arXiv:2602.01195v1 [math.CO] 1 Feb 2026

图零集

M. Laczkovich 和 A. M´ath´e

2026年2月3日

摘要

我们称平面集 A 为图零的，如果存在函数g: $[0,1] \to \mathbb{R}$，使得 λ_2（$A+$图像 g） $=0$。若对每个平移副本 A' 和每个 $\varepsilon > 0$，都存在有限个竖直与水平平移，将 A 移至 A'，且水平平移过程中所覆盖的面积小于 ε，则称平面集 A 具有平移凯克亚性质。

当 A 是紧集时，这些性质等价。我们证明，每个绝对连续函数的图像都是图零的。此外，典型连续函数的图像也是图零的。因此，存在处处不可导的连续函数，其图像是图零的。不过，我们证明存在一个连续函数，其图像不是图零的。

1 引言与主要结果

若存在集合 $A' \neq A$，使得 A 能在面积任意小的集合内连续移动到 A'，则称集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ 具有 *Kakeya* 性质 （简称性质 (K)）。显然，每条线段和每段圆弧都具有性质 (K)。若对于 $A \subset \mathbb{R}^2$ 的任意全等副本 A， A 均能在面积任意小的集合内连续移动到 A'，则称集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ 具有 强凯克亚性质（简称性质 (K^s)）。众所周知，线段具有性质 (K^s)；这是由贝西科维奇对经典挂谷问题的解法得出的

[1]**关键词：** 利用平移的 Kakeya 型性质[2]**数学评论学科分类：** 28A75

定理 7.6]。一些圆弧也具有性质 (K^s)。对于足够短的圆弧，这一点已在 [6], 中证明；对于短于半圆的圆弧，则已在 [3] 中证明。目前尚不清楚每条真圆弧是否都具有性质 (K^s)。另一方面，若一个连续统具有性质 (K)，那么它必定是一条线段或一段圆弧 [4]。本文将研究一个相关概念。

定义 1.1。平面集 A 具有平移凯克亚性质 （K^t），如果对于 A 的每个平移副本 A' 以及每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个有限的竖直与水平平移序列，将 A 移至 A'，且在水平 平移过程中扫过的面积小于 ε。

最有趣的情形是连续曲线。我们将看到，大多数连续函数的图像以及大多数绝对连续曲线都具有性质（K^t）。尽管这看起来似乎有悖常理，但每个圆和每个没有竖直边的多边形都具有性质（K^t）（见注记 1.7.1）。

首先，我们给出性质（K^t）的一个等价表述。我们用 λ_d表示 d维勒贝格外测度。当集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ 沿向量（a，0）平移时，被触及的点集为 $A + ([0, a] \times \{0\})$。由此可知集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ 具有性质 （K^t）当且仅当，对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个简单函数 $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$，使得 $\lambda_2(A +$图像 $h) < \varepsilon$。（函数 $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ 称为简单函数，如果存在一个分割$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$，使得对于每个$i = 1$，...，$k$，$h$ 在（x_{i-1}，x_i）上为常数。）

如果集合 A 在 y 轴上的投影是零测度的，那么 A具有性质 (K^t)。事实上，将 A 水平平移时，所扫过的面积具有二维零测度。

反过来，令 E_A 表示满足以下条件的数 $y \in \mathbb{R}$ ：对于每个 $\varepsilon > 0$，$((0, \varepsilon) \times \{y\}) \cap A \neq \emptyset$。如果 A 具有性质 (K^t)，那么 E_A必定是零测度的。事实上，若 $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ 是一个简单函数，且 $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = 1$ 是一个分割，使得对于每个 $i = 1$，.....，k，若 $(x_{i-1} < x < x_i)$，则 $h(x) = c_i$，那么 $A +$的图像包含集合 $(x_{i-1}, x_i) \times (E_A + c_i)$，其中每个 $i = 1$，.....，k均成立，因此

$$\lambda_2(A + \operatorname{graph} h) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_1(E_A) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \lambda_1(E_A).$$

我们还考虑以下变体：

定义 1.2. 若存在函数 $g\colon [0,1]\to\mathbb{R}$，使得 $\lambda_2(A+\text{图像}\,g)=0$，则平面集 A 是图零，。

如果集合 A 在非水平直线 e 上的投影具有零线性测度，那么 A 是图零的。事实上，在这种情况下，对于每条垂直于 e 的直线 f，$\lambda_2(A+f)=0$。

例如，集合 $B=\{(x,y)\colon\ y-x\in\mathbb{Q}\}$ 是图零的。另一方面，B 不具有性质（K^{t}），因为对于每个 $\varepsilon>0$ 和 $y\in\mathbb{R}$，$((0,\varepsilon)\times\{y\})\cap B\neq\emptyset$。因此，图零性质并不意味着（$\mathrm{K}^{\mathrm{t}}$）。在注记 1.7.2 中，我们将看到，即使对于除一点外处处连续的函数的图像，图零性质也不意味着（K^{t}）。还可以证明，即使对于 G_δ 集合，（K^{t}）性质也不意味着图零性质（见 [8]）。因此，（K^{t}）与图零性质彼此独立。

然而，我们证明，对于紧集，性质 (K^{t}) 等价于图零性质；此外，它还等价于一个限制更严格的性质，定义如下。

令 $K([0,1]^2)$ 表示 $[0,1]^2$ 的非空紧子集族。众所周知，豪斯多夫度量

$$d(K_1,K_2)=\max\{\operatorname{dist}(x,K_1),\operatorname{dist}(y,K_2)\colon x\in K_2,\ y\in K_1\}$$

($K_1,K_2\in K([0,1]^2)$) 使 $K([0,1]^2)$ 成为一个紧度量空间 [7, 定理 4.26，第 26] 页。令 $\mathcal{K}=\{K\in K([0,1]^2)\colon \operatorname{pr}_x K=[0,1]\}$，其中 $\operatorname{pr}_x K$ 表示将 K 投影到 x 轴上的投影。容易验证，$\mathcal{K}$ 是 $K([0,1]^2)$ 的闭子集，因此也是紧子集。

定义 1.3. 如果对于属于 $\mathcal{K}$ 的一个余瘦子集的每个 K，$\lambda_2(A+K)=0$ 都成立，则称集合 $A\subset\mathbb{R}^2$ 为典型图零。

由于对每个 $K\in\mathcal{K}$ 都有 $\operatorname{pr}_x K=[0,1]$，因此 $\mathcal{K}$ 的每个元素都包含一个定义在 $[0,1]$ 上的函数图像。因此，每个典型图零集合都是图零集合。

定理 1.4。对于每个紧集合 $A\subset\mathbb{R}^2$，以下命题等价。

（i） A具有性质K^t。

（ii）对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个函数 $g\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}$，使得 λ_2（A +图像 g）$< \varepsilon$。

(iii) A 是图零的。

(iv) A 是典型图零的。

我们将在第 2 节证明定理 1.4。正如我们之前提到的，大多数连续函数的图像都具有定理 1.4 中列出的性质。首先，我们证明光滑函数具有这一性质。

定理 1.5。 如果 $f\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ 是连续可微的，那么 图像 f是图零的。

证明。 此结论是 E. Sawyer 的下述定理的推论[11]: 存在一个函数 $\phi\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得只要 $f\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ 连续可微， $\phi|_{[a,b]} - f$ 的值域便是零测度集。

