arXiv:2602.01190v1 [math.CA] 1 Feb 2026

平移可测集

M. Laczkovich

2026年2月3日

摘要

我们证明，若 A，B 是 $\mathbb{R}$ 的紧子集，且 B 在 B 的每一点处的上密度均为正，则存在一个闭零测集 $N \subset A$，使得 $N + B = A + B$。作为推论，我们发现，若 A，$B \subset \mathbb{R}$ 可测，并且 A 的每个零测子集 N 都能平移到 B 中（也就是说，若 B 含有 N 的一个适当平移），则存在一个零测集 N_0，使得 $A \setminus N_0$ 能平移到 B 中。这个主题与实数的加法性质理论中的一些一致性结果有关。

1 引言与主要结果

我们称集合 $A \subset \mathbb{R}$ 可以平移到集合 B，如果存在一个实数 x，使得 $A + x = \{a + x\colon\ a \in A\} \subset B$。集合 $A \subset \mathbb{R}$ 的勒贝格测度记为 $|A|$。如果 $|N| = 0$，则集合 $N \subset \mathbb{R}$ 是零测的。

我们从如下问题开始。设 A 与 B 是 $\mathbb{R}$ 的可测子集，使得 A 的每一个零测子集都能平移到 B中。这一条件是否蕴含 A 可以平移到 B中？答案是否定的：若 N 是一个单点集（或更一般地，一个非空可数集）且 $B = \mathbb{R} \setminus N$，则每一个零测集都能平移到 B中，但 $\mathbb{R}$ 不能平移到 B中。不过，我们证明如下结论。

[1]**关键词：**可测集的平移，强零测集[2]**MSC 2000 学科分类：**28A05, 28A99

定理 1.1. 若 A、$B \subset \mathbb{R}$ 可测，且 A 的每个零测子集都能平移到 B 中，则存在零测集 $N \subset A$，使得 $A \setminus N$ 能平移到 B 中。

若 B 是闭的，则定理 1.1 的陈述是显然的；而且，我们可以得出 A 可以平移到 B中。事实上，设 C 是 A 的一个可数子集，使得 C 的闭包等于 A。显然，若 C 可以平移到B中且 $C+x \subset B$，则 $A+x \subset B$。我们证明，若 B 是一个在密度拓扑中闭的 G_δ 集，则同样的结论成立。

我们用 $d(A,x)$ 和 $\overline{d}(A,x)$ 分别表示集合 $A \subset \mathbb{R}$ 在点 x 处的密度和上密度。称集合 $G \subset \mathbb{R}$ 为 d-开，如果 G 是勒贝格可测的，并且对每个 $x \in A$ 都有 $d(A,x) = 1$。密度拓扑定义为所有 d-开集的集合。众所周知，密度拓扑是 $\mathbb{R}$ 上的完全正则豪斯多夫拓扑（见 [6, 第 148–152 页]）。称集合 $B \subset \mathbb{R}$ 为 d-闭，如果 $\mathbb{R} \setminus B$ 是 d-开的；也就是说，如果 B 包含每一个满足 $\overline{d}(B,x) > 0$ 的点 x。

定理 1.2. 设 $A \subset \mathbb{R}$ 是勒贝格可测的，并假设 $B \subset \mathbb{R}$是 d-闭的，且在欧几里得拓扑中是 G_δ。若 A 的每个零测子集都能平移到 B中，则 A 能平移到 B中。

定理 1.2 蕴含定理 1.1。事实上，假设 A，B 是可测的，且 A 的每个零测子集都能平移到 B中。令 $B_1 = B \cup \{x \in \mathbb{R}\colon\ d(B,\ x) > 0\}$。则 B_1是 d-闭的，且由勒贝格密度定理可知 $B_1 \setminus B$是零测的。设 B_2 是一个 G_δ 集，使得 $B_1 \subset B_2$ 且 $B_2 \setminus B_1$ 是零测的。则 B_2 也是 d-闭的，且 $B_2 \setminus B$ 是一个零测集。由于 A 的每个零测子集都能平移到 B_2中，由定理 1.2 可知 A 能平移到 B_2 中。若 $A + x \subset B_2$，则 $(A \setminus N) + x \subset B$，其中 $N = (B_2 \setminus B) - x$ 是一个零测集，从而证明了定理 1.1。

