arXiv:2602.01184v1 [math.CO] 1 Feb 2026

良序化一个火焰

ZSUZSANNA JANKÓ 和 ATTILA JOÓ

摘要。以 r 为根的（可能是无限的）有向图 $D = (V, E)$ 是一个火焰，当且仅当对每个$v \in V\setminus\{r\}$，都存在一组从 r 到 v 的边不交路径，这些路径位于 D 中，并覆盖 v的所有入边。洛瓦兹最早在研究有根有向图的边极小子图时考察了火焰；这些子图保留了从根出发的所有局部边连通度。他证明了这类子图总是火焰。后来，Szeszlér 证明了洛瓦兹结果与 Edmonds 不相交树形图定理的一个共同推广。本文聚焦于无限火焰，并证明如下构造性刻画。每个（可能是无限的）火焰都可以通过超限递归构造：从空边集开始，每一步添加一条边，并使得每个中间有向图仍然是火焰。

1. 引言

以 r 为根的有向图是一个（可能无限的）有向图，它有一个指定的根顶点 r，且没有入边。火焰是一个以 r 为根的有向图 $D = (V, E)$，满足对于每个$v \in V \setminus \{r\}$，都存在一组从 r 到 v 的边不交路径，覆盖 v的所有入边。回顾一下，局部边连通度 $\lambda_D(u, v)$ 是从 u 到 v的边不交路径的最大数量。洛瓦兹和 Calvillo-Vives 分别研究了有限有根有向图中保持从根出发的所有局部边连通度的边极小子图。设 $D = (V, E)$ 是一个有限的以 r 为根的有向图，并假设 $F \subseteq E$ 在满足以下性质的条件下是极小的：对于生成子有向图 $D(F)$，有$= (V, F)$，且对于每个 $v \in V\setminus\{r\}$，都有 $\lambda_{D(F)}(r, v) = \lambda_D(r, v)$。显然，对于 $v \in V\setminus\{r\}$，F必须至少包含 v 的$\lambda_D(r, v)$条入边。洛瓦兹和 Calvillo-Vives 独立证明（参见 [5,定理 2] 和 [2]）对于每个 $v \in V\setminus\{r\}$，F 恰好包含 v的 $\lambda_D(r, v)$ 条入边。换言之，任何保持从根出发的所有局部边连通度、且在此性质下边极小的生成子有向图都是火焰。回顾一下，树形图是一种有根有向树，其中每个顶点都能从根沿有向路径到达。顶点不交的树形图之并称为分枝。Szeszlér 后来证明了洛瓦兹和 Calvillo-Vives 定理的以下加强形式：

定理 1.1 ([6, 定理 8])。设 $D = (V, E)$ 是一个有限的 r-根有向图，且 $m :=$最大值 $_{v\in V\setminus\{r\}} \lambda_D(r, v)$。那么存在 $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq F_m \subseteq E$，使得对每个 $i \in [m]$:

2020 数学主题分类。主要分类：05C63 次要分类：05C20。关键词和短语。火焰、良序。第一作者获得了匈牙利科学研究基金（NKFIH OTKA 项目 K143858）以及匈牙利科学院 Momentum计划（项目编号 LP2021-2）的资助。

$D_i := (V, F_i)$ 是一个火焰，其中 $\lambda_{D_i}(r, v) =$ 最小值$\{\lambda_D(r, v)\ i\}$，对 $v \in V \setminus \{r\}$，且 $F_i \setminus F_{i-1}$构成一个分枝（其中 $F_0 := \emptyset$）。

注意，火焰 D_m 保留了从根出发的所有局部边连通度。此外，如果 $k :=$ 最小$_{v \in V \setminus \{r\}} \lambda_D(r, v)$，那么对每个 $i \in [k]$, $F_i \setminus F_{i-1}$ 都必须构成生成树形图。后者是 Edmonds 的经典“互不相交树形图”定理（参见[3]）。定理 1.1应用于火焰时，使我们能够将火焰构造为某些子火焰的递增链。本文证明，对于每个（可能无限的）火焰，都可以找到一条子火焰递增链，使其每一步都只增加一条边。更准确地说，我们证明如下结论：

定理 1.2。对于每个火焰 $D = (V, E)$，都存在一个良序 $<$，其定义在 E 上，且序型为 $|E|$；使得对于每个对应于 $<$ 的某个初始段的子集 $F \subseteq E$，生成子有向图 (V, F) 都是火焰。

定理1.2 在 E 有限时的特殊情形，可由我们先前的如下结果推出：有限有根有向图的火焰子图的边集构成一个贪婪拟阵（见 [4,定理1.2]）。一般情形需要更精密的工具，主要是因为无限火焰可能容许一个真子火焰，其自根出发的边连通度与原火焰完全相同，从而使我们的关键引理 [4,引理3.1]在无限情形下失效。

