arXiv:2602.01197v1 [math.GR] 1 Feb 2026

分裂西洛子群的中心

GEORGE GLAUBERMAN 和 JUSTIN LYND

Abstract. 设 p 是一个素数，且 S 是有限群 G的一个西罗 p子群。若 S是 G的正规子群，则 $Z(S)$是 $S \cap Z(G)$与 $[Z(S)\ G]$的直积。我们证明了一个适用于所有群的类似结果，但在某些 $p = 2$ 和 G 不可解的情形下存在反例。我们还将这一结果推广到融合系。

1. Introduction

若存在H 作为 N 在 G中的补子群，即存在一个子群 H 使得 $HN = G$ 且 $H \cap N = 1$，则称有限群 G 在正规子群 N 上分裂。本文指出，若 S 是 G的一个西罗 p子群，则除 $p = 2$和 G 不可解时的某些情形外， $Z(S)$在一个与$Z(S) \cap Z(G)$密切相关的子群上分裂。利用已知结果，这一结论的证明并不困难，但它所适用的广泛范围起初令我们颇感意外。素数为 2 时的反例似乎也相当有限，这表明该结论可能在比本文所证明的更广泛的情形下成立。

为说明这一结果，考虑如下特殊情形： S 是 G的正规子群。于是$Z(S)$ 是 S 的特征子群，因此也是 G的正规子群。由于 S 中心化 $Z(S$， G 中的共轭作用诱导出 p'-群 G/S 在 $Z(S$上的作用。因此，根据互素作用的相关结果[Gor80，定理 5.2。3]，

$$Z(S) = (Z(S) \cap Z(G)) \times [Z(S), G]. \tag{1.1}$$

当然，其中一个因子可能只是平凡子群。

从现在起，假设处于一般情形：

$$G \text{ is a finite group, } p \text{ is a prime, and } S \text{ is a Sylow } p\text{-subgroup of } G. \tag{1.2}$$

照例，令 x^g 和 ${}^g x$ 分别表示 $g^{-1}xg$ 和 gxg^{-1} 关于 $x \in S$ 和 $g \in G$的共轭子群。我们的主要结果是对（1.1）的推广。若元素 x 属于 S ，则称其关于弱闭于 S ，如果 G 在 x 中的共轭元素里，唯一属于 G 的 S 是 x 本身，即:

$$x^g = x \text{ whenever } g \in G \text{ and } x^g \in S.$$

设 x, y 是两个弱闭元素， $z = xy$，且 $g \in G$ 满足 $z^g \in S$。于是 $\langle {}^g x, {}^g y\rangle \leq C_G(z)$，因此根据西洛定理，存在 $h \in C_G(z)$，使得 ${}^h\langle {}^g x, {}^g y\rangle \leq S$。由 x 和 y 的弱闭性可知 ${}^{hg}z = xy = z$ ，因此 $z = z^g$。这说明，所有相对于 G 在 S 中弱闭的元素构成的集合 $W_G(S)$ 是 $Z(S)$ 的一个子群。

作者谨此感谢艾萨克·牛顿数学科学研究所和剑桥在2022年7月举办的“群、表示与应用”项目期间提供的支持与接待，本文的相关工作即在此期间完成。本研究得到了英国工程与物理科学研究理事会资助（编号 EP/K032208/1）。此外，GG 获西蒙斯合作资助（编号 426819）的部分支持，JL 获美国国家科学基金会资助（编号 DMS-1921550）及西蒙斯基金会资助（编号 SFI-MPS-TSM-0001418）的部分支持。我们感谢这些机构给予的支持。

回顾一下， $O_p(G)$ 表示 G 的最大正规 p-子群， $O_{p'}(G)$ 表示 G 的最大正规 p'-子群，而 $O_{p',p}(G)$ 和 $Z_p^*(G)$ 分别是 G 中包含 $O_{p'}(G)$ 且满足 $O_{p',p}(G)/O_{p'}(G) = O_p(G/O_{p'}(G))$ 以及 $Z_p^*(G)/O_{p'}(G) = Z(G/O_{p'}(G))$ 的正规子群。