A 可平移到 B 这一条件，可以用集合的和表述如下。若 $B \subset \mathbb{R}$，则记 $-B = \{-x\colon\ x \in B\}$和 $B^c = \mathbb{R} \setminus B$。集合 $\{a+b\colon\ a \in A,\ \ b \in B\}$ 记作 $A + B$。

引理 1.3。对于每个 A、$B \subset \mathbb{R}$，以下命题等价。

(i) A无法翻译成 B。

(ii) $A+(-B^c)=\mathbb{R}$.

证明。集合 A 无法翻译成 B，当且仅当对于每个 $x\in\mathbb{R}$，都存在一个 $a\in A$ 使得 $x+a\notin B$；也就是说，$x+a\in B^c$。因此，（i）对于每个 $x\in\mathbb{R}\iff(-A)+B^c=\mathbb{R}\iff A+(-B^c)=\mathbb{R},\iff x\in(-A)+B^c$。 □

根据上述引理，定理 1.2 的陈述等价于以下结论。设 A 是可测的，且 B 是 d-开集，且 F_σ。若$A+B=\mathbb{R}$，则存在一个零测集 $N\subset A$ 使得 $N+B=\mathbb{R}$。我们将证明一个更强的结论。

定理 1.4。设 A 可测，B 是 F_σ，且对每个 $x\in B$，$d(B,x)\bar{>}0$。那么存在一个零测集 $N\subset A$，使得 $N+B=A+B$。

如果 A和 B 是紧集，我们还能得到更强的结论。

定理 1.5。设 A、B 是 $\mathbb{R}$ 的紧子集，且对每个 $x\in B$，$d(B,\bar{x})>0$。那么存在一个闭零测集 $N\subset A$，使得 $N+B=A+B$。

定理 1.4 和定理 1.5 将在下一节证明。

我们最后给出一些评注和问题。

关于定理 *1.1* 的评注。我们可以问，下面这个更强的命题是否成立。

(T)：如果 A、$B\subset\mathbb{R}$ 可测，且 A 的每个零测子集都能平移到 B中，那么存在一个可数集 $C\subset A$，使得 $A\setminus C$ 能平移到 B中。

答案是否定的，至少在某些一致性假设下如此。若集合 N 的每个零测集都能平移到 N之外，则称 N 为强零测 集。因此，如果 N 是一个不可数的强零测集，那么每个零测集都能平移到$\mathbb{R}\setminus N$中，但对于任何可数集 C，$\mathbb{R}\setminus C$ 都不能平移到 $\mathbb{R}\setminus N$ 中。与 ZFC 相容的是，存在基数为连续统的强零测集（见 [2, 推论 8.20，第 304]页），因此 (T) 在某些一致性假设下不成立。

另一方面，以下说法也与 ZFC 相容：每个强瘦集都是可数的（见第 385] 页的 [2, 元定理 9.2）。因此，在情形 $A=\mathbb{R}$ 下，(T) 一致地成立。这引出了以下问题。

问题 1.6. *(T)* 是否与ZFC相容?

问题 1.7. 假设 $A, B \subset \mathbb{R}$ 是博雷尔集。若 A 的每个零测子集都可以平移到 B 中，那么是否存在一个可数集 $C \subset A$，使得 $A \setminus C$ 可以平移到 B 中?