本文结构如下。在下一节中，我们介绍所用术语。第3 节专门给出所需引理的证明。最后，在第4 节中，我们证明定理1.2。

2. 记号与术语

本文所考虑的有向图 $D = (V, E)$可以有平行边，但没有自环。对于 $e \in E$，我们用 $D - e$ 表示有向图$(V, E \setminus \{e\})$。若边 e 从 u 指向v，则称 u 为 e的尾端，称 v 为 e的头。对于 $X \subseteq V$，我们用 $\delta_D(X)$表示所有头位于 X 且尾端位于 $V \setminus X$中的边 $e \in E$ 的集合。

有根有向图由有向图 $D = (V, E)$ 以及一个指定的顶点 $r \in V$ 组成，该顶点称为根，并满足 $\delta_D(r) = \emptyset$。若固定有根有向图 $D = (V, E)$，为简化记号，我们将任意集合 $F \subseteq E$ 与生成子有向图 (V, F) 等同看待，并认为其具有相同的根 r。

若 $U \subseteq V$ 且 $u \in U$，则将 U 中的顶点收缩到 u 所得到的有向图定义如下。其顶点集为 $(V \setminus U) \cup \{u\}$。头和尾均位于 U 中的边将被删除。尾端位于 U 且头位于 $V \setminus U$ 中的边，其新尾端为 u，头保持不变。头位于 U 且尾端位于 $V \setminus U$ 中的边，其新头为 u，尾端保持不变。两个端点均不在 U 中的边，其头和尾端均保持不变。若 D 有根，则所得有向图以相同的顶点为根。此外，若将顶点收缩到根 r，则删除所得的 r 的任何入边。

“路径” P 始终指有限有向路径，并且我们将路径视为其边集。XY-路径是指从 X 出发、终止于 Y，且在 $X \cup Y$中没有内部顶点的路径。路径 P的初始段和终止段，分别是与 P的第一条边和最后一条边重合的子路径。对于单元素集合，我们省略括号；例如，我们写作 $\delta_D(v)$，而不写作 $\delta_D(\{v\})$；写作 rv-路径，而不写作$\{r\}\{v\}$-路径。

对于有根有向图 D，我们将$\mathcal{G}_D(v)$定义为所有集合 $I \subseteq \delta_D(v)$的集族，其中每个集合都满足：存在一个由 D 中的边不交 rv-路径组成、覆盖 I的集合$\mathcal{P}_I$。若对每个 $v \in V \setminus \{r\}$，都有 $\delta_D(v) \in \mathcal{G}_D(v)$，则有根有向图$D = (V, E)$称为火焰。边不交路径集合$\mathcal{P}$ 的横截集，是指恰好包含每条路径中一条边的边集$\mathcal{P}$。

对于非空集合族$\mathcal{F}$，我们分别用 $\bigcup\mathcal{F}$ 和 $\bigcap\mathcal{F}$ 表示$\mathcal{F}$中集合的并集和交集。令 $[k]$ 表示$\{1, 2, \ldots, k\}$，其中 $k \in \mathbb{N}$。变量 α、 β和 γ 表示序数。良序的序型是唯一的序数 α，使得$(\alpha, \in)$与该良序同构。集合 X 的基数 $|X|$ 是最小的序数 α，使得 X 具有序型为 α 的良序。

3. 准备工作

本节固定一个以 r为根的有向图 $D = (V, E)$。若存在一个由 $D =$ 中边不相交的 r-路径组成的集合

$$\mathcal{P} = \{P_e : e \in \delta_D(X)\}$$

，且对于每个 $e \in \delta_D(X)$， P_e 的最后一条边都是 e，则称集合 $D \setminus \{\}$ 为可填充。注意，D 是火焰，当且仅当对于每个 $v \in V \setminus \{r\}$，单元素集合$\{v\}$ 都是可填充的。

引理 3.1。 如果 $\mathcal{F}$ 是一个非空的可填充集族，那么 $\bigcap\mathcal{F}$ 是可填充的。

证明。 令 $\mathcal{F} = \{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$，并且对于每个 $\alpha < \kappa$，令 $\{P_e^\alpha : e \in \delta_D(X_\alpha)\}$ 为一个路径系统，证明 X_α 是可填充的，其中 e 是 P_e^α 的最后一条边。对于 $1 \leq \alpha \leq \kappa$，定义 $Y_\alpha := \bigcap_{\beta<\alpha} X_\beta$。

我们通过超限递归构造一个路径系统 $\{Q_e^\alpha : e \in \delta_D(Y_\alpha)\}$，证明 Y_α 是可填充的。我们保持以下性质：对于每个 $\beta < \alpha$ 和每个 $e \in \delta_D(Y_\alpha)$，路径 Q_e^α 恰好包含一条边 $f \in \delta_D(Y_\beta)$，并且 Q_e^α 在 f 之前的初始段与 Q_f^β 重合。