Sawyer 构造的函数 ϕ 处处连续，只有在一个可数集 C中的点处除外。因此，图像 ϕ 是$\mathbb{R}^2$的博雷尔子集。

令 $f\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ 连续可微。由于图像 f 是紧集，(图像 f) $\times$ (图像 ϕ) 是积空间 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ 的博雷尔子集。因此，集合 $E =$(图像 f) $+$(图像 ϕ) 是 (图像 f) $\times$(图像 ϕ) 的连续像，属于解析集，因而是勒贝格可测的。我们有

$$E = \operatorname{graph} f + \operatorname{graph} \phi = \{(x_1 + x_2, f(x_1) + \phi(x_2))\colon\ x_1 \in [a,b],\ x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

于是，对于每个 $c \in \mathbb{R}$，我们有

$$E_c = \{y\colon\ (c,y) \in E\} = \{f(c-x) + \phi(x)\colon\ c - x \in [a,b]\},$$

它是函数 $\phi|_{[c-b,c-a]} - g$ 的值域，其中 $g(x) = -f(c-x)$ $(x \in [c-b, c-a])$。由于 g 连续可微，根据 Sawyer 定理， $\lambda_1(E_c) = 0$ 对每个 c 都成立。于是，由富比尼定理，我们有 $\lambda_2(E) = 0$，从而证明图像 f 是图零的。□

推论 1.6。 如果集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ 可以由可数多个连续可微函数的图像覆盖，那么 A 是图零的。

事实上，我们有 $\lambda_2(A +$ 图像 $\phi) = 0$，其中 ϕ 是 Sawyer 函数。

注记 1.7。 1. 显然，每个圆都可以被可数多个连续可微函数的图像覆盖。因此，每个圆都是图零的，因而具有性质 K^t （由定理 1.4 得出）。对于没有竖直边的多边形，结论也相同。

2. 设 $f(x) = \sin(1/x)$，若 $x \in (0,1]$，，并设 $f(0) = 0$。则图像 f是图零的，因为它可以被可数多个连续可微函数的图像覆盖。另一方面，图像 f 不具有性质 K^t，因为对每个 $\varepsilon > 0$和 $y \in [-1,1]$，图像 f都与 $(0,\varepsilon) \times \{y\}$ 相交。这个例子表明，即使对于除一点外处处连续的函数的图像，图零性质也不蕴含 K^t 。

3. 显然，若集合 A具有定理 1.4 中所列性质 (i)-(iv) 中的任一性质，则 A 的每个子集都具有相同性质。因此我们可以问：具有这些性质中任一性质的集合族是否构成一个理想，甚至是一个 σ-理想。

答案在性质 (iv) 的情形下是肯定的。典型图像零集族是一个 σ-理想，因为 $\mathcal{K}$ 的可数多个余瘦子集之交在 $\mathcal{K}$中也是余瘦的。

具有性质 K^t 的集合族不是一个 σ-理想。事实上，取 Remark 2 中的 f，并令 f_n 为 f 在区间 $[1/n,1]$上的限制。由定理 1.5 可知，对每个 $n = 2$, 3, ...，图像 f_n都具有性质 K^t。另一方面，$\bigcup_{n=2}^{\infty}$图像 f_n = (图像 f) $\setminus \{(0,\ 0)\}$ 不具有性质 K^t。

目前尚不清楚具有性质 K^t 的集合族是否为理想。具有定理 1.4 的性质 (ii) 和 (iii) 的集合是否构成理想，也仍是一个开放问题。

下面的定理将定理 1.5 推广到了绝对连续曲线。

定理 1.8。 设 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$: $[a,b] \to \mathbb{R}^2$ 是一条曲线，且 γ_1 和 γ_2是 $[a,b]$上的绝对连续函数。若对几乎处处的 $t \in [a,b]$，都有 $\gamma_1'(t) \neq 0$，则 $\gamma([a,b])$ 是图零的。

推论 1.9. 若 f: $[a,b] \to \mathbb{R}$ 绝对连续，则其图像是图零的。

第 3 节中给出的定理 1.8 的证明并未使用 Sawyer 定理。

“大多数连续函数”的图像是图零的这一陈述，由下述定理加以精确表述。

定理 1.10。 满足 图像 f为图零的连续函数 $f \in C[a,b]$ 所成的集合在 $C[a,b]$中是余瘦的。

证明。 容易看出，对于每个 $\varepsilon > 0$，集合 $U_\varepsilon = \{(f,\ K) \in C[a,b]\times\mathcal{K}:\ \lambda_2$((图像 f)+K) $< \varepsilon\}$ 在 $C[a,b] \times \mathcal{K}$ 中是开集。由于连续可微函数的集合在 $C[a,b]$中稠密，并且根据定理 1.4 和定理 1.5，每个这样的函数都典型图零，因此，对于每个 $\varepsilon > 0$，可知 U_ε 在 $C[a,b] \times \mathcal{K}$ 中处处稠密。因此，集合

$$U = \{(f,K) \in C[a,b] \times \mathcal{K}\colon \lambda_2((\operatorname{graph} f) + K) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_{1/n}$$

是 $C[a,b] \times \mathcal{K}$中的一个稠密 G_δ 集合。于是，根据 Kuratowski-Ulam 定理 [7,定理 8.41，第 53], 页，存在一个余瘦子集 $V \subset C[a,b]$ ，使得对于每个 $f \in V$，$\{K \in \mathcal{K}:\ \lambda_2$((图像 f) $+ K$) $= 0\}$ 在 $\mathcal{K}$中是余瘦的。□

由于典型连续函数处处不可导，我们得到存在处处不可导的连续函数，使其图像是图零的。然而，我们将证明，尽管图零性质在连续函数中是典型的，但并非所有连续函数都具有这一性质。

定理 1.11。 存在一个连续函数 $f \in C[0,1]$ ，使得图像 f 不是图零的。

定理 1.11 将在第 4 节中证明。

令 $M[a,b]$ 表示在$[a,b]$上连续且递增的函数集合。则 $M[a,b]$ 是 $C[a,b]$ 的闭子空间，因此，在上确界度量下，它是一个波兰空间。

定理 1.12。 满足图像 f为图零的递增连续函数集合在 $C[a,b]$ 中是余瘦的。

证明与定理 1.10 的证明相同。已知 $M[a,b]$ 的典型元素是奇异的；也就是说，其导数几乎处处为零。因此，我们得到存在奇异的递增连续函数，使其图像是图零的。

我们以以下尚未解决的问题结束本节：

每个单调连续函数的图像都是图零的吗？

2 定理 1.4 的证明

我们用 $\mathrm{cl}\,A$ 表示集合 A 的闭包。

引理 2.1。 如果有界集 A 具有性质 K^t，那么对于每个 $\varepsilon>0$，都存在一个简单函数 $h\colon\ [0,1]\to[0,\varepsilon]$，使得 $\lambda_2(A+\text{图像 }h)<\varepsilon$。

证明。 对于 $x\in\mathbb{R}$ 和 $\varepsilon>0$，我们定义

$$x \bmod \varepsilon = x-\varepsilon\lfloor x/\varepsilon\rfloor,$$

使得 $(x \text{ 模 } \varepsilon)\in[0,\varepsilon)$。令 $\Phi\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 为由下式给出的函数

$$\Phi(x,y)=(x,\,y \bmod \varepsilon).$$

我们证明，对于每个 $E\subset\mathbb{R}^2$，都有 $\lambda_2(\Phi(E))\le\lambda_2(E)$。令

$$S_i=\{(x,y)\colon x\in\mathbb{R},\ y\in[i\varepsilon,(i+1)\varepsilon)\}$$

对于每个 $i\in\mathbb{Z}$ 均成立。显然，$\Phi(E)=\bigcup_{i\in\mathbb{Z}}((E\cap S_i)-(0,\ i\varepsilon))$。由于集合$S_i$可测且互不相交，因此有 $\lambda_2(E)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\lambda_2(E\cap S_i)$，从而$\lambda_2(\Phi(E))\le\sum_{i\in\mathbb{Z}}\lambda_2(E\cap S_i)=\lambda_2(E)$。

