arXiv:2602.01209v1 [math.OC] 1 Feb 2026

区间运输问题最坏最优值的启发式方法

Elif Radov´a Garajov´a[1*]和 Miroslav Rada[1,2]

[1*]计量经济学系，信息学与统计学学院，布拉格经济大学，n´a m. W. Churchilla 4，布拉格，13067，捷克共和国。[2]财务会计与审计系，金融与会计学院，布拉格经济大学，n´am. W. Churchilla 4，布拉格，13067，捷克共和国。

*通讯作者。电子邮箱：elif.garajova@vse.cz；其他作者：miroslav.rada@vse.cz；

摘要

区间运输问题是运输问题的一种模型，其中供给、需求和运输成本的值受到不确定性的影响，并可在给定的区间范围内独立变化。求解区间规划模型的主要任务之一，是计算所有可能的区间数据取值所对应的最佳和最坏最优值。尽管区间运输问题的最佳最优值可以在多项式时间内计算出来，但计算最坏（有限）最优值已被证明是NP难的。本文强化了先前关于通过拟极端分解求得最坏最优值的结果，并以此为基础设计了用于高效近似该值的启发式方法。通过对场景进行简化编码，我们首先提出一种局部搜索方法和一种遗传算法，用于近似最坏最优值。随后，我们将这两种方法整合为一种模因算法，该算法结合了遗传算法的进化改进与通过局部搜索实现的个体学习。此外，我们还通过数值实验对这三种不同方法进行了实际比较。我们还表明，所提出的模因算法在近似区间运输问题的最坏最优值方面，能够与现有最先进方法相媲美；这一点体现在该算法为多个实例找到了新的最佳解。

关键词：运输问题、区间不确定性、启发式方法、最差值

1 引言

不确定性下的优化在运筹学实际问题的建模与求解中发挥着至关重要的作用。区间规划（Rohn 2006）为处理问题中的不确定性提供了一个框架，在该框架下，输入数据可在给定的下界和上界范围内独立变化。本文讨论区间运输问题（Cerulli 等人 2017年；Garajov´a 和 Rada 2023年），其中供给、需求和单位运输成本的数值均为具有给定区间范围的不确定数据。

与线性规划中计算最优值类似，求解区间线性规划的一项主要任务是，在所有可能的区间数据取值中求出最佳最优值和最坏最优值，这也称为最优值范围问题（Mohammadi 等人，2020年）。本文研究如何计算限于可行场景的最优值范围界限。对于某些区间规划问题而言，这是一项有意义的任务，因为其中存在不可行场景，使得按传统方式定义的最优值范围的最坏界限为无穷大。因此，需要计算最差有限最优值；此前，区间线性规划领域的文献也曾研究过这一问题（Hlad´ík，2018年）。

对于区间运输问题，计算最佳最优值的任务可归结为求解一个数据固定的线性规划（Liu，2003年）。然而，已有证明表明，对于区间运输问题的所有公式，计算最差有限最优值相关的判定问题都是 NP难（Garajov´a 和 Rada，2024a年；Hoppmann-Baum，2022年）。因此，研究近似求解该问题的高效方法，或求解区间运输问题特殊情形的方法，也很有意义。文献中提出了多种应对此问题的方法，包括 Liu 提出的基于对偶性的非线性公式（Liu (2003）、Juman 和 Hoque 提出的启发式方法（Juman 和 Hoque (2014)、Xie 等人提出的基于排列启发式的遗传算法（Xie 等人 (2017)、Cerulli 等人提出的迭代局部搜索（Cerulli 等人(2017)，以及 Garajov´a 和 Rada(2023提出的混合整数线性规划公式。Carrabs 等人研究了区间运输问题中不受多得少付悖论影响的子类的专用方法（Carrabs 等人(2021），D’Ambrosio 等人也进行了相关研究（D’Ambrosio 等人(2020）。