我们的主要结果断言，在许多情况下， $W_G(S)$ 是 $Z(S)$ 的一个直因子。例如，容易看出，如果 S 在 G中正规，那么 $W_G(S)$ 恰好是 $Z(S) \cap Z(G)$ 中的直因子，而 (1.1)

定理 1.3。 假设 (1.2) 成立，并且满足以下条件之一：

(1) p 为奇数，或 (2)

$Z(S) \leq O_{2',2}(G)$，

或 (3) G 是可解的。

那么 $W_G(S)$ 是 $Z(S)$ 的一个直因子。

定理 1.3 的证明分为两部分。在每种情况下，我们首先证明，对于精心选择的子群 H，它是 G 的子群，包含 S，并且具有 $Z(S) \leq O_{p',p}(H)$，通过将问题化归到 $Z(S) \leq O_p(H)$ 的情形，并在不动点上使用传递映射 tr_S^H， $Z(S)$ 可在 $W_H(S)$ 上分裂。然后我们证明 $W_G(S) = W_H(S)$。在每种情况下，

$$Z(S) = \ker(\mathrm{tr}_S^H) \times W_G(S) \text{ and } \mathrm{im}(\mathrm{tr}_S^H) = W_G(S).$$

情形 (3) 是情形 (2) 的特例。在情形 (1) 中，我们使用一项结果 [Gla71，定理 14，4]来自第一作者，用以识别弱闭元素。我们关于 $p = 2$ 以及非可解群的反例，受到我们先前关于群的自同构与其融合系统的自同构之间关系的研究 [GL16，GL21] 的启发。

注意到

$$W_G(S) = Z(S) \cap Z_p^*(G)$$

根据 Z_p^*-定理 [Gla66], [GLS98，注 7.8。3]。当 p为奇数时，这需要有限单群分类，但我们的结果均不依赖于这一分类。

熟悉融合系统的读者会意识到，定理1.3 实际上是关于群 $\mathcal{F}_S(G)$ 在西罗子群 G 上的融合系统的陈述 S [AKO11]。证明定理 1.3 所用的论证，在更一般的饱和融合系统情形下同样适用。

定理 1.4. 令 *et* p 为一个素数， $\mathcal{F}$ 为有限 p-群 S 上的一个饱和融合系统。*I* *f*

(1) p 为奇数，或(2) $Z(S) \leq O_p(\mathcal{F})$，则 $Z(\mathcal{F})$ 是 $Z(S)$的一个直因子。

这里， $Z(\mathcal{F})$ 是融合系统的中心，即 (S) 中由满足以下条件的元素组成的子群：融合系统中的任意态射都可以延拓为定义在 z 上且固定 z 的态射。一个简短的证明表明，当 $Z(\mathcal{F}) = W_G(S)$ 时，若 是有限群 $\mathcal{F}_S(G)$ 的融合系统 G [AKO11，引理 I.4。2]。

我们将在第 1.3 和 1.4 节证明定理 2。

我们尤其欣喜的是，这一关于 p-群“底部”分裂的结果 S 与 I. M. Isaacs 和 S. M. Gagola 的联合传递定理 [GI08] 有关，该定理讨论的是“顶部”的分裂。本文谨以此纪念 I. M. Isaacs，并感谢他多年来给予第一作者的

作为同学、同事和朋友的友谊、帮助与鼓励。

2. Proofs and example

第一个引理可视为以下事实的推论：商映射$G \to G/O_{p'}(G)$ 诱导出融合系统的同构 $\mathcal{F}_S(G) \cong \mathcal{F}_S(G/O_{p'}(G))$ [Lin07，定理 2。12]稍后我们会进一步介绍融合系的一些背景知识。

引理 2.1。设 N 是有限群 H的一个正规 p'-子群。商映射$H \to H/N$诱导出同构 $Z(S) \cong Z(SN/N)$ 以及 $W_H(S) \cong W_{H/N}(SN/N)$。

