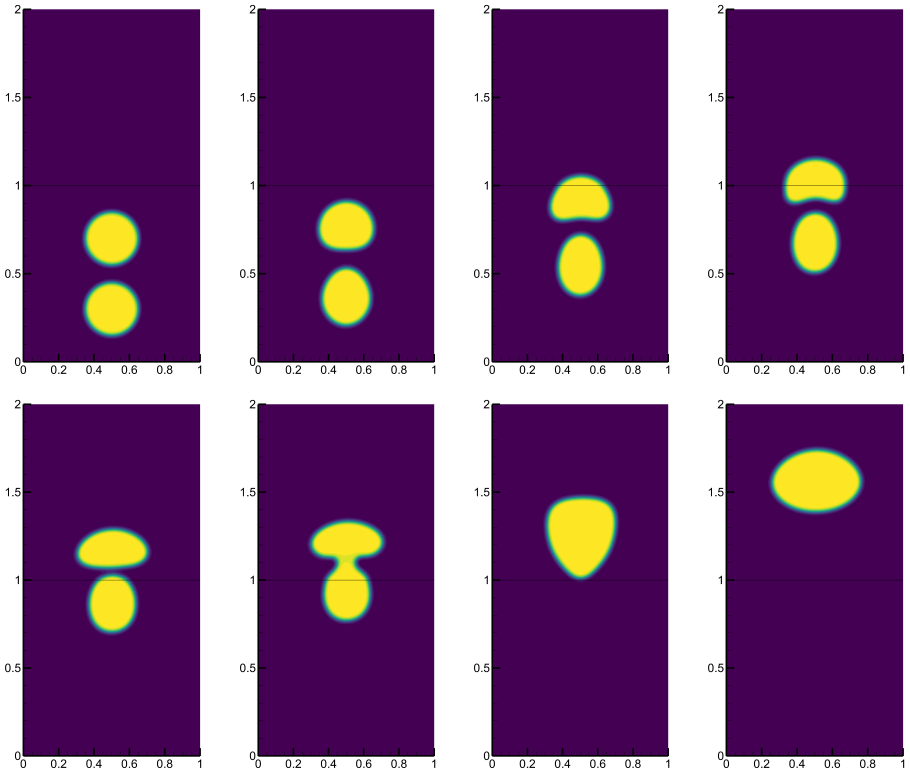

图 6.9：在 T=0、0.2、0.5、0.7、1、1.1、1.4 和 2 时的浮力驱动气泡上升。

Hilliard–Stokes–Darcy system for two-phase flows in karstic geometry, Numerische Mathematik, 137 (2017), 第229–255页。[10] W. Chen, D. Han, X. Wang, and Y. Zhang, *Uniquely solvable and energy stable decoupled numerical schemes for the Cahn–Hilliard–Navier–Stokes–Darcy–Boussinesq system* 85 2020 , Journal of Scientific Computing, ( )。[11] Q. Cheng, C. Liu, and J. Shen, *A new lagrange multiplier approach for gradient flows*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 367 (2020), 第113070页。[12] P. Chidyagwai and B. Rivière, *On the solution of the coupled Navier–Stokes and Darcy equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 198 (2009), 第3806–3820页。[13] J. M. Connors and J. S. Howell, *A fluid–fluid interaction method using decoupled subproblems and differing time steps* , Numerical Methods for Partial Differential Equations, 28 2012 ( )。[14] M. Discacciati, *Domain decomposition methods for the coupling of surface and groundwater flows*, 博士论文, Verlag nicht ermittelbar, 2004。[15] Y. Gao, and D. Han, *Second-order decoupled linear energy-law preserving gPAV numerical schemes for two-phase flows in superposed free flow and porous media* 100 2024 36 , Journal of Scientific Computing, ( ), 第页。[16] Y. Gao, X. He, T. Lin, and Y. Lin, *Fully decoupled energy-stable numerical schemes for two-phase coupled porous media and free flow with different densities and viscosities*, ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 57 (2023), 第1323–1354页。[17] Y. Gao, X. He L. Mei and X. Yang *Decoupled linear and energy stable finite element method for the Cahn– , , ,,,, Hilliard–Navier–Stokes–Darcy phase field model* 40 2018 110 SIAM Journal on Scientific Computing, ( ), 第B–B137页。[18] Y. Gao, R. Li, X. He, and Y. Lin, *A fully decoupled numerical method for Cahn–Hilliard–Navier–Stokes–Darcyequations based on auxiliary variable approaches*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 436 (2024), 第115363页。[19] V. Girault and B. M. Rivière, *DG approximation of coupled Navier–Stokes and Darcy equations by Beaver–Joseph– , SIAM Journal on Saffman interface condition* 47 2009 2052 2089 Numerical Analysis, ( ), 第–页。[20] D. Han, X. He, Q. Wang, and Y. Wu, *Existence and weak–strong uniqueness of solutions to the Cahn–Hilliard–*