由于 A 有界，存在一个正整数 N，使得

$$A\subset\mathbb{R}\times[-N\varepsilon,\,N\varepsilon).$$

由于 A具有性质 K^t，存在一个简单函数 $g\colon\ [0,1]\to\mathbb{R}$，使得 $\lambda_2(A+\text{图像 }g)<\varepsilon/(2N+1)$。令 $h\colon\ [0,1]\to[0,\varepsilon)$ 为由 $h(x)=g(x) \bmod \varepsilon$ 给出的（简单）函数。

注意到

$$A+\operatorname{graph}h\subset\mathbb{R}\times[-N\varepsilon,\,(N+1)\varepsilon),$$

因此，$2N+1$ 个 Φ（$A+$图像 h）$=\Phi$（$A+$图像 g）的平移覆盖了 $A+$图像 h。由勒贝格外测度的平移不变性和次可加性，得到

$$\begin{aligned}\lambda_2(A+\operatorname{graph}h)&\le(2N+1)\lambda_2(\Phi(A+\operatorname{graph}g))\\&\le(2N+1)\lambda_2(A+\operatorname{graph}g)\\&<(2N+1)\frac{\varepsilon}{2N+1}=\varepsilon.\end{aligned}$$

□

引理 2.2。 若有界集 A 具有性质 K^t，则对每个简单函数 $g\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ 以及每个 $\varepsilon>0$，都存在一个简单函数$h\colon [0,1]\to\mathbb{R}$，使得 $|g-h|<\varepsilon$，且 $\lambda_2(A+\text{图像 }h)<\varepsilon$。

证明。 令 $0=x_0<x_1<\ldots<x_n=1$ 为 $[0,1]$ 的一个分割，使得对于每个 $i=1,\ldots,n$，g在区间 (x_{i-1},x_i) 上为常数。根据引理 2.1，存在一个简单函数 $f\colon [0,1]\to[0,\varepsilon]$，使得 $\lambda_2(A+\text{图像 }f)<\varepsilon/n$。令 $h=g+f$。则 h 是一个简单函数，并且 $|h-g|<\varepsilon$。

集合 $A+$图像 h 被集合 $A+(\text{图像 }h|_{(x_{i-1},x_i)})$ $(i=1,\ldots,n)$ 以及有限个 A的平移副本所覆盖。因此，我们有

$$\lambda_2(A+\operatorname{graph}h)\le\sum_{i=1}^{n}\lambda_2\left(A+(\operatorname{graph}h|_{(x_{i-1},x_i)})\right).$$

由于 $A+(\text{图像 }h|_{(x_{i-1},x_i)})$ 是 $A+(\text{图像 }f|_{(x_{i-1},x_i)})$ 的平移副本 $\subset A+\text{图像 }f$，我们有 $\lambda_1(A+(\text{图像 }h|_{(x_{i-1},x_i)}))<\varepsilon/n$，对于每个 $i=1,\ldots,n$均成立。因此，$\lambda_2(A+\text{图像 }h)<\varepsilon$。□

我们称 $K\in\mathcal{K}$ 是 m-简单的 $(m\in\mathbb{R})$，如果存在一个分割 $0=x_0<x_1<\ldots<x_n=1$，并且存在斜率为 m 的闭线段 $s_1,\ldots\ldots,s_n$，使得对于每个 $i=1,\ldots\ldots,n$，均有 $\operatorname{pr}_x s_i=[x_{i-1},x_i]$，以及 $K=\bigcup_{i=1}^{n}s_i$。

引理 2.3。 对于每个 $m\in\mathbb{R}$，m-简单集合族在 $\mathcal{K}$ 中处处稠密。

证明。 给定 $m\in\mathbb{R}$、$K\in\mathcal{K}$ 和 $\varepsilon>0$。我们证明存在一个 m-简单集合 L，使得 $d(K,L)<3\varepsilon$。令 $\eta=\varepsilon/\max(1,|m|)$。

利用 K 全有界这一事实，容易看出存在一个有限集合 $F\subset[0,1]^2$，使得 $d(K_0,F)<\varepsilon$。必要时将 F 中的一些点稍微移动一下，我们可以假设 F 中各元素的 x-坐标互不相同。令 $F=\{(x_0,y_1)\ldots\ldots,(x_n,y_n)\}$，其中 $0\le x_0<x_1<\ldots<x_n\le 1$。向 F 中加入 K 的一些点后，我们还可以假设对于每个 $i=1,\ldots\ldots,n$，均有 $x_0=0$、$x_n=1$ 和 $x_i-x_{i-1}<\eta$。对于每个 $i=1,\ldots\ldots,n$，令 s_i 为一条线段，使其斜率为 m，$\operatorname{pr}_x s_i=[x_{i-1},x_i]$、$s_i\subset[0,1]^2$，且其左端点为 (x_{i-1},z_{i-1})，其中 $|z_{i-1}-y_{i-1}|<\varepsilon$。由于 $x_i-x_{i-1}<\eta$ 和 $\eta\cdot|m|\le\varepsilon$，显然对于每个 $i=1,\ldots\ldots,n$，都存在这样的线段。

代入 $L=\bigcup_{i=1}^{n}s_i$，我们得到 $d(L,F)<2\varepsilon$ 以及 $d(K,L)<3\varepsilon$。 □

定理 1.4 的证明。 (i)$\Longrightarrow$(iv)：只需证明，对于每个集合$K_0\in\mathcal{K}$ 以及每个 $\varepsilon>0$，存在一个 $K\in\mathcal{K}$，使得 $d(K,K_0)<\varepsilon$ 并且

$\lambda_2(A+K) < \varepsilon$。事实上，如果这是真的，那么集合 $\{K \in \mathcal{K}\colon\ \lambda_2(A+K) < 1/n\}$对于每个 n都是 $\mathcal{K}$ 的稠密开子集，进而 $\{K \in \mathcal{K}\colon\ \lambda_2(A+K) = 0\}$是 $\mathcal{K}$中的稠密 G_δ。

由引理 2.3，存在一个 m-简单集合 L，满足 $m = 0$，使得 $d(L, K_0) < \varepsilon/2$。显然，存在一个简单函数 g，使得 $L =$(图像 g) $\cup F$，其中F是有限的。由引理 2.2，存在一个简单函数 $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$，使得$|g-h| < \varepsilon/2$，且 $\lambda_2(A +$图像 $h) < \varepsilon$。令 $K =$ cl (图像 h) $\cup F$。则$K \in \mathcal{K}$，$d(K, K_0) < \varepsilon$，并且 $\lambda_2(A+K) = \lambda_2(A +$图像 $h) < \varepsilon$。

显然，(iv)$\Longrightarrow$(iii) 且 (iii)$\Longrightarrow$(ii)。
(ii)$\Longrightarrow$(i)：取定 $\varepsilon > 0$。若 $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ 满足 $\lambda_2(A +$图像 $g) < \varepsilon$，则存在一个开集 G，使得 $A +$ 图像$g \subset G$ 且 $\lambda_2(G) < \varepsilon$。于是，对每个 $x \in [0,1]$，都有 $A + (x, g(x)) \subset G$。由于 A是紧的且 G 是开集，因此存在一个正数 δ_x，使得对每个 $t \in (x - \delta_x, x + \delta_x)$，都有$A + (t, g(x)) \subset G$。

