# 一个 零-检验 D -代数的超幂级数*

作者：SHAOSHI CHENabC、HANQIAN FANGad、J ORIS VAN DER HOEVENefG a. KLMM，数学与系统科学研究院，中国科学院，北京 100190，中国 e. LIX，法国国家科学研究中心，巴黎综合理工学院，艾伦·图灵大楼，CS35003，奥诺雷·德斯蒂安·多尔夫街 1 号，91120 帕莱索，法国 b. 电子邮箱：schen@amss.ac.cn d. 电子邮箱：fanghanqian22@mails.ucas.ac.cn f. 电子邮箱：vdhoeven@lix.polytechnique.fr

草稿 版本 日期：*2026* 年 *2* 月 *1* 日

**摘要**

考虑形式幂级数 $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{Q}[[z]]$，它们被定义为某个多项式微分方程组在足够多初始条件下的解。给定 $P \in \mathbb{Q}[F_1,\ldots,F_k]$，已有若干算法可用于检验 $P(f_1,\ldots,f_k) = 0$是否成立。本文针对 $f_1, \ldots, f_k$ 为所谓超幂级数而非幂级数的情形，提出了这样一种算法。

**关键词：**D-代数超幂级数，零-检验，超幂级数，算法，解美。**数。会分类主题分类：**68W30，34A09，34A12

## 1 引言

许多特殊函数都有标准的数学记号，例如 $\exp, \log, \sin, \operatorname{erf}, \operatorname{Si}, \wp, \zeta$ 等等。但如何判断像 $e^{x+y} - e^x e^y$ 这样的表达式实际上是否表示零函数?

一种常见方法是借助微分代数 [25, 20, 2], ，将 exp 定义为方程 $f' = f$ 的符号解。然而，这只能将 exp定义到一个乘法常数的程度，因此不足以得出 $e^{x+y} = e^x e^y$。

另一种方法是将 $f = \exp$ 定义为满足 $f' = f$ 且 $f(0) = 1$的唯一解。将注意力限制在 D-代数幂级数上，可以使这一点更加精确。设 $\mathbb{K}$ 为一个可计算域。若 $f \in \mathbb{K}[[z]]$ 满足方程 $P(f, f', \ldots, f^{(r)}) = 0$，其中 $P \in \mathbb{K}[F, F', \ldots, F^{(r)}] \setminus \mathbb{K}$是某个微分多项式，则称 f 是 D-代数的。在这种情况下，通过 P 和足够多的初始条件实际上可以唯一确定 f。给定 D-代数幂级数 $f_1, \ldots, f_k$ 以及关于 $F_1, \ldots, F_k$的微分多项式 Q，零测试问题就归结为判断 $Q(f_1, \ldots, f_k) = 0$是否成立。针对这一问题，人们已经提出了许多解法 [24, 5, 6, 19, 26, 27, 22, 17, 15]；关于现有方法的简要概述，请参见 [12]。

C. S. Chen 和 H. Fang 的部分研究工作获得了中国国家重点研发计划（项目编号 2023YFA1009401）、国家自然科学基金委员会资助项目（项目编号 12271511）以及中国科学院战略性先导科技专项（项目编号 XDB05102）的支持。所有作者还获得了中国科学院国际合作伙伴计划（项目编号 167GJHZ2023001FN）的支持。G. J. van der Hoeven 获得 ERC-2023-ADG 资助，用于 ODELIX 项目（项目编号 101142171）。

*. 这 篇文章 已被 撰写，采用 GNU TEXMACS [16]。

然而，普通幂级数存在一个问题：它们不构成一个域。所谓超幂级数是幂级数的一种广义推广，通过在 $\mathbb{K}[[z]]$上闭合求幂、对数和无穷求和 [4, 8, 7, 14]而得到。一个在无穷远处（$x \to \infty$）的超幂级数示例如下：

$$e^{e^x+\frac{e^x}{x}+\frac{e^x}{x^2}+\cdots}+3e^{x\log x}+\sqrt{2}+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{6}{x^3}+\frac{24}{x^4}+\cdots. \tag{1}$$

实系数超幂级数构成一个域 $\mathbb{T}$，它在求导、复合以及许多微分方程的求解下封闭。若存在某个 $P\in\mathbb{K}[F, F',..., F^{(r)}]\setminus\mathbb{K}$，使得 $P(f, f',..., f^{(r)})=0$，则称超幂级数 $f$ 也是 D-代数的。例如，超幂级数 (1) 是 D-代数的。

给定 D-代数超幂级数 $f1, \dots, f_k$ 以及关于 $F1, \dots, F_k$的微分多项式 $Q$，我们的主要结果是给出一种算法，用于判定 $Q(f1, \dots, f_k)=0$是否成立。事实上，我们将此问题归约到 $k=1$的情形，同时将其推广到如下情形：$Q$ 的系数以及满足 $P(f_1)=0$的微分多项式 $P$ 的系数取自 $\mathbb{T}$ 的一个有效微分子域，并且我们已知该域上的一个零测试。

本文相当一部分篇幅用于回顾 [14, 11, 1] 中关于超幂级数的必要理论结果。从有效计算的角度来看，关于所谓超基 $(\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n)$ $\mathfrak{b}_n^{-1}$

进行超幂级数运算最为方便。这使我们能够将一般超幂级数视为具有实指数的幂级数，其系数还可以相对于超基 $(\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_{n-1})$ 递归展开。例如，对于 $x\to\infty$，超幂级数 $1/(1-x^{-1}-e^x)$ 是关于 $e^{-x}$ 的级数，其系数属于 $\mathbb{R}[[x^{-1}]]$。在综述的同时，我们还提出了一个精确的框架，其思路与 [23, 10] 十分相近。

完成必要的准备工作后，我们的主算法最终成为 [15] 中针对形式幂级数的零测试的自然扩展。利用 [11], 中的一个定理，我们还能够进一步收紧所需展开阶数的界。作为算法的示例，我们首先将朗伯函数定义为某个适当渐近微分方程的唯一超幂级数解，然后验证它满足方程 $W(x)e^{W(x)}=x$。

# 2 广义幂级数

## 2.1 基于网格的级数

设 $\Gamma$ 为一个全序阿贝尔群。子集 $S\subseteq\Gamma$ 称为基于网格的，如果存在 $\alpha_1$，.....，$\alpha_k\in\Gamma^{>}:=\{\gamma\in\Gamma:\gamma>0\}$ 以及 $\beta\in\Gamma$，使得

$$S \subseteq \mathbb{N}\alpha_1+\cdots+\mathbb{N}\alpha_k+\beta := \{i_1\alpha_1+\cdots+i_k\alpha_k+\beta : i_1,\dots,i_k\in\mathbb{N}\}.$$

给定一个域 $\mathbb{K}$，考虑形式幂级数 $f=\sum_{\alpha\in\Gamma}f_\alpha z^\alpha$，其中 $f_\alpha\in\mathbb{K}$，且支撑集 $\operatorname{supp} f := \{\alpha\in\mathbb{R}: f_\alpha\neq 0\}$ 是基于网格的。此时称 $f$ 为网格型幂级数（系数属于 $\mathbb{K}$，指数属于 $\Gamma$），并将此类级数的集合记为 $\mathbb{K}[[z^\Gamma]]_{gb}$，或简记为 $\mathbb{K}[[z^\Gamma]]$。

在 [14, 第2.2] 节中证明，$\mathbb{K}[[z^\Gamma]]$ 构成一个域。事实上，对于由 $v(f):=\min\operatorname{supp} f$（以及 $v(0):=+\infty$）所定义的赋值 $v:\mathbb{K}[[z^\Gamma]]\longrightarrow\Gamma\cup\{+\infty\}$，它构成一个赋值域。若 $f\in\mathbb{K}[[z^\Gamma]]$ 非零，则称 $z^{v(f)}$ 为 $f$ 的主导单项式。若 $\mathbb{K}$ 为有序域，则通过规定 $f>0\Longleftrightarrow f_{v(f)}>0$，$\mathbb{K}[[z^\Gamma]]$亦为有序域。此时，我们用 $\mathbb{K}[[z^\Gamma]]^{>}$表示严格正元素所成的子集。

例1. 设函数 $f=1/(1-z-z^\pi)\in\mathbb{Q}[[z^{\mathbb{R}}]]$ 满足 $\operatorname{supp} f=\mathbb{N}+\pi\mathbb{N}$.

例2. 若 $x:=1/z$ 是一个“形式上无限大的变量”，则定义：$x^{-\Gamma}:=z^{\Gamma}$ 以及 $\mathbb{K}[[x^{-\Gamma}]]:=\mathbb{K}[[z^{\Gamma}]]$。

## 2.2 迭代级数

给定变量 $z_1$，。。。。，$z_n$ 和 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\Gamma^n$，令 $z^{\alpha}:=z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}$。我们按照阶 $\Gamma^n$ 反-字典序通过

$$\alpha\leqslant\beta \iff \alpha_n<\beta_n \vee (\alpha_n=\beta_n\wedge\alpha_{n-1}<\beta_{n-1}) \vee \cdots \vee (\alpha_n=\beta_n\wedge\cdots\wedge\alpha_1=\beta_1)$$

并定义由 $\mathbb{K}[[\mathrm{z}_1^{\Gamma};\dots;\mathrm{z}_n^{\Gamma}]]:=\mathbb{K}[[\mathrm{z}^{\Gamma^n}]]$ 构成的 $\mathrm{z1},\dots,\mathrm{z}_n$ 中基于网格的迭代级数域。我们注意到 $\mathbb{K}[[\mathrm{z}_1^{\Gamma};\dots;\mathrm{z}_n^{\Gamma}]]\subseteq\mathbb{K}[[\mathrm{z}_1^{\Gamma}]]\cdots[[\mathrm{z}_n^{\Gamma}]]$，并且只要 $\mathrm{n}>1$，这一包含关系就是严格的：例如，$\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{z}_1^{-n^2}\mathrm{z}_2\in\mathbb{K}[[\mathrm{z}_1^{\mathbb{R}}]][[\mathrm{z}_2^{\mathbb{R}}]]\setminus\mathbb{K}[[\mathrm{z}_1^{\mathbb{R}};\mathrm{z}_2^{\mathbb{R}}]]$。另请注意，$\mathrm{f}=1/(\mathrm{z}_1+\mathrm{z}_2)\in\mathbb{K}[[\mathrm{z}_1^{\mathbb{R}};\mathrm{z}_2^{\mathbb{R}}]]$，其中 $\operatorname{supp}\mathrm{f}=\mathbb{N}(-1,1)+(-1,0)$。

我们有时会考虑级数 $\mathrm{f}=\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}\mathrm{f}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}\mathrm{z}_1^{\alpha_1}\cdots\mathrm{z}_n^{\alpha_n}$ in $\mathbb{K}[[\mathrm{z}_1^{\Gamma};\dots;\mathrm{z}_n^{\Gamma}]]$，并同时关于所有变量 $\mathrm{z1},\dots,\mathrm{z}_n$ 展开，记其赋值为 $\mathrm{v}_z(\mathrm{f})\in\Gamma^n\cup\{+\infty\}$。另一些时候，我们将 $\mathrm{f}=\sum_{\alpha_n\in\Gamma}\mathrm{f}_{\alpha_n}\mathrm{z}_n^{\alpha_n}$ 展开为 $\mathrm{z}_n$ 的级数，其系数为 $\mathrm{f}_{\alpha_n}\in\mathbb{K}[[\mathrm{z}_1^{\Gamma};\dots;\mathrm{z}_{n-1}^{\Gamma}]]$，并记其关于 $\mathrm{z}_n$ 的赋值为 $\mathrm{v}_{z_n}(\mathrm{f})\in\Gamma\cup\{+\infty\}$。