证明。关于中心的结论由同构 $SN/N \cong S$ 得出，因为 N 的阶与 p互素。若 $zN \in W_{H/N}(S)$ 且 $h \in H$ 满足 $z^h \in S$，则 $(zN)^{hN} \in SN/N$，因此 $(zN)^{hN} = zN$。于是，$[z,h] = z^{-1}z^h \in S \cap N = 1$，故 $z^h = z$且 $z \in W_H(S)$。

反过来，如果 $z \in W_H(S)$ 具有 $(zN)^{hN} \in SN/N$，那么 $z^h \in SN$。因此，由西洛定理，存在某个 $x \in N$，使得 $z^{hx} \in S$，从而 $z^{hx} = z$。因此，$(zN)^{hN} = zN$，这表明 $zN \in W_{H/N}(SN/N)$。□

下一个命题处理定理 1.3 的情形 (2)。若 H 是一个有限群，其子群为K，且 M是一个具有左作用 H 的 $m \mapsto {}^h m$-模，我们记 $\mathrm{tr}_K^H\colon C_M(K) \to C_M(H)$ 表示不动点上的通常传递映射，定义如下：

$$\mathrm{tr}_K^H(m) = \sum_{t \in [H/K]} {}^t m,$$

对 K 在 H 中的左陪集代表元集合求和。

命题 2.2。设 H 是一个有限群，p 是一个素数，且 S 是 H 的一个西洛 p-子群。若$Z(S) \leq O_{p',p}(H)$，则 $Z(S)$ 在 $W_H(S)$ 上分裂。

证明。根据引理 2.1，不妨假设 $O_{p'}(H) = 1$。令 $Q = O_p(H)$ 且$M = Z(Q)$。则 M 通过共轭作用成为一个 $\mathbb{Z}_{(p)}[H]$-模。假设 $O_{p'}(H) = 1$且 $Z(S) \leq O_p(H)$，可得 $C_M(S) = Z(S)$ 以及 $C_M(H) = W_H(S) = Z(H)$。复合映射 $\mathrm{tr}_S^H\mathrm{res}_S^H\colon C_M(H) \to C_M(S) \to C_M(H)$ 将元素提升到 $|H$ 次幂：$S|$，且与 p 互素。因此该复合映射是一个同构，由此根据形式上的理由（例如下文的引理 2.3）可得 $C_M(S) = \mathrm{im}(\mathrm{res}_S^H) \times \ker(\mathrm{tr}_S^H) = W_H(S) \times \ker(\mathrm{tr}_S^H)$。□

证明　　命题 2.2需要用到下面的引理，其证明简单，故略去　　.

引理 2.3。设 $M \xrightarrow{r} N \xrightarrow{t} M$ 是环上模之间的同态。若 $t \circ r$ 是同构，则 $N = \mathrm{im}(r) \oplus \ker(t)$。

当 S 是有限 p-群时，定义 $d(S)$ 为 S的阿贝尔子群的最大阶数，并定义 $\mathcal{A}(S)$ 为 S 中阶为 $d(S)$ 的阿贝尔子群集合。本文中，S 的 Thompson 子群 $J(S)$ 是由 $\mathcal{A}(S)$ 生成的子群。（文献中还有若干相关子群也称为“Thompson 子群”。）

定理 2.4（[*Gla71*，定理 *14.4*]）。设有限群 G、其 *Sylow* p-子群 S，并令 $H = N_G(J(S))$ G。若 p 为奇数，则 $W_G(S) = W_H(S) = O_p(Z(H))$。

定理 1.3 的证明。若 G 可解（即 (3)），则由 [Gor80，定理 6.3，3],和命题 2.2 可知，情形 (2) 成立；若我们处于情形 (2)，则命题适用。当 p 为奇数时，由定理 2.4，$W_G(S) = W_H(S)$；因此，由于 $Z(S) \le ZJ(S) \le J(S) \le O_{p',p}(N_G(J(S)))$，可知 (2) 蕴含 $Z(S)$ 在 $W_H(S) = W_G(S)$ 上分裂，从而得到 (1)。□

