arXiv:2602.01191v1 [math.AG] 1 Feb 2026

顽固多项式

LORENZO BALDI、GRIGORIYBLEKHERMAN、KHAZHGALI KOZHASOV、
DANIEL PLAUMANN、BRUCE REZNICK 和 RAINER SINN

Abstract. 非负多项式与平方和之间的关系是实代数几何中的一个经典课题。我们研究实代数簇 X 上的 *stubborn polynomials* f：它们是在 X 上非负的多项式，且其任何奇数次幂都不是平方和。此前，顽固多项式仅在全局非负的情形下得到研究，相关结果也仅限于在 $\mathbb{P}^2$ 上非负的多项式。我们全面刻画了光滑曲线上的顽固多项式，证明光滑全实曲线上的一个多项式是顽固的，当且仅当它的所有零点都是实数。这意味着低次时存在没有顽固多项式的光滑曲线，而在正亏格曲线上，次数充分高时必定存在顽固多项式。我们还探讨了奇异曲线和可约曲线上更为微妙的情形。虽然实根性始终意味着顽固性，但也存在完全没有顽固多项式的奇异曲线。

随后，我们分析三元六次型的情形，即 $\mathbb{P}^2$ 上次数为 6 的多项式。我们证明了 Blekherman、Kozhasov 和 Reznick 提出的猜想：非负三元六次型是顽固多项式，当且仅当其实 delta 不变量至少为 9。为分析这一情形，我们研究了将顽固多项式从曲线提升到高维簇的相关结果，并运用了弱德尔佩佐曲面的理论。我们还结合顽固多项式的结构性质，给出了许多明确的例子。

1. 引言

非负多项式及其与平方和之间的关系，是实代数几何中的一个基础性课题。Hilbert 证明了 [Hil88] 存在一些非负多项式，它们不是多项式平方和。希尔伯特第十七问题 [Hil02],由 Artin [Art27],以肯定的答案回答了这样的问题：每个非负多项式是否都是有理函数的平方和。我们感兴趣的是理解一种介于多项式平方和与有理函数平方和之间的非负性证书：哪些非负多项式f 具有这样的性质，即某个奇数次幂 f^{2k+1} 是多项式的平方和？满足 f 不存在任何奇数次幂 f^{2k+1} 是平方和的多项式，称为顽固的。

对顽固多项式的系统研究始于 [BKR24] ，针对全局非负多项式（即 f 在环境空间上非负）。在这项工作之前，人们只知道一些零星的例子，参见 [Ste79]。我们研究实射影簇上的顽固多项式。与全局非负多项式的情形一样，我们发现，簇上非负多项式的顽固性与其实零点的几何性质密切相关。在这项工作中，我们显著加深了对这种关系的理解。

我们的第一个结果是关于不可约射影曲线上的多项式。对于光滑射影曲线，我们得到了用其根刻画顽固多项式的一个令人惊讶的结果。我们称形式（即齐次多项式） F 在实曲线 C 上是实根的，如果由 F 的消失所定义的超曲面与 C 仅相交于实点。在下文中，称代数簇 X 是全实 的，如果 $X(\mathbb{R})$在 $X(\mathbb{C})$中扎里斯基稠密。

Date：2026年2月3日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：14P99、14H99、14J26。L. Baldi 获得了洪堡研究奖学金博士后项目的资助。

定理 1.1 （见定理 3.2、3.4 和 3.5）。 设 $X \subset \mathbb{P}^n$ 为一条不可约的全实射影d-正规曲线。设 $F \in \mathbb{R}[X]_{2d}$ 在 X（$\mathbb{R}$）上非负 但不是平方和。考虑以下条件：

(1) F 在 X 上是实根的，且零点位于光滑点；
(2) F 是顽固的。

那么(1) $\Longrightarrow$ (2)；若 X 光滑，则(2) $\Longrightarrow$ (1)。此外，若 X 是亏格为$g \geq 1$ 的光滑曲线，且 d 足够大，则 $\mathbb{R}[X]_{2d}$中存在顽固形式。

关于 d-正规性的定义，参见第 2 节。对于射影正规（因而光滑）的曲线，上述定理意味着，F 在 X 上是顽固的，当且仅当它是实根的。在这种情况下，等价关系 (1) $\Longleftrightarrow$ (2) 的证明依赖于 [Sch11、BBS24]中的结果。它带来了一些意想不到的推论。首先，锥 $P_{X,2d}$ 中次数为 $2d$ 的非负形式（且不是平方）的极射线，只有特殊的那些才可能是顽固的。这不同于关于 $\mathbb{P}^2$ ([BKR24, 猜想 6]) 的猜想情形：该猜想认为，非负多项式锥中每条不是平方的极射线都是顽固的。其次，将这一等价关系与[BBS24，推论 3.4.10], 结合可知，对于足够大的 d，锥 $P_{X,2d}$ 对任意光滑实曲线 X 都包含顽固形式，见定理 1.1 的第二部分。然而，也存在一些光滑实曲线，完全不存在次数较小的顽固形式 d！我们在第 4 节给出这类曲线的若干构造。基于这一观察，对于给定的全实射影代数簇 X，若存在 X 上的次数为 $2d$的顽固多项式，我们就称偶数次数 $2d$ 为顽固次数。虽然所有固定次数下的非负形式都是平方和的实射影簇已被分类 [BSV16]，我们的结果开启了一个引人入胜的研究方向：理解具有非顽固次数的实代数簇 X 。

在第 3.1 节中，我们还探讨了在更为微妙的情形下顽固多项式是否存在：实曲线非光滑且可能可约。为说明可能出现的问题，我们列出平面三次曲线的完整“动物园”，并解释在哪些情形下存在顽固二次型。一般而言，顽固形式与曲线的广义雅可比簇中的 2-扭点相关，见第 3.2 节。

接下来，我们考察 曲面上的顽固多项式。论文 [BKR24]引入了实平面曲线奇点的一个不变量 $\delta^{\mathbb{R}}$ 。在 [BKR24，推论 27] 证明了，具有“许多”实奇点的 $\mathbb{P}^2$ 上的非负形式必定是顽固的。特别地，任何具有 10 个实零点的非负三元六次型（即 $\mathbb{P}^2$上的 6 次形式；实零点数通过累加局部 $\delta^{\mathbb{R}}$ 不变量计数）都是顽固的。我们通过对三元六次型的顽固性进行完整分类，极大地推广了这一结果，并在此过程中解决了 [BKR24]中的一个猜想。

定理 1.2 (见定理 6.4 和 6.6)。 设 $F \in \mathbb{R}[x, y, z]_6$ 是一个非负且不是平方和的三元六次型。那么，当且仅当 F 满足 $\delta^{\mathbb{R}}(F) \geq 9$时，它才是顽固的。

证明不等式 $\delta^{\mathbb{R}}(F) \geq 9$ 蕴含 f 是顽固形式时，用到了我们的曲线结果。这种形式 F 将 在 $\mathbb{P}^2$ 上的顽固性从三次曲面上的顽固性继承而来！证明 $\delta^{\mathbb{R}}(F) \leq 8$ 蕴含 F 并非顽固形式时，则用到了 弱德尔佩佐 曲面的经典理论，以及 Scheiderer 提出的射影 Positivstellensatz [Sch11]。

最后，受三元六次型情形的启发，我们研究曲线上的非负多项式何时可以“提升”为更高簇上的非负多项式。如果能够将曲线上的非负实根型提升，就能据此在高维簇上构造顽固形式，因为提升后的形式会继承顽固性（见命题 5.1）。在第 5 节的结果中，我们将展示，例如，从椭圆正规曲线进行提升往往是可行的。

定理 1.3 (见定理 5.3 和推论 5.6)。 设 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 是一个全实簇，其消失理想 $I(X)$ 由二次曲面生成。设 $L \subset \mathbb{P}^n$ 是一个线性空间，使得 $C = L \cap X$ 是 L中的一条椭圆正规曲线，并且 $T_pC = T_pX \cap L$ 对所有 $p \in C$成立。那么对于任意二次曲面 $F \in \mathbb{R}[C]_2$

ˆ ˆ在 C 上非负，存在一个二次型 $F \in \mathbb{R}[X]_2$ 在 X 上非负，使得 $F\,|_C = F$，即 F 可以扩展为一个在 X 上非负的二次型。

文献 [BSV16] 证明了，若 X 是全实代数簇，那么 $\mathbb{R}[X]_2$ 中的每个非负二次型都是线性形式的平方和，当且仅当 X 是最小次数簇。等价地，我们可以将这一结果表述如下：若 X 是全实代数簇，那么 $\mathbb{R}[X]_2$ 中的每个非负二次型都可以延拓为 $\mathbb{P}^n$ 上的全局非负二次型，当且仅当 X 是最小次数簇。这种解释自然引出了以下问题：

问题 1.4. 描述满足 $X \subset Y$ 的全实代数簇对 X, Y，使得 X 上的任意非负二次型都可以延拓为 Y 上的非负二次曲面。

由文献 [BSV16] 的结果可知，对于最小次数全实代数簇 X，任意 X 上的非负二次型都可以延拓为 Y 上的非负形式，其中 Y 包含X。然而，据我们所知，关于此类延拓可行的全实代数簇对，目前尚无其他结果。定理 1.3 首次将非负性提升推广到最小次数代数簇之外，因为它允许我们将椭圆正规曲线上的非负二次曲面进行提升。

我们的下一个结果表明，在椭圆正规曲线上，较高次数的非负形式总能延拓为全局非负形式；结合定理 1.1，这便得到在 $\mathbb{P}^n$ 中具有“少量”实零点的顽固形式。

定理 1.5 (见推论 5.7)。设 C 是次数为 n 的椭圆正规曲线，位于 $\mathbb{P}^n$ 中。那么，任何次数为 $2d$ ($d \geq 3$ 当 $n = 2$ 时，以及 $d \geq 2$ 当 $n \geq 3$ 时）在 C 上非负的形式，都可以延拓为 $\mathbb{P}^n$上的全局非负形式。特别地，在 $\mathbb{P}^n$ 上存在次数为 $2d$ 的顽固形式，其实零点至多有 dn 个，且每个实零点都是普通节点。

我们还补充讨论了顽固多项式的结构性质。例如，在第 2 节，我们证明，在 X 上次数为 $2d$ 的非顽固形式构成锥 $P_{X\,2d}$ 中次数为 $2d$、定义在 X 上的非负形式所成锥的一个凸子锥；这是 [BKR24]结果的推广。

我们结合 Stengle 给出的第一个顽固形式的例子来讨论我们的结果。

例 1.6. Stengle 在 [Ste79] 中证明，三元六次型

$$S(x, y, z) = x^3z^3 + (y^2z - x^3 - z^2x)^2$$

是顽固的。形式 $H = y^2z - x^3 - z^2x = 0$ 定义了一条位于 $\mathbb{P}^2$ 中的光滑三次曲线 C。Stengle 证明 S 顽固的论证有些临时拼凑。利用我们的结果，我们可以借助曲线 C 证明 S 是顽固的：六次曲线 S 与 C 相交于 $[0 : 0 : 1]$，重数为 6；并与 $[0 : 1 : 0]$ 相交，重数为 12，因为 S 模理想 $I(H)$（属于 C）可化简为 x^3z^3。正如 Stengle 所示，$S(x, y, z)$ 是全局非负的，因此由定理 1.1 可知，$S(x, y, z)$ 在 C 上是顽固的。因此，S 在 $\mathbb{P}^2$ 上继承了其顽固性，因为它在 C 上是顽固的（Stengle 也曾指出这一点）。此外，这种继承并非 Stengle 构造所特有：正如我们在定理 1.2 的证明中所示，任意三元六次型的顽固性都继承自它在某条三次曲线上的顽固性。最后，正如定理 1.3 所示，我们可以将任意在 C 上非负的形式扩展为全局非负形式，因此 Stengle 的构造并非偶然。

2. Stubborn polynomials on varieties

一个实代数簇是 $\mathbb{R}$ 上的有限型既约分离概形（注意，我们并不假设不可约性或光滑性）。射影实代数簇的一个主要来源是实齐次多项式在复射影空间中的零点集。一个全实簇是一个实代数簇，其实点集 $X(\mathbb{R})$在 $X(\mathbb{C})$中扎里斯基稠密。对于不可约簇，根据阿廷-朗定理，这等价于 X 中存在一个光滑实点，见 [Sch24，定理1.7。8]。

如果 $X \subset \mathbb{P}^n$ 是一个嵌入实代数簇，我们用 $\mathbb{R}[X]$ 表示其齐次坐标环。偶次形式 $F \in \mathbb{R}[X]_{2d}$ 在每个 $p \in X(\mathbb{R})$处都有明确定义的符号。我们称 F 在 $X(\mathbb{R})$上非负，如果 $F(p) \geq 0$ 对所有 $p \in X(\mathbb{R})$成立；此时，我们简记为 $F \geq 0$ 在 $X(\mathbb{R})$上。 $\mathbb{R}[X]_{2d}$ 中一类特别简单的非负形式是平方和，即形式 F，它们可以写成 $F = G_1^2 + \cdots + G_m^2$，其中 $G_i \in \mathbb{R}[X]_d$为某些元。

我们研究那些不是平方和的非负形式，并且在取任意奇数次幂后仍不会成为平方和的形式。

定义 2.1。设 $X \subset \mathbb{P}^n$ 是一个全实簇，其齐次坐标环为 $\mathbb{R}[X]$。偶次形式 $F \in \mathbb{R}[X]$ 若在 X 上非负，且对于任意奇数 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$， F^k 都不是平方和，则称其为顽固的 。若存在 X上次数为 $2d$ 的顽固多项式，则称偶数 $2d$ 对 X 是顽固的 。

全实代数簇 X 上的次数为 $2d$ 的非负形式构成实向量空间 $\mathbb{R}[X]_{2d}$ 中的一个闭的、满维的尖锥 [BSV16]，记作 $P_{X,\,2d}$。通常只考虑二次型 $\mathbb{R}[X]_2$，这可通过对 X作 d 次 Veronese 嵌入来实现：令 $Y = \nu_d(X)$，使得 $P_{Y,\,2} = P_{X,\,2d}$。当 $2d = 2$ 时，我们省略下标，并将 X 上的非负二次型锥记作 P_X。