根据 Cousin 引理 [2, 定理 1.3，第 9], 页，$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$存在一个分割，并且对每个 $i = 1, \ldots, n$，都有一个点 $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$，使得 $(t_{i-1}, t_i) \subset (x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i})$。于是，对每个 $t \in (t_{i-1}, t_i)$ $(i = 1, .., n)$，都有 $A + (t, g(x_i)) \subset G$。

T其 $A +$图像 $h \subset G$，其中 $h(x) = g(x_i)$ $(x \in (t_{i-1}, t_i),\ i = 1, \ldots, n)$。 □

3 定理 1.8 的证明

我们用 λ_1 表示$\mathbb{R}^2$上的线性测度（一维豪斯多夫测度）。

引理 3.1。设 $\gamma\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}^2$ 是一条坐标函数均绝对连续的曲线。假设对每个 $\varepsilon > 0$，都存在两两不相交的开区间 J_1、J_2、$\ldots \subset [a,b]$ 以及实数 m_i、c_i，使得

(i) $\sum_{i=1}^{\infty} |J_i| = b - a$,(ii) 对于每条斜率为 m_i 的线段 $I \subset \mathbb{R}^2$，都有 $\lambda_2(\gamma(\mathrm{cl}\, J_i) + I) \le c_i \cdot |I|(i = 1,2, \ldots)$，并且(iii) $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \cdot \sqrt{1 + m_i^2} < \varepsilon$。

———

那么 $\gamma([a,b])$ 是图零。

证明。由定理 1.4，只需证明对于每个 $\varepsilon>0$，都存在一个函数 $g\colon [0,1]\to\mathbb{R}$，使得 $\lambda_2(\gamma([a,b])+\text{图像 } g)<\varepsilon$。
设给定 $\varepsilon>0$，并设 J_i, m_i, c_i 满足条件 (i)-(iii)。令 $F=[a,b]\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$，则由 (i) 得 $\lambda_1(F)=0$。由于 γ 的坐标函数绝对连续，因此可得 $\lambda_1(\gamma(F))=0$。

设 K_1 是任意一个 m_1-简单集合。构成 K_1 的线段总长度为 $\sqrt{1+m_1^2}$。于是，由 (ii) 得 $\lambda_2(\gamma(\operatorname{cl} J_1)+K_1)\le c_1\cdot\sqrt{1+m_1^2}$。我们还有 $\lambda_2(\gamma(F)+K_1)=0$，因为 $\lambda_1(\gamma(F))=0$。
由于 $\gamma(\operatorname{cl} J_1)+K_1$ 和 $\gamma(F)+K_1$ 都紧，因此存在一个 η_1，使得只要 $K\in\mathcal{K}$，就有 $\lambda_2(\gamma(\operatorname{cl} J_1)+K)\le c_1\cdot\sqrt{1+m_1^2}+\varepsilon/2$ 和 $\lambda_2(\gamma(F)+K)<\varepsilon$，并且 $d(K,K_1)<\eta_1$。
应用引理 2.3，我们可以找到一个 m_2-简单集合 $K_2\in\mathcal{K}$，使得 $d(K_2,K_1)<\min(\varepsilon/4,\ \eta_1/2)$。构成 K_2 的线段总长度为 $\sqrt{1+m_2^2}$。因此 $\lambda_2(\gamma(\operatorname{cl} J_2)+K_2)\le c_2\cdot\sqrt{1+m_2^2}$。由于 $\gamma(\operatorname{cl} J_2)+K_2$ 是紧的，存在一个 $\eta_2\in(0,\ \eta_1/2)$，使得当 ~~$K\in\mathcal{K}$~~ 且 $d(K,\ K_2)<\eta_2$ 时，$\lambda_2(\gamma(\operatorname{cl} J_2)+K)\le c_2\cdot\sqrt{1+m_2^2}+\varepsilon/4$。

继续这一过程，我们对每个 $n=1,\ 2,\ \ldots$ 都能找到集合 K_n。容易验证，集合 K_n 在度量空间 $\mathcal{K}$ 中收敛到集合 K，并且

$$\lambda_2(\gamma([a,b])+K)<\sum_{i=1}^{\infty}\left(c_i\cdot\sqrt{1+m_i^2}+(\varepsilon/2^i)\right)+\lambda_2(\gamma(F)+K)<3\varepsilon$$

由 (iii) 得。由于 $K\in\mathcal{K}$, K 包含函数 $g\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ 的图像，因此 $\lambda_2(\gamma([a,b])+\text{图像 } g)<3\varepsilon$。□
函数 $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ 的全变差记作 $V(f;\,[a,b])$。

引理 3.2. 设 $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)\colon [a,b]\to\mathbb{R}^2$ 是一条连续曲线。

(i) 如果 s 是水平线段，那么 $\lambda_2(\gamma([a,b])+s)\le V(\gamma_2;\,[a,b])\cdot|s|$.
(ii) 如果 s 是斜率为 m 的线段，那么

$$\lambda_2(\gamma([a,b])+s)\le\frac{|s|}{\sqrt{1+m^2}}\cdot V(m\gamma_1-\gamma_2;\,[a,b]).$$

证明。(i) 不妨设 s 的左端点是原点。令e_c 表示水平直线 $y = c$，并令 $k(c)$表示曲线 γ 上位于 e_c上的点的个数。显然，$(\gamma([a,b]) + s) \cap e_c$ 的一维测度至多为 $k(c) \cdot |s|$。因此，根据富比尼定理，有 $\lambda_2(\gamma([a,b]) + s) \le |s| \cdot \int_J k(y)\,dy$，其中 J 是 γ_2的值域。由于 $k(y) = |\gamma_2^{-1}(\{y\})|$，根据巴拿赫定理 [10, 定理 6.4，第 IX 章，第 280] 页，得到 $\int_J k(y)\ dy = V(\gamma_2;\ [a,b])$。

(ii) 给定 $m \in \mathbb{R}$，令 $\alpha = \arctan m$。将曲线 γ 沿负方向旋转 α，得到曲线 $g = (g_1, g_2)\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}^2$。显然，$\lambda_2(\gamma([a,b]) + s)$ 等于 $\lambda_2(g([a,b]) + t)$，其中 t 是长度为 $|s|$ 的水平线段。由于 $g_2 = -\sin\alpha \cdot \gamma_1 + \cos\alpha \cdot \gamma_2 = -(1/\sqrt{1+m^2}) \cdot (m\gamma_1 - \gamma_2)$，结论由 (i) 得出。□

定理 1.8 的证明。令 $\gamma_1' = f$ 和 $\gamma_2' = g$。于是 $f, g \in L_1[a,b]$，且几乎处处的点 $x \in (a,b)$ 都是 f 和 g 的勒贝格点。记 E 为满足以下条件的点 $x \in (a,b)$ 所成的集合：x 是 f 和 g 的勒贝格点，且还满足 $f(x) = \gamma_1'(x) \neq 0$。根据假设，我们有 $\lambda_1([a,b] \setminus E) = 0$。

我们证明 γ 满足引理 3.1 的条件。设 $\varepsilon > 0$ 给定，并任取 $x_0 \in E$。由于 x_0 既是 f 的勒贝格点，也是 g 的勒贝格点，且 $f(x_0) \neq 0$，因此可得

$$\begin{aligned} &\int_J |g(x) - g(x_0)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2} \cdot |J| \quad \text{and} \\ &\int_J |f(x) - f(x_0)|\,dx < \frac{|f(x_0)|}{1 + |g(x_0)|} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot |J| \end{aligned} \tag{1}$$