对于每个 $e \in \delta_D(Y_1) = \delta_D(X_0)$，我们令 $Q_e^1 := P_e^0$。假设 $\alpha \leq \kappa$，并且对于所有 $\beta < \alpha$ 及所有 $e \in \delta_D(Y_\beta)$， Q_e^β 已经定义。首先假设 $\alpha = \beta + 1$ 是一个后继序数。对于 $e \in \delta_D(Y_{\beta+1}) \cap \delta_D(Y_\beta)$，我们定义 $Q_e^{\beta+1} := Q_e^\beta$。现在设 $e \in \delta_D(Y_{\beta+1}) \setminus \delta_D(Y_\beta)$。于是 $e \in \delta_D(X_\beta)$，并且 e 的尾端位于 Y_β 中（见图 1）。令 f 为 P_e^β 中位于 $\delta_D(Y_\beta)$ 内的最后一条边。我们将 $Q_e^{\beta+1}$ 定义为 Q_f^β 与从 f 开始的 P_e^β 的终止段之并。

现在假设 α 是一个极限序数。对于每个 $e \in \delta_D(Y_\alpha)$，存在一个最小的 $\beta < \alpha$，使得 $e \in \delta_D(Y_\beta)$。我们定义 $Q_e^\alpha := Q_e^\beta$。至此，超限构造完成。路径系统 $\{Q_e^\kappa : e \in \delta_D(Y_\kappa)\}$ 见证了 $\bigcap\mathcal{F}$ 是可填充的。□

推论 3.2. 对于每个 $X \subseteq V \setminus \{r\}$，存在一个包含 X 的 $\subseteq$-最小可填充集 $\mathrm{fill}_D(X)$。

证明。 集合 $V \setminus \{r\}$ 是可填充的，并且包含 X。因此，由引理 3.1， X 的所有可填充超集的交即为所求集合 $\mathrm{fill}_D(X)$。 □

假设 $v \in V \setminus \{r\}$，且 $\delta_D(v) \in \mathcal{G}_D(v)$。若集合 $T \subseteq V \setminus \{r\}$ 满足以下条件，则称其在 D 中是 v-紧的：对于见证 $\delta_D(v) \in \mathcal{G}_D(v)$ 的每个路径系统 $\mathcal{P}$，集合 $\delta_D(T)$ 都是 $\mathcal{P}$ 的横截集。

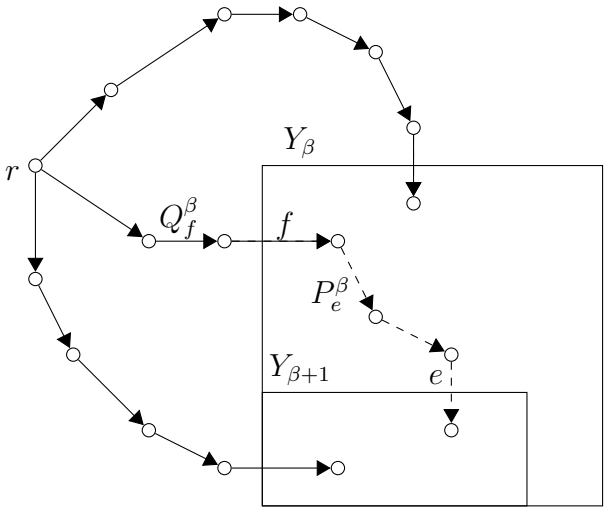

图 1. $Q_e^{\beta+1}$关于 $e \in \delta_D(Y_{\beta+1})$ 的路径构造。

观察 3.3。 若集合 T 是 v-紧的，则 T 是可填充的。

证明。 设 $\mathcal{P}$ 是见证 $\delta_D(v) \in \mathcal{G}_D(v)$ 的路径系统。那么，$\mathcal{P}$ 中各条路径截至其在 $\delta_D(T)$ 中唯一边的初始段，见证了 T 是可填充的。□

引理 3.4. 若 $\mathcal{F}$ 是由非空的 v-紧集构成的族，则 $\bigcup\mathcal{F}$ 和 $\bigcap\mathcal{F}$ 都是 v-紧集。

证明。我们证明 $\bigcup$F 的紧性；关于 $\bigcap$F 的论证类似。设 F 是见证 $\delta_D(v) \in \mathcal{G}_D(v)$ 的路径系统，并设 $e \in \delta_D(\bigcup \mathrm{F})$。于是存在 $T \in$F，使得 $e \in \delta_D(T)$。由 T 的紧性可知，边 e 位于某条路径 $P \in$F 上。接下来只需证明，F 中没有路径包含多于一条来自 $\delta_D(\bigcup$F$)$ 的边。反设存在某条 $Q \in$F 含有多于一条这样的边。那么 Q 进入 $\bigcup$F，离开它，随后又重新进入。因此，存在 $T' \in$F，使得 Q 进入并随后离开 T'。由于 Q 终止于 $v \in \bigcap$F，它必定会重新进入 T'，这意味着 Q 包含多于一条 $\delta_D(T')$ 的边，与 T' 的紧性矛盾。□

推论 3.5. 若 $\delta_D(v) \in \mathcal{G}_D(v)$，则存在一个 $\subseteq$ 最大的 v-紧集 $T_{v,D}$。