现在我们证明，对于全实簇 X，非顽固的二次 X 多项式的集合也是一个凸锥，且是 P_X的子锥。我们改编了类似结果的证明[BKR24，定理 44] 关于 Veronese 代数簇的结果 $X = \nu_d(\mathbb{P}^n)$。

定理 2.2. 设 $X \subset \mathbb{P}^n$ 是一个全实射影代数簇。若对于某些奇数 $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$， $F_1, F_2 \in P_X$ 和 $F_1^{k_1}$，$F_2^{k_2}$都是平方和，那么 $(F_1 + F_2)^{k_1+k_2-1}$ 是平方和。特别地，非顽固二次型的集合是一个凸锥。

证明。 对于整数 $\ell \geq 2r \geq 0$，令

$$b_{\ell,2r}(t) \;=\; \sum_{i=0}^{2r} \binom{\ell}{i} t^i$$

为截断二项式多项式。根据 [BKR24，定理 43]，，若 $\ell > 2r$，则对于所有$t \in \mathbb{R}$，有 $b_{\ell,2r}(t) > 0$。因此，存在多项式 $g_{\ell,2r}(t)$ 和 $h_{\ell,2r}(t)$，使得 $b_{\ell,2r}(t) = (g_{\ell,2r}(t))^2 + (h_{\ell,2r}(t))^2$，并且（通过齐次化）存在次数为 r 的二元形式 $G_{\ell,2r}, H_{\ell,2r}$，满足

$$B_{\ell,2r}(t_1,t_2) \;=\; \sum_{i=0}^{2r} \binom{\ell}{i} t_1^i t_2^{2r-i} \;=\; (G_{\ell,2r}(t_1,t_2))^2 + (H_{\ell,2r}(t_1,t_2))^2,$$

其中 $B_{\ell,\,2r}$是 $b_{\ell,\,2r}$的齐次化。现在我们展开 $(F_1+F_2)^{k_1+k_2-1}$，并在下文令 $i' = i - k_1$，从而得到其所需的平方和表示，

$$\begin{aligned}
(F_1 + F_2)^{k_1+k_2-1} &= \sum_{i=0}^{k_1+k_2-1} \binom{k_1+k_2-1}{i} F_1^i F_2^{k_1+k_2-1-i} \\
&= \sum_{i=0}^{k_1-1} \binom{k_1+k_2-1}{i} F_1^i F_2^{k_1+k_2-1-i} + \sum_{i=k_1}^{k_1+k_2-1} \binom{k_1+k_2-1}{i} F_1^i F_2^{k_1+k_2-1-i} \\
&= F_2^{k_2} \sum_{i=0}^{k_1-1} \binom{k_1+k_2-1}{i} F_1^i F_2^{k_1-1-i} + F_1^{k_1} \sum_{i'=0}^{k_2-1} \binom{k_1+k_2-1}{i'+k_1} F_1^{i'} F_2^{k_2-1-i'}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= F_2^{k_2} \sum_{i=0}^{k_1-1} \binom{k_1+k_2-1}{i} F_1^i F_2^{k_1-1-i} + F_1^{k_1} \sum_{i'=0}^{k_2-1} \binom{k_1+k_2-1}{k_2-1-i'} F_1^{i'} F_2^{k_2-1-i'} \\
&= F_2^{k_2} B_{k_1+k_2-1,k_1-1}(F_1,F_2) + F_1^{k_1} B_{k_1+k_2-1,k_2-1}(F_2,F_1) \\
&= F_2^{k_2}(G^2_{k_1+k_2-1,k_1-1}(F_1,F_2) + H^2_{k_1+k_2-1,k_1-1}(F_1,F_2)) \\
&\quad + F_1^{k_1}(G^2_{k_1+k_2-1,k_2-1}(F_2,F_1) + H^2_{k_1+k_2-1,k_2-1}(F_2,F_1)).
\end{aligned}
$$

最后一个表达式是平方和，因为平方和的凸锥在乘法下封闭。特别地，由此可知，非顽固多项式的集合是一个凸锥。□

Scheiderer 的一个结果 [Sch11] 表明，如果 X 是光滑全实曲线，或维数至少为 2 的全实代数簇 $X \subset \mathbb{P}^n$，那么其上的所有严格正形式 X 都是非顽固的。因此，在这些情况下，非顽固多项式包含 P_X的整个内部。

推论 2.3。光滑全实代数簇 $X \subset \mathbb{P}^n$ 上的非顽固二次型集合是一个凸锥，其中包含 $X(\mathbb{R})$ 上的严格正二次型。□

我们以讨论次数为$2d$ 时存在顽固多项式对更高次数时存在顽固多项式有何含义，来结束本节。首先讨论后文将用到的d-正规性和射影正规性概念。

定义 2.4。设 $d > 0$ 为一个正整数。若一个射影簇（不一定光滑或不可约） $X \subset \mathbb{P}^n$ 的自然限制态射 $H^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \to H^0(X, \mathscr{O}_X(d))$ 是满射，则称该射影簇为 d-正规。若一个代数簇 $X \subset \mathbb{P}^n$ 是正规且对所有 d均为d-正规，则称其射影正规。

考虑层的短正合列

$$0 \longrightarrow \mathscr{I}_X \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow 0$$

将 d 扭曲并取上同调，可见 X 是 d-正规，当且仅当 $H^1(\mathbb{P}^n, \mathscr{I}_X(d)) = 0$。由 Serre 消失定理 [Har77，第 III 章，定理 5.2] 可知，对所有充分大的 d，$X \subset \mathbb{P}^n$ 都是 d-正规。此外，由于 $\mathscr{I}_X(d) \cong \mathscr{I}_{\nu_d(X)}(1)$，还可得出，若进行足够高次的 Veronese 重新嵌入，就能得到一个 1-正规的代数簇。

假设 X 是射影正规代数簇。设 X' 是 $X \subset \mathbb{P}^n$ 的一般超平面截面。我们有层的正合列（其中 $\mathscr{I}_{X'}$ 是 $\mathbb{P}^{n-1}$ 上的一个层）：

$$0 \to \mathscr{I}_X(k-1) \to \mathscr{I}_X(k) \to \mathscr{I}_{X'}(k) \to 0.$$

由此得到上同调长正合列

$$0 \to H^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{I}_X(k-1)) \to H^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{I}_X(k)) \to H^0(\mathbb{P}^{n-1}, \mathscr{I}_{X'}(k)) \to H^1(\mathbb{P}^n, \mathscr{I}_X(k-1)) \to \dots$$

由于 $H^1(\mathbb{P}^n, \mathscr{I}_X(k-1)) = 0$，我们得到：任何在 X' 上消失的 k 次形式，都可以提升为 $\mathbb{P}^n$ 上一个包含 X、次数为 k 的形式。

我们现在使用上面的讨论来证明顽固的多项式存在的一个推论 s.

命题 2.5. 设 X 是一个维数至少为2 的全实、不可约、射影正规代数簇，并假设 $F \in \mathbb{R}[X]_{2d}$ 是顽固的。那么，对于 X，所有大于或等于 $2d$ 的次数都是顽固的。

证明。令 H 为由线性形式 L的零点定义的实超平面，它与X 横截相交，且交点为实点，使得 $Y = H \cap X$ 不可约。那么 Y 是不可约的全实代数簇，并且 $I(Y) = L + I(X)$（见命题前一段）。我们断言，对所有 $m \geq 0$，$L^{2m}F$ 都是顽固的；我们通过对 m进行归纳法来证明这一点。基例 $m = 0$ 已给出。假设对于某个奇数 k，有$(L^{2m+2}F)^k = \sum G_i^2$。那么，每个 G_i都在 L上消失，

因此 L 整除每个 G_i。我们反复应用这一观察，得到 L^k 整除每个G_i。由此可见，$(L^{2m}F)^k$ 是一个平方和，这就产生了矛盾。□

我们注意到，上述论证对曲线并不成立，而且对于这种情形，我们没有一般性结论。不过，正如我们将在下文看到的，在椭圆正规曲线上，各个次数都有顽固多项式；而在光滑全实曲线上，对于次数充分大的所有多项式，也都有顽固多项式。

3. Existence of stubborn polynomials on curves

本节研究射影曲线上的顽固多项式。下文将证明，这些多项式与仅有实零点的非负形式密切相关。

定义 3.1. 设 $X \subset \mathbb{P}^n$ 是不可约全实射影曲线。若形式$F \neq 0$ 属于 $\mathbb{R}[X]$，且 F 在 X 上的有限个零点全为实数，则称其为实根。

本节中，曲线 $X \subset \mathbb{P}^n$ 总是假定为全实的。对于 $F \in \mathbb{R}[X]_{2d}$，我们用 $\operatorname{div}(F)$ 表示其零点除子。对于 X上的任意除子 $D = \sum_i n_i P_i$，其实部记作$D_{\mathbb{R}} = \sum_{i:\ P_i \in X(\mathbb{R})} n_i P_i$。于是，$F$是实根的，当且仅当 $\operatorname{div}(F) = \operatorname{div}(F)_{\mathbb{R}}$。

现在回顾 d-正规代数簇的定义，见定义2.4。我们证明曲线上顽固性的一个必要条件。

定理 3.2. 设 $X \subset \mathbb{P}^n$ 为全实射影曲线。设 $F \in \mathbb{R}[X]_{2d}$ 在$X(\mathbb{R})$上非负，但不是平方和。若 X 是 d-正规的，且 F 为实根，其所有零点均位于 X的光滑点处，则 F 是顽固的。

证明。 我们用 $J = \operatorname{Pic}^0(X)$表示 X的广义雅可比簇，见 [HM98，第 249]页。其点对应于位于 X 上、支集在 X [的光滑点的除子的线性等价类，HM98，第 251]页。由贝尔蒂尼定理（例如见 [Har77，定理 II.8.18]），我们可以选取一条实超平面，使之与 X 横截相交于光滑（不必为实）点，并令 H 为交除子。

我们有 $[2dH - \operatorname{div}(F)] = 0$ 在 J 中，并且由于 F 在 X 上非负且为实根，因此可知 $\eta = d[H] - \frac{1}{2}[\operatorname{div}(F)] \in J(\mathbb{R})_2$ 是一个实二阶扭点。由于 F 不是平方，且 X 是 d-正规，因此可推出 $\eta \neq 0$，于是

$$(2k+1)d[H] - \frac{1}{2}[\operatorname{div}(F^{2k+1})] = (2k+1)\eta = \eta$$

也是一个非平凡的广义雅可比簇中的 2-扭点。因此，F^{2k+1} 不是平方。

如果我们能写成 $F^{2k+1} = \sum_{i=1}^m G_i^2$，那么由于 F 在 X 上非负且为实根，我们便有对所有 i，G_i^2 都等于（相差一个正的常数因子）F^{2k+1}。这将意味着 F^{2k+1} 是平方，与假设矛盾。因此，对所有 k，F^{2k+1} 都不是平方和，也就是说，它是顽固的。□

这由马克斯·诺特的 AF+BG 定理可知，平面曲线对于所有 d- 都是正规 d [Ful89，第 5 节。5]因此，我们从定理3.2得到以下结果。

推论 3.3。 设 $X \subset \mathbb{P}^2$ 是一条全实射影平面曲线。设 $F \in \mathbb{R}[X]_{2d}$ 在 $X(\mathbb{R})$ 上非负，但不是平方和。若 F 是实根形式，且所有零点都位于 X 的光滑点上，则 F 是顽固的。□

对于光滑曲线，反向蕴含也成立，因此证明了对于不是平方和的非负形式，顽固性与实根性等价。

定理 3.4. 设 $X \subset \mathbb{P}^n$ 是不可约光滑实射影曲线。若 $F \in \mathbb{R}[X]_{2d}$ 是顽固的，则 F 在 X 上的所有零点都是实数。

证明。假设 F 不是实根。令 H 为超平面除子，并定义除子$D = dH - \frac{1}{2}\mathrm{div}(F)_{\mathbb{R}}$。由于 F不是实根，$\deg(D) > 0$，因此 D是丰的。取一个奇数$k \in \mathbb{N}$，使得 kD很丰，并令 L为 $\mathscr{O}_X(k\frac{1}{2}\cdot \mathrm{div}(F)_{\mathbb{R}})$的一个截面。于是 $F^k/L^2 \in H^0(X, \mathscr{O}_X(kD)^{\otimes 2}) = H^0(X, \mathscr{O}_X(2kD))$，因为截面 F^k/L^2的零点除子与 $k\cdot\mathrm{div}(F) - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot k\cdot\mathrm{div}(F)_{\mathbb{R}} = k\cdot(\mathrm{div}(F) - \mathrm{div}(F)_{\mathbb{R}}) = k\cdot 2\cdot D$线性等价（例如参见 [Har77, II 命题 7.7]）。由于 $\mathrm{div}(F) - \mathrm{div}(F)_{\mathbb{R}}$没有实点，截面 F^k/L^2在 $X(\mathbb{R})$上严格正。由 [Sch11, 定理 4.11] 可知，对于所有充分大的 ℓ，$(F^k/L^2)^\ell \in H^0(X, \mathscr{O}_X(2k\ell D))$都是平方和 $\sum_i G_i^2$。

现在我们希望得出结论： F 的某个奇数次幂是平方和。将上面的分母通分后，得到

$$F^{k\ell} = \sum_i G_i^2 L^{2\ell} \in H^0(X, \mathscr{O}_X(2k\ell dH)),$$

且每个加项的除子都是 $k\ell dH$。选取奇数且充分大的 ℓ，使得 X 是$k\ell d$-正规，则截面 $G_i L$ 对应于元素 $\widetilde{G_i} \in \mathbb{R}[X]_{k\ell d}$，从而 $F = \sum_i \widetilde{G_i}^2$。□