关于定理 1.4 的注记。 </style}显然，对 B 的某些条件是必要的：若 $|A| > 0$ 且 B 是可数无穷，则该定理的结论不成立。更一般地，假设 B 非空，并且具有这样的性质：对于每个零测集 N， $N + B$ 都是零测的。显然，若 $|A| > 0$，则对于每个零测集 $N \subset A$，都有 $N + B \neq A + B$。已知在马丁公理下，存在这样一个基数为连续统基数的集合 B [5]。另见 [4, 定理 12], ，其中在（CH）下构造了这样一个集合。根据 [4, 定理 13], ，与 ZFC 相容的是，存在一个具有上述性质的共解析集 B。

问题 1.8。令(S) 表示以下命题：如果 A、$B \subset \mathbb{R}$ 是可测的，且 B 是不可数的，那么存在一个零测集 $N \subset A$ 使得$N + B = A + B$。(S) 与ZFC相容吗?

注意到 (S) 蕴含 (T)。事实上，设 A， B 是可测的，并且 A 的每个零测子集都可以平移到 B 中。如果 B^c 是可数的，那么$A \setminus B^c$ 可以平移到 B 中；事实上， $A \setminus B^c \subset B$。设 B^c 是不可数的。如果 N 可以平移到 B 中，那么根据引理 1.3， $N + (-B^c) \neq \mathbb{R}$。如果对每个零测集 $N \subset A$ 都成立，那么根据 (S)， $A + (-B^c) \neq \mathbb{R}$，因此 A 可以平移到 B 中。因此，如果 (S) 与 ZFC 相容，那么 (T) 也与 ZFC 相容。

关于定理 *1.5* 的评注。 Erd˝os-Kunen-Mauldin 定理指出，如果$B \subset \mathbb{R}$ 是一个非空完全集，那么存在一个完全零测集 $N \subset \mathbb{R}$ 使得 $N + B = \mathbb{R}$。（参见 [4, 定理 1] ，以及 [3], ，其中证明了一个更强的结论。）Erd˝os-Kunen-Mauldin 定理与定理 1.5 的一个常见推广形式如下：如果 A， B 是非空完全集，那么存在一个闭零测集 $N \subset A$ 使得 $N + B = A + B$。遗憾的是，这一结论并不成立，正如我们在第 3 节中所示。

问题1.9. 假设 A、$B \subset \mathbb{R}$ 是完美的。是否存在适当的（不必是闭的）零测集 $N \subset A$，使得 $N + B = A + B$?

2 定理1.4和1.5的证明

引理2.1. 若 A 可测且 $0 < |A| < \infty$，则对每个 $\varepsilon > 0$，存在紧集 $P \subset A$，使得 $|A \setminus P| < \varepsilon$ 且 $d(P, x) \geq 1/2$ 对每个 $x \in P$成立。

证明。给定 $\varepsilon > 0$，并取正数 ε_0，ε_1，……，使得$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \varepsilon$。取 K 为 A 的紧子集，使得 $|A \setminus K| < \varepsilon_0$。

令 $\mathcal{I}$ 表示满足 $|I| < 1$ 和 $|I \cap K| > |I|/2$ 的闭区间 I 的集合。那么 $\mathcal{I}$ 是 K 的密度点集的 Vitali覆盖。根据 Vitali覆盖定理，存在 $\mathcal{I}$ 中的两两不交元素序列 I_1^1，I_2^1，……，使它们覆盖 K中几乎处处的密度点，从而覆盖 K中几乎处处的点。因此存在整数 N_1，使得 $|K \setminus P_1| < \varepsilon_1$，其中 $P_1 = \bigcup_{n=1}^{N_1} I_n^1$。

在区间 I_n^1 中的每一个区间内重复上述论证，我们得到两两不交的闭区间 I_1^2、……、$I_{N_2}^2$ 以及集合 $P_2 = \bigcup_{n=1}^{N_2} I_n^2$，它们具有以下性质：

- 对于每个 $1 \leq n \leq N_2$，存在一个 m 使得 $I_n^2 \subset I_m^1$；
- $|I_n^1 \cap P_2 \cap K| > |I_n^1|/2$ 对于每个 $n = 1$、……、N_1；
- $|I_n^2| < 1/2$ 并且对于每个 $1 \leq n \leq N_2$，都有 $|I_n^2 \cap K| > \frac{2}{3} \cdot |I_n^2|$；
- $|K \setminus P_2| < \varepsilon_2$。