对于每个包含 x_0 的充分短的区间 J 都成立。于是，根据维塔利覆盖定理，存在两两不交的开子区间 J_1，J_2，……，它们覆盖 $[a,b]$ 中几乎处处的点 E，并且存在点 $x_i \in J_i$，使得当 $J = J_i$ 且 $x_0 = x_i$ 时，(1) 成立。令 $m_i = g(x_i)/f(x_i)$，并

$$c_i = \frac{1}{\sqrt{1+m_i^2}} \cdot \int_{J_i} \left| \frac{g(x_i)}{f(x_i)} f(x) - g(x) \right| dx$$

对每个 i 均如此。我们证明，区间 J_i 和数 m_i，c_i 满足引理 2.1 的条件。条件 (i) 显然成立，而 (ii) 由下式可得

引理 3.2。至于 (iii)，注意到

$$\int_{J_i}\left|\frac{g(x_i)}{f(x_i)}f(x)-g(x)\right|\,dx\le\frac{|g(x_i)|}{|f(x_i)|}\cdot\int_{J_i}|f(x)-f(x_i)|\,dx+ \\ +\int_{J_i}|g(x)-g(x_i)|\,dx<\varepsilon\cdot|J_i|$$

由 (1)，因此 (iii) 得证。 □

4 定理 1.11 的证明

在本节中，我们用 $|A|$ 表示集合 $A\subset\mathbb{R}^2$ 的勒贝格测度；也就是说，$|A|=\lambda_2(A)$。注意，$|A|$ 也表示有限集合 A 的基数。具体采用哪种含义，将由上下文明确。我们的目标是证明定理 1.11。

引理 4.1。若 $0<\varepsilon<1$ 且 $n>n_0(\varepsilon)$，则存在一个序列 $\eta=(\eta_1,\dots,\eta_n)\in\{-1,1\}^n$，使得对于每个 $k=1,\dots,n-1$ 和 $0\le u<v\le n-k$，以下每个集合的基数

$$\begin{aligned}U_1&=\{u+1\le i\le v\colon \eta_i=\eta_{i+k}=1\},\\ U_2&=\{u+1\le i\le v\colon \eta_i=\eta_{i+k}=-1\},\\ U_3&=\{u+1\le i\le v\colon \eta_i=1,\ \eta_{i+k}=-1\},\\ U_4&=\{u+1\le i\le v\colon \eta_i=-1,\ \eta_{i+k}=1\}\end{aligned}\tag{2}$$

小于 $\frac{v-u}{4}+\varepsilon n$。

证明。令 μ 为 $X=\{-1,1\}^n$ 上的归一化计数测度；也就是说，对每个 $A\subset X$，令 $\mu(A)=|A|/2^n$。那么 (X,μ) 是一个概率空间，其上的坐标函数 $x_1,\dots,x_n$ 相互独立。注意，只要指标 $i_1,\dots,i_t$ 中有一个与其他指标不同（即使其他指标不一定彼此不同），就有 $\int_X\prod_{j=1}^t x_{i_j}\,d\mu=0$。

我们用 $c_1,c_2,\dots$ 表示绝对正常数。对于每个 $1\le u\le n$，我们有

$$\int_X\left(\sum_{i=1}^u x_i\right)^4 d\mu=\sum_{i_1,\dots,i_4=1}^{u}\int_X\prod_{j=1}^4 x_{i_j}\,d\mu.\tag{3}$$

根据上述注记，我们有 $\int_X \prod_{j=1}^{4} x_{i_j}\, d\mu = 0$，除非在对 $i_1, \ldots, i_4$进行适当置换后，满足 $i_1 = i_2$ 且 $i_3 = i_4$。因此，由 (3) 得

$$\int_X \left(\sum_{i=1}^{u} x_i \right)^4 d\mu < c_1 \cdot n^2.$$

因此，

$$\mu\left(\{x \in X \colon |x_1 + \ldots + x_u| \geq (\varepsilon/2)n\}\right) < c_2 \cdot n^2/(\varepsilon^4 n^4) = c_2/(\varepsilon^4 n^2).$$

因此，使得对于至少一个 $1 \leq u \leq n$ ， $|x_1 + \ldots + x_u| \geq (\varepsilon/2)n$ 成立的元素 x 的集合的测度小于 $c_2/(\varepsilon^4 n)$。于是，使得对于至少一对 (u, v)，$|x_{u+1} + \ldots + x_v| \geq \varepsilon n$ 成立的元素 x 的集合的测度小于 $2c_2/(\varepsilon^4 n)$。

对于每个 $1 \leq u \leq n - k$，我们有，

$$\int_X \left(\sum_{i=1}^{u} x_i x_{i+k} \right)^6 d\mu = \sum_{i_1, \ldots, i_6 = 1}^{u} \int_X \prod_{j=1}^{6} x_{i_j} x_{i_j + k}\, d\mu. \tag{4}$$

再次，我们有 $\int_X \prod_{j=1}^{6} x_{i_j} x_{i_j+k}\, d\mu = 0$，除非在对 $i_1, \ldots, i_6$ 作适当置换后，有 $i_1 = i_2$、 $i_3 = i_4$ 和 $i_5 = i_6$。因此，由 (4) 得

$$\int_X \left(\sum_{i=1}^{u} x_i x_{i+k} \right)^6 d\mu < c_3 \cdot n^3.$$

因此，

$$\mu\left(\left\{ x \in X \colon \left| \sum_{i=1}^{u} x_i x_{i+k} \right| \geq (\varepsilon/2)n \right\} \right) < c_4 \cdot n^3/(\varepsilon^6 n^6) = c_4/(\varepsilon^6 n^3).$$

于是，使得对于至少一个 k 和 u， $|\sum_{i=1}^{u} x_i x_{i+k}| \geq (\varepsilon/2)n$成立的元素 x 的集合的测度小于 $c_4/(\varepsilon^6 n)$。因此，使得对于至少一个 k 以及一对 (u, v)，$|\sum_{i=u+1}^{v} x_i x_{i+k}| \geq \varepsilon n$ 成立的元素 x 的集合的测度小于 $2c_4/(\varepsilon^6 n)$。

若 $n > c_5/\varepsilon^6$，则 $2c_2/(\varepsilon^4 n) + 2c_4/(\varepsilon^6 n) < 1$。因此，存在一个序列 $\eta \in X$，使得对于每个 $1 \leq k \leq n-1$ 和 $0 \leq u < v \leq n - k$，我们

都有 $|\eta_{u+1}+\ldots+\eta_v|<\varepsilon n$、 $|\eta_{u+1+k}+\ldots+\eta_{v+k}|<\varepsilon n$，并且 $|\sum_{i=u+1}^{v}\eta_i\eta_{i+k}|<\varepsilon n$。那么

$$4\cdot|U_1|=\sum_{i=u+1}^{v}(\eta_i+1)(\eta_{i+k}+1)<4\varepsilon n+(v-u),$$

并且 $|U_1|<((v-u)/4)+\varepsilon n$。对于 $j=2$，3，4，我们类似地得到 $|U_j|<((v-u)/4)+\varepsilon n$。□

如果 I 是一个有界闭区间， $I=[c,d]$，那么我们记作

$$I^{-1}=[c,(c+d)/2],\qquad I^{1}=[(c+d)/2,d].$$

如果 $R=[a,b]\times[c,d]$， n 是一个正整数，并且 $\alpha\in\{-1,1\}^n$， $\alpha=(\alpha_1、\ldots\ldots、\alpha_n)$，那么我们记 $R^\alpha=\bigcup_{i=1}^{n}([t_{i-1},t_i]\times[c,d]^{\alpha_i})$，其中 $t_i=a+\frac{i}{n}\cdot(b-a)$（$i=0、\ldots\ldots、n$）。