## 2.3 渐近关系与该典范分解的一个级数

给定 $f,\ g\in\mathbb{K}[[z^{\Gamma}]]$，我们将采用以下传统的渐近记号：

$$\begin{aligned} f &= O(g) \iff f \preccurlyeq g \iff v(f)\geqslant v(g)\\ f &= o(g) \iff f \prec g \iff v(f)>v(g)\\ &\qquad\quad f\asymp g \iff v(f)=v(g)\\ &\qquad\quad f\sim g \iff v(f-g)>v(g). \end{aligned}$$

对于值群（或无穷大）中的元素 $\gamma,\eta\in\Gamma\cup\{+\infty\}$，若存在某个整数 $\mathrm{n}\geqslant 1$ 使得 $\gamma=\mathrm{O}(\eta)$ if $|\gamma|\leqslant\mathrm{n}|\eta|$，我们也这样记；若对所有整数 $\mathrm{n}\geqslant 1$ 都有 $\gamma=\mathrm{o}(\eta)$ if $\mathrm{n}|\gamma|<|\eta|$，我们也这样记。以下渐近关系也很有用：

$$\begin{aligned} f &\preccurlyeq g \iff v(f) = O(v(g))\\ f &\prec g \iff v(f) = o(v(g)). \end{aligned}$$

任意网格-基级数 $f\in\mathbb{K}[[z^{\Gamma}]]$ 都有一个唯一的规范分解

$$f = f_{\succ}+f_{\asymp}+f_{\prec},$$

其中 $\mathrm{f}_{\succ}:=\sum_{\alpha<0}\mathrm{f}_{\alpha}\mathrm{z}^{\alpha}$，$\mathrm{f}_{\asymp}:=\mathrm{f}_0$，且 $\mathrm{f}_{\prec}:=\sum_{\alpha>0}\mathrm{f}_{\alpha}\mathrm{z}^{\alpha}$。我们定义 $\mathbb{K}[[\mathrm{z}^{\Gamma}]]_{\succ}:=\{\mathrm{f}\in\mathbb{K}[[\mathrm{z}^{\Gamma}]]:\mathrm{f}=\mathrm{f}_{\succ}\}$ 以及 $\mathbb{K}[[\mathrm{z}^{\Gamma}]]_{\prec}:=\{\mathrm{f}\in\mathbb{K}[[\mathrm{z}^{\Gamma}]]:\mathrm{f}=\mathrm{f}_{\prec}\}$。

## 2.4 可计算级数

如果一个域 $\mathbb{K}$ 具有域运算和零检验的算法，就称它是有效的。如果一个有序域还具有关于序的算法，则称它是有效的。假设 $\mathbb{K}$ 是有效的，并且 $\mathscr{R}$ 是 $\mathbb{R}$ 的有效有序子域。

我们递归地将系数属于 $\mathbb{K}$、指数属于 $\mathscr{R}$ 的惰性幂级数定义为一个不接受输入的算法 f：它要么产生零，要么产生一个对 $(\mathrm{c}\ \alpha)\ \mathrm{f}^{\sharp}$，其中 $\mathrm{c}\in\mathbb{K}$ 且 $\alpha\in\mathscr{R}$，以及另一个惰性幂级数 $\mathrm{f}^{\flat}$。对 $(\mathrm{c}\ \alpha)$ 实际上表示一项 $\mathrm{c}\,\mathrm{z}^{\alpha}$，后文我们将采用后一种记法。记作 $\mathrm{c}_0\mathrm{z}^{\alpha_0}:=\mathrm{f}^{\sharp}$、$\mathrm{c}_1\mathrm{z}^{\alpha_1}:=(\mathrm{f}^{\flat})^{\sharp}$、$\mathrm{c}_2\mathrm{z}^{\alpha_2}:=((\mathrm{f}^{\flat})^{\flat})^{\sharp}$、.....，其中每当 $((\mathrm{f}^{\flat})\cdots)^{\flat}$ 产生零时序列即停止；我们允许系数 $\mathrm{c}_i$ 为零，但要求 $\{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots\}$ 是 $\mathscr{R}$ 的基于网格的子集。因此，我们可以将 f 视为一个基于网格的级数 $\mathrm{f}=\mathrm{c}_0\mathrm{z}^{\alpha_0}+\mathrm{c}_1\mathrm{z}^{\alpha_1}+\mathrm{c}_2\mathrm{z}^{\alpha_2}+\cdots\in\mathbb{K}[[\mathrm{z}^{\mathscr{R}}]]$。反之，若级数 $\mathrm{f}\in\mathbb{K}[[\mathrm{z}^{\mathscr{R}}]]$ 可以作为惰性幂级数计算，则称其为可计算的。我们用 $\mathbb{K}[[\mathrm{z}^{\mathscr{R}}]]^{\mathrm{com}}$ 表示此类级数的集合。

事实上， $\mathbb{K}[[z^{\mathscr{R}}]]^{\mathrm{com}}$ 构成一个域，而惰惰方法使我们能够以如下优雅方式实现环运算：给定 $(c\ \lambda)\in\mathbb{K}\times\mathscr{R}$ 以及非零的 f、g $\in\mathbb{K}[[z^{\mathscr{R}}]]^{\mathrm{com}}$，其中 $f^{\sharp}=a\,z^{\alpha}$ 且 $g^{\sharp}=bz^{\beta}$，我们令

$$\begin{aligned}((f\pm g)^{\sharp},(f\pm g)^{\flat}) &:= \begin{cases}((a\pm b)z^{\alpha},f^{\flat}\pm g^{\flat}) & \text{if } \alpha=\beta\\ (az^{\alpha},f^{\flat}\pm g) & \text{if } \alpha<\beta\\ (bz^{\beta},f\pm g^{\flat}) & \text{if } \alpha>\beta\end{cases}\\ (((cz^{\lambda})f)^{\sharp},((cz^{\lambda})f)^{\flat}) &:= (caz^{\alpha+\lambda},(cz^{\lambda})f^{\flat})\\ ((fg)^{\sharp},(fg)^{\flat}) &:= (abz^{\alpha+\beta},(az^{\alpha})g^{\flat}+f^{\flat}g)\end{aligned}$$

我们也取$f\pm 0:=f$、$0-f:=(-1)f$、等等。假设 $v(g)>0$，我们按以下方式 $1-g$ 进行求逆

$$\left(\left(\frac{1}{1-g}\right)^{\sharp},\left(\frac{1}{1-g}\right)^{\flat}\right)=\left(1,g\frac{1}{1-g}\right).$$

由于任意非零的 $f\in\mathbb{K}[[z^{\mathscr{R}}]]^{\mathrm{com}}$ 都可写成 $f=c\,z^{\alpha}(1-g)$，其中 $c\in\mathbb{K}^{\neq},\alpha\in\mathscr{R}$，且 $g\in\mathbb{K}[[z^{\mathscr{R}}]]^{\mathrm{com}}$ 满足 $v(g)>0$，因此我们可以将 $f^{-1}$ 计算为 $c^{-1}z^{-\alpha}\frac{1}{1-}g$。——

惰惰方法 在 仅需少量 项时非常方便。 对于高阶展开式，松弛（或在线）方法更(高效，而且不容易产生∞项 [13]。

## 2.5 可计算迭代级数

现在假设 $\mathbb{K}$ 是一个可计算域，且 $\mathscr{R}$ 是 $\mathbb{R}$的一个有效有序子域。对于 $\mathbb{K}[[z_1^{\mathscr{R}};\ldots;z_n^{\mathscr{R}}]]=\mathbb{K}[[z^{\mathscr{R}^n}]]$中的迭代级数，惰惰方法会引发无穷消去问题：假设我们希望减去

$$\frac{1}{1-z_1-z_2}-\frac{1}{1-z_1}\tag{2}$$

使用惰惰方法。于是结果的相继各项为 $(1-1)z10,(1-1)z\frac{1}{1}(1-1)z12,\ldots$. 由于这种无限抵消，我们始终无法到达结果的第一项 $z_2$。

为了绕过这一困难，假设给定 $\mathbb{K}[[z_1^{\mathscr{R}};\ldots;z_n^{\mathscr{R}}]]$ 的一个有效子域 $\mathscr{F}$，使得 $\mathbb{K}\cup\{z^{\alpha}:\alpha\in\mathscr{R}^n\}\subseteq\mathscr{F}$。若对任意满足 $1\leqslant k\leqslant n$ 的 $f\in\mathscr{F}\cap\mathbb{K}[[z_1^{\mathscr{R}};\ldots;z_k^{\mathscr{R}}]]$，当把 $f=\sum_{\alpha\in\mathscr{R}}f_{\alpha}z_k^{\alpha}$ 视为 $\mathbb{K}[[z_1^{\mathscr{R}};\ldots;z_{k-1}^{\mathscr{R}}]][[z_k^{\mathscr{R}}]]$ 中的级数时，对所有 $\alpha\in\mathscr{R}$ 都有 $f_{\alpha}\in\mathscr{F}$，并且 $f\in\mathscr{F}[[z_k^{\mathscr{R}}]]^{\mathrm{com}}$，则我们称 $\mathscr{F}$ 为环境域。

在 示例（2）中，我们可以随后取 $\mathscr{F}:=\mathbb{K}(z_1,z_2)$，然后对其作关于z的展开$_2$得到

$$\frac{1}{1-z_1-z_2}-\frac{1}{1-z_1}=\left(\frac{1}{1-z_1}-\frac{1}{1-z_1}\right)+\frac{z_2}{(1-z_1)^2}+\frac{z_2^2}{(1-z_1)^3}+\cdots$$

并且系数 $\frac{1}{1-}z_1-\frac{1}{1-}z1$、$\frac{1}{(1-}z_1)^2$、$\frac{1}{(1-}z_1)^3$、.....全都属于 $\mathscr{F}$。特别地，我们可以使用 $\mathscr{F}$ 中的零检验来检测第一项中的无限抵消。

## 2.6 超越基于-网格的级数

本文采用基于网格的级数框架，以便使用 [14] 中的一些结果。然而，本书和本文中的结果经过必要的修改后，也可以适用于所谓的稳态级数。

我们称 $\mathbb{R}$ 的子集 S 为稳态的，若 S 是有限集，或者 $S=\{\alpha_0,\alpha_1,\ldots\}$，且满足 $\alpha_0<\alpha_1<\cdots$ 和 $\lim_{i\to\infty}\alpha_i=+\infty$。Levi-Civita [21] 已证明，具有稳态支撑集的级数 $\mathbb{K}[[z^{\mathbb{R}}]]_{\mathrm{st}}$，即 $f=\sum_{\alpha\in\mathbb{R}}f_{\alpha}z^{\alpha}$，构成一个域。一个非基于网格的稳态级数 f 的例子是 $f=\zeta(-\log z)=\sum_{n\geqslant 1}z^{\log n}$。

迭代稳态级数的域就是 $\mathbb{K}[[z_1^{\mathbb{R}};\ldots;z_n^{\mathbb{R}}]]_{\mathrm{st}} := \mathbb{K}[[z_1^{\mathbb{R}}]]_{\mathrm{st}}\cdots[[z_n^{\mathbb{R}}]]_{\mathrm{st}}$。事实上，对于本文而言，稳态级数的框架会稍好一些，因为它是惰性幂级数展开最自然的背景。此外，我们已经看到，$\mathbb{K}[[z_1^{\mathbb{R}}]]_{\mathrm{gb}}\cdots[[z_n^{\mathbb{R}}]]_{\mathrm{gb}}$ 中的级数不一定是基于网格的，因此有时需要付出额外努力来证明这一点——当然，前提是它确实如此。