证明。 单元素集 $\{v\}$ 显然是 v-紧的。因此，所有 v-紧集组成的族非空，其并集就是最大的 v-紧集 $\subseteq$。□

我们需要以下经典引理。该引理最初是在研究 [1]. 中顶点不相交路径时证明的。

引理 3.6 (增广路引理). 设 $\mathcal{P}$ 是 D 中由边不相交的 rv-路径构成的系统，其中 $v \in V \setminus \{r\}$。那么，以下情况恰有一种成立：

(i) 存在一个由边不相交的 rv-路径构成的系统 $\mathcal{Q}$，使得

$$|\mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}| = |\mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}| + 1 \in \mathbb{N},$$

并且 $\mathcal{Q}$ 覆盖 $\mathcal{P}$ 所覆盖的所有 r 的出边和 v 的入边。

(ii) 存在一个包含 v 的集合 $X \subseteq V \setminus \{r\}$，使得 $\delta_D(X)$ 是 $\mathcal{P}$ 的一个横截集。

证明。 假设 (ii) 成立，并设 $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ 满足 $|\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'| = k \in \mathbb{N}$。那么恰有 k条入边 X 未被 $\mathcal{P}'$中的路径使用。由于 $\delta_D(X)$ 与每条 rv-路径都有交点，因此不可能再添加 $k+1$ 更多的 rv-路径，使 $\mathcal{P}'$ 形成的路径系统仍然保持边不相交。因此，(i) 不能成立。

为证明这两种可能性至少有一种成立，令 D' 为从 D 出发，将 $\bigcup \mathbf{P}$ 中所有边反向后得到的辅助有向图。假设存在一条 rv-路径 P，它位于 D' 中，且使用了 k P 中路径的反向边。那么， P 与这些路径的对称差可以分解为 D 中边不相交的 $k+1$ 条 rv-路径，这些路径覆盖了由这些 k 路径覆盖的 r 的出边和 v 的入边。再加上 P 中未改动的路径，便得到一个符合 (i) 要求的系统 Q。否则，集合 X 中那些无法通过 D' 中的路径从 r 到达的顶点满足 (ii)。□

推论 3.7。 假设 $v \in V \setminus \{r\}$，并且 $\delta_D(v) \in G_D(v)$。令 $\mathcal{P}$ 为一个由边不相交的 rv-路径组成的系统，它覆盖了 $\delta_D(v)$ 中除 $n \in \mathbb{N}$ 条边以外的所有边。那么存在一个系统 $\mathcal{Q}$，证明 $\in G_D(v)$ 满足 $\delta_D(v)$，且 $\mathcal{Q}$ 使用了 $\mathcal{P}$ 所使用的 r 的所有出边，并且至多再使用 n 条出边。

证明。 我们对 n 使用归纳法。对于 $n = 0$，系统 $\mathcal{Q} := \mathcal{P}$ 是合适的。假设该结论对 n 成立，并设 $\mathcal{P}$ 是一个由边不相交的 rv-路径构成的系统，它覆盖了 $\delta_D(v)$ 的所有边，除了 $n+1$ 条边以外。

将引理 3.6 应用于$\mathcal{P}$。若出现情形 (i) ，则所得系统 $\mathcal{P}'$ 必定多覆盖 r 的一条出边，以及 v的一条入边。对 $\mathcal{P}'$ 应用归纳假设，即可得到所需的系统 $\mathcal{Q}$。

反之，假设出现情形 (ii)，并设 X 为相应的集合。设 R 是一个证明 $\delta_D(v) \in G_D(v)$ 的路径系统，并令 R′ 由 R 中各路径从其在 $\delta_D(X)$ 中的最后一条边开始的末端段构成。对于每个 $R \in$R′，存在唯一一条路径 $P_R \in$P 包含 R 的第一条边。令 Q_R 为通过将 R 与 P_R 的初始段连接而得到的 rv-路径，该初始段截至其在 $\delta_D(X)$ 中的唯一一条边。于是

$$\mathcal{Q} := \{Q_R : R \in \mathcal{R}'\}$$

是一个见证 $\delta_D(v) \in \mathcal{G}_D(v)$ 的边不交路径系统，并且使用与 $\mathcal{P}$ 相同的 r 出边。□

推论 3.8。 设 U 是一个包含 $v \in V \setminus \{r\}$ 的可填充集，且 $\mathcal{P}$ 是一个边不交 rv-路径系统，它覆盖了 $\delta_D(v)$ 中除 $n \in \mathbb{N}$ 条边以外的所有边。令 $\mathcal{P}'$ 由 $\mathcal{P}$ 中各条路径从其在 $\delta_D(U)$ 中的最后一条边开始的末端段组成。则存在一个见证 $\delta_D(v) \in G_D(v)$ 的系统 $\mathcal{Q}$，使得 $\mathcal{Q}$ 使用 $\mathcal{P}'$ 所用的 $\delta_D(U)$ 的所有边，且至多使用 n 条额外边。