现在我们证明，对于正亏格的光滑曲线，次数充分大时总存在顽固多项式。光滑有理曲线不存在任何次数的顽固多项式，这主要是因为每个非负二元形式都是平方和，详见第 4.1 节的讨论。

定理 3.5. 设 $X \subset \mathbb{P}^n$ 是亏格为 $g \geq 1$的不可约光滑全实射影曲线。对于所有充分大的 d，都存在顽固的 $F \in \mathbb{R}[X]_{2d}$。

证明。由于 $g \geq 1$，由 [BBS24，推论 3.4。10] 可知，对于所有充分大的 d，都存在一个实根非负形式 $F_d \in \mathbb{R}[X]_{2d}$，其次数为 $2d$，且不是平方和。此外，对于所有充分大的 d，都有 d-正规性，因此根据定理 F_d，它是顽固的3.2。□

我们指出，在前面的某些定理中，我们假设曲线是不可约的。对于可约曲线，额外的技术难点在于，可能存在在某个不可约分支上消失的顽固多项式。我们将在下一小节研究这方面的例子。

3.1. **平面三次曲线上的顽固多项式**。 我们想要说明的重点是，在奇异曲线上是否存在顽固多项式，是一个相当微妙的问题。为此，我们全面刻画奇异且可能可约的平面三次曲线上低次顽固形式的存在性。

例 3.6。 若 X 光滑，则不难直接证明存在一个不可约不定二次型 F，它在 X 上非负，并有三个重数为 2 的实零点（另见 [BBS24，命题 4.1。1]），如图 1所示。根据定理 3.2，任何这样的 F 都是顽固的。

例子 **引理 3.7**。接下来，我们考察不可约奇异三次曲线。共有三种情形。

(a) 若 X 是实点集连通的有节点的三次曲线，我们不妨设 X 由$y^2z - x^2(x+z) = 0$ 经过射影坐标变换后定义。在这种情形下，存在具有三个实根且这些根都是非奇异点的顽固二次型，与光滑情形相同。例如，$F = y^2 - 6x^2 + 3xz + 9z^2$就是这样一种二次型。根据推论 3.3，所有这类形式都是顽固的。

(b) 尖点三次曲线 X，不失一般性地由 $y^2z - x^3 = 0$定义，在任何次数下都没有顽固形式。为证明这一点，令 X_0 为 X上的仿射图 $z = 1$，其参数化为$t \mapsto (t^2, t^3)$。这将坐标环 $\mathbb{R}[X_0] = \mathbb{R}[x, y]/(y^2 - x^3)$与子环

$$\mathbb{R}[t^2, t^3] = \{f \in \mathbb{R}[t] : f'(0) = 0\}$$

一元多项式环 $\mathbb{R}[t]$ 的。因此设 $f \in \mathbb{R}[t]$ 是一个非负多项式，且 $f'(0) = 0$。若还有 $f(0) = 0$，则将 $f^3 = g_1^2 + g_2^2$ 写成 $\mathbb{R}[t]$ 中的两个平方和。由于 f 可被 t^2 整除，

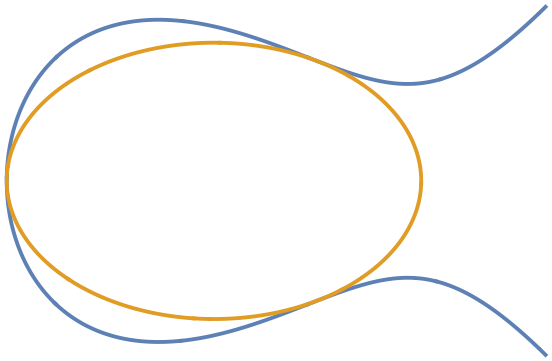

FIGURE 1. 不可约三次曲线上的一个顽固二次式。

g_1 和 g_2 也可被 t^2 整除，设对 $j=1,\ 2$ 有 $g_j = t^2\widetilde{g}_j$，从而 $f^3 = (t^2\widetilde{g}_1)^2 + (t^2\widetilde{g}_2)^2$ 是 $\mathbb{R}[X_0]$ 中的两个平方和。

现在假设 $f(0) \neq 0$，这意味着相应的 $\mathbb{P}^2$ 中的形式不经过 X 的奇点。由定理 2.2，非顽固形式的集合是凸的，因此只需证明没有极端非负形式是顽固的。与光滑情形一样，可以证明此类形式的交点 X 仅为实点，参见 [KZ26，定理 1.1]。因此 f 是实根的，所以对某个 $g \in \mathbb{R}[t]$，有 $f = g^2$。若 $g'(0) = 0$，则 f 是 $\mathbb{R}[X_0]$ 中的一个平方。若 $g'(0) \neq 0$，那么，由于$f'(0) = (g^2)'(0) = 0$，必有 $g(0) = 0$，因此 g 的形式为 $g = a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$。由此可得，对所有 $k \geq 2$，g^k 都属于 $\mathbb{R}[X_0]$，所以 $f^3 = (g^3)^2$ 是一个平方，而 f 并不顽固。

(c) 设 X 是由 $y^2z - x^2(x-z) = 0$定义的、具有孤立节点的有节点三次曲线。图表 X_0（其中 $z=1$）由 $t \mapsto (t^2+1, t(t^2+1))$ 参数化。节点对应于 $t = \pm i$，因此坐标环 $\mathbb{R}[X_0]$ 由满足 $f(i) = f(-i) = f(i)$ 的那些 $f \in \mathbb{R}[t]$ 构成，

$$\mathbb{R}[X_0] = \{f \in \mathbb{R}[t] : f(i) \in \mathbb{R}\}.$$

同样，我们可以应用 [KZ26，定理 1.1]，只需考虑实根多项式。如果 $f \in \mathbb{R}[t]$仅有实根且满足 $f(i) \notin \mathbb{R}$，但 $f^2(i) \in \mathbb{R}$（即，如果 $f^2 \in \mathbb{R}[X_0]$ 但 $f \notin \mathbb{R}[X_0]$），那么$f^2(i) < 0$，因此 f^2在 X_0上并非非负。我们还需要考察形如 $(t^2+1)^r \cdot f^2$、其中 f为实根多项式的多项式。但只要 $r \geq 2$，所有这类多项式都是平方和，因为当 $r \geq 2$ 为偶数时，它们是 $\mathbb{R}[X_0]$中的平方；而当 $r \geq 3$为奇数时，我们有

$$(t^2+1)^r \cdot f^2 = \left((t^2+1)^{\frac{r-1}{2}} \cdot f\right)^2 \cdot (t^2+1) = \left((t^2+1)^{\frac{r-1}{2}} \cdot f \cdot t\right)^2 + \left((t^2+1)^{\frac{r-1}{2}} \cdot f\right)^2$$

它在 $\mathbb{R}[X_0]$中是两个平方和。（注意，对于 $r=1$，平方项未必属于 $\mathbb{R}[X_0]$；事实上，t^2+1 本身在 $\mathbb{R}[X_0]$中不是平方和。）特别地，这样的多项式都不可能是顽固的。

当 X 可约时，需要考虑若干种情况。

例 3.8. 假设 $X = C \cup L$ 是由一个由非退化二次型 Q定义的光滑二次曲线 C 和一条由线性形式 ℓ 定义的直线 L 组成的并集。由于假设 X 是全实的，Q必定是不定的，因此 C 是一个椭圆。

(a) 如果 C 与 L 相交于两个不同的实点，那么 X 有一个顽固二次型。例如，两条不同的切线并集，它们与 C 相交，并在 L 上交于同一点，根据推论 3.3 定义了这样一个二次型；见图 2。我们也可以直接验证：设 p 和 q 分别为 C 与 L 的交点，设 ℓ_1 和 ℓ_2 为线性形式，它们定义了 C 上分别经过点 a 和 b 的两条切线，使得 ℓ_1 和 ℓ_2 都在 L 上的同一点 c 处为零。那么 $\ell_1\ell_2$ 在 X 上非负。它是顽固的，因为如果 $(\ell_1\ell_2)^k = \sum F_i^2$ 属于 $\mathbb{R}[X]$，那么每个次数为 k 的 F_i 都必须在

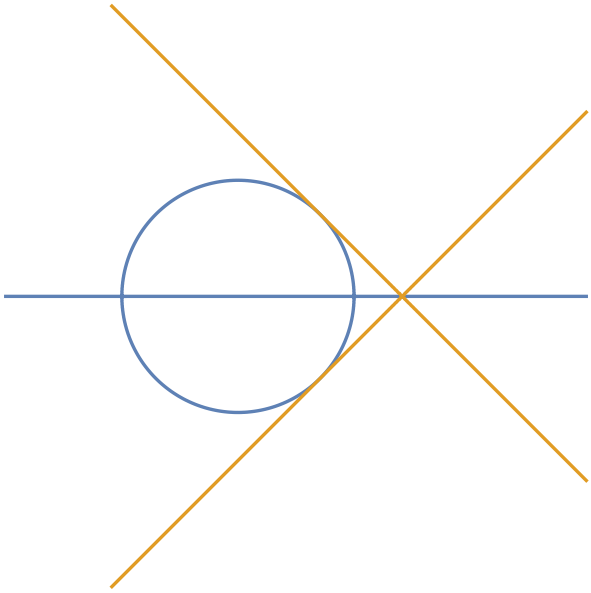

FIGURE 2. 圆与一条割线对应的顽固二次曲线。

点 a、b 和 c 处至少以 k 阶为零，且在 X 上没有其他零点。像图中那样，选取一条不与 $C(\mathbb{R})$ 相交的直线进行去齐次化后，每个 F_i 在 C 上的限制在 p 和 q 处符号相反，而它在 L 上的限制在 p 和 q 处符号相同，矛盾。

(b) 若 L 与 C相切，则 $X = C \cup L$ 不承认顽固二次型。经过坐标变换后，不妨设 $Q = x^2 + y^2 - z^2$和 $\ell = z - x$。在 X 上只有实零点的非负二次型 F，要么是一个线性形式的平方，要么必须在交点 $a = [1 : 0 : 1]$ 处与 L 和 C 相切，并在另一个实点 b处与 C 相切。（为说明这一点，令 C' 为由 F定义的圆锥曲线。由于 C' 在两点处与 C 相切，对偶圆锥曲线也如此，因此 C 和 C' 恰有两条公切线，其中一条必为 L。）对于任意这样的 b，都存在一个由非负二次型构成的一维族，其极值点是 Q 本身以及 ℓ 与经过 b的切线之积。我们可以直接验证这一点：经过坐标变换后，不妨设 $b = [-1 : 0 : 1],$，那么 $F_0 = Q$ 和 $F_1 = (z - x)(z + x)$张成了族 $\{F_\lambda = \lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 \mid \lambda \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})\}$，其中包含所有在 a 处与 C 相切、并在 b处与其相切的圆锥曲线。这里，F_λ 非负当且仅当 $\lambda_0\lambda_1 \geq 0$，因此 F_0 和 F_1 是极值点。（注意，$F_{[1,1]} = y^2$ 是经过 a 和 b 的直线的平方。）F_0 和 F_1 都不是顽固的，因此根据定理 2.2，不存在顽固二次型。

然而，X 确实存在一个次数为 4 的顽固形式：存在一个四次型 F，其 实点集由两个卵形线组成，每个卵形线都与 C 在两个点处相切，并与 L 在一个点处相切。通过符号计算可以验证，

$$\begin{aligned} F = &-\left(12\sqrt{2} + 5\sqrt{936\sqrt{2} + 1337} + 25\right)x^4 - 4\left(15\sqrt{2} + \sqrt{1872\sqrt{2} + 2674} + 18\right)x^3 z \\ &+ x^2\left(\left(48\sqrt{2} - 2\sqrt{936\sqrt{2} + 1337} + 70\right)y^2 - 12\left(2\sqrt{2} + 3\right)z^2\right) + 8(2\sqrt{2} + 3)xz(y^2 - z^2) \\ &+ (y^2 - z^2)\left(\left(12\sqrt{2} - \sqrt{936\sqrt{2} + 1337} + 19\right)y^2 + \left(36\sqrt{2} + \sqrt{936\sqrt{2} + 1337} + 53\right)z^2\right) \end{aligned}$$

具有所需性质（见图3）。

(c) 如果 C 和 L 没有实交点，那么 $X = C \cup L$ 不接受任何顽固二次型。这比切线的情形更容易看出，因为唯一仅有实零点的极值非负二次型

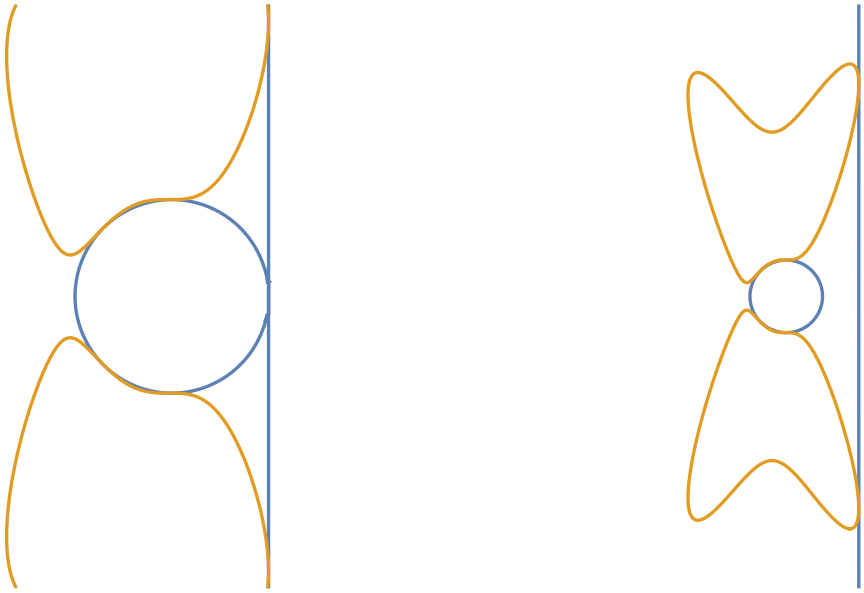

FIGURE 3. 圆的一个顽固四次型，带有一条切线或穿过直线。

形式（定义在 X 上）都是平方：两条与 C 相切的直线的乘积在 C 和 L上取相反符号，而不可约的不定二次式 F 不可能在 C 和 L上非负，同时又与两者相切。（一种理解方式是考虑仿射平面 $\mathbb{P}^2 \setminus L$，其中C 是一个椭圆，而由 F 定义的圆锥曲线 P 与 L相切，因此是抛物线。如果 P 在两点与 C 相切，那么 C 必包含在$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus P(\mathbb{R})$的凸分支的闭包中，而 L 则包含在另一分支中，因此 F在 X上变号。）