重复这一构造，对于每个 $k \geq 2$，我们得到两两不交的闭区间 I_1^k、……、$I_{N_k}^k$ 以及集合 $P_k = \bigcup_{n=1}^{N_k} I_n^k$，它们具有以下性质：

- 对于每个 $1 \leq n \leq N_k$，都存在一个 m，使得 $I_n^k \subset I_m^{k-1}$；
- $|I_n^j \cap P_k \cap K| > \frac{j}{j+1} \cdot |I_n^j|$ 对于每个 $j = 1$，……，$k-1$ 以及 $n = 1$，……，N_j；
- $|I_n^k| < 1/k$ 并且 $|I_n^k \cap K| > \frac{k}{k+1} \cdot |I_n^k|$ 对于每个 $1 \leq n \leq N_k$；
- $|K \setminus P_k| < \varepsilon_k$。

设 $P=\bigcap_{k=1}^{\infty}P_k$。那么 P 是闭集，$P\subset K\subset A$，$|A\setminus P|<\varepsilon$，并且对每个 $x\in P$，$d(P,\ x)\geq 1/2$。事实上，若 $x\in P$，则存在整数 n_k，使得 $x\in I_{n_k}^k(k=1,\ 2,\ \ldots)$。对每个 k，我们有

$$|I_{n_k}^k\cap P|=\lim_{m\to\infty}\left|I_{n_k}^k\cap P_m\right|\geq\tfrac{k}{k+1}\cdot|I_{n_k}^k|.$$

令 $J_k=[x-h_k,x+h_k]$，其中 $h_k=\min\{h\geq 0:\ I_{n_k}^k\subset[x-h,x+h]\}$，可得 $|J_k|\leq 2|I_{n_k}^k|$ 以及 $\liminf_{k\to\infty}|J_k\cap P|/|J_k|\geq 1/2$，从而证明了 $d(P,\ x)\geq 1/2$。□

下面的引理是卢津-缅乔夫定理 [1,（定理 6.4，第 20] 页）的一个变体。

引理 2.2。设 A 可测，$F\subset A$ 为紧集，并且对每个 $x\in F$ 都有 $d(A,x)>0$。则存在一个紧集 P，使得 $F\subset P\subset A$ 且对每个 $x\in P$ 都有 $d(P,x)>0$。

证明。令 $a=\min F$，$b=\max F$。不妨设 A 在点 a 处的右上密度为正。事实上，否则 A 在 a 处的左上密度必为正，于是 $|A\cap(-\infty,\ a)|>0$。在这种情况下，存在 A 的一个密度点 a_1，使得 $a_1<a$，于是我们可以用 $F\cup\{a_1\}$ 替换 F。同理，不妨设 A 在点 b 处的左上密度为正。

令 $(a_n,\ b_n)(n=1,\ 2,\ \ldots\ldots)$ 为 $[a,b]\setminus F$ 的连通分支。对于每个 n，令 $(x_k^n)_{k=-\infty}^{\infty}$ 为一个序列，使得对每个整数 k 都有 $a_n<x_k^n<x_{k+1}^n<b_n$，$\lim_{k\to-\infty}x_k^n=a_n$ 且 $\lim_{k\to\infty}x_k^n=b_n$，并且

$$\lim_{k\to-\infty}(x_{k+1}^n-x_k^n)/(x_k^n-a_n)=\lim_{k\to\infty}(x_{k+1}^n-x_k^n)/(b_n-x_{k+1}^n)=0.$$

根据引理2.1，对于每个 n 和 k，存在一个紧集 $P_k^n\subset[x_k^n,x_{k+1}^n]\cap A$，使得 $|P_k^n|\geq|[x_k^n,x_{k+1}^n]\cap A|/2$，且 $d(P_k^n,\ x)^{-}\geq 1/2$ 对每个 $x\in P_k^n$ 都成立。（如果 $[x_k^n,x_{k+1}^n]\cap A$ 是零测的，则取 $P_k^n=\emptyset$。）