引理 4.2。设给定 $\varepsilon>0$、 α、$\beta\in\{-1,1\}^n$、 $\alpha=(\alpha_1、\ldots\ldots、\alpha_n)$、 $\beta=(\beta_1、\ldots\ldots、\beta_n)$，使得对于每个 $k=0、\ldots\ldots、n-1$，各集合的基数

$$\begin{aligned}
V_1&=\{1\le i\le n-k\colon \alpha_{i+k}=\beta_i=1\},\\
V_2&=\{1\le i\le n-k\colon \alpha_{i+k}=\beta_i=-1\},\\
V_3&=\{1\le i\le n-k\colon \alpha_{i+k}=1,\ \beta_i=-1\},\\
V_4&=\{1\le i\le n-k\colon \alpha_{i+k}=-1,\ \beta_{i+k}=1\}
\end{aligned}\tag{5}$$

小于 $\frac{n-k}{4}+\varepsilon n$。如果 R 是一个边平行于坐标轴的矩形，那么

$$|R^\alpha\cap(R^\beta+(x,y))|<\tfrac{1}{4}\cdot|R\cap(R+(x,y))|+\varepsilon\cdot|R|\tag{6}$$

对于每个 $x\ge0$ 和 $y\in\mathbb{R}$。g

证明。应用适当的仿射变换，我们不妨设 $R=[0,1]^2$。令 $F(x,\ y)=|R^\alpha\cap(R^\beta+(x,\ y))|$。为了证明（6），我们不妨设 $y\ge0$。事实上，如果将 y 替换为 $-y$、将 α 替换为 $-\alpha$ 并将 β 替换为 $-\beta$，则 $y<0$ 的情形可化归为 $y>0$的情形。我们还可以假设x，$y<1$，因为否则 $F(x,y)=0$。综上：我们假设 $0\le x<1$和 $0\le y<1$。

存在一个整数 $1\le k\le n$ 使得 $(k-1)/n\le x\le k/n$。容易验证，对于每个固定的 y，函数 $x\mapsto F(x,y)$ 在区间

$[(k-1)/n, k/n]$。对于 (6) 的右边也同样如此。因此，(6) 两边之差关于 $[(k-1)/n, k/n]$ 是线性的，所以只需证明在 $x = k/n\,(k = 0, \ldots, n-1)$ 的情况下 (6) 成立。

设给定 $0 \le k \le n-1$。则由 $0 \le y < 1$ 可得

$$R \cap \left(R + \left(\tfrac{k}{n}, y\right)\right) = \left[\tfrac{k}{n}, 1\right] \times [y, 1]$$

and

$$\left|R \cap \left(R + \left(\tfrac{k}{n}, y\right)\right)\right| = \tfrac{n-k}{n} \cdot (1-y). \tag{7}$$

我们有

$$R^{\alpha} \cap \left(R^{\beta} + \left(\tfrac{k}{n}, y\right)\right) = \bigcup_{i=1}^{n-k} \left(\left[\tfrac{i+k-1}{n}, \tfrac{i+k}{n}\right] \times J_i\right), \tag{8}$$

其中

$$J_i = [0,1]^{\alpha_{i+k}} \cap \left([0,1]^{\beta_i} + y\right).$$

由 (7) 和 (8)，只需证明

$$\sum_{i=1}^{n-k} |J_i| < \frac{n-k}{4} \cdot (1-y) + \varepsilon n.$$

现在我们有

$$\begin{aligned}
\alpha_{i+k} = \beta_i = 1 &\Longrightarrow J_i = [1/2, 1] \cap [(1/2) + y, 1 + y], \\
\alpha_{i+k} = \beta_i = -1 &\Longrightarrow J_i = [0, 1/2] \cap [y, (1/2) + y], \\
\alpha_{i+k} = -1,\ \beta_i = 1 &\Longrightarrow J_i = [0, 1/2] \cap [(1/2) + y, 1 + y], \\
\alpha_{i+k} = 1,\ \beta_i = -1 &\Longrightarrow J_i = [1/2, 1] \cap [y, y + (1/2)].
\end{aligned}$$

设 $V_1, \ldots, V_4$ 如 (5) 所示，并令 $|V_j| = v_j\,(j = 1, \ldots, 4)$。若 $1/2 \le y \le 1$，则得到

$$\sum_{i=1}^{n-k} |J_i| \le v_4 \cdot (1-y) < \left(\tfrac{n-k}{4} + \varepsilon n\right) \cdot (1-y) < \tfrac{n-k}{4} \cdot (1-y) + \varepsilon n.$$

如果 $0 \le y \le 1/2$，那么

$$\sum_{i=1}^{n-k} |J_i| \le v_1 \cdot ((1/2) - y) + v_2 \cdot ((1/2) - y) + v_4 \cdot y < \tfrac{n-k}{4} \cdot (1-y) + \varepsilon n,$$

证明完成。 □

定理 1.11 的证明。 首先，我们构造一个博雷尔可测函数g: $[0,1]\to[0,1]$，使得图像 g不具有性质 (K$^{\mathrm{t}}$)。除一个可数集外，函数 g 的图像将表示为由矩形有限并组成的集合 $A_0\supset A_1\supset\ldots$的一个嵌套序列的交集。

令 $n_0=N_0=1$ 和 $A_0=R_1^0=[0,1]^2$。假设 $k\geq 1$以及整数 n_0、……、n_{k-1}、$N_{k-1}=n_0\cdots n_{k-1}$、矩形 $R_j^{k-1}=\left[\frac{j-1}{N_{k-1}},\frac{j}{N_{k-1}}\right]\times J_j^{k-1}$($j=\overline{1}$、$\overline{\ldots\ldots}$、$N_{k-1}$) 和集合 $A_{k-1}=\bigcup_{j=1}^{N_{k-1}}R_j^{k-1}$均已定义，其中 J_1^{k-1}、……、$J_{N_{k-1}}^{k-1}$是 $[0,1]$的长度为$1/2^{k-1}$的闭子区间。

令 $\varepsilon_k=2^{-2k-3}/N_{k-1}$。根据引理 4.1，我们可以选取一个整数 $N_k>N_{k-1}/\varepsilon_k$ 和一个序列 $\eta^k\in\{-1,1\}^{N_k}$，使得 $N_{k-1}\mid N_k$，且 $\eta^k=(\eta_1^k,\ldots\ldots,\eta_{N_k}^k)$ 具有以下性质：
对于每个 $k=1,\ldots\ldots,N_k-1$ 和 $0\leq u<v\leq n-k$，每个集合的基数

$$\begin{aligned}&\{u+1\leq i\leq v\colon \eta_i^k=\eta_{i+k}^k=1\},\\&\{u+1\leq i\leq v\colon \eta_i^k=\eta_{i+k}^k=-1\},\\&\{u+1\leq i\leq v\colon \eta_i^k=1,\ \eta_{i+k}^k=-1\},\\&\{u+1\leq i\leq v\colon \eta_i^k=-1,\ \eta_{i+k}^k=1\}\end{aligned}\tag{9}$$