但是 X 同样存在与 (b) 中类型相同的四次顽固形式（见图 3）。为此，经过坐标变换后，不妨设 $Q = x^2 + y^2 - z^2$ 且 $\ell = 2z - x$。（要说明这样的坐标变换确实可行，只需注意保持椭圆 C 的射影变换群在 Q 为负的点上具有传递性；例如参见 [Rat19，定理 1.1。6]）类似于情形 (b) 的符号计算将得到一个顽固四次型，例如

$$\begin{aligned} F = &\left(18\sqrt{2} - 5\sqrt{3516\sqrt{2} + 6539} - 131\right)x^4 - 4\left(57\sqrt{2} + \sqrt{7032\sqrt{2} + 13078} + 18\right)x^3 z \\ &+ 2x^2\left(\left(54\sqrt{2} - \sqrt{3516\sqrt{2} + 6539} + 97\right)y^2 - 6\left(4\sqrt{2} + 9\right)z^2\right) + 8\left(4\sqrt{2} + 9\right)xz\left(y^2 - z^2\right) \\ &+ \left(y^2 - z^2\right)\left(\left(18\sqrt{2} - \sqrt{3516\sqrt{2} + 6539} + 65\right)y^2 + \left(78\sqrt{2} + \sqrt{3516\sqrt{2} + 6539} + 151\right)z^2\right) \end{aligned}$$

例 3.9。如果 X 由三条互异直线组成，则它由三个线性形式ℓ_1定义：$\ell_1\ell_2\ell_3 = 0$ ℓ_1、ℓ_2和 ℓ_3。如果这些直线两两相交于三个互异的点，那么 X 存在一个顽固二次型，即 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus X(\mathbb{R})$ 的有界区域内的一个椭圆，该椭圆与这三条直线都相切。

如果三条直线经过同一个点，那么 X 不具有顽固二次型。经过线性坐标变换后，不妨设 $\ell_1 = x$，$\ell_2 = y$，$\ell_3 = x - y$。同样，只需验证没有极值非负二次型是顽固的。不可约二次曲线不可能与三条直线都相切，因此根据 [KZ26，定理 1，它不可能是顽固的。1]我们需要考虑的另一种情况是，两个经过交点 $[0, 0, 1]$ 的直线 ℓ_1、ℓ_2、ℓ_3中的两条直线的乘积。其中一个这样的极值形式就是其中两条直线的乘积。例如，xy 在 X 上非负且不是平方和

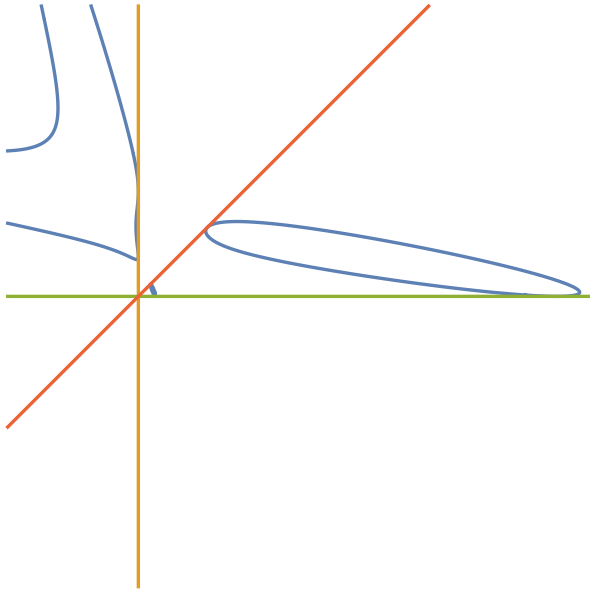

FIGURE 4. 过一点的三条直线上的顽固四次型。

的平方和，但 $(xy)^3 = x^4y^2 - x^3y^2(x-y) = x^4y^2 - x^2y \cdot (\ell_1\ell_2\ell_3)$ 表明 xy 在 X 上不是顽固的。

然而， X 再次容许一个次数为 4 的顽固形式 F。具体而言，可以选取 F，使得 ℓ_1、ℓ_2、ℓ_3 是该四次型的双切线，且 F 在 $X(\mathbb{R})$上具有恒定符号。明确地说，可以通过符号计算验证

$$F = \det \begin{pmatrix} 0 & x & y & 4x+y-z \\ x & 0 & x+4y-z & x-y \\ y & x+4y-z & 0 & x-y+4z \\ 4x+y-z & x-y & x-y+4z & 0 \end{pmatrix}$$

具有所需性质（见图 4）。为此，只需验证 F 是不可约的，并且与ℓ_1、 ℓ_2 以及 ℓ_3 各自交于一对实二重点，因为不可约四次曲线在其所有双切线上具有相同的恒定符号。

前面这一系列例子涵盖了所有全实平面三次曲线。我们将所得结果总结如下。

定理 3.10. 设 $X \subset \mathbb{P}^2$ 为一条全实三次曲线。

(1) X 在以下情形中存在顽固二次型：*(1.1)* X 是光滑三次曲线；*(1.2)* X 是有节点的三次曲线，且 $X(\mathbb{R})$ 连通；*(1.3)* X 是带有一条割线的光滑二次曲线；*(1.4)* X 由处于一般位置的三条直线组成。*(2)* X 不存在顽固二次型，但在以下情形中存在顽固四次型：*(2.1)* X 是带有一条切线的光滑二次曲线；*(2.2)* X 是带有一条穿过直线的光滑二次曲线；*(2.3)* X 由经过同一点的三条互异直线组成。*(3)* X 在以下情形中不存在任何次数的顽固形式：

(3.1) X 是尖点三次曲线；*(3.2)* X 是具有孤立节点的有节点的三次曲线；*(3.3)* X 由一条或两条直线组成（含有重复因子）。

□

3.2. **奇异曲线与正 2-扭点。** 上一节中，我们讨论了奇异曲线和可约曲线上顽固形式的存在性，主要采用显式计算；这只有在考虑平面三次曲线时才有可能。对于光滑曲线，我们从更概念化的角度证明了顽固性等价于实根性，并在定理 3.5 中运用这一结果，证明所有正亏格光滑曲线上都存在次数充分高的顽固多项式。现在，我们将讨论可能把这一结果推广到奇异情形所需的要素。

在 [BBS24], 中，具有最多实零点的非负多项式的存在性，是从雅可比簇中 正 2-扭点的存在性推导出来的，见 [BBS24，定义 3.4。4] 以及[KZ26，推论 2。3]。通过研究广义雅可比簇的 2-扭点，可以将这一概念推广到奇异曲线。对于光滑曲线，我们知道存在 2^g 正二阶扭点，但对于奇异曲线，其数量仍是一个开放问题。不过，如果 $X(\mathbb{R})$ 是连通的，那么在 $X(\mathbb{R})$ 上零点重数为偶数的任意多项式都不会改变符号，因此 $X(\mathbb{R})$ 上广义雅可比簇的每个 实二阶扭点都是正二阶扭点。

我们还可以将 2-扭点与 X 上的有效全实除子联系起来，依据 [Mon05，定理 B]。特别地，当 X 的奇点全都为实点时，该结果适用。结合这两个要素，我们得到以下结果。

定理 3.11。 设 $X \subset \mathbb{P}^n$ 是不可约实曲线。假设 $X(\mathbb{R})$ 是连通的，并且 X 的所有奇点都是实点。若广义雅可比簇 J_X 具有一个非平凡2-扭点，则X 在所有充分高的次数上都具有顽固非负多项式（次数为某个偶数）。

证明。设 $\eta \in J_X$ 是一个非平凡 2-扭点。选取一个与 X相交且仅经过光滑点的实超平面，这些点不一定是实点，并令 H 为交除子。由于 X 没有孤立奇点或非实奇点， [Mon05，定理 B] 表明，对于充分大的 d，类 $\eta + d \cdot [H]$ 包含一个支集在 $X_{\mathrm{reg}}(\mathbb{R})$ 上的有效除子 D 。此外，对于所有充分大的d， X 是（$2d$次数 X）-正规（见定义 2.4）：由于 $2D$ 与 $2dH$线性等价，这意味着存在一个形式 $F \in \mathbb{R}[X]_{2d}$，使得 $\mathrm{div}(F) = \mathrm{div}(F)_{\mathbb{R}} = 2D$。

现在，由于 $X(\mathbb{R})$ 是连通的，且 F 在 $X(\mathbb{R})$ 上的所有零点都是具有偶数重数的正则点，F 在 $X(\mathbb{R})$ 上具有恒定符号。如有必要，将 F 替换为 $-F$，我们可以假定 F 是非负的。由定理 3.2可知， F 是顽固的。□

4. Curves with no stubborn polynomials

如第 3.1节所示，曲线上的顽固多项式可能不存在，我们将给出这一现象的若干例子与构造。如下文所讨论的，在光滑有理曲线上，任何次数都不存在顽固多项式，而在正亏格的光滑曲线上，顽固多项式可能仅在低次数时不存在（见定理 3.5）。

4.1. 光滑有理曲线。 设 $X \subset \mathbb{P}^n$ 为一条亏格为 0 的光滑全实曲线。通过考虑 X 的希尔伯特多项式可见，当 k 充分大时， X 的坐标环中次数为 k 的部分 $\mathbb{R}[X]_k$ 与有理正规曲线的相应部分相同。在有理正规曲线上，非负多项式总是平方和，因此在 X 上不存在顽固多项式。作为一个显式例子，我们可以令 X 为任意一条参数化单项式包含 s^d， $s^{d-1}t$， st^{d-1} 与 t^d 的单项式曲线。

4.2. 没有实根二次型的光滑平面曲线。 给定非负整数 d、 n 和r，满足 d， n 为偶数， $r < d$，以及 $r \leq n$，我们构造一条次数为 $d + n$ 的实平面曲线，它与

任意次数 r 的曲线至多相交于 dr 个按重数计的实点。证明的想法归功于奥列夫科夫 [Ore24]。

设 $X \subset \mathbb{P}^2$ 是由 $F \in \mathbb{R}[x,y,z]_d$ 定义的光滑实射影平面曲线，且 $X(\mathbb{R})$ 非空并且连通。设 Q, $R \in \mathbb{R}[x,y,z]$ 是次数分别为 n 和 $d+n$ 的正定形式，并满足由 R 定义的曲线光滑，且 Q 不可约。我们考虑一族由次数为 $d+n$ 的形式 $F \cdot Q + tR$ 定义的实曲线 $X_t \subset \mathbb{P}^2$。注意， $X_t(\mathbb{R})$ 在戈罗莫夫–豪斯多夫意义下收敛到 $X(\mathbb{R})$。此外，对于所有充分小的 $t > 0$，曲线 X_t 都是光滑的，因此是全实的。

定理 4.1。 设 $r \geq 1$。对于所有充分小的 $t > 0$，上述由次数为 $d+n$ 的 X_t 定义的光滑实曲线与任意次数为 r 的曲线 $C \subset \mathbb{P}^2$ 至多相交于 dr 个实点（按重数计）。特别地， X_t 不存在次数为 r 的顽固形式。

证明。假设存在收敛到 0 的 $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 序列，以及实曲线C_{t_k} 的序列，其次数为 r，与 X_{t_k} 至少相交于 $dr+1$ 个计重数的实点。必要时通过取子序列，我们可以假设 C_{t_k} 收敛到某条实曲线 C，其次数为 r。曲线 X_0 是可约的，其中一个不可约分支为 X，而由 Q 定义的另一分支具有空的实点集。特别地， X_0 与曲线 C 至少相交于 $nr = \deg Q \cdot \deg C$ 个非实点（计重数）。由 [GH94，第 664] 页可知， X_0 与 C 在小解析邻域 $U \subset \mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$（即 $a \in X_0 \cap C$ 的邻域）中的（总）交数在 X_0 与 C 的连续变形下保持不变。因此，对所有充分大的 k，至少存在 nr 个非实点属于 X_{t_k} 与 C_{t_k} 的相交，这与我们至少有 $dr+1$ 个实交点的假设相矛盾。第二个断言由定理 3.4 得出。□

取 $r = 2$ 以及任意偶数 $d \geq 4$ 和 $n \geq 2$，我们得到如下推论。

推论 4.2. 对所有充分小的 $t > 0$，次数为 $d+n$ 的光滑实曲线 X_t 与任意圆锥曲线 $C \subset \mathbb{P}^2$ 至多相交于 $2d$ 个实点（按重数计）。特别地， X_t 不容许顽固二次型。

注记 4.3. 记 $|rH_t|$ 为由 $\mathbb{P}^2$ 中次数为 r 的曲线在 $X_t \subset \mathbb{P}^2$上截出的线性系。在前述定理中，我们证明了如下结论：对所有充分小的 t，若 $D \in |rH_t|$，则#(supp(D) $\cap$ $X_t(\mathbb{R})$) $\leq dr$。 X_t的全实除子阈值记为N(X_t)，它是使得每个次数至少为N(X_t)的完全线性系都包含一个全实除子的最小整数。全实除子阈值不能仅由实曲线的拓扑来界定，而是依赖于曲线的度量性质。对其估计并非平凡。于是定理 4.1 表明，对所有充分小的 t，有N(X_t) $> (d+n)r$。关于全实除子阈值的更多细节，请读者参阅 [BKP25]。

4.3. **借助笛卡尔符号法则说明不存在实根多项式**。 确保实根二次曲线不存在的另一种可能方法是借助笛卡尔符号法则，参见 [Des37] 或 [Str69，第 96-99]页。设 X 为 $\mathbb{P}^2$ 中的曲线，其在仿射图上的参数化由 $t \in \mathbb{A}^1 \mapsto (1+t^2+t^4,\ t^9(1+t^2)) \in \mathbb{A}^2$给出。在仿射平面的坐标（$x$, y）中，这条次数为 11 的有理曲线由下式定义

$$
\begin{aligned}
f \ &= x^{11} - 11x^{10} + 55x^9 - 165x^8 + 330x^7 - 7x^5y^2 - 462x^6 + 21x^4y^2 + 462x^5 \\
&\quad - 21x^3y^2 - 330x^4 + 6x^2y^2 - y^4 + 165x^3 + 2xy^2 - 55x^2 - y^2 + 11x - 1.
\end{aligned} \tag{1}
$$

下述 ng结果表明，任何实二次曲线都不能与曲线 X 仅相交于实点 s.