令 $P=F\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}P_k^n$。则 P是紧的，$F\subset P\subset A$，并且容易验证，对于每个 $x\in P$，$d(\bar{P},\ x)>0$。□

定理 1.5 的证明

设 A, $B \subset \mathbb{R}$ 是紧的，并假设 B 在 B的每一点处的上密度均为正。

令 $\mathcal{N}$表示满足 $N+B = A+B$ 的 A 的闭子集族。则 $\mathcal{N}$ 非空，因为 $A \in \mathcal{N}$。如果 $N_1 \supset N_2 \supset \ldots$ 是 $\mathcal{N}$ 中元素的嵌套序列，并且 $N = \bigcap_{i=1}^{\infty} N_i$，那么 $N \in \mathcal{N}$。事实上，令 $x \in A + B$ 为任意元素。对于每个 i，都有 $N_i \in \mathcal{N}$，因此 $x = y_i + z_i$，其中 $y_i \in N_i$ 且 $z_i \in B$。存在一个指标序列 i_k，使得子序列 y_{i_k} 和 z_{i_k} 收敛。如果 $y_{i_k} \to y$ 且 $z_{i_k} \to z$，那么 $y \in N$、$z \in B$ 和 $y + z = x$，从而证明了 $x \in N + B$。由于这对每个 $x \in A + B$ 都成立，我们有 $N + B \supset A + B$ 和 $N \in \mathcal{N}$。

众所周知，$\mathbb{R}$ 的任意超限严格递减闭子集序列都是可数的。（见 [7, 定理 51，第 66] 页。）因此，$\mathcal{N}$ 中任意超限严格递减序列的交集都属于 $\mathcal{N}$。这说明 $\mathcal{N}$ 含有一个极小元（相对于包含关系）。设 $N \in \mathcal{N}$ 是 $\mathcal{N}$的一个极小元；我们证明 N 是零测的。

假设 $|N| > 0$，并设 $a \in N$是 N的一个密度点。由于 N是极小的，$N_n = N \setminus (a - 1/n,\ a + 1/n) \notin \mathcal{N}$对每个 $n = 1, 2, \ldots$都成立。因此 $N_n + B \neq A + B = N + B$，我们可以选取一个元素 $c_n \in (N + B) \setminus (N_n + B)$。于是，对适当的 $a_n \in N$和 $b_n \in B$，有 $c_n = a_n + b_n$；并且只要 $c_n = x + y$满足 $x \in N$和 $y \in B$，就有 $x \in (a - 1/n,\ a + 1/n)$。特别地，我们有$a_n \in (a - 1/n,\ a + 1/n)$。

转而选取一个适当的子序列后，我们可以假设序列 b_n收敛。假设 $b_n \to b$，则 $b \in B$。根据假设，我们有 $d(B,\ b) > 0$，因此集合 $b - B$ 在原点处具有正上密度。由于原点是 $N - a$的密度点，可知 $(N - a) \cap (b - B)$具有正测度。令 $|(N - a) \cap (b - B)| = m$。

众所周知，也很容易证明，若 $E, F \subset \mathbb{R}$ 可测，则函数 $h \mapsto |E \cap (F + h)|$ 连续。因此，函数$h \mapsto m(h) = |(N - a) \cap (b + h - B)|$ 连续。由于 $m(0) = m > 0$，存在一个 $\delta > 0$，使得对每个 $|h| < \delta$，都有 $|(N - a) \cap (b + h - B)| > m/2$。

令 $Q_h = (N-a) \cap (b+h-B)$。若 $u \in Q_h$，则 $u+a \in N, b+h-u \in B$，且 $a+b+h = (u+a) + (b+h-u)$。若 $|h| < \delta$，则由$|Q_h| > m/2$可知，存在元素 $u_1, u_2 \in Q_h$，使得 $|u_1 - u_2| > m/4$；否则，Q_h 就能被一个长度为 $m/4$ 的线段覆盖，这是不可能的。