更一般地，Hahn 证明了具有良序支撑集的级数集合 $\mathbb{K}[[z^{\Gamma}]]_{\mathrm{wo}}$（即 $f=\sum_{\alpha\in\Gamma} f_\alpha z^\alpha$）也构成一个域。在这种情形下，自然有 $\mathbb{K}[[z^{\mathbb{R}^n}]]_{\mathrm{wo}} = \mathbb{K}[[z_1^{\mathbb{R}}]]_{\mathrm{wo}}\cdots[[z_n^{\mathbb{R}}]]_{\mathrm{wo}}$。一个不稳定的良序级数例子是 $f := z^{-1}+z^{-1/2}+z^{-1/4}+\cdots$，它是方程 $f(z)=z^{-1}+f(z^{1/2})$ 的一个自然解。然而，从算法视角看，这类级数更成问题，因为 $g(z):=f(z)/(1-z)$ 的支撑集序型是 $\omega^2$。特别是，像 $g(z)-f(z)$ 这样的表达式会像式 (2) 中那样导致无穷消去，却没有简单的解决办法；另见 [9]。

# 3 超幂级数

## 3.1 超基

设 $x$ 是一个形式变量，我们认为它是一个无穷大量。给定 $l\in\mathbb{N}$ $\log_\ell :=$，令表示 l重迭对数。超基 $\mathfrak{B}=(\mathfrak{b}_1,\ldots,\mathfrak{b}_n)$ $\log\circ\overset{\ell\times}{\cdots}\circ\log$ 是一个元组，具有以下性质：

**TB1.** $\mathfrak{b}_1=\log_\ell x$ 对某个 $l\in\mathbb{N}$。**TB2.** $\mathfrak{b}_i\in\exp\mathbb{R}[[\mathfrak{b}_1^{-\mathbb{R}};\ldots;\mathfrak{b}_{i-1}^{-\mathbb{R}}]]_{>}$ 对 $i=2$，。。。，$n$。**TB3.** $\log\mathfrak{b}_2\prec\cdots\prec\log\mathfrak{b}_n$。

在 **TB2**中，我们理解为 $\exp\mathbb{R}[[\mathfrak{b}_1^{-\mathbb{R}};\ldots;\mathfrak{b}_{i-1}^{-\mathbb{R}}]]_{>}$ 由形式指数函数构成的乘法群，其中 $e^{\varphi}$ 满足 $\varphi\in\mathbb{R}[[\mathfrak{b}_1^{-\mathbb{R}};\ldots;\mathfrak{b}_{i-1}^{-\mathbb{R}}]]_{>}$ 且 $\varphi>0$。相应地，在 **TB3**中，我们将写作 $\log\mathfrak{b}_i$，表示具有的级数 $\varphi_i$，满足 $\mathfrak{b}_i=e^{\varphi_i}$。

我们可以随时在其中插入更多迭代对数，$\mathfrak{B}$ 只要有需要。更ˆ准确地说，由组成的元组 $\mathfrak{B}:=(\mathfrak{b}_0,\mathfrak{b}_1,\ldots,\mathfrak{b}_n)$ 与 $\mathfrak{b}_0:=\log_{\ell+1}x$ 构成的仍然是一个超基。在扩张 $\mathbb{R}[[\mathfrak{b}_0^{-\mathbb{R}};\mathfrak{b}_1^{-\mathbb{R}};\ldots;\mathfrak{b}_{n-1}^{-\mathbb{R}}]]_{>}$ 中，**TB3**可以被加强为

$$1 \prec \log\mathfrak{b}_1 \prec \cdots \prec \log\mathfrak{b}_n. \tag{3}$$

例3。元组 $\mathfrak{B}=(\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_3,\mathfrak{b}_4):=\big(\log x, x, x^x, e^{x^3+x^2+x}\big)$ 构成一个超基，因为 $x=e^{\log x}$、$x^x=e^{x\log x}$ 与 $x\log x\in\mathbb{R}[[(\log x)^{-\mathbb{R}};x^{-\mathbb{R}}]]_{>}$，且 $x^3+x^2+x\in\mathbb{R}[[(\log x)^{-\mathbb{R}};x^{-\mathbb{R}};x^{-x^{\mathbb{R}}}]]_{>}$。

注4。设 $N\geqslant 1$ 是一个正整数。那么

$$\exp\frac{x^N}{1-x^{-1}} = e^{x^N+\cdots+x}e^{\frac{1}{1-x^{-1}}} \in \mathbb{R}\Big[\Big[x^{-\mathbb{R}};e^{-(x^N+x^{N-1}+\cdots+x)^{\mathbb{R}}}\Big]\Big],$$

其中 $\big(x, e^{x^N+x^{N-1}+\cdots+x}\big)$ 是一个超基。如果 N 很大，那么表达式 $x^N+\cdots+x$ 会变得非常大，这并不方便。还有各种其他类型的超基，可以直接将 $\exp x-x^{-1}$ 纳入超基，而不是 $e^{x^N+x^{N-1}+\cdots+x}$。本文将忽略这类“优化”，关于替代定义的更多细节，请参见 [14, 第 4 节。4]

### 3.2 格-基超幂级数

基于网格的超幂级数是 $\mathbb{R}[[\mathfrak{b}_1^{-\mathbb{R}};\ldots;\mathfrak{b}_n^{-\mathbb{R}}]]$ 中某个超基 $\mathfrak{B}=(\mathfrak{b}_1,\ldots,\mathfrak{b}_n)$ 所对应的一个元素。事实证明，基于网格的超幂级数构成一个域 $\mathbb{T}$（当改变 $\mathfrak{B}$ 时，需作自然的同一化）。这并不能从我们依赖于底层超基 $\mathfrak{B}$ 的“定义”中直接看出。通常，人们会先以更具概念性的方式定义超幂级数域 $\mathbb{T}$，然后证明任意超幂级数都可以相对于某个超基展开：参见 [14, 第 4 章和第 4 节。4]。不过，在本文中，我们始终通过超基来处理超幂级数，因此，我们这种更具计算性的“定义”会更加直接、方便。

格-基 超幂级数 最初由 Écalle 提出 于Écalle 在 [7]。 关于 构造 具有良序支撑集的超幂级数 域 ，请参阅附录 A 或 [1, ] 。 [4, 10]

### 3.3 超幂级数的求导

考虑一个超基 $\mathfrak{B}=(\mathfrak{b}_1,\ldots,\mathfrak{b}_n)$，其上有 $\mathfrak{b}_1=\log_\ell \mathrm{x}$。于是，我们在 $\mathbb{R}[[\mathfrak{b}_1^{-\mathbb{R}}]]$ 上有自然的导子 $\delta_1:=\mathrm{x}\,\log\mathrm{x}\cdots\log_\ell\mathrm{x}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}$，其中对于所有 $\mathrm{f}\in\mathbb{R}[[\mathfrak{b}_1^{-\mathbb{R}}]]$，均有 $\delta_1\mathrm{f}=-\sum_{\alpha\in\mathbb{R}}\alpha\mathrm{f}_\alpha\mathfrak{b}_1^{-\alpha}$。通过对 n 归纳，这个导子可扩张到 $\mathbb{B}:=\mathbb{R}[[\mathfrak{b}_1^{-\mathbb{R}};\ldots;\mathfrak{b}_n^{-\mathbb{R}}]]$：假设我们已在 $\mathbb{R}[[\mathfrak{b}_1^{-\mathbb{R}};\ldots;\mathfrak{b}_{n-1}^{-\mathbb{R}}]]$ 上定义了$\delta_1$，特别地，我们可以计算 $\delta_1\mathfrak{b}_n/\mathfrak{b}_n:=\delta_1\log\mathfrak{b}_n\in\mathbb{R}[[\mathfrak{b}_1^{-\mathbb{R}};\ldots;\mathfrak{b}_{n-1}^{-\mathbb{R}}]]$。现在给定 $\mathrm{f}=\sum_{\alpha\in\mathbb{R}}\mathrm{f}_\alpha\mathfrak{b}_n^{-\alpha}\in\mathbb{R}[[\mathfrak{b}_1^{-\mathbb{R}};\ldots;\mathfrak{b}_{n-1}^{-\mathbb{R}}]][[\mathfrak{b}_n^{-\mathbb{R}}]]$，我们取

$$\delta_1 f:=\sum_{\alpha\in\mathbb{R}}\left(\delta_1 f_\alpha-\alpha\frac{\delta_1\mathfrak{b}_n}{\mathfrak{b}_n}f_\alpha\right)\mathfrak{b}_n^{-\alpha}\in\mathbb{R}[[\mathfrak{b}_1^{-\mathbb{R}};\ldots;\mathfrak{b}_{n-1}^{-\mathbb{R}}]][[\mathfrak{b}_n^{-\mathbb{R}}]].$$

若$f\in\mathbb{R}[[\mathfrak{b}_1^{-\mathbb{R}};\ldots;\mathfrak{b}_n^{-\mathbb{R}}]]$，则可以证明，有$f\in\mathbb{R}[[\mathfrak{b}_1^{-\mathbb{R}};\ldots;\mathfrak{b}_n^{-\mathbb{R}}]]$。这是由于以下事实：对于适当的无限求和概念，我们有

$$\delta_1 f=-\sum_{\alpha\in\mathbb{R}^n}f_\alpha\left(\alpha_1\frac{\delta_1\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{b}_1}+\cdots+\alpha_n\frac{\delta_1\mathfrak{b}_n}{\mathfrak{b}_n}\right)\mathfrak{b}_1^{-\alpha_1}\cdots\mathfrak{b}_n^{-\alpha_n},\tag{4}$$

其中 $\operatorname{supp}\delta_1 f\subseteq\operatorname{supp}f+\operatorname{supp}\frac{\delta_1\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{b}_1}+\cdots+\operatorname{supp}\frac{\delta_1\mathfrak{b}_n}{\mathfrak{b}_n}$。详情请参见第2.4 [14, 节和第5节1]。

假设 $\log_\ell \mathrm{x}\ \log_{\ell-1}\mathrm{x}\ldots,\mathrm{x}$ 都属于 $\mathfrak{B}$，则 $\mathbb{B}$ 对于 x 的通常的微分也封闭。此外，对于 $\mathrm{i}=2,\ldots,\mathrm{n}$，我们有导子 $\delta_i:=(\mathfrak{b}_i/\delta_1\mathfrak{b}_i)\,\delta_1$，其中 $\delta_i\mathfrak{b}_i=\mathfrak{b}_i$。给定 $\mathrm{f}、\mathrm{g}\in\mathbb{B}$，在 [14, 第 5 节1]中证明了

$$f\prec g\wedge g\neq 1\Longrightarrow\delta_i f\prec\delta_i g.\tag{5}$$

将其应用于方程(3)，可得

$$\frac{\delta_i\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{b}_1}\prec\cdots\prec\frac{\delta_i\mathfrak{b}_n}{\mathfrak{b}_n}.\tag{6}$$