命题 4.4. 设 $C \subset \mathbb{P}^2$ 是一条实二次曲线。那么 C 与 X 的交点少于 $22 = 2$次 X，按重数计的实点。特别地，$\#(X(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})) < 2$次 $X = 22$。

证明。 通过 X 的参数化，将一个（实）二次曲面 $a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{22}y^2+a_1x+a_2y+a_0$ 拉回，得到一个次数至多为 22 的单变量（实）多项式 q，其单项式支集仅包含次数 0， 2， 4， 6， 8、9， 11，13， 15 和 18， 20， 22。次数为 0，2， 4， 6， 8 的单项式来自$a_{11}x^2$， a_1x，以及常数项 a_0；次数为 9，11，13， 15 的单项式来自 $a_{12}xy$和a_2y；次数为 18，20， 22 的单项式则仅来自 $a_{22}y^2$。

我们首先考虑（在 $\mathbb{R}$上）可约圆锥曲线的情形，并证明它不可能与 X只有实交点。为此，只需注意到，没有一条直线 $a_1x+a_2y+a_0$ 与 X相交于按重数计算的 11 个实点。这直接由笛卡尔符号法则推出，参见例如 [Sch24，定理 1.3。12], 因为（a_0+a_1） $+a_1t^2+a_1t^4+a_2t^9+a_2t^{11}$ 的系数序列中的符号变化太少。

因此，我们可以假设 $a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{22}y^2+a_1x+a_2y+a_0$ 是不可约的。

如果 $a_{22}\neq 0$，多项式 q 的次数为 22，但至多含有 12 个非零项。此外，由于次数为 18、20 和 22 的项的系数具有相同的符号， q的系数序列中至多有 9 个符号变化。一般而言，可以将 $q=t^k\tilde{q}$分解，其中 $k\leq 18$ 和 $\tilde{q}(0)\neq 0$。多项式 $\tilde{q}$的次数为 $22-k$，并且根据 $k=0$的取值，2、4、6、8、9、11、13、15、18， $\tilde{q}$ 的系数序列分别至多有 9、8、7、6、5、4、3、2、1 或 0 个符号变化。在这些情形中的任一种情形下，笛卡尔符号法则都意味着 $q=t^k\tilde{q}$至多有 $18<22=\deg q$个按重数计算的实零点。

如果 $a_{22}=0$ 但 $a_{12}\neq 0$， q 的次数为 15，但最多只有 9 个非零项。此外，由于次数为 13 和 15 的项具有相同的系数 a_{12}，因此 q的系数序列最多有 7 次符号变化。同样，将 $q=t^k\tilde{q}$ 与 $k\leq 13$ 和 $\tilde{q}(0)\neq 0$ 因式分解后，我们看到多项式 $\tilde{q}$的次数为 $15-k$；根据 $k=0$的值，2，4，6，8，9，11，13， $\tilde{q}$的系数序列分别最多有 7，6，5，4，3，2，1 次，或 0 次符号变化。在所有这些情况下，笛卡尔符号法则保证 $q=t^k\tilde{q}$的实零点（按重数计）不超过 $14<15=\deg q$。

现在令 a_{22} 和 a_{12} 都为零。于是 $a_{11}\neq 0$，否则我们就处于可约情形。

若 $a_2\neq 0$（已知 $a_{22}=a_{12}=0$），则多项式 q 的次数为 11，且至多有 7 个非零项。此外，次数为 9 和 11 的项具有相同的系数 a_2，因此 q的系数序列中至多有 5 次符号变化。根据上述相同的论证，对于次数为 11 的多项式 $q=t^k\tilde{q}$，当 $k\leq 8$、 $\tilde{q}(0)\neq 0$时， $\tilde{q}$的系数序列中分别至多有 5、4、3、2 或 1 次符号变化，具体取决于 $k=0$、 2 、 4 、 6 、 8 的相应取值。根据笛卡尔符号法则， $q=t^k\tilde{q}$ 的实零点（按重数计）不可能多于 $10<11=\deg q$。

最后，若 $a_{22}=a_{12}=0$ 且 $a_2=0$，多项式 q 的次数为 8，且至多有 5 个非零项。此外，由于次数为 6 和 8 的项的系数符号相同， q的系数序列中至多有 3 次符号变化。我们仍可将 $q=t^k\tilde{q}$ 写成$k\leq 4$ 且 $\tilde{q}(0)\neq 0$。若$k=0$， 2 或 4，则 q的系数序列中分别至多有 3、2 或 1 次，符号变化。根据笛卡尔符号法则， $q=t^k\tilde{q}$的实零点（按重数计）至多为 $6<8=\deg q$。证明至此结束。□

注 4.5。 采用与定理 4.1 相同的证明方法，我们也可以扰动上文构造的有理曲线 X，从而得到一条光滑曲线 X' ，使得任意实二次曲线与 X'的交点并非全都是实交点。

5. Nonnegative lifting

现在我们讨论如何将曲线上的非负二次型扩展为包含该曲线的更高维簇上的非负二次型。鉴于 [BSV16],中的结果，这通常是不可能的（例如，当该簇不是最小次数时）。不过，在对曲线和环境簇作出某些假设的情况下，我们提供了一种实现非负提升的方法。

我们的目标之一是在更高维的代数簇上构造顽固多项式，其顽固性继承自曲线上的顽固性。这基于以下简单观察。设 $X \subset Y$是一个子簇，并记 $\iota^*\colon \mathbb{R}[Y] \to \mathbb{R}[X]$ 为齐次坐标环之间相应的拉回映射。

命题 5.1. 若 $X \subset Y$是全实簇 Y中的一个闭全实簇，且 $f \in \mathbb{R}[X]$是顽固的，则任何满足 $\iota^*(g) = f$ 的非负 $g \in \mathbb{R}[Y]$ 在 Y上都是顽固的。

例如遵循 [Mir95], ，我们称有效除子 $E = \sum m_i p_i$ 在曲线 C 上施加独立条件 于次数为 k 的形式在 C 上，如果其中向量子空间的余维数——该向量子空间属于 $\mathbb{R}[C]_k$并由形式 F组成，使得 $\operatorname{div}(F) - E$ 为有效除子——等于 E的次数。

注记 5.2. 注意，若 $E = \sum m_i p_i$、 $m_i \geq 0$对次数为 k 的形式在 C上施加独立条件，则任何除子 $E' = \sum m_i' p_i$ 只要满足 $0 \leq m_i' \leq m_i$也同样如此。

定理 5.3. 设 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 是一个全实簇，且 $I(X)$ 由二次曲面定义。设 $L \subset \mathbb{P}^n$ 为一个线性空间，使得 $C = L \cap X$ 是一条光滑曲线，并且对所有 $p \in C$，我们有

$$T_p C = T_p X \cap L.$$

令 $F \in \mathbb{R}[C]_2$ 为 C 上的一个非负二次型，并令 F 在 C上的实零点除子为 $D = 2E = \operatorname{div}(F)_{\mathbb{R}}$。进一步假设， E 中的点对 C上的线性形式施加线性无关条件。则存在 $G \in I(L)_2$，使得 $F + G$ 在 X上非负。

注 5.4. 包含关系 $T_p C \subseteq T_p X \cap L$ 总是成立的。我们在上文要求 $T_p X$ 与 L之间没有其他相交。注意，条件 $T_p C = T_p X \cap L$ 并不意味着 X 与 L 在 C处横截相交，因为我们并未要求 $T_p X$ 与 L 张成 $T_p \mathbb{P}^n$。

证明。首先，我们进行局部提升；也就是说，将 F 延拓为 X 上的一个形式，使其在 $X(\mathbb{R})$ 中 F 在 $C(\mathbb{R})$ 上的零点的某个解析邻域内非负。设 p 是 F 在 C上的一个实零点。关于切空间的假设等价于 $T_p X^\perp + L^\perp = T_p C^\perp$。于是我们可以选取线性形式 t、ℓ_1、……、ℓ_{N-1}（其中 $N =$维数为 X），使其构成 X在 p处余切空间的一组基，并且满足 ℓ_1、……、$\ell_{N-1} \in I(L)_1$。于是， [BCR98，命题 3.3.7] 推出 t、ℓ_1、……、ℓ_{N-1}构成 X 在 p 处的一个正则（局部）参数系，其中 t 是 C 在 p处的一个局部参数。

在 p处将 F于 C上局部展开，我们写成 $F = c_{2m} t^{2m} + O(t^{2m+1})$。由于 F在 C上非负， F与 C相交的重数 $2m$ 必为偶数且 $c_{2m} > 0$。现令 $G = \ell_1^2 + \cdots + \ell_{N-1}^2$，并考虑当 $\lambda > 0$充分大时 $F + \lambda G$ 在 X 上于 p 处的局部展开。

断言。 当 $\lambda > 0$ 充分大时，形式 $F + \lambda G$ 在 p 附近于 $X(\mathbb{R})$上局部非负，当且仅当 F的局部展开不含项 ℓ_i， $\ell_i t$，……， $\ell_i t^{m-1}$，对所有 $i = 1$，……， $N - 1$。

断言的证明。 若这些项中有任一项出现，则 $F + \lambda G$ 中的某个首项不是偶数，从而 $F + \lambda G$ 并非局部非负。另一方面， $F + \lambda G$ 的主部是关于 ℓ_1，……， ℓ_{N-1}与 t^m 的二次型，其中涉及 $c_{2m} t^{2m} + \lambda(\ell_1^2 + \cdots + \ell_{N-1}^2)$。注意，即使该二次型含有项 $\ell_i t^m$，当 $\lambda > 0$ 充分大时，它在离开 $t = \ell_1 = \cdots = \ell_{N-1} = 0$处取严格正的值。这例如可由实对称矩阵的正定性的Schur补准则得到： [HJ13，定理7.7。7]。最后，由 [Vas77，命题1。3]，，在 $t = \ell_1 = \cdots = \ell_{N-1} = 0$ 的一个小解析邻域内， $F + \lambda G$ 的符号由其主部的符号决定，而（如已表明）该主部非负，且 p 为严格局部极小。

因此，我们的目标是通过添加形式 $s_i \ell_i \in I(L)_2$，在 F 的局部（在 X 上的 p 处）展开中消去项 ℓ_i， $\ell_i t$，…， $\ell_i t^{m-1}$。将 F 在 p 处局部书写，我们得到

$$F = P(t) + \ell_1 Q_1(t) + \cdots + \ell_{N-1} Q_{N-1}(t) + \text{ mixed terms} \tag{2}$$

我们希望找到线性形式 s_1、……、 $s_{N-1} \in \mathbb{R}[X]_1$，使其分别与 $-Q_1(t)$……、$-Q_{N-1}$具有相同的展开，直到次数 $m-1$。于是，根据上述断言，当 λ充分大时， $F + \sum s_i \ell_i + \lambda G$ 在局部非负。下面说明如何针对给定的 $R(t) := -Q(t)$ 找到这样的线性形式 $s \in \mathbb{R}[X]_1$。

项 1、t、……、t^{m-1} 不出现在 $s+Q$ 中这一条件，只意味着它与 C 的交点重数至少为 m。因此，求出 s 就意味着解一个仿射线性方程组。具体而言，设 $s=\sum_{j=0}^{n} a_j x_j$。此外，限制在曲线 C 上的坐标可展开为 $x_j|_C=\sum x_{jk}t^k$、$j=0$、1、……、n。于是，$s|_C$ 在 $p\in C$ 处与 $R(t)=-\sum_{k\geq 0} q_k t^k$ 直到阶数 $k\leq m-1$ 相等的条件，可明确写为 $\sum_{j=0}^{n} x_{jk}a_j=-q_k$、$k=0$、1、……、$m-1$。这是一个规模为 $m\times(n+1)$ 的仿射系统。相应矩阵 $(x_{jk})_{j\ k=0}^{n\ m-1}$，的秩为 m，否则除子 $E'=mp$（因此整个除子 E 也）不会对 C 上的线性形式施加独立条件（参见注 5.2）。这保证我们可以找到 a_0、a_1、……、$a_n\in\mathbb{R}$，使其满足上述仿射系统；等价地，$s|_C=\sum_{j=0}^{n} a_j x_j|_C$ 与 $R(t)=-Q(t)$ 直到阶数 $m-1$ 相等。现在设 p_1、……、p_r 是 E 支集中的点，其重数分别为 m_1、……、m_r，即 $E=\sum m_i p_i$。由于 E 对线性形式施加独立条件，编码 $s|_C$ 与任意给定的 $R_i(t)$ 直到阶数 m_i-1、$i=1$、……、r 相等的矩阵（如上所述）的秩为 $m_1+\cdots+m_r$。这保证我们能够找到 $s\in\mathbb{R}[X]_1$，使其在 E 支集中的所有点处满足所需条件。总之，通过给 F 加上二次型 $s_1\ell_1+\cdots+s_{N-1}\ell_{N-1}+\lambda(\ell_1^2+\cdots+\ell_{N-1}^2)$，我们可以使它在所有 p_1、……、p_r 处局部非负。