证明。 令 $D' = (U \cup \{r\}\ E')$ 为由 D 收缩$V \setminus U$ 至 r 后得到的辅助有向图。将推论 3.7 应用于 $\mathcal{P}'$ 中的路径系统， D'。最后，利用 U 在 D 中可填充这一事实，将得到的路径向后延伸为 rv-路径。 □

推论 3.9。 设 T 是一个 v-紧集，且 $\mathcal{P}$ 是一个由边不相交的 rv-路径组成的系统，这些路径覆盖了 $\delta_D(v)$中除 $n \in \mathbb{N}$ 条边外的所有边。令 $\mathcal{P}'$ 由 $\mathcal{P}$ 中各路径从其位于 $\delta_D(T)$中的最后一条边开始的终止段组成。那么， $\delta_D(T)$ 中至多有 n 条边未被 $\mathcal{P}'$中的路径使用。

证明。 反设 $\delta_D(T)$ 中有超过 n 条边未被路径 $\mathcal{P}'$使用。由于紧集是可填充的（见观察3.3），我们可以将推论 3.8应用于令 T充当 U。由此得到的系统 $\mathcal{Q}$因而未能使用 $\delta_D(T)$中的所有边，这与假设 T 是 v-紧的矛盾。 □

引理 3.10. 设 $v \in V \setminus \{r\}$，且令 $e \in \delta_D(v)$ 满足 $\delta_D(v) \setminus \{e\} \in \mathcal{G}_D(v)$。那么$\delta_D(v) \notin \mathcal{G}_D(v)$ 当且仅当 e 的尾端属于 $T_{v,D-e}$。

证明。 首先假设 $u \in T_{v,D-e} =: T$，并反设 $\delta_D(v) \in \mathcal{G}_D(v)$ 由一个路径系统 $\mathcal{P}$见证。令 P_e 为$\mathcal{P}$ 中最后一条边为 e 的唯一一条路径。由于 T 在 $D - e$ 中是 v-紧的，集合 $\delta_{D-e}(T)$ 是 $\mathcal{P} \setminus \{P_e\}$ 的横截集。显然，$\delta_{D-e}(T) = \delta_D(T)$，因为 $u \in T$。由于 P_e 是一条 rv-路径，它包含一条边 $f \in \delta_D(T)$。然而，由于某条 $\mathcal{P} \setminus \{P_e\}$ 中的路径也使用了 f，系统 $\mathcal{P}$ 并非边不相交，矛盾。

反过来，假设 $\delta_D(v) \notin \mathcal{G}_D(v)$。只需证明集合 $T := \text{fill}_D(\{u, v\})$（见推论 3.2）在 $D - e$ 中是 v-紧的。反设它不是。则存在 $D - e$ 中的一个路径系统 $\mathcal{P}$，见证 $\delta_D(v) \setminus \{e\} \in \mathcal{G}_D(v)$，使得 $\delta_{D-e}(T) = \delta_D(T)$ 不是 $\mathcal{P}$ 的横截集。令 $\mathcal{P}'$ 由 $\mathcal{P}$ 中各路径从其在 $\delta_D(T)$ 中的最后一条边开始的末端段组成。根据 $\mathcal{P}$ 的选取，$\mathcal{P}'$ 中各路径的初始边构成 $\delta_D(T)$ 的真子集（见图 2）。

令 $D' = (T \cup \{r\}, E')$ 为由 D 收缩 $V \setminus T$至 r得到的辅助有向图。于是 $\mathcal{P}'$ 是由边不相交的 rv-路径组成的系统，它覆盖了 D' 除 v之外的所有入边 e。我们在 3.6 中应用引理 D' 于$\mathcal{P}'$。

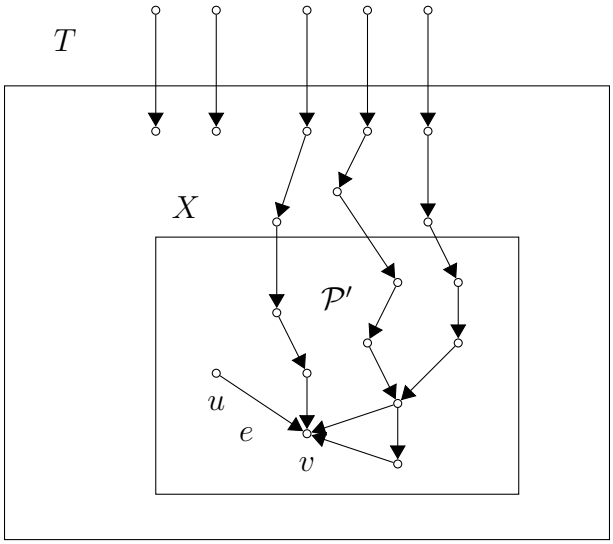

图 2. 引理 T 中的紧性3.10

若出现情形 (i)，则所得路径系统表明 $\delta_{D'}(v) \in \mathcal{G}_{D'}(v)$。因此，根据 D' 的构造以及 T的可填充性，我们得出 $\delta_D(v) \in \mathcal{G}_D(v)$，这就产生了矛盾。