给定 $\mathrm{f}\in\mathbb{R}[[\mathfrak{b}_1^{-\mathbb{R}};\ldots;\mathfrak{b}_n^{-\mathbb{R}}]]$，公式（4）蕴含 $\mathrm{v}_n(\delta_i\mathrm{f})=\mathrm{v}_n(\delta_1\mathrm{f})\geqslant\mathrm{v}_n(\mathrm{f})$，因为 $\mathrm{v}_n(\mathfrak{b}_i/\delta_1\mathfrak{b}_i)=0$。对任意 $\mathrm{r}\in\mathbb{N}$，由此可得 $\mathrm{v}_n(\delta_i^r\mathrm{f})\geqslant\mathrm{v}_n(\mathrm{f})$。若 f 具有主导单项式$\mathfrak{b}_1^{-\alpha_1}\cdots\mathfrak{b}_m^{-\alpha_m}$且 $\alpha_m>0$，则这还给出 $\mathrm{v}_m(\delta_i\mathrm{f})>0$，从而 $\delta_i\mathrm{f}\prec 1$。对所有 $\mathrm{r}、\mathrm{k}\in\mathbb{N}$，我们由此得到

$$f\prec 1\Longrightarrow(\delta_i^r f)^k\prec 1.\tag{7}$$

### 3.4 可计算的超幂级数

设 $\mathscr{R}$ 为 $\mathbb{R}$ 的有效有序子域，并设 $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{R}[[\mathfrak{b}_1^{-\mathscr{R}}; \ldots; \mathfrak{b}_n^{-\mathscr{R}}]]$ 为一个环境域。若 $\log \mathfrak{b}_2, \ldots, \log \mathfrak{b}_n \in \mathscr{F}$ 且 $\mathscr{F}$ 在 $\delta_1$ 下有效封闭，则称 $\mathscr{F}$ 为微分环境域。求导可以以惰性方式实现：给定非零 $\mathrm{f} \in \mathscr{F} \cap \mathscr{R}[[\mathfrak{b}_1^{-\mathscr{R}}; \ldots; \mathfrak{b}_k^{-\mathscr{R}}]]$，其中 $\mathrm{f}^{\sharp} = \mathrm{a}\, \mathfrak{b}_k^{-\alpha}$（当将其视为 $\mathfrak{b}_k^{-1}$中的惰性级数时），我们可以取

$$((\delta_k f)^{\sharp}, (\delta_k f)^{\flat}) = ((\delta_k a - \alpha a)\, \mathfrak{b}_k^{-\alpha}, \delta_k f^{\flat}),$$

其中 $\delta_k a = 0$当 $k = 1$且 $\delta_k a$能够被递归地展开为 $(\mathfrak{b}_k / \delta_{k-1}\, \mathfrak{b}_k)\, \delta_{k-1} a$相对于 $\mathfrak{b}_{k-1}^{-1}$当 $k > 1$。

ˆ我们已经指出， $\mathfrak{B} := (\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n)$ 是 $\mathfrak{b}_0 := \log \mathfrak{b}_1$的一个超基。此外， $\mathscr{F}$ˆ $:= \mathscr{F}(\mathfrak{b}_0^{-\mathscr{R}})$ 又是 $\delta_0 := \mathfrak{b}_0 \delta_1$的一个微分环境域。事实上， $\mathscr{F} \cup \mathfrak{b}_0^{-\mathscr{R}} \subseteq \mathscr{F}$ˆ以及域运算的惰性算法，使我们能够计算由 $\mathscr{F} \cup \mathfrak{b}_0^{-\mathscr{R}}$ 生成的域中任意超幂级数的迭代系数。

# 4 线性微分方程

在本文余下部分，设 $\mathscr{R}$是 $\mathbb{R}$的一个有效有序子域，设 $\mathfrak{B} = (\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n)$ 是一个超基，且 $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{R}[[\mathfrak{b}_1^{-\mathscr{R}}; \ldots; \mathfrak{b}_n^{-\mathscr{R}}]] \subseteq \mathbb{B} := \mathbb{R}[[\mathfrak{b}_1^{-\mathbb{R}}; \ldots; \mathfrak{b}_n^{-\mathbb{R}}]]$ 是一个微分环境域。我们用 $\mathbb{T}$ 表示基于网格的超幂级数域。

### 4.1 线性微分方程关于超幂级数

考虑一个线性微分算子 $\mathrm{L} = \mathrm{L}_r \delta_1^r + \cdots + \mathrm{L}_0 \in \mathbb{B}[\delta_1]$，其中 $\mathrm{L}_r \neq 0$。我们定义 $\mathrm{v}(\mathrm{L}) := \min(\mathrm{v}(\mathrm{L}_0), \ldots\ldots, \mathrm{v}(\mathrm{L}_r))$ 以及 $\mathrm{D}_L := (\mathrm{L}_r)_{v(L)}\, \delta_1^r + \cdots + (\mathrm{L}_0)_{v(L)} \in \mathbb{R}[\delta_1]$。

给定 $\alpha \in \mathbb{R}^n$和 $\mathfrak{b}^{-\alpha} := \mathfrak{b}_1^{-\alpha_1} \cdots \mathfrak{b}_n^{-\alpha_n}$，我们将 $\mathrm{L}_{\times \mathfrak{b}^{-\alpha}}$记作 $\mathbb{B}[\delta_1]$ 中唯一满足对所有 $\mathrm{f} \in \mathbb{B}$ 均有 $\mathrm{L}_{\times \mathfrak{b}^{-\alpha}}(\mathrm{f}) = \mathrm{L}(\mathfrak{b}^{-\alpha} \mathrm{f})$ 的微分算子，并令 $\mathrm{L}_{\ltimes \mathfrak{b}^{-\alpha}} := \mathfrak{b}^{\alpha} \mathrm{L}_{\times \mathfrak{b}^{-\alpha}}$。我们还用 $\nu_\alpha$或 $\nu_L$表示满足 $\mathrm{L}_{\times \mathfrak{b}^{-\alpha}} = (\mathrm{L}_{\times \mathfrak{b}^{-\alpha}})_r \delta_1^r + \cdots + (\mathrm{L}_{\times \mathfrak{b}^{-\alpha}})_{\nu_\alpha} \delta_1^{\nu_\alpha}$ 且 $(\mathrm{L}_{\times \mathfrak{b}^{-\alpha}})_{\nu_\alpha} \neq 0$ 的整数。

**定理5**。

*a)* 方程 $Lf = 0\ in\ \mathbb{T}$ 的所有超幂级数解实际上都在 $\mathbb{B}[\log \mathfrak{b}_1]$ 中。*b)* 如果 $f \in \mathbb{B}[\log \mathfrak{b}_1]$ 是 $Lf = 0$ 的一个解，且其主导单项式为 $(\log \mathfrak{b}_1)^i \mathfrak{b}^{-\alpha}$，那么我们有 $i < \nu_\alpha$。反过来，任意 $\alpha \in \mathbb{R}^n$ 和 $i < \nu_\alpha$ 都会产生这样的解。*c)* 给定 $g \in \mathbb{B}[\log \mathfrak{b}_1]$, $Lf = g\ in\ \mathbb{T}$ 的所有解实际上都在 $\mathbb{B}[\log \mathfrak{b}_1]$ 中。*d)* 此外，$Lf = g\ in\ \mathbb{B}[\log \mathfrak{b}_1]$ 存在唯一一个解，使得对于任意 $\alpha \in \mathbb{R}^n$ 和 $i < \nu_\alpha$， $(\log \mathfrak{b}_1)^i \mathfrak{b}^{-\alpha}$ 在 $f$ 中的系数都为零。

证明。这些陈述是对.....的改述： [14, 定理7。17]及其推论。 □

在 (d) 中，唯一的解 f 称为 $\mathrm{Lf} = \mathrm{g}$ 的特异解，记作 $\mathrm{f} := \mathrm{L}^{-1}\, \mathrm{g}$。算子 $\mathrm{L}^{-1}: \mathbb{B}[\log \mathfrak{b}_1] \longrightarrow \mathbb{B}[\log \mathfrak{b}_1]$ 是线性的，甚至保持无穷求和 [14, 第7节4]。

### 4.2 计算特征解

给定 $\mathrm{L} \in \mathscr{F}[\delta_1]$，令 $\mathbb{B}_L := \{\mathrm{g} \in \mathbb{B} : \mathrm{L}^{-1}\, \mathrm{g} \in \mathbb{B}\}$。如果 $\mathscr{F}$满足：对于每个 $\mathrm{L} \in \mathscr{F}[\delta_1]$ 都有 $\mathrm{L}^{-1}: \mathscr{F} \cap \mathbb{B}_L \longrightarrow \mathscr{F}$，并且我们有一个用于计算 $\mathrm{L}^{-1}$的算法，则称其为有效线性闭。为了使 $\mathscr{F}$ 有效线性闭，我们需要考虑由线性微分方程的特异解 f 通过 $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}(\delta_1^{\mathbb{N}} \mathrm{f})$ 得到的扩张序列。在这类扩张 $\mathscr{F}(\delta_1^{\mathbb{N}} \mathrm{f})$上设计零测试是主要困难。本小节将首先说明如何相对于 $\mathfrak{b}_n$展开特异解，假设 $\mathscr{H} := \mathscr{F} \cap \mathbb{R}[[\mathfrak{b}_1^{-\mathbb{R}}; \ldots; \mathfrak{b}_{n-1}^{-\mathbb{R}}]]$ 是有效线性闭的。

因此，考虑一个线性微分算子 $L = L_r \delta_n^r + \cdots + L_0 \in \mathscr{F}[\delta_n]$，其中 $L_r \neq 0$。注意，为方便起见，我们将 L 视为 $\delta_n$ 中的算子，而不是 $\delta_1$中的算子。我们定义 $v_n(L) := \min(v_n(L_0), \ldots\ldots, v_n(L_r))$，其中 $v_n$ 表示相对于 $\mathfrak{b}_n^{-1}$的赋值。

现在令 $g \in \mathscr{F}[\log \mathfrak{b}_1]$。若 $g = 0$，则 $L^{-1} g = 0$，因此不妨设 $g \neq 0$，并令 $g^\sharp \quad \varphi \mathfrak{b}_n^{-\beta}$ 为其在 $\mathfrak{b}_n^{-1}$中的展开式的首项。为了计算 $L^{-1} g$ 在 $\mathfrak{b}_n^{-1}$中的展开式，不失一般性，可以设 $v_n(L) = 0$，并将 $L = H + T$ 分解，其中 $H \in \mathscr{H}[\delta_n] = \mathscr{H}[\delta_{n-1}]$，$T \in \mathscr{F}[\delta_n]$，且 $v_n(T) > 0$。现在，我们可以用惰性方式展开 $L^{-1} g$，如下所示：

$$((L^{-1} g)^\sharp, (L^{-1} g)^\flat) := \left(\psi \mathfrak{b}_n^{-\beta}, L^{-1}\left(g^\flat - T\left(\psi \mathfrak{b}_n^{-\beta}\right)\right)\right), \qquad \text{where } \psi := H^{-1}_{\ltimes \mathfrak{b}_n^{-\beta}} \varphi. \tag{8}$$

这里 我们 注意到 $H_{\ltimes \mathfrak{b}_n^{-\beta}} \in \mathscr{H}[\delta_{n-1}]$，因此 $\psi \in \mathscr{H}$根据 我们 的假设， $\mathscr{H}$是有效地 线性 闭合的。

### 4.3 指标多项式

我们将指标多项式的经典概念 [18]推广到具有超渐近级数系数的线性微分算子。设 $L = L_r \delta_n^r + \cdots + L_0 \in \mathscr{F}[\delta_n]$，其中 $L_r \neq 0$仍是 $\delta_n$中的线性微分算子。我们将 L 的指标多项式定义为 $I_L := (L_r)_{v(L)} (-N)^r + \cdots + (L_0)_{v(L)} \in \mathscr{R}[N]$。 （若 $n = 1$，则 $D_L = I_L(-\delta_1)$，但一般而言并非如此。）

**命题6**。设 $\alpha \in \mathbb{R}^n$ 且$L = L_r \delta_n^r + \cdots + L_0 \in \mathscr{F}[\delta_n]$ 满足$L_r \neq 0$。若$\nu_{L,\alpha} > 0$，则 $\alpha_n$必定是一个根属于该指标多项式 $I_L$。