现在，我们可以通过加上一个足够大的正倍数 G，将F 提升为在 X上非负的二次型，从而应用提升论证。具体来说，为了明确说明这一点，我们转到 $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$的双重˜ ˜覆盖 $\mathbb{S}^n$，并分别将 X 和 $p_1,\ldots,p_r$ 的原像记为 $X\subset\mathbb{S}^n$ 和 $\pm\tilde{p}_1,\ldots,\pm\tilde{p}_r\in X$、˜。在 X 中，除 $\tilde{p}_1,\ldots,\tilde{p}_r$ 的小邻域外，二次多项式 F都能取到其最小值 $F_{\min}$。如果 $F_{\min}\geq 0$，那么无需做任何处理就能使 F 在 X上非负。否则，假设我们已使 F在 $p_1,\ldots,p_r$的小邻域内非负。

那么，$F_{\min}$ 形式会有 U 的下界管状邻域之外取得 $\tilde{X}$ 的 $\tilde{X}>0$，但是形式 $\tilde{F}+\lambda' G$ 在 X 上非负，进而在 X上也非负。□

注 5.5. 设 X 是一个实代数簇，$C\subset X$ 是一条曲线，并假设 C 在 X 的理想中的理想由二次曲面定义。那么 $\nu_2(C)=\nu_2(X)\cap L$，其中 L 是一个线性空间，并且对所有 $p\in\nu_2(C)$，我们都有

$$T_p\nu_2(C)=T_p\nu_2(X)\cap L.$$

推论 5.6. 设 $X\subseteq\mathbb{P}^n$ 是一个全实代数簇，其 I（X）由二次曲面定义。设 $L\subset\mathbb{P}^n$ 是一个线性空间，使得 $C=L\cap X$ 是 L 中的一条椭圆正规曲线，并且 $T_pC=T_pX\cap L.$。那么，对于在 C 上非负的任意二次曲面 $F\in\mathbb{R}[C]_2$，都存在一个二次型 ˆ $F\in\mathbb{R}[X]_2$，它在 Xˆ 上非负，使得 $F|_C=F$，即 F 可以扩展为一个在 X 上非负的二次型。

证明。我们需要验证，1 2 div(F)$_{\mathbb{R}}$ 在椭圆正规曲线 C 上对线性形式施加独立条件。首先假设 $F\in\mathbb{R}[C]_2$ 张成实数域 C 上非负二次型锥的一条极射线。于是根据 [BBS24 定理 B]，我们有 div(F) $=$div(F)$_{\mathbb{R}}$。如果 1 2div(F) 对线性形式 $\mathbb{R}[C]_1$ 施加的是相关条件，那么就存在一个线性形式 $\ell\in\mathbb{R}[C]_1$，它在 1 2 div(F) 上消失。于是，$F-\varepsilon\ell^2$ 和 $F+\varepsilon\ell^2$ 是两个不成比例于 F 的非负二次型，其中 $\varepsilon>0$ 足够小。这与 $F=\frac{1}{2}(F-\varepsilon\ell^2)+\frac{1}{2}(F+\varepsilon\ell^2)$ 的极性矛盾。因此，根据定理 5.3，F 可以扩展为一个在 X 上非负的二次型。如果 $F=\sum_{i=1}^{r} F_i$ 不是极端的，那么它仍可扩展为一个在 X 上非负的二次型，因为这对生成 F 的极端二次型 $F_i\in\mathbb{R}[C]_2$ 成立。□

我们可以将推论5.6 表述为关于实代数簇上非负多项式锥的投影的结论，如下所示。设 $X\subseteq\mathbb{P}^n$ 是一个全实簇，其消失理想$I(X)$由二次型生成。设 $L\subset\mathbb{P}^n$ 是一个线性空间，且 $C=L\cap X$ 是 L中的一条椭圆正规曲线，并且 $T_pC=T_pX\cap L.$ 设 $I(C)$是 C 在 $\mathbb{R}[X]_2$中的理想。那么

我们有一个自然的线性投影 $\pi : \mathbb{R}[X]_2 \to \mathbb{R}[C]_2$，它模掉 $I(C)$。显然，$\pi(P_X) \subseteq P_C$在一般情形下成立。在上述假设下，我们有等式 $\pi(P_X) = P_C$。

推论 5.7. 设 C 是 $\mathbb{P}^n$ 中次数为 n 的椭圆正规曲线。那么，任何在 C 上非负的 $2d$ 次形式（当 $n = 2$ 时为 $d \geq 3$，且 $n \geq 3$ 为 $d \geq 2$）都可以延拓为 $\mathbb{P}^n$ 上的全局非负形式 f。特别地，在 $\mathbb{P}^n$ 上存在次数为 $2d$、至多有 nd 个实零点的顽固形式，其中每个实零点都是普通节点（即，在 f 的每个实零点处，海森矩阵均为秩为 n 的半正定矩阵）。

证明。我们将推论 5.6 应用于 C 和 $\mathbb{P}^n$ 的 d 次 Veronese 嵌入。当 $n \geq 2$ 时，C 在 $\mathbb{P}^n$ 中的理想由二次曲面定义；当 $n = 2$ 时，则由单个三次曲面定义。由于对于 $n \geq 3$ 有 $d \geq 2$，而对于 $n = 2$ 有 $d \geq 3$，我们可知 $\nu_d(C) = L \cap \nu_d(\mathbb{P}^n)$，且切空间条件成立。我们可以在 C 上构造一个次数为 $2d$、恰有 nd 个实零点的顽固多项式 F。定理 5.3 的证明中，通过添加 $\ell_1^2 + \cdots + \ell_{k-1}^2$ 来构造提升，可确保提升后的形式 F 的所有实零点 $\tilde{}$ $\tilde{}$ 都是普通节点。此外，F 根据命题 5.1 继承了 F 的顽固性。□

例 5.8. 现在我们说明，若 C 与 F 的交点在 C上的线性形式上不满足独立条件，那么非负提升并非总是可行。为此，我们考虑 E 中的 $\mathbb{P}^2$ 中研究过的 [PSV11]。它由一个四次多项式定义：

$$G = 25(x^4 + y^4 + z^4) - 34(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2).$$

为使此例与定理5.3一致，我们令 $X \subset \mathbb{P}^{14}$ 为$\mathbb{P}^2$ 的第 4 次 Veronese 嵌入，并令 C 为 Edge 四次曲线的第 4 次 Veronese 嵌入。于是 C 是 X的一个横截超平面截面，特别是，定理5.3 的交点条件均得到满足。在 C 上的二次型是 E上的八次形式。

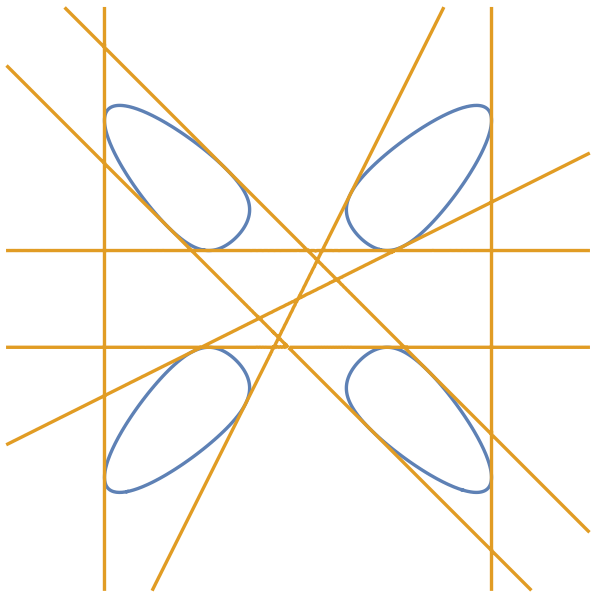

FIGURE 5. 由其双切线构造的 Edge 四次曲线及非负八次形式。

为了绘制图形（见图 5），我们使用去齐次化多项式，因此令 $g(x, y) = 25(x^4 + y^4 + 1) - 34(x^2y^2 + x^2 + y^2)$。令 f 为 E的以下 8 条双切线的乘积：$b_1 = x - 2$, $b_2 = -x - 2$, $b_3 = \frac{1}{2} - y$, $b_4 = -\frac{1}{2} - y$, $b_5 = x - 2y$, $b_6 = x - \frac{1}{2}y$, $b_7 = x \mp y + \frac{3}{5}$,$b_8 = x \mp y - \frac{3}{5}$。那么 $f = b_1 \cdots b_8$在 C上是非负且实根的。

C 上 f 的齐次化 F 的除子 D 由 16 个重数均为 2 的点组成，即 $D = 2 \cdot (p_1 + \cdots + p_{16})$。因此， $E = \frac{1}{2}D = p_1 + \cdots + p_{16}$ 由 16 个重数均为 1 的点组成。由于 $C \subset \mathbb{P}^{13}$， E 中的点不可能对 C上的线性形式施加独立条件。

为了将 F 提升为在 $\mathbb{P}^2$上非负，必须存在一个四次乘子 H，使得 $F - G \cdot H$ 的梯度在 F与 G的 16 个交点 $p_1, \ldots, p_{16}$ 处为 0。换言之，对于 $i = 1, \ldots, 16$，必须满足 $H(p_i) = \frac{\|\nabla F(\quad p_i\|)}{\|\nabla G\ p_i\|}$ ()。这里，我们要解的是一个包含 14 个变量的 16 个仿射线性方程组成的方程组，因此预计无解。直接计算表明，确实不存在这样的解。

6. Ternary sextics and weak Del Pezzo surfaces

现在我们考虑 $\mathbb{P}^2$上次数为 6 的非负形式。类比曲线结果，我们证明，三元六次型 F 的顽固性由 F的实零点个数决定，具体计数方式采用下文定义的实δ不变量。众所周知，可约的非负三元六次型，或具有无穷多个零点的非负三元六次型，都是平方和 [CLR80]。本节将反复用到这些事实。此外，容易看出，对于不是平方和的非负三元六次型，按实δ不变量计数的实零点最大数目为 10——这是由平面曲线的次数-亏格公式得出的。文献 [BKR24] 证明了，具有 10 个零点的非负三元六次型是顽固的。我们将通过证明文献 [BKR24],中的一个猜想来改进这一结果：一个不是平方和的非负三元六次型是顽固的，当且仅当其实δ不变量至少为 9。

首先，我们利用弱Del Pezzo曲面理论中的一个联系，证明至多有 8 个零点的三元六次型不是顽固的。

6.1. 零点较少的六次曲线不是顽固的。为了更好地说明非负且实零点较少的三元六次型不是顽固的这一事实背后的主要思想，我们先讨论零点处于一般位置的情形，因为从技术层面来说，这种情形较为简单。沿用[DPT80, Surfaces de Del Pezzo III],中的记号，下文用 $X(p)$ 表示曲面 X在一点 $p \in X$ 处的吹起，用 $X(\Phi)$ 表示 X 在有限点集 $\Phi \subset X$处的吹起，或迭代爆破 π: $X(p_1, \ldots, p_r) \to X(p_1, \ldots, p_{r-1}) \to \ldots \to X(p_1) \to X$，其中 $\Phi = (p_1, \ldots, p_r)$ 和$p_i \in X(p_1, \ldots, p_{i-1})$。

例6.1. 设 $F \in \mathbb{R}[x, y, z]_6$是 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$中具有 $r \leq 8$ 个实零点的非负三元六次型。我们假设这些零点 $p_1, \ldots, p_r$ 是常二重点（即 F 在 p_i 处的海森矩阵的秩为 2 ），并且在如下意义下处于一般位置：没有三个点共线，且没有6个点位于一条圆锥曲线上。我们通过应用 [Sch11，定理4.11]来证明 F 此时不是顽固的；需要讨论的主要情形是 F 不是平方和。然而， [Sch11，定理4.11] 并不能直接应用，因为我们的多项式 $F \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(6)) = \mathbb{R}[x, y, z]_6$ 不是严格正的。为了弥补这一情况，我们通过在 r个零点 $p_1, \ldots, p_r$ 处吹起 $\mathbb{P}^2$ 来改变我们所研究的曲面，从而得到 π: $Z = \mathbb{P}^2(p_1, \ldots, p_r) \to \mathbb{P}^2$。

此后，我们沿用 [DPT80，《德尔佩佐曲面》]的记号。$\mathcal{V}(F) \subset \mathbb{P}^2$ 的严格变换是 Z上由截面 $s \in H^0(Z, \omega_Z^{\otimes -2})$定义的一条不可约曲线，其中 $\omega_Z = \mathscr{O}_Z(-3E_0 + \sum_{i=1}^r E_i)$是 Z的典范丛， E_0 是一条一般直线的严格变换，而E_1，……， E_r 是 p_1，……， p_r上的例外因子。由于点 p_i 是复曲线的节点，且为孤立实零点，截面 s 在 Z的任何实点上都不为零。现在我们可以在 Z 上应用Scheiderer的结果 [Sch11，定理4.11] ，并按其记号取 $L = M = -\omega_Z$ 与$f = g = s$。我们需要检验的是， Z 上的反典范除子具有丰性，这由零点处于一般位置的假设所蕴含，因为 Z 是德尔佩佐曲面 [Dol12，第 8]章。因此，对所有充分大的 k， $s^k \in H^0(Z, \omega_Z^{\otimes -2k})$是平方和。由于 $H^0(Z, \omega_Z^{\otimes -k})$中的截面

对应于 $\mathbb{P}^2$ 中在 p_1，……，p_r 处以 k阶消失、次数为 $3k$ 的曲线，我们可以将这一表示前推，从而看出 $F^k = \pi_*(s^k) \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(6k))$是平方和。因此，$F$不是顽固的。