设 X 与情形 (ii)相同。那么 $\delta_{D'}(X)$ 是 $\mathcal{P}'$的一个横截集。由于 $e \notin \bigcup \mathcal{P}'$，必有 $e \notin \delta_{D'}(X)$，因此 $u \in X$。路径 $\mathcal{P}'$ 中直到其首边的初始段 X 表明 X 在 D'中是可填充的。由于 $T \supseteq X$ 在 D中是可填充的，因此可知

X 在 D 中也是可填充的。最后， X 必定是 T的真子集，因为 T 中未被$\mathcal{P}'$ 使用的入边的头不可能位于 X中。这与T 是包含$\{u, v\}$的最小可填充集这一事实矛盾。

□

推论 3.11。 如果 $v \in V \setminus \{r\}$ 且 $e \in \delta_D(T_{v,\ D-e})$，那么 $T_{v,\ D-e}$ 在 D 中是可填充的（而不仅仅是在 $D - e$中）。

证明。 假设结论不成立，以导出矛盾。令 D' 为通过收缩 $T_{v,D-e} =: T$ 到 v，由 D 得到的辅助有向图。为了导出矛盾，我们将应用引理 3.10 找到一个严格更大的 v-紧集，这与$T_{v,\ D-e}$的极大性矛盾。

根据构造， $\delta_{D'-e}(v) = \delta_{D-e}(T)$。由于根据观察 3.3，$T_{v,D-e}$ 在 $D - e$ 中是可填充的，因此我们有 $\delta_{D'-e}(v) \in \mathrm{G}_{D'-e}(v)$。根据我们的假设， $\delta_{D'}(v) \notin \mathrm{G}_{D'}(v)$，因此引理 3.10 给出 $D' - e$ 中的一个 v-紧集 T'，它包含 e的尾端 u。

令 T''为 D中与 T'对应的顶点集，该顶点集是将顶点$v \in T'$扩张为集合 T所得。于是 $T'' \supsetneq T$，因为 $u \in T'' \setminus T$。为得到矛盾，我们证明 T'' 在 $D - e$中是紧的。

令 $\mathcal{P}$ 为 $D - e$ 中的一个路径系统，用于证明 $\delta_{D-e}(v) \in \mathcal{G}_{D-e}(v)$。由于 T 在 $D - e$ 中是 v-紧的，集合 $\delta_{D-e}(T) = \delta_{D'-e}(v)$ 是 $\mathcal{P}$的一个横截集。令 $\mathcal{P}'$ 由 $\mathcal{P}$ 中各路径截至其在 $\delta_{D-e}(T)$ 中的首边的初始段组成。则 $\mathcal{P}'$ 是 $D' - e$ 中的一个边不相交路径系统，用于证明 $\delta_{D'-e}(v) \in \mathcal{G}_{D'-e}(v)$。

由于 T'在 $D' - e$中是紧的，集合 $\delta_{D'-e}(T')$ 是 $\mathcal{P}'$的一个横截集。由于 $\delta_{D'-e}(T')$ $=\delta_{D-e}(T'')$，可知 $\delta_{D-e}(T'')$ 是 $\mathcal{P}$的一个横截集。因此， T''在 $D - e$中是紧的，证毕。
□

推论 3.12。 如果 $F \subseteq E$ 是一个火焰， $v \in V \setminus \{r\}$，且 $e \in E \setminus F$ 满足 $e \in \delta_D\ (T_{v,\ F})$，那么 $F \cup \{e\}$ 是一个火焰。

证明。 令 v 为 e 的头。根据推论 3.11 （应用于 $F \cup \{e\}$），集合 $T_{v,\ F}$ 在 $F \cup \{e\}$ 中是可填充的。固定一个证明这一点的路径系统 $\mathcal{P}$，并令 $\mathcal{Q}$ 为一个证明 $\delta_F(v) \in \mathcal{G}_F(v)$ 的路径系统。令 $\mathcal{Q}'$ 由 $\mathcal{Q}$ 中各路径从其在 $\delta_F(T)$ 中的最后一条边开始的终止段组成。

对于每个 $Q \in \mathcal{Q}'$，将 Q 与唯一的路径 $P_Q \in \mathcal{P}$ 合并，该路径的最后一条边是 Q 的第一条边；同时还包括唯一的路径 $P_e \in \mathcal{P}$，其最后一条边为 e。所得的路径系统证明了 $\delta_{F\cup\{e\}}(v) \in \mathcal{G}^{F\cup\{e\}}(v)$。 □