证明。首先注意，$L_{\ltimes \mathfrak{b}_n^{-\alpha n}} = \mathfrak{b}_n^{\alpha_n} L^{\times \mathfrak{b}_n^{-\alpha_n}}$可通过将 $\delta_n - \alpha_n$代入 $\delta_n$而由L得到。特别地， $I_{L_{\ltimes \mathfrak{b}_n^{-\alpha n}}}(N) = I_L(N + \alpha_n)$。接着，写作$L^{\ltimes \mathfrak{b}_n^{-\alpha n}} = \tilde{L} r\ \delta_n^r + \cdots + \tilde{L}_0 + o\left(\mathfrak{b}^{v(L_{\ltimes \mathfrak{b}_n^{-\alpha n}})}\right)$，
~
，我们有$L_0 = I_L(\alpha_n)$。将(6)应用于 $\delta_n$，得到当$i = 1, \ldots, n - 1$时的 $\delta_n \mathfrak{b}_i / \mathfrak{b}_i \prec \delta_n \mathfrak{b}_n / \mathfrak{b}_n = 1$。因此，$L_{\times \mathfrak{b}^{-\alpha}} = \mathfrak{b}_n^{\alpha_n} \check{L} r\ \delta_n^r + \cdots + \mathfrak{b}_n^{\alpha_n} L$
~
$_0 + o(\mathfrak{b}^{v(L_{\times \mathfrak{b}^{-\alpha}})})$。然后将$L_{\times \mathfrak{b}^{-\alpha}} \check{L} = \check{L} r\ \delta_1^r + \cdots + \check{L}_0$改写为 $\delta_1$。将(6)应用于 $\delta_1$，得到 $1 = \delta_1 \mathfrak{b}_1 / \mathfrak{b}_1 \prec \delta_1 \mathfrak{b}_n / \mathfrak{b}_n$，从而$\check{L} = \mathfrak{b}_n^{\alpha_n} \tilde{L}_0 + o(\mathfrak{b}^{v(L_{\times \mathfrak{b}^{-\alpha}})})$。因此，一旦$\nu_{L,\alpha} > 0$，就必有 $\mathfrak{b}_n^{\alpha_n} \tilde{L}_0 = \mathfrak{b}_n^{\alpha_n} I_L(\alpha_n) = 0$。□

结合定理 5 和命题 6，若 $f_1$ 和 $f_2$ 是 $Lf = g$ 在 $\mathscr{F}[\log \mathfrak{b}_1]$中的两个不同的解，则 $v_n(f_2 - f_1)$ 必定是指标多项式 $I_L$的一个根。

# 5 拟-线性微分方程

### 5.1 超幂级数上的微分方程

考虑一个关于 F 的阶为 r、总次数为 d 的微分多项式 $P \in \mathbb{B}[\delta_1^{\mathbb{N}} F]$。我们也可以写作 P
$= \sum_{i_0 \ldots r \in \mathbb{N}} {}_{i_0 \cdots r} \cdots (\delta_1^r)^{i_r}$ $_{i_0 \ldots r} \in \mathbb{B}$ $( ) =$, ,i P , ,i
$\min_{i_0 \ldots r \in \mathbb{N}} (i_0 \ldots r)$ $P = \sum_{i_0 \ldots r \in \mathbb{N}} (i_0 \ldots r)_{v(P)}$ $^{i_0} \cdots (\delta_1^r)^{i_r}$
F F，其中 P , ,i 。我们定义 v P , ,i v P , ,i 和 D , ,i P , ,i F F。我们也可以将 P = 分解为 $P_{[0]} + \cdots +$ $P_{[d]}$，其中 $P_{[i]}$ 汇集了关于 F . . . , $\delta_1^r$F 的总次数为 i 的所有齐次项，$i = 0, \ldots, d$。

给定 $\varphi \in \mathbb{B}$，我们分别用 P+$\varphi$和 P×$\varphi$表示 $\mathbb{B}[\delta_1^{\mathbb{N}} F]$中唯一满足对所有 $f \in \mathbb{B}$，有 $P_{+\varphi}(f) = P(\varphi + f)$且 $P_{\times\varphi}(f) = P(\varphi f)$的微分多项式。由 (7) 可得

$$\varphi \prec 1 \implies P_{+\varphi} = P + o(P). \tag{9}$$

换言之，若 $\varphi \prec 1$，则 v(P+$\varphi$ − P) > v(P)，因此特别有 $D^{P_{+\varphi}} = D_P$。若 $P = P_{[d]}$是 d 次齐次多项式且 $\varphi \neq 0$，则还有

$$v_n(P_{\times\varphi}) = v_n(P) + d\, v_n(\varphi). \tag{10}$$

有关这些初等定义及其性质的详细信息，请参见 [14, 第8.1、8.2]节。

## 5.2 拟-线性微分方程

该方程

$$P(f) = 0, \qquad f \prec 1 \tag{11}$$

称为拟线性，如果$v(P) = v(P_{[1]}) < v(P_{[0]})$。 更一般地，，如果 $\alpha \in \mathbb{R}^n$，那么

$$P(f) = 0, \qquad f \prec \mathfrak{b}^{-\alpha} \tag{12}$$

˜称为拟线性，如果 $\mathrm{P}_{\times \mathfrak{b}^{-\alpha}}(\mathrm{f}) = 0$，$\mathrm{f} \prec 1$ 在第 8.5]节中是拟线性的。如果 $\varepsilon \prec 1$ ˜ ˜且 (11) 是拟线性的，那么根据 (9)，方程 $\mathrm{P}_{+\varepsilon}(\mathrm{f}) = 0$，$\mathrm{f} \prec 1$也如此。因此， ˜ ˜如果 $\varepsilon \prec \mathfrak{b}^{-\alpha}$ 且 (12) 是拟线性的，那么 $\mathrm{P}_{+\varepsilon}(\mathrm{f}) = 0$，$\mathrm{f} \prec \mathfrak{b}^{-\alpha}$也如此。

例 7. 设 $\mathfrak{B} = (x\ \mathrm{e}^x)$，$\mathscr{F} := \mathbb{Q}(x\ \mathrm{e}^x)$，和

$$P := \frac{x-1}{\mathrm{e}^{2x}} + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{e}^x} + \frac{1}{x\mathrm{e}^x}\right)\delta_1 F + \left(1 - \frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)F + \frac{F\delta_1 F}{x} + F^2 \in \mathscr{F}[\delta_1^{\mathbb{N}} F].$$

方程 $P(f) = 0$，$f \prec 1$是拟-线性，因为$v(P) = v(P_{[1]}) = (0,0) \prec v(P_{[0]}) = (-1,2)$。

假设 (12) 有一个解 $\mathrm{f} \in \mathbb{B}$，并令 $\mathrm{L} \in \mathbb{B}[\delta_1]$ 满足 $\mathrm{LF} = (\mathrm{P}_{+f})_{[1]}$。如果对于所有满足 $\nu_L$、$_\alpha > 0$的 $\alpha \in \mathbb{R}^n$，$\mathrm{f}_\alpha = 0$，则称解 f 为特异解。

定理*8.* 任意拟线性微分方程 *(12)* 在$\mathbb{B}\hat{} = \mathbb{R}[[\mathfrak{b}\hat{}\,{}^{-\mathbb{R}}_1; \ldots; \mathfrak{b}\hat{}\,\bar{n}^{\mathbb{R}}_+]]r$ 中都有唯一的特异解，其中 $\mathfrak{B}\hat{} = (\mathfrak{b}\hat{}\,1, \ldots, \mathfrak{b}\hat{}\,n{+}r) = (\log_r \mathfrak{b}_1, \ldots, \log \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n)$。将 $\mathfrak{B}$ 替换为更大的超基后，唯一性 ˆ仍然成立。

证明。 这是 对 的 [14, 定理 8。21]。 □

˜ ˆ注9. 使用上述记号，给定 (12) 在 $\mathbb{B}$ 中的另一个解 f，差值 $\varepsilon := \mathrm{f} - \mathrm{f}$ 满足拟线性方程 $\mathrm{P}_{+f}(\varepsilon) = 0, \varepsilon \prec \mathfrak{b}^{-\alpha}$。于是 $\nu_{L,v(\varepsilon)} > 0$，因为否则 $\mathrm{P}(\mathrm{f}) = \mathrm{P}_{+f}(\varepsilon) \sim \mathrm{L}\varepsilon \neq 0$。根据命题 6，当把 L 视为 $\delta_n$ 中的一个算子时，赋值 $\mathrm{v}_n(\varepsilon)$ 必为 L 的指标多项式的一个根。对于 (12) 的复解 $\mathrm{f} \in \mathbb{B}[\mathrm{i}]$，这一注记同样ˆ成立。

## 5.3 计算特异解

考虑规范化拟线性微分方程 (11)，其中 $\mathrm{P} \in \mathscr{F}[\delta_1^{\mathbb{N}} \mathrm{F}]$且 $\mathrm{v}(\mathrm{P}) = 0$。假设 $\mathfrak{B}$ 和 $\mathscr{F}$已扩展，使得 (11) 的特异解 f 属于 $\mathbb{B}$。本小节旨在计算 f 相对于 的展开式 f $= \sum_{\alpha_n \in \mathscr{R}}\ {}_{\alpha_n} \mathfrak{b}_n^{-\alpha_n}$ $\mathfrak{b}_n^{-1}$ f。

我们先将 P = 分解为 H + T，其中 $\mathrm{H} \in \mathscr{H}[\delta_1^{\mathbb{N}} \mathrm{F}]$ 且 $\mathrm{T} \in \mathscr{F}[\delta_1^{\mathbb{N}} \mathrm{F}]$ 满足 $\mathrm{v}_n(\mathrm{T}) := \min_{i_0, \ldots, i_r} \mathrm{v}_n(\mathrm{T}_{i_0, \ldots, i_r}) > 0$。容易验证，$\mathrm{f}_0 \in \mathbb{R}[[\mathfrak{b}_1^{-\mathbb{R}}; \ldots; \mathfrak{b}_{n-1}^{-\mathbb{R}}]]$ 是方程 $\mathrm{H}(\varphi) = 0, \varphi \prec 1$ 的特异解。我们假设已经知道如何计算这个解 $\mathrm{f}_0$，并且 $\mathrm{f}_0 \in \mathscr{H}$。与第 4.2 节一样，我们还假设 $\mathscr{H}$是有效线性闭的。

˜现在考虑 $\mathrm{P} := \mathrm{P}_{+f_0}$，并将其分解为 P LF − g − R，其中 $\mathrm{L} \in \mathscr{H}[\delta_n]$，$\mathrm{g} \in \mathscr{F}$满足 $\mathrm{v}_n(\mathrm{g}) > 0$，而 $\mathrm{R} \in \mathscr{F}[\delta_n^{\mathbb{N}} \mathrm{F}]$ 满足 $\mathrm{v}_n(\mathrm{R}_{[1]}) > 0$ 且 $\mathrm{v}_n(\mathrm{R}) \geqslant 0$。注意，我们现在是相对于 $\delta_n$ 而不是 $\delta_1$来表示 L 和 R 的，这并不会改变它们相对于 $\mathfrak{b}_n^{-1}$的赋值。我们已经在第 4.2 节中看到如何计算 $\mathrm{L}^{-1}$。这使我们能够利用公式惰性地˜计算 $\mathrm{f} = \mathrm{f} - \mathrm{f}_0$

$$\tilde{f} = L^{-1}(g + R(\tilde{f})).$$

~只要 $L^{-1}(g+R(\tilde{f}))$ 中 $\mathfrak{b}_n^{-\alpha}$ 的系数仅依赖于 $\tilde{f}$ 中 $\mathfrak{b}_n^{-\beta}$ 的系数，且满足 $\beta<\alpha$，右侧对 f 的依赖在惰性展开范式下就是合理的。根据构造，这里确实如此。

例 10. 根据例 7，我们来计算拟线性方程 $P(f)=0$，$f\prec 1$的特异解 U 的展开式。将 $P=H+T$ 分解，我们有 $H=x^{-1}\delta_1 F+F+x^{-1}F\ \delta_1 F+F^2$。$H(f)=0$，$f\prec 1$的特异解为 $U_0=0$，