在此，我们基于一项近期结果，该结果给出了利用有限个所谓准极端情景来计算最差有限最优值的约简；这一结果最初针对对多反而少运输悖论免疫的问题导出（Carrabs 等（2021）），随后被推广到无需任何进一步假设的区间运输问题（Garajov´a 和 Rada 2024b）。我们首先强化该结果，并证明将约简限制于平衡准极端情景（总供给与总需求相等）即已足够。然后，我们为这些场景定义一种合适的编码，并构造局部搜索，通过搜索由略微修改的平衡场景所构成的邻域，寻找具有较高最优值的准极端情景。此外，我们还对遗传算法框架加以改造（Sivanandam 和 Deepa 2008年；Xie 等人，2017年），从而提供一种替代的启发式方法，在已编码准极端情景的集合上，利用基于种群的演化过程来计算最坏最优值。最后，我们将这两种方法结合起来，设计一种模因算法（Moscato 和 Cotta 2010年），在

其中，进化改进由通过局部搜索实现的个体学习加以增强。我们还在数值实验中比较所提出方法的效率，以及不同方法所产生解的质量。

2 区间运输问题

下面正式介绍区间运输问题的数学模型以及相关符号和术语。

给定两个实矩阵 C，$C \leq \overline{C}$ 且满足 $\underline{C} \leq C$，定义一个区间矩阵，其下界 C 和上界 C 构成集合 $\mathbf{C} = [\underline{C}, \overline{C}] = \{C \in \mathbb{R}^{m \times n} : \underline{C} \leq C \leq \overline{C}\}$，其中所有矩阵不等式均按元素理解。区间向量的定义与此类似。

2.1 问题表述

假设给定以下数据：

- 一组 m 供应点，记为 $I = \{1, \ldots, m\}$，其中每个供应点 $i \in I$ 都有有限的供给 s_i，
- 一组由 $J = \{1, \ldots, n\}$ 表示的 n 需求点，其中每个目的地 $j \in J$ 都有一个需要满足的需求 d_j，
- 将一单位货物从源点 i 运往目的地 j 的单位运输成本 c_{ij}。

此外，假设供给量 s_i、需求量 d_j 和单位成本 c_{ij} 的值都是不确定量，可以分别在给定的（非负）区间 $\mathbf{s}_i = [\underline{s}_i, \overline{s}_i]$、$\mathbf{d}_j = [\underline{d}_j, \overline{d}_j]$ 和 $\mathbf{c}_{ij} = [\underline{c}_{ij}, \overline{c}_{ij}]$ 内独立变化。注意，如果一个区间 $[\underline{a}, \overline{a}]$ 内的所有值均为非负数，即满足 $\underline{a} \geq 0$，则称该区间为非负区间。

运输问题的目标是制定一项运输计划，将货物从供应点运往需求点，同时遵守可用的供给量，满足所需的需求量，并使总运输成本最小化。在此，我们也考虑输入数据的不确定性。

利用区间线性规划（Rohn 2006）的框架，我们可以将区间运输问题 建模如下：

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} [\underline{c}_{ij}, \overline{c}_{ij}] x_{ij} & & \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j \in J} x_{ij} \leq [\underline{s}_i, \overline{s}_i], & & \forall i \in I, \\
& \sum_{i \in I} x_{ij} = [\underline{d}_j, \overline{d}_j], & & \forall j \in J, \\
& x_{ij} \geq 0, & & \forall i \in I, j \in J,
\end{aligned}
\tag{ITP}
$$

其中，实变量 x_{ij} 表示从源点 $i \in I$ 运往目的地 $j \in J$ 的货物数量。区间线性规划（区间运输问题）对应于所有形式相同、输入数据位于

相应区间内的运输问题集合。通过从各区间中选取系数而确定的一个特定运输问题，称为区间运输问题的情景。

2.2 最优值

求解区间线性规划的主要目标之一，是计算最优值范围，即包含所有可能场景下最好和最差最优值的最紧区间（通常包括不可行和无界情景对应的无穷值）。计算传统定义的最优值范围的界，在区间规划文献中已经得到了广泛研究（Mohammadi 等人 2020）。

这里，我们考虑将（区间运输问题）的最优值范围限制在可行场景集合上的计算问题，这将转化为寻找最差有限最优值的任务（Hladík 2018）。不难看出，（区间运输问题）中的某个运输问题存在可行解，当且仅当总可用供给量足以满足总需求。令 $\mathcal{SD}$ 表示所有供需向量的集合（$s,\ d$）$\in$，这些向量对应于可行场景，即

$$\mathcal{SD} = \left\{(s,d) \in (\mathbf{s},\mathbf{d}) : \sum_{i\in I} s_i \geq \sum_{j\in J} d_j \right\}. \tag{1}$$