对于更特殊的非负六次型 F，这种策略有两个主要问题。首先，实零点不一定处于一般位置，因此吹起不一定是德尔佩佐曲面（而可能是弱Del Pezzo曲面）。此外，零点可能不是常二重点（因此海森矩阵的秩可能较小），这就需要采用迭代吹起过程，才能得到某个线丛的严格正截面。这些问题可能导致反典范丛不丰的曲面，因此 Scheiderer 的结果不适用。我们将通过更仔细的分析来解决这些问题，主要依据 [DPT80]。作为一个具体例子，[BKR24] 的第 6 节中，作者考察了一个扰动后的莫茨金多项式 $M_1(x, y, z) = x^4y^2+x^2y^4+z^6-x^2y^2z^2$，它不是平方和，在 $[1\colon 0\colon 0]$ 和 $[0\colon 1\colon 0]$, 各有一个实δ不变量为 3 的零点。然而，M_1^3 是平方和，因此 M_1 并非顽固的。

作为第一步，我们证明，嵌入奇点消解 $\pi\colon X \to \mathbb{P}^2$（即 $\mathcal{V}(F)$的 $\subset \mathbb{P}^2$，针对一条非负且不是平方和的六次曲线 F）给出一个弱Del Pezzo曲面。我们选取皮卡群Pic($\mathbb{P}^2(\Phi)$)的如下一组基，如 [DPT80，《德尔佩佐曲面II》。2], 经由 $\pi\colon \mathbb{P}^2(\Phi) \to \mathbb{P}^2$ 迭代构造如下。设 $E_0 = \pi^{-1}(L)$为一般直线 $L \subset \mathbb{P}^2$ 的原像，并设 E_1，……，E_r 为 p_1，……，p_r的全变换。则映射Pic($\mathbb{P}^2(\Phi)$) $\to \mathbb{Z}^{r+1}$，$\xi \mapsto (\xi.E_0; \xi.E_1, \ldots\ldots, \xi.E_r)$是格的同构。记 ω 为 $\mathbb{P}^2(\Phi)$的典范类，我们有

$$E_0^2 = 1\ ;\ E_i^2 = -1\ ;\ E_i.E_j = 0 \text{ for } 0 < i \neq j; \tag{3}$$

$$\omega = -3E_0 + \sum_{i=1}^{r} E_i \mapsto (-3; -1, -1, \ldots, -1) \in \mathbb{Z}^{r+1} \tag{4}$$

$$\omega.E_0 = -3\ ;\ \omega.E_i = -1 \text{ for } i > 0\ ;\ \omega.\omega = 9 - r. \tag{5}$$

引理 *6.2.* 设 $F \in \mathbb{R}[x, y, z]_6$ 为一个并非平方和的非负三元六次型。设$\pi\colon X \to \mathbb{P}^2$ 是 $\mathcal{V}(F) \subset \mathbb{P}^2$ 的实奇点的嵌入式消解，它作为针对 $\Phi = (p_1, \ldots, p_r)$、$\Phi_i = (p_1, \ldots, p_i)$ 以及 $p_{i+1} \in \mathbb{P}^2(\Phi_i)(\mathbb{R})$ 的迭代爆破 $X = \mathbb{P}^2(\Phi)$ 而得到。则 Φ 在 [*DPT80*《*Del Pezzo* 曲面 *III*》的意义下处于几乎一般位置。2]:

> ***(1)*** 对所有 $i = 1, \ldots, r$，点 $p_i \in \mathbb{P}^2(\Phi_{i-1})$ 不属于除子 $E_1, \ldots, E_{i-1} \subset \mathbb{P}^2(\Phi_{i-1})$ 中任何一个不等于某个 E_j 的不可约分支。***(2)*** $\mathbb{P}^2$ 中没有直线经过4 个 Φ的点；***(3)*** $\mathbb{P}^2$ 中没有不可约二次曲线经过 7 个 Φ的点。

为说明条件 (1)，考虑例外除子 $E_1 \subset \mathbb{P}^2(p_1)$，它是不可约的，以及一个点 $p_2 \in E_1$。接下来我们可以对 p_2 进行爆破，得到 E_1，$E_2 \subset \mathbb{P}^2(p_1, p_2)$。全变换 E_1 in$\mathbb{P}^2(p_1, p_2)$现在有两个不可约分支：例外除子 E_2 和 E_1 在 $\mathbb{P}^2(p_1)$ 中的严格变换$\widehat{E_1}$。在条件 (1) 中，现在可以选择 p_3 位于不可约除子 E_2上，但$\widehat{\ }$不在 E_1上。

证明。假设 Φ 中的四个（互不相同的）实点 L 位于 $\mathbb{P}^2$中的一条直线上。由于六次曲线 F 是非负的，因此 F 在这些点中的每一点处都是奇异的，从而 L与 $\mathcal{V}(F)$ 在这些点中的每一点处的交点重数至少为 2。根据 B´ézout 定理，这意味着 F 沿实直线 L恒等为零。然后 [CLR80，主要定理。(A)] 表明 F 是平方和。对于不可约二次曲线上的七个点，同样的推理也适用：B´ézout 定理再次表明，如果 F 在一条实二次曲线上有七个零点，则 F 沿该实二次曲线恒等为零。因此，(2) 和 (3) 得到满足。

还需验证条件 (1)。这里，我们利用 F 的任意实零点都是重数为 2 的点，因为 F 不是平方和，参见例如 [BKR24，引理 21]。于是 $\mathcal{V}(F)$ 的严格变换在任意例外除子上也有一个重数至多为 2 的零点，参见例如 [Lip75，引理 1.(a)]。通过归纳法，这意味着条件 (1) 得到满足。□

定义 6.3 （见 [BKR24]）。回顾一下，多项式 $f \in \mathbb{R}[x,y]$ 在 $p \in \mathbb{A}^2$处的重数 是满足以下条件的最大整数 $m = m_p(f$: 多项式 f 的所有阶数不超过 $m-1$的偏导数都在 p处消失。于是，（局部）实δ不变量 $\delta_p^{\mathbb{R}}(f$定义为

$$\delta_p^{\mathbb{R}}(f) := \frac{m_p(f)(m_p(f)-1)}{2} + \sum_{p'} \delta_{p'}^{\mathbb{R}}(f'), \tag{6}$$

其中求和遍历 $f=0$ 在 p处的所有实一阶无限邻近点。我们将实形式 $F \in \mathbb{R}[x,y,z]$ 在 $p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}$ 处的（局部）实δ不变量定义为，令 $\delta_p^{\mathbb{R}}(F)$: $= \delta_p^{\mathbb{R}}(f$，其中 f 是 F 相对于包含 p的仿射图的去齐次化。鉴于式（6）的局部性质， $\delta_p^{\mathbb{R}}(F)$ 的定义不依赖于仿射图的选择。最后，我们将总实δ不变量 定义为

$$\delta^{\mathbb{R}}(F) := \sum_{p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})} \delta_p^{\mathbb{R}}(F).$$

（局部）实δ不变量可以看作经典复数情形不变量的类比：更多信息请参阅 [BKR24] 。现在我们可以证明关于三元六次型的第一个结果。

定理 6.4. 设 $F \in \mathbb{R}[x,y,z]$ 是一个非负三元六次型，且不是平方和。若$\delta^{\mathbb{R}}(F) \leq 8$，则 F 不是顽固的。

证明。我们将例6.1中的策略调整用于更退化的情形，并依据 [DPT80, Surfaces de Del Pezzo II-V]。设 π: $Z = \mathbb{P}^2(\Phi) \to \mathbb{P}^2$ 是对 $\mathcal{V}(F) \subset \mathbb{P}^2$的实奇点进行嵌入式消解所得。由于 F 是非负的且不是平方和，因此 Z 是一个弱Del Pezzo曲面，参见引理 6.2 和 [Dol12, Cor. 8.1.24], 并且 $\mathcal{V}(F)$ 在 Z 中的严格变换没有实点。由于 F 是 $\omega_{\mathbb{P}^2}^{\otimes -2}$ 的一个截面，且 Z 是对 $\mathcal{V}(F)$的实奇点进行的消解，因此它给出了线丛 $\omega_Z^{\otimes -2}$的一个截面 f，该线丛对应于 $\mathcal{V}(F)$ 在 Z中的严格变换。

令 ϕ: $Z \to \overline{Z}$ 为到 Z 反典范模型的映射（参见 [DPT80，《德尔佩佐曲面 V》]）。映射 ϕ 诱导出典范同构 $\phi_*(\omega_Z^{\otimes n}) = \omega_{\overline{Z}}^{\otimes n}$ 和 $\phi^*(\omega_{\overline{Z}}^{\otimes n}) = \omega_Z^{\otimes n}$，其中可逆层 ω_Z 定义为Z的典范丛的前推 $\phi_*(\omega_Z)$，参见 [DPT80，《德尔佩佐曲面 V》，定理 2(d)]。于是， $\omega_Z^{\otimes -2}$ 的截面 f 给出 $\omega_Z^{\otimes -2}$ 的一个截面 $\phi_*(f)$。

现在我们利用 [DPT80，《德尔佩佐曲面 V》，定理 2]证明，此截面在 Z 上没有实零点。该定理表明， $\phi_*(f)$在 Z 的奇点之外没有零点，因为根据上述定理的 (a) 和 (c) 部分， ϕ 是 $U \subset Z$ 与 Z_{reg}之间的同构（其中 U 是基本循环的补集，参见 [DPT80，第 54]页）。现在，截面 $\phi_*(f)$在 Z 的某个奇点处消失，意味着 f 必须在映射到该奇点的基本循环上消失。然而，根据 [DPT80，《德尔佩佐曲面 IV》，推论 1，第 53]页，这不可能发生：如果 f 在基本循环 Γ上有零点，那么它就会沿着 Γ处处消失。然而， f 定义了 $\mathcal{V}(F)$的严格变换，它是不可约的，且不能以例外除子为分支。

由上一段可推得 $\phi_*(f)$ 是 $\omega_Z^{\otimes -2}$ 的一个正截面，而它具有丰性。接着，我们可以使用 Scheiderer 的结果 [Sch11，定理 4。1] (其中 $X=Z$， $L=M=\omega_Z$， $r=0$，以及$f=g=\phi_*(f)$)，该结果表明存在一个奇数 $k \in \mathbb{N}$使得 $\phi_*(f)^k \in H^0\left(Z, \omega_Z^{\otimes -2k}\right)$ 是 $\omega_Z^{\otimes -k}$ 的截面平方和。利用同构 ϕ^*，我们可以将这一表示拉回

以证明 f^k 是平方和。最后， $f^k \in H^0(Z,\ \omega_Z^{\otimes -2k})$ 的这一平方和表示可通过奇点消解推前，从而得到 $F^k = \pi_*(f^k)$ 的平方和表示。□

下面的例子说明了基本闭链对于反典范模型的作用，如同前面的证明中那样。

例 6.5. 考虑一个在 (0 : 0 : 1) 附近形如 $x^2 + y^4 = 0$ 的三元六次型。为了解消相应曲线的奇点，我们需要进行两次连续的爆破。在坐标 a_1 与 $b_1 = y$ （满足 $x = a_1 b_1$ ）中吹起 $(0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}^2$ ，将局部方程 $x^2 + y^4 = 0$ 变为 $(a_1 b_1)^2 + b_1^4 = 0$，它分解为 $b_1^2(a_1^2 + b_1^2)$。该吹起 X_1 上的例外除子在这些坐标中由 $b_1 = 0$ 定义，而形式 $(a_1^2 + b_1^2)$ 在该例外除子 E_1 上有一个二重根。因此，我们再次在给定坐标中于点 (0,0) 处爆破曲面 X_1 。将新曲面记为 X_2。在满足 $a_1 = a_2 b_2$ 的局部坐标 a_2 与 $b_2 = b_1$ 中，方程变为$0 = a_1^2 + b_1^2 = (a_2 b_2)^2 + b_2^2 = b_2^2(1 + a_2^2)$。新的例外除子由 $b_2 = 0$ 定义，而形式 $1 + a_2^2$ 没有实零点（两个共轭复零点）。我们已经解消了该奇点。

现在，最终的曲面 X_2 是一个德尔佩佐曲面，其皮卡群 Pic(X_2) 是 $\mathbb{Z}^3$。Demazure 在 [DPT80, Surfaces de Del Pezzo II] 中选取了一个基，使相交形式为 diag(1, −1, −1)。基本循环是满足性质 $D^2 = -2$ 和 $D.\omega_{X_2} = 0$ 的 X_2 上的有效除子 D 。这两个方程只有两个解，即 (0, 1, −1) 和 (0, −1, 1)。其中只有一个$\widehat{\ }$是有效的，即 (0, 1, −1)，它是第一次例外除子 E_1 在第二次吹起 $E_1 = E_2 - E_1$ 下的严格变换。

这些基本循环在弱德尔佩佐曲面的反典范模型中发挥着特殊作用 [DPT80，Surfaces de DelPezzo V。2]。我们的六次曲线的严格变换不再与$\widehat{\ }$这个除子 E_1 相交 E_1 。它曾经在一个点处相交，即在一个普通节点处相交，而第二次吹起移除了这个交点。因此，由我们的三元六次型定义的除子前推到弱德尔佩佐曲面的反典范模型后，不包含对应于基本循环收缩的奇点。

6.2. **具有多个零点的六次形式是顽固的**。现在我们给出一个证明：非负三元六次型若不是平方和，且零点足够多，就必定是顽固的。由此，我们根据实零点的数量，完成对顽固与非顽固三元六次型的分类。

定理 6.6。设 $F \in \mathbb{R}[x, y, z]$ 是一个非负三元六次型，且不是平方和。若$\delta^{\mathbb{R}}(F) \geq 9$，则 F 是顽固的。