~ 因此 $P=P$

$+_{U_0}=P$ 且 $v_2(U)>0$。现在我们写出

$$\tilde{P} = (x-1)e^{-2x}+(1-xe^{-x}+e^{-x})\delta_2 F+(1-xe^{-x})F+F\delta_2 F+F^2$$

关于 $\delta_2$，并将其分解为 $\tilde{P}=LF-g-R$，其中 $L=\delta_2+1$，$g=(1-x)e^{-2x}$，且 $R=(x\ e^{-x}-e^{-x})\delta_2 F+x\ e^{-x}F-F\ \delta_2 F-F^2$。

然后我们利用 $U=L^{-1}(\gamma)$计算 U，其中 $\gamma=g+R(U)$。由 (8) 可得 $v_2(U)=v_2(\gamma)$。结合 $v_2(R(U))>v_2(U)$，我们得到 $v_2(U)=v_2(g)=2$，以及 $\gamma^\sharp=g^\sharp=\varphi e^{-2x}$ with$\varphi=1-x$。将 $L=\tilde{H}+\tilde{T}$分解，其中 $\tilde{H}=\delta_2+1$，$\tilde{T}=0$。于是我们有 $\psi:=\tilde{H}^{-1}_{\kappa e^{-2x}}\varphi=(\delta_2-1)^{-1}\varphi=x$。因此，

$$((L^{-1}\gamma)^\sharp,(L^{-1}\gamma)^\flat) = (xe^{-2x},L^{-1}(\tilde{\gamma})),\qquad \text{where } \tilde{\gamma}:=R(U).$$

因此 U 的首项是$xe^{-2x}$。 重复这一过程，我们得到

$$((L^{-1}\tilde{\gamma})^\sharp,(L^{-1}\tilde{\gamma})^\flat) = \left(\left(\frac{x^2}{2}-x\right)e^{-3x},L^{-1}(\tilde{\tilde{\gamma}})\right),\qquad \text{where } \tilde{\tilde{\gamma}}:=\tilde{\gamma}^\flat,$$

$$((L^{-1}\tilde{\tilde{\gamma}})^\sharp,(L^{-1}\tilde{\tilde{\gamma}})^\flat) = \left(\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+x\right)e^{-4x},L^{-1}(\tilde{\tilde{\tilde{\gamma}}})\right),\qquad \text{where } \tilde{\tilde{\tilde{\gamma}}}:=\tilde{\tilde{\gamma}}^\flat,$$

由此 得到该展开式

$$U = xe^{-2x}+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)e^{-3x}+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+x\right)e^{-4x}+\cdots.$$

# 6 一般代数微分方程

## 6.1 解的存在性

我们首先回顾 Newton次数的基本概念以及若干相关性质。 考虑扩展

$$\mathfrak{B} = (\tilde{\mathfrak{b}}_1,\dots,\tilde{\mathfrak{b}}_{n+s}) = (\log_s \mathfrak{b}_1,\dots,\log \mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_n)$$

其中 $\mathfrak{B}$ 带有$s$ 个新对数。 设

$$\tilde{\mathbb{B}} := \mathbb{R}[[\tilde{\mathfrak{b}}_1^{-\mathbb{R}};\dots;\tilde{\mathfrak{b}}_{n+s}^{-\mathbb{R}}]]$$

带有导子 $\tilde{\delta}_i$with $\tilde{\delta}_i\tilde{\mathfrak{b}}i=\tilde{\mathfrak{b}}i$ for $i=1,\dots,n+s$。于是，任意 $P\in\mathbb{B}[\delta_1^{\mathbb{N}}F]$均可改写为元素 $\tilde{P}\in\tilde{\mathbb{B}}[\tilde{\delta}_1^{\mathbb{N}}F]$,，它也对应于从 [14,Section 8.2.3]开始的 s 重向上移位；另见 [1, page 293]。根据 [14, 定理8.6] 及其后续评注，~存在唯一的多项式 $Q\in\mathbb{R}[F]$和整数 $\nu\in\mathbb{N}$，使得对于所有充分大的 s，$D_{\tilde{P}}=Q\cdot(\delta_1 F)^\nu$。我们称 $N_P=Q\cdot(\delta_1 F)^\nu$为 P 的微分牛顿多项式。对于一般单项式 $\mathfrak{b}^{-\alpha}$，渐近微分方程的牛顿次数

$$P(f) = 0,\qquad f \prec \mathfrak{b}^{-\alpha} \tag{13}$$

定义为 $\mathrm{N}^{P_{\times \mathfrak{b}^{-\beta}}}$ 在所有满足 $\alpha<\beta$ 的 $\beta \in \mathbb{R}^n$ 中可能达到的最大次数。事实上，方程 (13) 是拟线性的，当且仅当其牛顿次数为一。以下定理表明，牛顿次数在确定 $\mathbb{T}[\mathrm{i}]$中方程 (13) 的解的数量下界方面起着关键作用。

定理 *11.* [*11,* 定理 *35*] 如果渐近代数微分方程 *(13)* 的牛顿˜次数为 $d$，那么当 $s$ 充分大时，*(13)* 至少有 $d$ 个解（按重数计），

注意，我们总是可以假设在 $\mathfrak{b}^{-\alpha}=1$ 方程（13）中，通过将$P$替换为$P_{\times \mathfrak{b}^{-\alpha}}$. 因此，下文中，我们将只考虑方程

$$P(f) = 0, \qquad f \prec 1. \tag{14}$$

然后我们可以采用以下更简单的判据来判断解的存在性:

**定理12**。设$P \in \mathbb{B}[\delta_1^{\mathbb{N}} F]$ 满足如下条件 $(D_P)_{[0]}=0$。那么渐近微分方程˜(14) 当$s$充分大时，$\mathbb{B}[\mathrm{i}]$中存在一个解，前提是$s$ 足够大。

要证明定理12，只需证明以下引理。

**引理13**。设$P \in \mathbb{B}[\delta_1^{\mathbb{N}} F]$。那么 $(D_P)_{[0]}=0$ 当且仅当方程（*14*）的牛顿次数非零。

证明。若 $(\mathrm{D}_P)_{[0]} \neq 0$，则由 (7) 可知，(14) 在 $\mathbb{T}[\mathrm{i}]$ 中没有解。由定理 11 可知，(14) 的牛顿次数必为零。反之，假设 $(\mathrm{D}_P)_{[0]}=0$，并令 $\tilde{\mathrm{P}} \in \tilde{\mathbb{B}}[\tilde{\delta}_1^{\mathbb{N}} \mathrm{F}]$ 为如上所述对 P 进行的 s 重向上移位。令 $\mathfrak{d}$ 和 $\tilde{\mathfrak{d}}$˜ 分别表示 P 和 P 的主导单项式。由于 $\delta_1=\phi \delta_1$ 对某个可逆的 $\phi$ 成立，且 $\phi \ll \mathfrak{b}_1$，可以验证 $\mathfrak{d} / \tilde{\mathfrak{d}} \ll \mathfrak{b}_1$。由于 $(\mathrm{D}_P)_{[0]}=0$，对于某个 $\alpha>0$，有 $\mathrm{P}_{[0]} \leqslant \mathfrak{d}\, \mathfrak{b}_1^{-\alpha}$。因此，$\tilde{\mathrm{P}}_{[0]}=\mathrm{P}_{[0]} \leqslant \tilde{\mathfrak{d}}\, \mathfrak{b}_1^{-\alpha/2}$，从而 $(\mathrm{D}_{\tilde{P}})_{[0]}=0$。取充分大的 s，使得 $\mathrm{D}_{\tilde{P}} \in \mathbb{R}[\mathrm{F}]\,(\tilde{\delta}_1 \mathrm{F})^{\mathbb{N}}$，便可推出 $\deg \mathrm{N}_{\tilde{P}}=\deg \mathrm{N}_P>0$。□

## 6.2 从一般方程到拟-线性方程

乍看之下，似乎仅仅求解拟线性微分方程，与求解一般代数微分方程相去甚远。但事实上，由于 [14, 第 8 节7] 的以下推论，这正是求解更一般方程的关键:

定理 *14*。设 $\mathscr{K}$ 是一个微分子域，$\mathbb{T}$ 的导子为 $\partial / \partial x: f \mapsto f'$，其中任意方程 $f'=\varphi' f$ 或 $f'=\varphi' / \varphi$（其中 $\varphi \in \mathscr{K}$）在 $\mathscr{K}$ 中都有非零解。再假设每个系数属于 $\mathscr{K}$ 的拟线性微分方程在 $\mathscr{K}$ 中都有解。那么，$\mathbb{T}$ 中微分多项式 $\mathscr{K}[\partial^{\mathbb{N}} F]$ 的任意根都必须属于 $\mathscr{K}$。

方程 $\mathrm{f}'=\varphi' \mathrm{f}$ 和 $\mathrm{f}'=\varphi' / \varphi$ 的通解分别为 $\mathrm{c}\ \mathrm{e}^{\varphi}$ 和 $\log \varphi+\mathrm{c}$，因此，为了应用该定理，重要的是要知道如何分别计算 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}^{>}$中元素的指数函数与对数，并在必要时扩展 $\mathscr{F}$。为此，我们将使用与 [23], 相同的技巧，但实际上只需计算相差常数因子的指数函数与对数。此外，由于定理中的第二个条件，我们将假设已知如何求解准线性方程。

*6.2.1* 计算对数

给定 $\varphi\in\mathscr{F}$其中 $\varphi = c\,\mathfrak{b}_1^{-\alpha_1}\cdots\mathfrak{b}_n^{-\alpha_n}(1+\varepsilon)$ 其中$c>0$和 $\varepsilon<1$，我们有

$$\log\varphi \;=\; -\alpha_1\log\mathfrak{b}_1-\cdots-\alpha_n\log\mathfrak{b}_n+\log c+\log(1+\varepsilon).$$

我们在第3.4节末尾看到，如何在 $\alpha_1\neq 0$ 的条件下用 $\log\mathfrak{b}_1$ 扩展 $\mathfrak{B}$，之后 $-\alpha_1\log\mathfrak{b}_1-\cdots-\alpha_n\log\mathfrak{b}_n\in\mathscr{F}$。若 $\mathrm{c}\neq 1$，则可能需要用 $\log\mathrm{c}$ 扩展常数域 $\mathscr{R}$，但如果我们只想对 $\varphi'/\varphi$ 求积分，总可以假设 $\mathrm{c}=1$。最后，函数 $\mathrm{g}:=\log(1+\varepsilon)$ 是拟线性微分方程 $\mathrm{g}'=\varepsilon'/(1+\varepsilon)$、$\mathrm{g}<1$ 的特定解（且实际上是唯一解）。

*6.2.2* 计算指数函数

设 $\varphi\in\mathscr{F}$。只要 $\varphi\asymp\log\mathfrak{b}_i$对于 某个 $i$，我们可以写成 $\varphi=-\alpha_i\log\mathfrak{b}_i+\tilde{\varphi}$并且继续用 $\tilde{\varphi}$ 充当 $\varphi$。这将得到一个分解

$$\varphi \;=\; -\alpha_n\log\mathfrak{b}_n-\cdots-\alpha_{k+1}\log\mathfrak{b}_{k+1}+\psi,$$