4. 定理1.2 的证明

假设 $D = (V, E)$ 是一个火焰。对于每个 $v \in V \setminus \{r\}$，令 $\mathrm{P}_v = \{P_e \colon e \in \delta_D(v)\}$ 为见证 $\delta_D(v) \in \mathrm{G}_D(v)$ 的路径系统，并令 $\mathrm{P} := \bigcup_{v\in V\setminus\{r\}} \mathrm{P}_v$。注意，对于每个 $e \in E$，P 中都有一条以 e 为最后一条边的唯一路径 $P_e \in$。如果一个集合 $F \subseteq E$ 满足 $P_e \subseteq F$ 对每个 $e \in F$ 都成立，则称其为 P-相容集合。每个 P-相容集合 F 都是一个火焰，因为对于每个 $v \in V \setminus \{r\}$，路径 $\{P_e \colon e \in \delta_F(v)\}$ 都属于 F，并见证 $\delta_F(v) \in \mathrm{G}_F(v)$。

观察 4.1。 *P*-相容火焰的 $\subseteq$-链之并仍是一个 *P*-相容火焰。

如果只有有限条边 $e \in F$满足 $P_e \not\subseteq F$，我们就称集合 $F \subseteq E$ 几乎 $\mathcal{P}$-相容 。几乎 $\mathcal{P}$-相容的集合不一定是火焰。

引理 4.2。 若 F 是一个几乎 $\mathcal{P}$-相容的火焰，且 $e \in E \setminus F$，则存在一个有限集 $\{e_i : i \leq n\} \subseteq E \setminus F$，包含 e，使得对于每个$m \leq n$， $F \cup \{e_i : i \leq m\}$ 都是一个火焰。

证明。 反设命题不成立，并设四元组 $(D, \mathcal{P}, F, e)$ 是一个反例。令 u 和 v 分别为 e 的尾端和头。定义

$$A := \{e\} \cup \{f \in \delta_F(v) : P_f \not\subseteq F\} \quad \text{and} \quad A' := \bigcup_{f \in A} P_f.$$

由于 F 几乎 $\mathcal{P}$-相容， A 是有限的，因此 A' 也是有限的。我们假设所选取的反例满足

$$n(D, \mathcal{P}, F, e) := |A' \setminus F|$$

是极小的。

要导出矛盾，只需证明存在一条边 $g \in A' \setminus F$，使得 $F \cup \{g\}$ 是一个火焰。事实上，此时必有 $g \neq e$，因为 $(D, \mathcal{P}, F, e)$ 是一个反例。此外，用 $F \cup \{g\}$ 替换 F，可得到另一个反例，其

$$n(D, \mathcal{P}, F \cup \{g\}, e) = n(D, \mathcal{P}, F, e) - 1,$$

这与 $n(D、\mathcal{P}, F, e)$ 的极小性矛盾。

由引理 3.10，集合$T_{v,F} =: T$ 包含 u。由推论 3.12，对于任意一条边$g \in \delta_D(T) \setminus F$，有向图 $F \cup \{g\}$ 是一个火焰。因此，只需证明

$$\delta_D(T) \cap (A' \setminus F) \neq \emptyset.$$

反设 $\delta_D(T) \cap (A' \setminus F) = \emptyset$。那么对每个 $f \in A$，都有$P_f \cap \delta_D(T) \subseteq F$。注意，对于 $f \in A$，集合 $P_f \cap \delta_D(T)$ 和 $= P_f \cap \delta_F(T)$ 均非空且两两不交。因此，

$$\left| \bigcup_{f \in A} P_f \cap \delta_F(T) \right| \geq |A|,$$

因此 $|\delta_F(T) \cap A'| \geq |A|$。

Let

$$\mathcal{Q} := \{P_f : f \in \delta_F(v) \setminus (A \setminus \{e\})\}.$$

一方面，$\mathcal{Q}$覆盖了 $|A|-1$条 v中除 F之外的所有入边。另一方面， $|A|$中至少有 $\delta_F(T)$ 条边未被 $\mathcal{Q}$使用， $\bigcup_{f \in A} P_f \cap \delta_F(T)$ 由这些边构成。这与推论 3.9 应用于 F 以及路径 $\mathcal{Q}$中从其位于 $\delta_F(T)$中的最后一条边开始的终止段所得的结论矛盾。 □

令 $\prec$ 为 E 上的一个良序，序型为 $|E|$。定理 1.2 中 E为可数的特殊情形，可由引理 4.2 通过直接递归得到。

确实，假设一个有限火焰

$$F_k = \{f_0, \ldots, f_m\} \subseteq E$$

已被定义。由于有限火焰显然满足 $\mathcal{P}$-条件，因此我们可以将引理 4.2 应用于 F_k 和 $\prec$-最小元素 e （属于） $E \setminus F_k$。令 $\{e_i : i \leq n\}$ 为所得集合。我们定义 $f_{m+i} := e_i$ 和

$$F_{k+1} := \{f_0, \dots, f_m, \dots, f_{m+n}\}.$$

递归已经完成，并且该枚举

$$F = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$$

给出了所需的良序。

现在假设 E 不可数，并令 $\kappa := |E|$。我们需要如下引理。

引理 4.3. *若 $F \subseteq E$ 是 $\mathcal{P}$-相容且 $e \in E \setminus F$，则存在一个集合 $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq E \setminus F$，其包含 e，使得 $F \cup \{e_n : n \leq m\}$ 对每个 $m \in \mathbb{N}$ 都是一个火焰，且 $F \cup \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 $\mathcal{P}$- 相容。*