对于群 G 的 Sylow p-子群 S，G 在 S 上的融合系统 $\mathcal{F}_S(G)$ 是一个范畴，其对象为 S 的子群，态射为两个这样的子群之间的函数 $\varphi\colon P \to Q$，并且存在 G 中的元素 g，使得对每个 $x \in P$ 都有 $\varphi(x) = {}^g x$。Puig 对该范畴的特殊性质进行了公理化，后来 Broto–Levi–Oliver 和 Roberts–Shpectorov 进一步将其公理化，形成如今所谓的有限 p-群 S [上的饱和融合系统 $\mathcal{F}$（Pui06，BLO03，RS09]）。

定理1.3 和定理1.4 的结论在不对 G 或 $\mathcal{F}$施加任何限制时都不成立。构造群和融合系反例的一种方法是，从一个具有非内自同构且其阶为 2、并且中心化某个 Sylow 2-子群的有限单群出发。或者，在融合系统的框架下，可以从素数 2 处的一个融合系统出发，其中心化链接系统具有一个阶为 2 的非内刚性自同构[GL21]。事实上，除了这种方法之外，我们不知道如何构造任何反例。我们通过下面的 A_6 展示这种构造；更多群和融合系的例子见 [Vil25]，这些例子 $\mathcal{F}$ 都适用于这种构造。

例 2.5。取 $p = 2$ 和 $H = A_6$。令 $\langle a\rangle$ 为一个阶为 4 的循环群，通过对换 (5，6) 的共轭作用于 H。考虑半直积 $G = H\langle a\rangle$ 以及 G 的 Sylow 2-子群 $S = \langle$(1，3)(2，4)，(1，2)(5，6) $a\rangle$，置 $z =$(1，2)(3，4)，并令 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(G)$。则 $Z(S) = \langle z,\ a\rangle \cong C_2 \times C_4$ 不在 $Z(\mathcal{F}) = W_G(S) = \langle a^2\rangle$ 上分裂。

固定 S 上的一个饱和融合系统 $\mathcal{F}$，并令 P 为 S 的一个子群。P 的一个 $\mathcal{F}$-共轭子群，就是在范畴 $\mathcal{F}$ 中与 P 同构的子群。若对于 P 的每个 $\mathcal{F}$-共轭子群 P'，都有 $|N_S(P)| \ge |N_S(P')|$，则 S 的子群 P 称为完全 $\mathcal{F}$-正规化的；若对于 P 的每个 $\mathcal{F}$-共轭子群 P'，都有 $C_S(P') = Z(P')$，则称其为 $\mathcal{F}$-中心的。若 $\mathrm{Aut}_S(P)$ 是 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)$ 的一个 Sylow p-子群，则称其为完全 $\mathcal{F}$-自同构化的。饱和性的公理之一包括以下条件：每个完全正规化的子群都是完全自同构化的 [AKO11，定理 I.2.5(i)]。例如，S 的每个正规子群既是完全正规化的，也是完全自同构化的。

正规化子 $N_{\mathcal{F}}(P)$ 是定义在 $N_S(P)$ 上的融合子系，由满足以下条件的态射组成：$\varphi\colon Q \to R$ 属于 $\mathcal{F}$，且可扩张为一个态射 $\tilde{\varphi}\colon PQ \to S$，使 P 保持不变。若正规子群 P 属于 S，且 $N_{\mathcal{F}}(P) = \mathcal{F}$，则称 P 在 $\mathcal{F}$ 中正规。$\mathcal{F}$ 的唯一最大正规子群记为 $O_p(\mathcal{F})$。

定理 1.4 的证明。首先假设 $Z(S) \le Q := O_p(\mathcal{F})$，于是 $Z(S) \le Z(Q)$。那么 $Z(Q)$ 是 $\mathcal{F}$ 的正规子群，所以 $Z(Q)$ 是完全 $\mathcal{F}$-正规化的。由于 $\mathcal{F}$ 是饱和的，T:=$\mathrm{Aut}_S(Q)$ 是 $H = \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)$ 的一个 Sylow p-子群，而 $Z(Q)$ 是一个 $\mathbb{Z}_{(p)}[H]$-模，满足

$$Z(S) = C_{Z(Q)}(T) \quad \text{and} \quad Z(\mathcal{F}) = Z(N_{\mathcal{F}}(Z(Q))) = C_{Z(Q)}(H).$$