其中 $\alpha_n$、…、$\alpha_{k+1}\in\mathscr{R}$、$\psi\in\mathscr{F}$，且要么 $\mathrm{k}=0$和 $\psi\prec\log\mathfrak{b}_1$，要么 $1\leqslant\mathrm{k}<\mathrm{n}$ 和 $\log\mathfrak{b}_k\prec\psi\prec\log\mathfrak{b}_{k+1}$，要么 $\mathrm{k}=\mathrm{n}$ 和 $\log\mathfrak{b}_n\prec\psi$。若 $\mathscr{F}\ni\psi_{>}\neq 0$，则与第3.4节中的论证类似，可知 $\mathfrak{B}^{\wedge}:=(\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_{k-1},\mathrm{e}^{|\psi_{>}|},\mathfrak{b}_k,\dots,\mathfrak{b}_n)$ 再次构成超基，而 $\mathscr{F}^{\wedge}:=\mathscr{F}((\mathrm{e}^{|\psi_{>}|})^{-\mathscr{R}})$ 是包含 $\mathrm{e}^{|\psi_{>}|}$的微分环境域。经过这次扩张（如有必要），我们有

$$\mathrm{e}^{\varphi} \;=\; \mathrm{e}^{\psi_{\asymp}}(\mathrm{e}^{|\psi_{>}|})^{\pm 1}\mathfrak{b}_k^{-\alpha_k}\cdots\mathfrak{b}_n^{-\alpha_n}\mathrm{e}^{\psi_{\prec}}.$$

若 $\psi_{\asymp}=0$，则可能需要用 $\mathrm{e}^{\psi_{\asymp}}$扩张常数域 $\mathscr{R}$，但如果我们只想计算 $\mathrm{f}'=\varphi'\mathrm{f}$ 的一个非零解，就可以假设 $\psi_{\asymp}=0$。我们有$\mathrm{e}^{\psi_{\prec}}=1+\mathrm{g}$，其中 $\mathrm{g}$ 是拟线性方程 $\mathrm{g}'=\psi'_{\prec}(1+\mathrm{g})$ 的特定（实际上是唯一的）解，$\mathrm{g}<1$。

例 15。沿用例 10，我们将用 $\varphi=\mathrm{e}^{x}\mathrm{U}+\mathrm{e}^{x}-\mathrm{x}\in\mathbb{Q}(\mathrm{x}\ \mathrm{e}^{x})$ 展开 $\mathrm{e}^{\varphi}$。首先将 $\varphi$ 分解为 $\varphi=-\mathrm{x}+\psi_{>}+\psi_{\prec}$，其中 $\psi_{>}=\mathrm{e}^{x}$ 和 $\psi_{\prec}=\mathrm{e}^{x}\mathrm{U}$。然后将超基 $\mathfrak{B}$ 扩展为 $(\mathrm{x}\ \mathrm{e}^{x},\mathrm{e}^{\psi_{>}})$。对于 $\mathrm{e}^{\psi_{\prec}}$，考虑拟线性方程 $\Omega(\mathrm{f})=0$、$\mathrm{f}<1$ 的特异解 V，其中

$$\Omega \;:=\; \mathrm{e}^{x}\left(U+\frac{1}{x}\delta_1 U\right)(F+1)-\frac{1}{x}\delta_1 F\;\in\;\mathscr{F}(U)[\delta_1^{\mathbb{N}}F].$$

然后 $\mathrm{e}^{\psi_{\prec}}-1=V=1+x\,\mathrm{e}^{-x}+(x^2-x)\,\mathrm{e}^{-2x}+\left(x^3-\frac{5}{2}x^2+x\right)\mathrm{e}^{-3x}+\cdots$以及 $\mathrm{e}^{\varphi}=\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x}}(V+1)$。

# 7 零测试算法的新方法

## 7.1 Ritt约化

考虑在 $\delta_1^{\mathbb{N}}\mathrm{F}$ 上的容许序 $\{$，其中 $\delta_1^{j}\mathrm{F}\,\{\,\delta_1^{j'}\mathrm{F}$，只要 $\mathrm{j}\leqslant\mathrm{j}'$。微分多项式 $\mathrm{P}\in\mathbb{B}[\delta_1^{\mathbb{N}}\mathrm{F}]\setminus\mathbb{B}$ 的导元，是将 P 视为 $\mathrm{F}\ \delta_1\mathrm{F}\ldots\ldots$ 中的多项式时，P 中出现的最高变量 $\delta^{j}\mathrm{F}$。我们将其记为 $\mathrm{l}_P$。将 P 视为关于 $\mathrm{l}_P$ 的多项式时，首项系数 $\mathrm{I}_P$ 称为 P 的初式，$\mathrm{S}_P=\partial\mathrm{P}/\partial\mathrm{l}_P$ 称为其隔离子；我们还定义 $\mathrm{H}_P:=\mathrm{I}_P\mathrm{S}_P$。若 P 关于 $\mathrm{l}_P$ 的次数为 d，则称有序对 $\mathrm{rank}\,\mathrm{P}:=(\mathrm{l}_P,\mathrm{d})$ 为 P 的 Ritt秩，并按字典序排列此类有序对。对于多项式 $\mathrm{P}\in\mathbb{B}$，我们约定 $\mathrm{rank}\,\mathrm{P}:=-\infty$。

给定 P、Q1、……、$Q_s \in \mathbb{B}[\delta^{\mathbb{N}} F] \setminus \mathbb{B}$，若存在某个 i，使得 $l_P \in \delta_1^{\mathbb{N}\setminus\{0\}} l_{Q_i}$，或者 $l = l_P = l_{Q_i}$ 且 $\deg_\ell P \geqslant \deg_\ell Q_s$，则称 P 关于 Q1、……、$Q_s$ 可约。Ritt约化过程可得如下形式的关系

$$I_{Q_1}^{\alpha_1} \cdots I_{Q_s}^{\alpha_s} S_{Q_1}^{\beta_1} \cdots S_{Q_s}^{\beta_s} P = \Theta_1 Q_1 + \cdots + \Theta_s Q_s + R,$$

其中 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s,\beta_1,\ldots,\beta_s \in \mathbb{N}, \Theta_1,\ldots,\Theta_s \in \mathbb{B}[\delta_1^{\mathbb{N}} F][\delta_1], R \in \mathbb{B}[\delta_1^{\mathbb{N}} F]$，并且 R 关于 $Q1, \ldots, Q_s$ 是约化的。我们将 $R = P \text{ rem } Q = P \text{ rem } (Q1, \ldots, Q_s)$ 记作。

## 7.2 根分离界

假设给定一个基于网格的超幂级数 $f \in \mathbb{B}$，使得 $f \prec 1$，以及一个微分多项式 $P \in \mathbb{B}[\delta_1^{\mathbb{N}} F]$。设 $L_{P,f} \in \mathbb{B}[\delta_1]$ 满足 $L_{P,f} F = (P_{+f})_{[1]}$。注意，如果 $S_P(f) \neq 0$，则有 $L_{P,f} \neq 0$。我们首先给出一个判据，用以判断 P 是否存在一个足够接近 f 的根。

命题*16*。设 $P \in \mathbb{B}[\delta_1^{\mathbb{N}} F] \setminus \mathbb{B}$，且 $f \in \mathbb{B}$ 满足 $L_{P,f} \neq 0$ 和 $f \prec 1$。设 $\sigma > 0$。如果 $v_n(P(f)) > v_n(P) + \sigma$ $\mathbb{C}[[(\log_s \mathfrak{b}_1)^{-\mathbb{R}}; \ldots; (\log \mathfrak{b}_1)^{-\mathbb{R}}; \mathfrak{b}_1^{-\mathbb{R}}; \ldots; \mathfrak{b}_n^{-\mathbb{R}}]]$ $L, f$，那么 $P$ 有一个根 $\tilde{f}$，且该根属于，满足 $v_n(f - \tilde{f}) > \sigma$，其中某个 $s \in \mathbb{N}$。

证明。令 $\eta := v_n(P(f)) - (v_n(L_{P,f}) + \sigma) > 0$ 且 $Q := (P_{+f})_{\times \mathfrak{b}_n^{-\sigma-\eta/2}}$。我们有 $v_n(P(f)) = v_n((P_{+f})_{[0]})$ 且 $v_n(L_{P,f}) = v_n((P_{+f})_{[1]})$。利用 (10)，现在得到 $v_n(Q_{[0]}) > v_n(Q_{[1]}) \geqslant v_n(Q) - v_n(Q_{[0]}) = 0$ $\varepsilon$ $\mathbb{C}[[(\log_s \mathfrak{b}_1)^{-\mathbb{R}}; \ldots; (\log \mathfrak{b}_1)^{-\mathbb{R}}; \mathfrak{b}_1^{-\mathbb{R}}; \ldots; Q$。因此 D，而 Q 有一 $\mathfrak{b}_n^{-\mathbb{R}}]]$ $\varepsilon < 1$ $\in \mathbb{N}$ 12 $\tilde{} = + \varepsilon \mathfrak{b}_n^{-\sigma-\eta/2}$ □ 个根属于，且满足 和 s，这由定理 得出。于是 f f 符合要求。

现在假设 $P(f) = 0$，$f \prec 1$ 是拟线性的，并令 f 为其一个解。令 $I_{P,f}$ 为 $L_{P,f}$ 的指标多项式，将其视为关于 $\delta_n$ 的算子。我们将 $Z_{P,f}$ 定义为 $I_{P,f}$ 在 $\mathbb{R}$ 中的最大根。如果不存在这样的根，则令 $Z_{P,f} := v_n(f)$。

现在来证明，总存在一个阈值 $\sigma \geqslant v_n(f)$ in $\mathbb{R}$，使得对于任意 $s \in \mathbb{N}$ 以及任意满足 $P(\tilde{f}) = 0$ and $v_n(f - \tilde{f}) > \sigma$ 的 $\tilde{f}$ in $\mathbb{C}[[(\log_s \mathfrak{b}_1)^{-\mathbb{R}}; \ldots; (\log \mathfrak{b}_1)^{-\mathbb{R}}; \mathfrak{b}_1^{-\mathbb{R}}; \ldots; \mathfrak{b}_n^{-\mathbb{R}}]]$，都有 $f = \tilde{f}$。将这样的最小 $\sigma$ 记为 $\sigma_{P,f}$，并称其为 P 在 f 处的根分离。

**命题 17.** 设 $P \in \mathbb{B}[\delta_1^{\mathbb{N}} F] \setminus \mathbb{B}$ 满足 使得 $P(f) = 0$，$f \prec 1$ 是 准-线性的。 假设 $f \in \mathbb{B}$ 是一个 解，满足 该 方程。 那么

$$\sigma_{P,f} \leqslant \max(v_n(f), Z_{P,f}).$$

证明。设 $\tilde{f} \in \mathbb{C}[[(\log_s \mathfrak{b}_1)^{-\mathbb{R}}; \ldots; (\log \mathfrak{b}_1)^{-\mathbb{R}}; \mathfrak{b}_1^{-\mathbb{R}}; \ldots; \mathfrak{b}_n^{-\mathbb{R}}]]$ 是 P 的一个根，且 $\tilde{f} \prec 1$ and $f \neq \tilde{f}$。于是由注9可知，$v_n(f - \tilde{f})$ 是 $I_{P,f}$ 的一个根。因此 $\sigma_{P,f} \leqslant \max(v_n(f), Z_{P,f})$。□

## 7.3 主要算法

考虑拟线性微分方程 $P(f) = 0, f \prec 1$ with $P \in \mathscr{F}[\delta_1^{\mathbb{N}} F]$，并假设其特异解 f 属于 $\mathbb{B}$。给定 $Q1, \ldots, Q_s \in \mathscr{F}[\delta_1^{\mathbb{N}} F]$，，下面我们将介绍一种算法，用于检验 $Q1, \ldots, Q_s$ 是否在 f 处同时为零。根据归纳假设，我们假定已给出 $\mathscr{H} := (\mathbb{R}[[\mathfrak{b}_1^{-\mathbb{R}}; \ldots; \mathfrak{b}_{n-1}^{-\mathbb{R}}]] \cap \mathscr{F})(\delta_1^{\mathbb{N}} F)$ 上的零检验。特别地，可以检验 f 关于 $\mathfrak{b}_n^{-1}$ 的系数是否为零，从而计算 f 在 $\mathfrak{b}_n^{-1}$ 中的赋值。