Navier–Stokes–Darcy system in superposed free flow and porous media, 《非线性分析》, 211（2021）, 第 112411 页。[21] N. S. Hanspal, A. Waghode, V. Nassehi, and R. J. Wakeman, *Numerical analysis of coupled Stokes/Darcy flows in industrial filtrations* 64 2006 73 101 , 《多孔介质中的传输》, （）, 第 – 页。[22] X. He, J. Li Y. Lin and J. Ming *A domain decomposition method for the steady-state Navier–Stokes–Darcy model* , , , , *with Beavers–Joseph interface condition* 37 2015 264 290 SIAM Journal on Scientific Computing, （）, 第 S–S 页。[23] F. Hecht, *New development in FreeFem++*, 《数值数学杂志》, 20（2012）, 第 251–266 页。[24] A. A. Hill and B. Straughan, *Poiseuille flow in a fluid overlying a porous medium*, 《流体力学杂志》, 603（2008）, 第 137–149 页。[25] N. Jiang and H. Yang, *SAV decoupled ensemble algorithms for fast computation of Stokes–Darcy flow ensembles*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 387（2021）, 第 114150 页。[26] N. Jiang and H. Yang, *Fast and accurate artificial compressibility ensemble algorithms for computing parameterized Stokes–Darcy flow ensembles* 94 2023 17 , Journal of Scientific Computing, （）, 第 页。[27] W. J. Layton, F. Schieweck, and I. Yotov, *Coupling fluid flow with porous media flow*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 40（2002）, 第 2195–2218 页。[28] X. Li and J. Shen, *Error analysis of the SAV–MAC scheme for the Navier–Stokes equations*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 58（2020）, 第 2465–2491 页。[29] X. Li and J. Shen, *On fully decoupled MSAV schemes for the Cahn–Hilliard–Navier–Stokes model of two-phase* , 《应用科学中的数学模型与方法》, （）, 第 – 页。[30] X. Li, *incompressible flows* 32 2022 457 495 J. Shen and Z. Liu *New SAV–pressure correction methods for the Navier–Stokes equations: stability and* , , , 计算数学, （）, 第 – 页。*error analysis* 91 2022 141 167 [31] L. Lin, Z. Yang and S. Dong *Numerical approximation of incompressible Navier–Stokes equations based on an* , , , 《计算物理学杂志》, （）, 第 – 页。[32] K. A. Mardal, X.-C. Tai, and R. Winther, *A robust finite element method for Darcy–Stokes flow*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 40（2002）, 第 1605–1631 页。[33] M. McCurdy, N. Moore, and X. Wang, *Convection in a coupled free flow-porous media system*, SIAM应用数学杂志, 79（2019）, 第 2313–2339 页。[34] M. McCurdy, N. J. Moore, and X. Wang, *Predicting convection configurations in coupled fluid-porous systems*, 《流体力学杂志》, 953（2022）, 第 A23 页。[35] M. A. Olshanskii and L. G. Rebholz, *Longer time accuracy for incompressible Navier–Stokes simulations with the* , Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, （）, 第 页。[36] C. Qiu, *EMAC formulation* 372 2020 113369 X. He J. Li and Y. Lin *A domain decomposition method for the time-dependent Navier–Stokes–Darcy model* , , , , 《计算物理学杂志》, *with Beavers–Joseph interface condition and defective boundary condition* 411 （2020）, 第 109400 页。[37] H. Rui and J. Zhang, *A stabilized mixed finite element method for coupled Stokes and Darcy flows with transport*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 315（2017）, 第 169–189 页。[38] P. G. Saffman, *On the boundary condition at the surface of a porous medium*, 《应用数学研究》, 50（1971）, 第 93–101 页。[39] J. Shen, *On error estimates of projection methods for Navier–Stokes equations: first-order schemes*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 29（1992）, 第 57–77 页。[40] J. Shen and J. Xu, *Convergence and error analysis for the scalar auxiliary variable (SAV) schemes to gradient flows*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 56（2018）, 第 2895–2912 页。[41] J. Shen, J. Xu, and J. Yang, *The scalar auxiliary variable (SAV) approach for gradient flows*, 《计算物理学杂志》, 353（2018）, 第 407–416 页。[42] M.-C. Shiue, K. C. Ong, and M.-C. Lai, *Convergence of the MAC scheme for the Stokes/Darcy coupling problem*, Journal of Scientific Computing, 76（2018）, 第 1216–1251 页。[43] X. Wang, X. Guo and X. Li *A class of new linear efficient and high-order implicit–explicit methods for the unsteady* , , , , *Navier–Stokes–Darcy model based on nonlinear Lions interface condition* 101 Journal of Scientific Computing, （2024）, 第 40 页。[44] Y. Wu, Y. Gao X. He and Y. Lin *Optimal error estimates for a semi-discrete finite element scheme of Cahn–* , , , , 非线性科学与数值模拟通讯, *Hilliard–Navier–Stokes–Darcy model* 2025 （）, 第 109257 页。[45] A. Çesmelioglu, V. Girault, and B. M. Rivière, *Time-dependent coupling of Navier–Stokes and Darcy flows*, 《数学建模与数值分析》, 47（2013）, 第 539–554 页。