复合 $\mathrm{tr}_T^H \mathrm{res}_T^H\colon Z(\mathcal{F}) \to Z(S) \to Z(\mathcal{F})$ 将 $Z(\mathcal{F})$ 中的元素提升到 $|H\colon T|$ 次幂。因此，由于 T 在 H 中的指数与 p 互素，根据引理 2.3，再次有 $Z(S) = Z(\mathcal{F}) \times \ker(\mathrm{tr}_T^H)$。

接下来假设 p是奇数。Thompson 子群 $J(S)$ 是 $\mathcal{F}$-中心的，并且是 S 的正规子群。根据 Puig [AKO11，定理 I.5，5],正规化子融合系 $N_{\mathcal{F}}(J(S))$ 是一个饱和

融合系统，定义在 $N_S(J(S)) = S$上，其中 $Z(S) \leq C_S(J(S)) = Z(J(S)) \leq J(S) \leq O_p(N_{\mathcal{F}}(J(S)))$。因此，根据上一段，我们有

$$Z(S) = Z(N_{\mathcal{F}}(J(S))) \times \ker(\mathrm{tr}_T^H)$$

其中 $T = \mathrm{Aut}_S(J(S))$ 与 $H = \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(J(S))$。最后，[DGMP09，定理 4.1],这是定理 2.4 的融合系统类比，表明 $Z(\mathcal{F}) = Z(N_{\mathcal{F}}(J(S)))$，从而完成了该定理的证明。□

References

[AKO11] Michael Aschbacher、Radha Kessar 与 Bob Oliver，《代数与拓扑中的融合系统》，伦敦数学会讲义丛书，第 391 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2011. MR 2848834[BLO03] Carles Broto、Ran Levi 与 Bob Oliver，《融合系统的同伦论》，美国数学会杂志 16 (2003)，第 4 期，779–856（电子版）。[DGMP09] Antonio D´ıaz、Adam Glesser、Nadia Mazza 与 Sejong Park，《Glauberman 与 Thompson 关于融合系统的定理》，美国数学会会刊 137 (2009)，495–503。[GI08] Stephen M. Gagola, Jr. 与 I. M. Isaacs，《转移与 Tate 定理》，巴塞尔数学档案 91 (2008)，第 4 期，300–306. MR 2447543[GL16] George Glauberman 与 Justin Lynd，《不动点的控制以及中心化链接系统的存在性与唯一性》，数学发明 206 (2016)，第 2 期，441–484. MR 3570297[GL21] ，《链接系统的刚性自同构》，数学论坛 Sigma 9 (2021)，论文编号 e23，20. MR 4235162[Gla66] George Glauberman，《核自由群中的中心元素》，代数杂志 4 (1966)，403–420. MR 0202822[Gla71] G. Glauberman，《有限群的整体与局部性质》，载于《有限单群》（教学会议论文集，牛津，1969），学术出版社，伦敦，1971，第 1–64 页. MR 0352241 (50 #4728)[GLS98] Daniel Gorenstein、Richard Lyons 与 Ronald Solomon，《有限单群分类》。第 3 册。第一部分。第 A 章，数学调查与专著，第 40 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1998，几乎单 K-群. MR 1490581 (98j:20011)[Gor80] Daniel Gorenstein，《有限群》，第二版，Chelsea 出版公司，纽约，1980。[Lin07] Markus Linckelmann，《融合系统导论》，载于《群表示论》，EPFL 出版社，洛桑，2007，第 79–113 页。[Pui06] Lluis Puig，《Frobenius 范畴》，代数杂志 303 (2006)，第 1 期，309–357。[RS09] K. Roberts 与 S. Shpectorov，《关于饱和融合系统的定义》，群论杂志 12 (2009)，第 5 期，679–687. MR 2554760 (2010h:20047)[Vil25] Jonathon Villareal，《李型有限群链接系统的刚性自同构》，2025，arXiv:2509.21139 [math.GR]。电子邮件地址：gglauber@uchicago.edu 电子邮件地址：lynd@louisiana.edu