证明。在本证明中，使用除子而非线丛的语言更为方便。设 $\pi\colon\ Z = \mathbb{P}^2(p_1, \ldots, p_r) \to \mathbb{P}^2$ 是 $\mathcal{V}(F) \subset \mathbb{P}^2$ 的实奇点的一个嵌入式消解。由于 $\delta^{\mathbb{R}}(F) \geq 9$，我们有 $r \geq 9$。事实上，因为 F 是一个非负三元六次型，且不是平方和，所以对 F 的任意实零点 $p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$，都有 $m_p(F) = 2$。若 $\delta_p^{\mathbb{R}}(F) > 1$，则由 (6) 可知， $\mathcal{V}(F)$ 的严格变换与 p 上方的例外纤维相交于一点 p' ，且其重数为 2。换言之，我们有 $\delta_p^{\mathbb{R}}(f) = 1 + \delta_p^{\mathbb{R}}(f')$，且 $m_{p'}(f') = 2$，参见 BKR24 引理 26] 的证明。如此归纳下去可知，满足 $\delta_p^{\mathbb{R}}(F) = k$ 的 $p \in \mathbb{P}^2$ 会对 $Z = \mathbb{P}^2(p_1, \ldots, p_r)$ 贡献 k 个点。现在转而考察全局量 $\delta^{\mathbb{R}}(F)$，可知 Z 中至少有 9 个点。

我们首先证明 $h^0(Z,\ 3E_0 - \sum_{i=1}^9 E_i) \geq 1$。这可由黎曼–罗赫公式 [Har77，定理 V.1.6], 在 $r = 9$ 处推出：

$$h^0(Z, D) = \frac{1}{2} D.(D - K) + 1 + p_a(Z) + h^1(Z, D) - h^0(Z, K - D)$$

其中 $D = 3E_0 - \sum_{i=1}^{9} E_i$。我们有 $h^0(Z,\ D) \geq 1$，因为 $p_a(Z) = 0$，$h^1(Z,\ D) \geq 0$，$h^0(Z,\ K-D) = 0$（因为它与一条一般直线相交于负数个点），且 $D.(D-K) = 0$。为了计算这最后一个交数，我们首先展开

$$D.(D-K) = \left(3E_0 - \sum_{i=1}^{9} E_i\right) . \left(6E_0 - 2\sum_{i=1}^{9} E_i\right) = 18 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{9} E_i^2 = 0$$

对 $i, j \geq 1, i \neq j$，使用 $E_0.E_i = 0$, $E_i^2 = -1$ 和 $E_i.E_j = 0$。因此，我们得到了所需的 $h^0(Z, D) \geq 1$。

若 $r = 10$，上文唯一的变化是 $D - K$ 变为 $6E_0 - 2\sum_{i=1}^{9} E_i - 2E_{10}$；由于 $E_{10}.E_i = 0$ 对于 $1 \leq i \leq 9$ 和 $E_0.E_{10} = 0$成立，它以相同的方式与$D = 3E_0 - \sum_{i=1}^{9} E_i$ 相交。因此，$h^0(Z, D) \geq 1$ 在这种情况下也成立。

现在选取一个非零截面 $c \in H^0(Z, 3E_0 - \sum_{i=1}^{9} E_i)$。它的推前 $\pi_*(c)$对应于一条平面三次曲线 C。由于 F 不可约，曲线 $\mathcal{V}(C)$和 $\mathcal{V}(F)$在 $\mathbb{P}^2$上相交于 18 个点，按重数计。由于这些曲线的严格变换在 Z 上不相交（根据上述计算，$D.(D-K) = 0$），所有这些交点都必须是实数域上的点。事实上，它们全都是该三次曲线上的非奇异点：如果这条三次曲线在某点 p_j处奇异，那么它的严格变换的类将为 $3E_0 - \sum_{i \neq j} E_i - 2E_j$；通过类似上述的计算，这会得到它与 $\mathcal{V}(F)$的严格变换的类 $6E_0 - 2\sum_{i=1}^{9} E_i$之间的负相交数 -2。这与 Z上的 B´ezout 定理矛盾。

现在我们通过证明多项式 F 在三次曲线的齐次坐标环中是顽固的，来完成论证。首先证明它不是平方和。反设它是平方和；由于多项式F 在三次曲线 $\mathcal{V}(C)$上具有最多的实根，因此它是平方和锥的一条极射线，故它必为一个平方（参见第3.1节）。

记 $F = A^2 + CB$ 为三次曲面 A、$B \in \mathbb{R}[x, y, z]$。由于 $F(p_1) = 0$ 且 $C(p_1) = 0$，可知 $A(p_1) = 0$ 也成立，因此 $\mathcal{V}(A)$ 在 $\mathbb{P}(p_1)$ 中的严格变换的类为 $3L - E_1$。对 p_2 运用同样的推理并继续归纳，可得 $\mathcal{V}(A)$ 在 $Z = \mathbb{P}(p_1, \ldots, p_9)$ 中的严格变换的类为 $3E_0 - \sum_{i=1}^{9} E_i$。由 Z 上的贝祖定理可知，$\mathcal{V}(C)$ 和 $\mathcal{V}(A)$ 的严格变换没有交点，这意味着 $\mathcal{V}(C)$ 和 $\mathcal{V}(A)$ 在 $\mathbb{P}^2$ 中相交于9个点，按重数计。因此，两个三次曲面 A 和 C 生成这个长度为9的概形的理想。具体而言，这意味着 $B = \alpha A + \gamma C$ 是 A 和 C 的线性组合。

现在考虑有理映射 $\phi\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1, (x : y : z) \mapsto (A(x,\ y,\ z) : C(z,\ y,\ z))$. 由于一般点上的纤维是一条三次曲线，泛实点上的纤维包含一个实点。这表明 $F = A^2 + CB$ 对应于 $\mathbb{P}^1$ 上的一个二次型，该二次型全局非负，因此是 A和 C中的平方和，也就是说，是 $\mathbb{R}[x, y, z]$中的平方和，这与 F不是平方和的假设矛盾。

因此 F 在 C上是实根、非负且不是平方。那么推论 3.3表明 F 在 C上是顽固的，我们可以利用命题 5.1 得出证明。□

7. Questions and Conjectures

最后，我们提出一些开放问题和研究方向。受 [BKR24] 的启发，该结果表明非顽固多项式的集合构成一个凸锥，且包含 P_X的内部，我们提出以下猜想。

猜想 7.1。设 $X \subset \mathbb{P}^n$ 是一个全实簇，$\mathcal{F}$ 是 P_X 的一个面。那么，$\mathcal{F}$ 的相对内部中的所有点要么都是顽固的，要么一个也不是。

对于光滑曲线，这可由定理 1.1 得出（只有实零点数达到最大值的极射线才是顽固的）。我们的下一个猜想讨论顽固次数中间隙的（不存在性）。

猜想 7.2。 设 $X \subset \mathbb{P}^n$ 是一个全实代数簇。存在一个正整数 d，使得对于所有 $1 \leq k < d$，在 X 上都不存在次数为 $2k$ 的顽固形式；而对于所有 $k \geq d$，在 X 上都存在次数为 $2k$ 的顽固形式。

受第 5 节关于非负性提升的讨论启发，我们提出一个一般性问题；我们认为这开启了一个引人入胜的研究方向：

问题 7.3。 对所有全实簇对 $X \subset Y$ 进行分类，使得任意多项式 $f \in P_X$都可以提升为一个非负多项式 Y。

所有非负二次式都是平方和的簇已在 [BSV13]中得到分类。我们希望对不存在顽固二次型的簇进行分类。

问题 7.4。 Cl对所有不存在顽固二次型的全实簇 X 进行分类 .

最后，我们提出一个更具体的问题。在 [BKR24 的猜想 6] 中，猜想一个张成 $P_{\mathbb{P}^n}$ 中极射线的全局非负形式（且不是平方）是顽固的。这一结论对三元六次型 $P_{\mathbb{P}^2,6}$ 成立，见 [BKR24 定理 1]，；在这种情况下，极射线（非平方）由满足 $\delta^{\mathbb{R}}(F) = 10$ 的形式 $F \in P_{\mathbb{P}^2,6}$ 张成，也就是说，F是一个非负的 6 次形式，有 10 个按重数计数的实零点（6）；参见 [BHO+12 定理 2] 以及 [BKR24 引理 23]。下一个自然的情形是四元四次型 $P_{\mathbb{P}^3,4}$ 的锥。在这种情况下，非平方的暴露极射线由恰有 10 个实零点的 $F \in P_{\mathbb{P}^3,4}$ 张成。此外，由 [BHO+12 定理 3] 可知， $F = \det(xA + yB + zC + wD)$ 是一个由线性形式构成的对称4×4 矩阵的行列式。因此，自然要问， [BKR24 定理 1]的证明思路能否推广到这一情形。

问题 7.5. </style}每一个张成， 4 极射线的非平方非负型式都是顽固的吗？

一个更一般的猜想见 [BKR24，猜想 6],但这是一个可以着手研究、且理解得更透彻的首例。

References

[Art27] E. Artin, *Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate*, 《汉堡大学数学研讨会论文集》5（1927），第 1 期，100–115。[BBS24] L. Baldi、G. Blekherman 和 R. Sinn, *Nonnegative polynomials and moment problems on algebraic curves*, arXiv:2407.06017，2024。[BCR98] J. Bochnak、M. Coste 和 M.-F. Roy, *Real algebraic geometry*, 《数学及其边缘领域成果》丛书，第 3 辑，第 36 卷，施普林格出版社，柏林，1998。[BHO+12] G. Blekherman、J. Hauenstein、J. C. Ottem、K. Ranestad 和 B. Sturmfels, *Algebraic boundaries of hilbert's sos cones* **148** 2012 6, 1717 1735 , 《数学汇刊》（），第 – 期。[BKP25] L. Baldi、M. Kummer 和 D. Plaumann, *Totally real divisors on curves*, arXiv:2509.07544, 2025。[BKR24] G. Blekherman、K. Kozhasov 和 B. Reznick, *On odd powers of nonnegative polynomials that are not sums of squares* 2407 21779, 2024 , arXiv: 。[BSV13] G. Blekherman、G. G. Smith 和 M. Velasco, *Sums of squares and varieties of minimal degree*, 《美国数学会杂志》29（2013），893–913。[BSV16] G. Blekherman、G. G. Smith 和 M. Velasco, *Sums of squares and varieties of minimal degree*, 《美国数学会杂志》29（2016），第 3 期，893–913。[CLR80] M.-D. Choi、T.-Y. Lam 和 B. Reznick, *Real zeros of positive semidefinite forms. I*, 《数学杂志》171（1980），1–26。[Des37] R. Descartes, *La géométrie*, 莱顿：Jan Maire，1637。[Dol12] I. V. Dolgachev, *Classical algebraic geometry: A modern view*, 剑桥大学出版社，2012。[DPT80] M. Demazure、H. C. Pinkham 和 B. Teissier（编）, *Séminaire sur les singularités des surfaces. Centre de Mathématiques de l'école Polytechnique Palaiseau 1976-1977* 777, 《数学讲义》，第 卷，Springer，Cham，1980。[Ful89] W. Fulton, *Algebraic curves*, 《高级图书经典系列》，艾迪生-韦斯利出版公司，高级图书项目，雷德伍德城，加利福尼亚州，1989。

[GH94] P . Griffiths 和 J . Harris, *Principles of algebraic geometry*, John Wiley & Sons, Inc .' 1994 .

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, 《数学研究生教材》, 第 52 卷, Springer, Cham, 1977。[Hil02] D. Hilbert, *Mathematical problems*, 《美国数学会通报》8（1902）, 第 10 期, 437–479。[Hil88] D. Hilbert, *Ueber die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten*, 《数学年刊》32（1888）, 第 3 期, 342–350。[HJ13] R. A. Horn 和 C. R. Johnson, *Matrix analysis*, 第 2 版, 剑桥大学出版社, 英国剑桥, 2013。[HM98] J. Harris 和 I. Morrison, *Moduli of Curves*, 《数学研究生教材》, 第 187 卷, 施普林格出版社, 纽约, 1998。[KZ26] M. Kummer 和 A. Zalar,
Positive polynomials and the truncated moment problem on plane cubics, arXiv:2508.13850v3, 2026。[Lip75] J. Lipman, *Introduction to resolution of singularities*, 代数几何（阿卡塔, 1974）, 1975, 第 187–230 页。[Mir95] R. Miranda, *Algebraic curves and riemann surfaces*, 美国数学会, 1995。[Mon05] J.-P. Monnier,
On real generalized Jacobian varieties, 《纯粹与应用代数杂志》203（2005）, 第 1–3 期, 252–274。[Ore24] S. Yu. Orevkov, *Private communication*（2024）。[PSV11] D. Plaumann、B. Sturmfels 和 C. Vinzant,
Quartic curves and their bitangents, 《符号计算杂志》46（2011）, 第 6 期, 712–733。[Rat19] J. G. Ratcliffe,
Foundations of hyperbolic manifolds, 第三版, 《数学研究生教材》, 第 149 卷, Springer, Cham, 2019。[Sch11] C. Scheiderer,
A positivstellensatz for projective real varieties **138** 2011 1 2, , 《数学 73 88 手稿》（ ）, 第 期, – –。[Sch24] C. Scheiderer,
A course in real algebraic geometry: Positivity and sums of squares, 施普林格国际出版社, 2024。[Ste79] G. Stengle, *Integral solution of Hilbert's seventeenth problem*, 《数学年刊》246（1979/80）, 第 1 期, 33–39。[Str69] D. J. Struik, *A source book in mathematics, 1200-1800*, 科学史文献选编, 马萨诸塞州剑桥：哈佛大学出版社, 1969。[Vas77] V. A. Vasil'ev, *Asymptotic exponential integrals, newton's diagram, and the classification of minimal points*, 《功能分析及其应用》11（1977）, 163–172。

Universität Leipzig, Leipzig, Germany*Email address*:
lorenzo.baldi@uni-leipzig.deGeorgia Institute of Technology,
Atlanta, Georgia, USA*Email address*: greg@math.gatech.edu
Université Côte d'Azur, Nice, France*Email address*:
khazhgali.kozhasov@univ-cotedazur.fr
Technische Universität Dortmund, Dortmund, Germany
Email address: daniel.plaumann@math.tu-dortmund.de
University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Illinois,
USA*Email address*: reznick@illinois.eduUniversität Leipzig, Leipzig,
Germany*Email address*: rainer.sinn@uni-leipzig.de