**算法 ZeroTest($Q_1,\ldots,Q_s$)**

输入: $Q_1,\ldots,Q_s\in\mathscr{F}[\delta_1^{\mathbb{N}}F]$ 按非递减序 Ritt 秩输出： **若** 则 $Q_1(f)=\cdots=Q_s(f)=0$ 且 **否则** 为真

1 [illegible]

$Q$) 则返回 ZeroTest($S_Q$, Q1, . . ., $Q_s$)4 若 $\exists J\in\{Q2,\ldots,Q_s,P\}$, $J\ \mathrm{rem}\ Q\neq 0$ 则返回 ZeroTest($J$ rem Q, Q1, . . . , $Q_s$)5 令 $\sigma:=\max(v_n(f),v_n(L_P,f),Z_P,f,v_n(I_Q(f)),v_n(S_Q(f)))$6 返回测

证明。在步骤 2、3 和 4 中，ZeroTest 第一个参数的 Ritt 秩总是严格下降；这证明了该算法会终止。此外，如果步骤 2、3 或 4 中的某项测试成功，那么该算法显然是正确的。在步骤 1 中，注意我们假设 $Q_1\neq 0$ as 是 $\mathscr{F}[\delta_1^{\mathbb{N}}F]$ 的一个元素。因此，如果 $Q_1\in\mathscr{F}$，那么 $Q_1(f)=Q_1\neq 0$。

现在假设我们到达步骤 5。根据构造，这意味着对于所有 $J\in\{Q2,\ldots,Q_s,P\}$，$H_Q(f)\neq 0$ 且 $J\ \mathrm{rem}\,Q=0$。特别地，用 Q 对 P 进行 Ritt 约化可得关系式

$$I_Q^j S_Q^k P\ =\ U_0 Q+\cdots+U_r\delta_1^r Q, \tag{15}$$

其中 j、k $\in\mathbb{N}$，且 U0, . . . , $U_r\in\mathbb{B}[\delta_1^{\mathbb{N}}F]$。如果 $v_n(Q(f))\leqslant\sigma+v_n(L_Q,f)$，那么显然有 $Q(f)\neq 0$，因此假设 $v_n(Q(f))>\sigma+v_n(L_Q,f)$。应用命题16，我们得到一个基于网格的超幂级数 $\tilde{f}\in\mathbb{C}[[(\log_s\mathfrak{b}_1)^{-\mathbb{R}};\ldots;(\log\mathfrak{b}_1)^{-\mathbb{R}};\mathfrak{b}_1^{-\mathbb{R}};\ldots;\mathfrak{b}_n^{-\mathbb{R}}]]$ $(\tilde{\ })=0$，使得 Q f 且 $v_n(f-f)>\sigma$，其中某个 s $\in\mathbb{N}$。利用 (7)，可得

$$v_n(L_{P,\tilde{f}})\ =\ v_n(L_{P,f})\ \leqslant\ \sigma, \tag{16}$$

$$v_n(I_Q(\tilde{f}))\ =\ v_n(I_Q(f))\ \leqslant\ \sigma\quad\text{and}\quad v_n(S_Q(\tilde{f}))\ =\ v_n(S_Q(f))\ \leqslant\ \sigma. \tag{17}$$

现在 (16) 推出 $I_{P,\tilde{f}}=I_{P,f}$，因此 $Z_{P,\tilde{f}}=Z_{P,f}\leqslant\sigma$。由 (17)，我们特别得到 $I_Q(f)\neq 0$ 以及 $S_Q(f)\neq 0$。因此，将 (15) 在 f 处求值可得 $P(f)=0$。对 f 应用命题 17，得到 $\sigma_{P,\tilde{f}}\leqslant\sigma$。由于 $v_n(f-f)>\sigma$，我们得出 f = f。由 $Q(f)=0$，用 Q 对 J 进行 Ritt约化也可得，对于所有 $J\in\{Q2,\ldots,Q_n\}$，都有 $J(f)=0$。□

定理*18*。设 $\mathscr{F}\subseteq\mathscr{R}[[\mathfrak{b}_1^{-\mathscr{R}};\ldots;\mathfrak{b}_n^{-\mathscr{R}}]]\subseteq\mathbb{T}$ 是一个微分环境域（按假设，该域配有零检验）。设 $P\in\mathscr{F}[\delta_1^{\mathbb{N}}F]\setminus\mathscr{F}$ 是一个微分多项式。如果 $P(f)=0$，且 $f\prec 1$ 是一个拟线性方程，具有一个特异解 $f\in\mathscr{R}[[\mathfrak{b}_1^{-\mathscr{R}};\ldots;\mathfrak{b}_n^{-\mathscr{R}}]]$，那么 $\mathscr{F}(\delta_1^{\mathbb{N}}f)\subseteq\mathscr{R}[[\mathfrak{b}_1^{-\mathscr{R}};\ldots;\mathfrak{b}_n^{-\mathscr{R}}]]$ 仍然是一个微分环境域。

证明。我们的零检验在 $\mathscr{F}[\delta_1^{\mathbb{N}}f]$ 上可以直接扩展到商域 $\mathscr{F}(\delta_1^{\mathbb{N}}f)$，因为一个分式为零当且仅当其分子为零。我们可以使用第2.4、3.4和5.3节中的算法，计算 $\mathscr{F}(\delta_1^{\mathbb{N}}f)$ 中元素的展开式。□

## 7.4 一个 具体 示例： Lambert W 函数

根据 例 7、10 和15，考虑 特定的超幂级数 解$U(x)=U$的 $P(f)=0$，$f\prec 1$并 令

$$W(x)\ :=\ \log x\cdot U(\log\log x)+\log x-\log\log x.$$

我们将使用**ZeroTest** 来证明 $W(x)$ 满足

$$W(x)\,\mathrm{e}^{W(x)}\ =\ x,$$

即。，$W = W(x)$ 是 Lambert W 函数在无穷处的一个实分支 [3]。 为此，只需验证它 满足 即可

$$(e^x U + e^x - x)\, e^{e^x U + e^x - x} \;=\; e^{e^x}. \tag{18}$$

在例15中，我们计算得 $e^{e^x U + e^x - x} = e^{-x} e^{e^x} (V + 1)$。那么等式(18) 等价于$Q(V) = 0$，其中

$$Q \;:=\; (U + 1 - x e^{-x})\,(1 + F) - 1 \;\in\; \mathscr{F}(U)[\delta_1^{\mathbb{N}} F].$$

现在我们对 Ω、V 和 Q 应用 ZeroTest 算法，其中 $\mathscr{F}$ 上。由于 $I_Q = S_Q = U + 1 - x\, e^{-x}$, 因此有 $v_2(I_Q(V)) = v_2(S_Q(V)) = 0$，于是算法进入步骤 4。Ritt 约化得到

$$I_Q^2\, \Omega \;=\; -x^{-1} I_Q \delta_1 Q + e^x P(U)\, Q + e^x P(U).$$

由于 U 是 P 的根，我们得到 $\Omega \operatorname{rem} Q = 0$，算法因此进入步骤 5。写作 $L_{\Omega,V} F = e^x (U + x^{-1} \delta_1 U) F - x^{-1} \delta_1 F = e^x (U + \delta_2 U) F - \delta_2 F$，则有 $v_2(L_{\Omega,V}) = 0, I_{\Omega,V}(N) = N$，因此 $Z_{\Omega,V} = 0$。因此，我们取 $\sigma := 1$。由于 $L_{Q,V} F = I_Q F$，最后只需在步骤 6 测试 $v_2(Q(V)) > 1$ 是否成立:

$$Q(V) \;=\; (1 - x e^{-x} + O(x e^{-2x}))\,(1 + x e^{-x} + O(x^2 e^{-2x})) - 1 \;=\; O(x^2 e^{-2x}).$$

因此，我们最终得到V是Q的根，从而证明$W$是LambertW函数的一个实分支。

# 参考文献

[1] M. Aschenbrenner、L. van den Dries 和 J. van der Hoeven。《渐近微分代数与超渐近级数的模型论》。《数学年刊研究》第195卷。普林斯顿大学出版社，2017年。[2] F. Boulier。《微分代数中若干算法的研究与实现》。博士论文，里尔第一大学，1994年。[3] R. M. Corless、G. H. Gonnet、D. E. G. Hare、D. J. Jeffrey 和 D. E. Knuth。论朗伯 W 函数。《计算数学进展》，5(4):329–359，1996年。[4] B. I. Dahn 和 P. Göring。关于指数对数项的笔记。《数学基础》，127:45–50，1986年。[5] J. Denef 和 L. Lipshitz。代数微分方程的幂级数解。《数学年刊》，267:213–238，1984年。[6] J. Denef 和 L. Lipshitz。微分方程的判定问题。《符号逻辑杂志》，54(3):941–950，1989年。[7] J. Écalle。《可解析函数导论与杜拉克猜想的构造性证明》。Hermann，数学新知丛书，1992年。[8] K. O. Geddes 和 G. H. Gonnet。计算符号极限的一种新算法：使用分层级数。载于 ISSAC '88 会议论文集，《计算机科学讲义》第358卷，第490–495页。施普林格，1988年。[9] J. van der Hoeven。《渐近分析中的有效工具及其应用》。技术报告 LIX/RR/94/09，LIX，巴黎综合理工学院，法国，1994年。[10] J. van der Hoeven。《自动渐近分析》。博士论文，巴黎综合理工学院，帕莱索，法国，1997年。[11] J. van der Hoeven。代数微分方程的复超渐近级数解。技术报告 2001-34，奥赛大学，2001年。[12] J. van der Hoeven。形式幂级数的一种新的零测试。载于 Teo Mora（编），ISSAC '02 会议论文集，第117–122页。法国里尔，2002年7月。[13] J. van der Hoeven。放松，但别太懒。JSC，34:479–542，2002年。[14] J. van der Hoeven。《超渐近级数与实微分代数》，《数学讲义》第1888卷。施普林格出版社，2006年。[15] J. van der Hoeven。计算 D-代数幂级数。AAECC，30(1):17–49，2019年。[16] J. van der Hoeven。《快乐的写作者》。《GNU TeXmacs 使用指南》。Scypress，2020年。

[17] J. van der Hoeven 和 J. R. Shackell。零测试算法的复杂度界。JSC，41:1004–1020，2006年。[18] E. L. Ince。《常微分方程》。Longmans, Green and Co.，1926年。多佛出版社于1944年和1956年重印。[19] A. G. Khovanskii。《少项式》，数学专著译丛第88卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1991年。[20] E. R. Kolchin。《微分代数与代数群》。学术出版社，纽约，1973年。[21] T. Levi-Civita。关于作为解析元素的实际无穷大与无穷小。威尼斯研究所学报，7:1765–1815，1893年。[22] A. Péladan-Germa。《微分环扩张中的有效零测试》。博士论文，Gage，巴黎综合理工学院，帕莱索，法国，1997年。[23] D. Richardson、B. Salvy、J. Shackell 和 J. van der Hoeven。指数-对数函数的展开式。载于 ISSAC '96 会议论文集，第309–313页。瑞士苏黎世，1996年7月。[24] R. H. Risch。分析中初等函数的代数性质。《美国数学杂志》，4(101):743–759，1975年。[25] J. F. Ritt。《微分代数》。美国数学会，纽约，1950年。[26] J. Shackell。函数等价的微分方程方法。载于 ISSAC '89 会议论文集，第7–10页。俄勒冈州波特兰，美国计算机协会，纽约，1989年。美国计算机协会出版社。[27] J. Shackell。由微分方程定义的函数域中的零等价。美国数学会会议录，336(1):151–172，1993年。