由于 $c_n \to a+b$，存在一个 n，使得 $|c_n - a - b| < \delta$ 且 $n > 8/m$。固定这样的指标 n，并令 $h = c_n - a - b$。于是存在元素 u_1，$u_2 \in Q_h$，使得 $|u_1 - u_2| > m/4$，并且

$$c_n = a+b+h = (u_1+a) + (b+h-u_1) = (u_2+a) + (b+h-u_2).$$

这里 $u_i + a \in N$ 且 $b+h-u_i \in B$ （$i = 1, 2$），因此 u_1+a，$u_2+a \in$（$a-1/n$，$a+1/n$）。然而，这与 $2/n < m/4$ 矛盾。这个矛盾证明了 $|N| = 0$。□

定理 1.4 的证明

假设 A 可测，B 是 F_σ，并且 B 的上密度在 B 的每一点都为正。

我们有 $A = N_0 \cup A'$，其中 N_0 是零测集，A' 是 F_σ。令 $A' = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ 和 $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$，其中 F_k 和 P_k 是紧集。我们不妨假设 $F_1 \subset F_2 \subset \ldots$ 且 $P_1 \subset P_2 \subset \ldots$。只需证明，对于每个 $k = 1, 2, \ldots\ldots$，都存在一个零测集 $N_k \subset A$，使得 $N_k + B \supset F_k + P_k$。事实上，如果这成立，那么 $N = \bigcup_{k=0}^{\infty} N_k$ 是零测集，并且

$$N + B = (N_0 + B) \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} (N_k + B) \supset (N_0 + B) \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} (F_k + P_k) =$$
$$(N_0 + B) \cup (A' + B) = A + B.$$

固定 k。对于每个 $\bar{x} \in P_k$，都有 $d(B, x) > 0$。由引理 2.2，存在一个紧集 Q_k，使得 $P_k \subset Q_k \subset B$，并且对于每个$x \in Q_k$，都有 $d(Q_k, \bar{x}) > 0$。由定理 1.5，存在一个闭零测集 $N_k \subset F_k$，使得$N_k + Q_k = F_k + Q_k$。于是
$N_k + B \supset N_k + Q_k = F_k + Q_k \supset F_k + P_k$。□

3 一个例子

定理 3.1。 设 A 是一个具有正测度的无处稠密紧完美集。则存在一个紧完全集 B，使得对于 A的每个闭零测子集 N，都有 $N+B \neq A+B$。

证明。 我们用 cl E和 int E分别表示集合E的闭包和内部。对于每个正整数 k，令 i_k 表示满足$2^i \mid k$的最大整数 i。那么对于每个 k，都有 $i_k < k$；并且对于每个非负整数 m，都存在无穷多个 k 满足 $i_k = m$。

令 X为 A的一个可数稠密子集，并令 x_0，x_1，... 为 X的一个枚举。我们构造一个序列(y_k)，使得 $B = \text{cl}\,(\{y_k\})$是完美且紧的；并且只要 $x_k+y_k = x+y$，其中 $x \in A$且 $y \in B$，就有 $x = x_k$且 $y = y_k$。由此可知，若 $N \subset A$ 且 $N + B = A + B$，则对每个 k都有 $x_k \in N$；也就是说，$X \subset N$。因此，N 必定在 A 中稠密；进而，若 N 是闭集，它就必定等于 A，不可能是零测集。

现在来构造数 y_k。令 $y_0 = 0$。由于 $(x_0 + y_0 - A)^c$ 是处处稠密的开集，我们可以选取两两不交的闭区间 $I_n^0 \subset (x_0 + y_0 - A)^c$，使得

$$\text{cl}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^0\right) = \{y_0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^0.$$

假设 $k > 0$，且我们已经定义了点 y_0、.....、y_{k-1} 以及闭区间 I_1^{k-1}，I_2^{k-1}、..... ，使得

$$\text{cl}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^{k-1}\right) = \{y_0, \ldots, y_{k-1}\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^{k-1}.$$