小于 $((v-u)/4)+\varepsilon_kN_k$。
令 $n_k=N_k/N_{k-1}$，得到 $N_k=n_0\cdot n_1\cdots n_k$ 和 $n_k>1/\varepsilon_k$。我们定义 e

$$\alpha_j^k=(\eta_{(j-1)\cdot n_k+1}^k,\ldots,\eta_{j\cdot n_k}^k)\qquad(j=1,\ldots,N_{k-1})$$

and

$$A_k=\bigcup^{N_{k-1}}\left(R_j^{k-1}\right)^{\alpha_j^k}.$$

显然，A_k 是矩形 $R_j^k=\left[\frac{j-1}{N_k},\frac{j}{N_k}\right]^{j=1}\times J_j^k$($j=1,\ldots\ldots,N_k$) 的并，其中 J_1^k，……，$J_{N_k}^k$ 是 $[0,1]$ 中长度为 $1/2^k$ 的闭子区间。

这样，我们定义了整数序列 n_k、N_k 以及集合序列 A_k，使得 $n_0=N_0=1$、$n_k\geq 4$，并且当 $k=1,2,\ldots\ldots$时 $N_k=n_1\cdots n_k$，且 $[0,1]^2=A_0\supset A_1\supset\ldots$。显然，对每个 k，都有 $|A_k|=1/2^k$。

设 $A = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k$。那么 A 是紧的。容易验证，对于每个无理数 x，$\{y\colon (x,\ y) \in A\}$ 是单点集；如果 x 是有理数，则它至多包含两个元素。因此，存在一个博雷尔可测函数 $g\colon [0,1] \to [0,1]$，使得 $A \setminus$ 的图像 g 是可数的。我们证明 A 不具有性质 $(\mathrm{K}^{\mathrm{t}})$。

引理 4.3. 我们有

$$|A_k \cap (A_k + (x,y))| < 2^{j-2k}$$

对于每个 $k \geq 0$, $j = 0,\ldots, k$, $x \geq 1/N_j$ 和 $y \in \mathbb{R}$。

证明。我们证明稍强的不等式

$$|A_k \cap (A_k + (x,y))| \leq 2^{j-2k} - 2^{-3k} \tag{10_k}$$

在相同条件下成立。我们对 k 使用归纳法证明。若 $k = 0$，则$x \geq 1/N_0 = 1$ 意味着 (10_0) 两边均为零，因此 (10_0) 成立。令 $k \geq 1$，并假设对于满足引理所述条件的每个 j, x, y，$(10)_{k-1}$ 均成立。由于 $A_{k-1} = \bigcup_{j=1}^{N_{k-1}} R_j^{k-1}$，我们有

$$A_{k-1} \cap (A_{k-1} + (x,y)) = \bigcup_{j_1,j_2=1}^{N_{k-1}} \left(R_{j_1}^{k-1} \cap (R_{j_2}^{k-1} + (x,y))\right)$$

and

$$\begin{aligned} \left|(R_{j_1}^{k-1} \cap A_k) \cap \left((R_{j_2}^{k-1} \cap A_k) + (x,y)\right)\right| = \\ \left|\left(R_{j_1}^{k-1}\right)^{\alpha_{j_1}^k} \cap \left(\left(R_{j_2}^{k-1}\right)^{\alpha_{j_2}^k} + (x,y)\right)\right| \end{aligned} \tag{11}$$

对于每个 j_1 和 j_2。假设 $x \geq 1/N_k$。我们证明

$$\begin{aligned} \left|\left(R_{j_1}^{k-1}\right)^{\alpha_{j_1}^k} \cap \left(\left(R_{j_2}^{k-1}\right)^{\alpha_{j_2}^k} + (x,y)\right)\right| < \\ \tfrac{1}{4} \cdot \left|R_{j_1}^{k-1} \cap (R_{j_2}^{k-1} + (x,y))\right| + 2^{-2k-2} \cdot |R_{j_1}^{k-1}| \end{aligned} \tag{12}$$

对于每个 $1 \leq j_1, j_2 \leq N_{k-1}$。若 $j_2 > j_1$，则 (12) 成立，因为其左侧为零。

假设 $j_2 < j_1$。由于 $R_{j_1}^{k-1}$ 是 $R_{j_2}^{k-1}$ 的平移副本，$(R_{j_1}^{k-1})^{\alpha_{j_1}^k}$ 是$(R_{j_2}^{k-1})^{\alpha_{j_2}^k}$的平移副本，因此我们可以在 $R = R_{j_2}^{k-1}$ 的条件下应用引理 4.2,

$n = n_k$、 $\alpha = \alpha_{j_2}^k$ 和 $\beta = \alpha_{j_1}^k$。由于（9）中列出的每个集合的基数都小于 $((v-u)/4) + \varepsilon_k N_k$，且 $\varepsilon_k \cdot N_k = (\varepsilon_k \cdot N_{k-1}) \cdot n_k$，因此引理 4.2 的条件在 $\varepsilon = \varepsilon_k \cdot N_{k-1}$的条件下得到满足。根据 ε_k的选取，（12）成立。

若 $j_1 = j_2$，则可按如下方式论证。假设 $j_1 = j_2 = j$，且 $\alpha = \alpha_j^k = (\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_{n_k})$。由于 $x \geq 1/N_k$，我们有

$$\left(R_j^{k-1}\right)^{\alpha} \cap \left(\left(R_j^{k-1}\right)^{\alpha} + (x,y)\right) \subset \left(R_j^{k-1}\right)^{\alpha} \cap \left(\left(R_j^{k-1}\right)^{\beta} + (x',y)\right),$$

其中 $x' = x - (1/N_k) \geq 0$ 且 $\beta = (1, \alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_{n_k-1})$。令 $\varepsilon = \varepsilon_k \cdot N_{k-1}$。若$0 \leq m \leq n_k$，则

$$\begin{aligned}|\{1 \leq i \leq n-m \colon \alpha_{i+m} = \beta_i = 1\}| \leq \\ 1 + ((n-m)/4) + \varepsilon n_k < ((n-m)/4) + 2\varepsilon n_k,\end{aligned}$$

如 $n_k > 1/\varepsilon_k \geq 1/\varepsilon$。我们得到引理 4.2 中集合 V_2， V_3， V_4 的基数的相同估计。应用该引理，在这种情况下我们同样得到 (12)。

现在，我们对每个 j_1 和 j_2 将 (12) 相加。由于（可能退化的）矩形 $R_{j_1}^{k-1} \cap (R_{j_2}^{k-1} + (x, y))$ 两两不相交，且 $\sum_{j=1}^{N_{k-1}} |R_j^{k-1}| = |A_{k-1}|$，我们得到

$$|A_k \cap (A_k + (x,y))| < \tfrac{1}{4} \cdot |A_{k-1} \cap (A_{k-1} + (x,y))| + 2^{-2k-1} \cdot |A_{k-1}|. \quad (13)$$

（注意，对于每个 j_1，至多存在两个 j_2 使得 $|R_{j_1}^{k-1} \cap (R_{j_2}^{k-1} + (x, y))| > 0$。）根据 $|A_{k-1}| = 2^{-k+1}$，(13) 的右端至多为$2^{-k-1} + 2^{-2k-1} \cdot 2^{-k+1} \leq 2^{-k} - 2^{-3k}$。因此，若 $x \geq 1/N_k$，则 $(10)_k$ 得证。
若 $x \geq 1/N_j$，其中 $j < k$，则根据归纳假设，$(10)_{k-1}$ 成立，因此 (13) 的左端小于

$$\frac{1}{4} \cdot \left(2^{j-2k+2} - 2^{-3k+3}\right) + 2^{-2k-1} \cdot 2^{-k+1} \leq 2^{j-2k} - 2^{-3k}.$$