证明。该引理通过迭代应用引理 4.2 并结合标准的“记账法”而得到。我们递归地构造一个递增链 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其由几乎 $\mathcal{P}$-相容的火焰组成，使得：

(1) $F_0 = F$; (2) $e \in F_1$; (3) $F_{n+1} \setminus F_n = \{e_1^n, \dots, e_{k_n}^n\}$ 是有限的，并且对每个 $\ell \leq k_n$，$F_n \cup \{e_1^n, \dots, e_\ell^n\}$ 都是一个火焰；(4) $F^* := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ 是 $\mathcal{P}$-相容的。

令 $\{e_1^1, \dots, e_{k_1}^1\}$ 为对 F 和 e 应用引理 4.2 得到的结果，并设 $F_1 := F_0 \cup \{e_1^1, \dots, e_{k_1}^1\}$。假设 F_n 对某个 $n \geq 1$ 有定义。若 F_n 是 P-相容的，则对所有 $m > n$，令 $F_m := F_n$，并停止。否则，存在一条边 $f_n \in F_n$，满足 $P_{f_n} \not\subseteq F_n$。选取 f_n，使得满足 $f_n \in F_{m_n+1} \setminus F_{m_n}$ 的唯一指标 m_n 最小。

应用引理 4.2 于 F_n 和一条边 $g_n \in P_{f_n} \setminus F_n$，并令 $\{e_1^n, \dots, e_{k_n}^n\}$ 为所得集合。定义 $F_{n+1} := F_n \cup \{e_1^n, \dots, e_{k_n}^n\}$。至此，递归完成。

$F^* \setminus F_0$ 的枚举通过拼接枚举 $\{e_1^n, \dots, e_{k_n}^n\}$ 得到。对于任意 $f \in F^*$，至多有 $|P_f|$ 个指标 n 满足 $f_n = f$；对于任意 $m \in \mathbb{N}$，至多有 $\left|\bigcup_{f\in F_{m+1}\setminus F_m} P_f\right|$ 个指标 n 满足 $m_n = m$。因此，递增序列 $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 无界。

设 $f \in F^*$，并令 m 满足 $f \in F_{m+1} \setminus F_m$。那么存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $m_n > m$，这意味着 $P_f \subseteq F_n \subseteq F^*$。因此，$F^*$ 是 $\mathcal{P}$-保持的，证明完毕。□

现在我们按照可数情形的做法，开始证明定理 1.2，但改用引理 4.3，而不使用引理4.2。我们应用超限递归。

在后继步骤中，假设火焰 $F_\alpha \subseteq E$ 及其 $|F_\alpha| < |E|$ 和 $<_\alpha$ 的 F_α 良序已经定义。将引理 4.3 应用于 F_α 和 $\prec$-最小元素 e （属于 $E \setminus F_\alpha$）。定义

$$F_{\alpha+1} := F_\alpha \cup \{e_n : n \in \mathbb{N}\},$$

并令 $<_{\alpha+1}$ 为 $<_\alpha$ 的端延拓，其中 $F_{\alpha+1} \setminus F_\alpha$ 的边按照其枚举顺序排列。

如果 α 是极限序数，则定义

$$F_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta$$

并令 $<_\alpha$ 为相容良序 $<_\beta$（针对 $\beta < \alpha$）的并集。至此，超限递归完成，而 $<_\kappa$ 就是所需的 E 的良序。

参考资料

[1] Thomas Böhme、Frank Göring 和 Jochen Harant。《门格尔定理》。载于：图论杂志37.1 (2001)，第 35–36 页。DOI: 10.1002/jgt.1001。[2] Gilberto Calvillo Vives。《最优分枝系统》。博士论文。滑铁卢大学，1978 年。[3] Jack Edmonds。《边不相交分枝》。载于：组合算法9 (1973)，第 91–96 页。[4] Attila Joó。《由火焰导出的贪婪拟阵》。载于：图论杂志98.1 (2021)，第 49–56 页。DOI: 10.1002/jgt.22681。[5] László Lovász。《内有向图连通性》。载于：组合理论杂志*B*辑15.2 (1973)，第 174–177 页。DOI: 10.1016/0095-8956(73)90018-X。[6] Dávid Szeszlér。《关于火焰的若干算法与结构结果》。载于：图论杂志(2025)。DOI: 10.1002/jgt.23283。

Zsuzsanna Jankó，布达佩斯科维努斯大学和罗兰大学经济与区域研究中心电子邮箱地址：zsuzsanna.janko@uni-corvinus.hu

Attila Joó，数学系，以色列理工学院，海法，以色列 32000

Attila Joó，数学系，汉堡大学，联邦大道55号（地理信息中心），20146 汉堡，德国电子邮箱地址：a.joo@technion.ac.il