集合 $G_k = \bigcap_{i=0}^{k-1} (y_i - x_k + A)^c$ 处处稠密且为开集。因此，我们可以选取一点 $y_k \in G_k \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{int}\ I_n^{k-1}$，使得 $0 < |y_k - y_{i_k}| < 1/2^k$。

由于 $(x_k + y_k - A)^c$是处处稠密的稠密开集，我们可以选取两两不交的闭区间

$$I_n^k \subset (x_k + y_k - A)^c \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{int}\, I_n^{k-1}$$

使得

$$\operatorname{cl}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^k\right) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^k\right) \cup \{y_0, \ldots, y_k\} \subset (x_k + y_k - A)^c \cup \{y_0, \ldots, y_k\}. \quad (1)$$

这样，我们为每个 $k \geq 0$ 和 $n \geq 1$ 定义了点 y_k 和区间 I_n^k。令 $Y = \{y_0, y_1, \ldots\}$，并令 $B = \operatorname{cl}(Y)$。那么 B 是一个紧集，因为 Y 有界。我们证明 B 是完美的。事实上，若 $y \in B \setminus Y$，那么 y 不是 B 的孤立点，因为 y 是 (y_k) 的一个子序列的极限。另一方面，若 $y = y_m$，那么对无穷多个 k，有 $i_k = m$。因此，对无穷多个 k，有 $0 < |y_k - y_m| < 1/2^k$，这证明 y_m 也不是 B 的孤立点。

由构造可知，对每个 k，都有 $B \subset \operatorname{cl}(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^k)$。因此，由 (1) 可得

$$B \subset (x_k + y_k - A)^c \cup \{y_0, \ldots, y_k\} \qquad (k = 0, 1, \ldots). \quad (2)$$

假设 $x_k + y_k = x + y$，其中 $x \in A$ 且 $y \in B$。那么 $y = x_k + y_k - x \in x_k + y_k - A$，于是由 (2) 得到 $y \in \{y_0, \ldots, y_k\}$。若 $y \neq y_k$，则 $y_k = x + y - x_k \in \bigcup_{i=0}^{k-1} (y_i - x_k + A) = (G_k)^c$，这与 $y_k \in G_k$ 矛盾。因此 $y = y_k$，进而 $x = x_k$。如上所见，这意味着每当 $N + B = A + B$ 且 $N \subset A$ 时，N 必须在 A 中稠密，因此它不可能是 A 的闭零测子集。□

致谢

作者获得了匈牙利国家科学研究基金会的资助，项目编号：K146922。

参考文献

[1]A. M. Bruckner： *Differentiation of real functions.* 第二版：CRM专著丛书，第5卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1994年。

[2] L. Bukovský：实数直线的结构。IMPAN 数学专著（新系列），71，Birkhäuser/施普林格巴塞尔股份公司，巴塞尔，2011年。[3] P. Eliaš，《狄利克雷集、Erdős-Kunen-Mauldin 定理与实数的解析子群》，美国数学会会刊**139**（2011），第6期，2093–2104页。[4] P. Erdős、K. Kunen、R.D. Mauldin，《实数集的若干加法性质》，《数学基础》**113**（1981），第3期，187–199页。[5] H. Friedman、M. Talagrand，《一个奇异集合》，《数学科学通报》（2）**104**（1980），第4期，337–340页。[6] J. Lukeš、J. Malý、L. Zajíček：实分析与位势论中的精细拓扑方法。数学讲义，1189，施普林格出版社，柏林，1986年。[7] W. Sierpiński：一般拓扑学。多佛出版社，2000年。重印1956年由多伦多大学出版社出版的著作。

M. Laczkovich
Professor emeritus of Mathematics at theDepartment of Analysis,
Eötvös Loránd University, Budapest andDepartment of Mathematics,
University College LondonE-mail: miklos.laczkovich@gmail.com