□

现在我们证明 A 不具有性质 $(\mathrm{K}^{\mathrm{t}})$。设 $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ 是一个简单函数，并令 $B = A +$ 图像 h。我们证明 $|B| \geq 1/9$。令

H 为图像 h的闭包，则 $H \setminus$ 图像 h 是有限的。由于 $|A| = 0$，只需证明 $|A + H| \geq 1/9$。由于 A 和 H 是紧的，我们有

$$A + H = \bigcap_{k=0}^{\infty} (A_k + H),$$

因此，只需证明对于每个 k，都有 $|A_k + H| \geq 1/9$ 。

固定 k，并令 $C_i = A_k + \{(i/N_k, h(i/N_k))\}$，且对每个$i = 1, \ldots, N_k$，都有 $f_i = \chi_{C_i}$。于是，对每个 i，都有 $C_i \subset A_k + H$，并且

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{i_1} f_{i_2} \, d\lambda_2 = |C_{i_1} \cap C_{i_2}| = |A_k \cap (A_k + ((i_2 - i_1)/N_k, y))| \,,$$

其中 $y = h\ i_2/N_k\ - h\ i_1/N_k$ $4\ 3,$ $\int_{\mathbb{R}^2} f_{i_1} f_{i_2} \, d\lambda_2 < (\ )$ 2^{j-2k} $(\ )$。由引理 .，当 $i_2 - i_1 \geq N_k/N_j$ 时，我们得到。令 I_j 表示满足 $1 \leq i_1 < i_2 \leq N_k$ 和 $N_k/N_j \leq i_2 - i_1 < N_k/N_{j-1}$ 的有序对 (j_1, j_2) 的集合。于是，对于每个 $j = 1, \ldots, k$，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^2} \sum_{(i_1,i_2) \in I_j} f_{i_1} f_{i_2} \, d\lambda_2 < |I_j| \cdot 2^{j-2k} < N_k \cdot \frac{N_k}{N_{j-1}} \cdot 2^{j-2k}$$

$$\leq \frac{N_k^2}{4^{j-1}} \cdot 2^{j-2k} = 4N_k^2 \cdot 2^{-j-2k}$$

由 $N_j \geq 4^j$。因此，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{i=1}^{N_k} f_i \right)^2 d\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{N_k} f_i^2 \, d\lambda_2 + 2 \cdot \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq N_k} f_{i_1} f_{i_2} \, d\lambda_2 <$$

$$N_k \cdot 2^{-k} + 2 \cdot \sum_{j=1}^{k} 4N_k^2 \cdot 2^{-j-2k} < 9N_k^2 \cdot 2^{-2k}.$$

令 $C = \bigcup_{i=1}^{N_k} C_i$ 和 $f = \chi_C$。于是 $C \subset A_k + H$。我们有

$$N_k \cdot 2^{-k} = \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{N_k} f_i \, d\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{i=1}^{N_k} f_i \right) \cdot f \, d\lambda_2 \leq$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{i=1}^{N_k} f_i \right)^2 d\lambda_2 \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^2} f^2 \, d\lambda_2 \right)^{1/2} <$$

$$3N_k \cdot 2^{-k} \cdot \sqrt{|C|},$$

因此 $|C| > 1/9$。于是对每个 k，都有 $|A_k + H| \geq 1/9$，并且 $|A + H| \geq 1/9$。由于 $A \setminus$（图像 g）是可数的，$H \setminus$（图像 h）是有限的，且 $|H| = 0$，我们得到 $|$（图像 g）$+$（图像 h）$| \geq 1/9$。这证明图像 g 不具有性质 (K^t)。

最后，我们证明，对集合 A_k的构造稍作修改，就能得到一个不具有性质 (K^t) 的连续函数 f。我们固定一个数列 q_k，使得对每个 $k = 0, 1, \ldots\ldots$，都有 $q_k > 1$，且 $\prod_{k=0}^{\infty} q_k < 2$。
我们有 $A_k = \bigcup_{j=1}^{N_k} R_j^k$，其中矩形 $R_j^k (j = 1, \ldots\ldots, N_k)$ 互不重叠。设 $\tilde{R}_j^k$ 是一个与 R_j^k 位似的矩形，它包含于 R_j^k 的内部，且满足 $|\tilde{R}_j^k| > |R_j^k|/q_k$。对每个 k，令 $\tilde{A}_k = \bigcup_{j=1}^{N_k} \tilde{R}_j^k$，并且$\tilde{A} = \bigcap_k^{\infty} \tilde{A}_k$。于是，对每个 k，都有 $|\tilde{A}_k| > 2^{-k-1}$。

˜截口 $\{y\colon (x, y) \in A\}$ 对每个 x 要么为空，要么为单点集，并且˜因此 $A =$ 图像 f_0，其中 f_0 是定义在 A 到 $[0, 1]$ 的投影˷D 上的连续函数。

˜ ˜设 h与 H如上所述，设 k固定，并令 $C_i = A_k + \{(i/N_k, h(i/N_k))\}$，$\tilde{C} = \bigcup_{i=1}^{N_k} \tilde{C}_i \quad \tilde{f}_i = \chi_{\tilde{C}_i} \quad i = 1 \ldots N_k \quad |\tilde{A}_k| = 2^{-k-1}$ 且对每个 ,,。由于对每个 k，(4) 的计算给出

$$N_k \cdot 2^{-k-1} < 3N_k \cdot 2^{-k} \cdot \sqrt{|\tilde{C}|},$$

˜从而 $|C| > 1/36$。这证明图像 f_0 不具有性质 (K^t)。由于 D 是紧的，f_0 可以延拓到 $[0, 1]$，成为连续函数 f。显然，图像 f 也不具有性质 (K^t)。□

致谢

第一作者获得了匈牙利国家科学研究基金会的资助，资助编号为 K146922。

参考文献

[1] A. S. Besicovitch，论 Kakeya问题及一个类似问题，《数学杂志》**27**(1928), 312-320.

[2] A.M. Bruckner、J.B. Bruckner 和 B.S. Thomson：《实分析》。Pren- tice Hall，1997。[3] A. Chang 和 M. Cs¨ornyei，Kakeya 针问题及可求 rectifiable 集上 Besicovitch 集和 Nikodym 集的存在性，《伦敦数学学会会刊》(3) 118 (2019), no. 5, 1084-1114。[4] M. Cs¨ornyei、K. H´era 和 M. Laczkovich，具有 Kakeya 性质的闭集，*Mathematika* 63(2017), no. 1, 184-195。[5]K.J. Falconer：《分形集的几何学。》剑桥数学丛书，85。剑桥大学出版社，剑桥，1986。[6] K. H´era 和 M. Laczkovich，圆弧的挂谷问题，*Acta Math. Hungar.* 150 (2016), no. 2, 479-511。[7] A. Kechris，《经典描述集合论讲义》，施普林格出版社，柏林，1995。[8]A. M´ath´e，一个具有 K^t 性质但非图零的集合。手稿，2025年9月29日。[9] S. Saks，论 Besicovitch 函数空间中的连续函数 *Fund. Math.* 19 (1932), 211-219。[10] S. Saks，《积分理论》，Dover，1964。[11] E. Sawyer，平面曲线族，其平移包含于零测集内，*Mathematika* 34(1987), no. 1, 69-76。

(M. Laczkovich)Department of Analysis,
Eötvös Loránd University,Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C, 1117 Hungary.email:
miklos.laczkovich@gmail.com

(A. Máthé)Mathematics Institute,
University of Warwickemail:
a.mathe@warwick.ac.uk