令 $f(C,\ s,\ d)$ 表示成本矩阵为 C、供给向量为 s 且需求向量为 d的情景的最优值。于是，我们可以将最佳最优值 f 和最差有限最优值 f_{fin} 定义为

$$\underline{f}(\mathbf{C},\mathbf{s},\mathbf{d}) = \min\{f(C,s,d) : (s,d) \in \mathcal{SD},\ C \in \mathbf{C}\}, \tag{2}$$

$$\overline{f}_{\text{fin}}(\mathbf{C},\mathbf{s},\mathbf{d}) = \max\{f(C,s,d) : (s,d) \in \mathcal{SD},\ C \in \mathbf{C}\}. \tag{3}$$

对于变量非负的区间线性规划，最佳最优值 f可以通过求解单个线性规划轻松计算得出（关于区间运输问题的详细信息，另请参见（Liu，2003年））。另一方面，计算最差有限最优值的问题已被证明是 NP难的，无论是在一般情况下，还是在区间运输问题的情形下（Garajov´aand Rada 2024a；Hoppmann-Baum，2022年）。

在本文中，我们假设 $\mathcal{SD} \neq \emptyset$（至少存在一个可行场景），并且 $\mathcal{SD} \neq$（$\mathbf{s}$，$\mathbf{d}$）（至少存在一个不可行场景）。请注意，这是计算最差有限最优值时最具挑战性的情况，因为在其他情况下，该问题可以在多项式时间内求解（要么不存在可行场景，要么所有场景都是可行的，并且 f_{fin} 在（$C,\ s,\ d$）处取得），另请参见（Xie 等人，2017年）。

2.3 准极端约简

具有供需向量（s，d）$\in$（$\mathbf{s}$，$\mathbf{d}$）的情景称为供给准极端，如果至多存在一个源点 $k \in I$ 使得

$$s_i \in \{\underline{s}_i, \overline{s}_i\} \text{ for each } i \in I \setminus \{k\}, \qquad \underline{s}_k \le s_k \le \overline{s}_k, \text{ and}$$
$$d_j \in \{\underline{d}_j, \overline{d}_j\} \text{ for each } j \in J.$$

类似地，具有供需向量 $(s,\ d) \in (\mathbf{s},\ \mathbf{d})$ 的情景称为需求准极端情景，如果至多存在一个目的地 $k \in J$ 使得

$$d_j \in \{\underline{d}_j, \overline{d}_j\} \text{ for each } j \in J \setminus \{k\}, \qquad \underline{d}_k \le d_k \le \overline{d}_k, \text{ and}$$
$$s_i \in \{\underline{s}_i, \overline{s}_i\} \text{ for each } i \in I.$$

我们将供给准极端和需求准极端情景统称为准极端情景。此外，我们将值 s_k 或 d_k（不一定取某个边界值）称为准极端情景的自由值。

利用准极端情景计算 $\overline{f}_{\text{fin}}$ 的约简最初是针对免受“多即少”悖论影响的区间运输问题推导出来的（Carrabs 等（2021）），后来扩展到一般区间运输问题，无需任何额外假设（Garajov´a 和 Rada 2024b）。定理1陈述了允许进行约简的主要结果。

定理1 (Garajov´a 和 Rada (2024b), Carrabs 等人 (2021)) *There exists a quasi-extreme scenario for which the worst finite optimal value $\overline{f}_{\text{fin}}$ of interval transportation problem (区间运输问题) is attained.*

通常，准极端情景的集合并非有限，因为自由供给值 s_k 或自由需求值 d_k 可以取相应区间内的任意值。然而，定理2 表明，为了计算 $\overline{f}_{\text{fin}}$，也可以根据其他供给和需求值计算出合适的 s_k 或 d_k 值。此外，由于变量非负，成本矩阵 C 给出了最坏最优值。

定理2 (Garajov´a 和 Rada (2024b)) *Let the worst optimal value $\overline{f}_{\text{fin}}(C,\ \mathbf{s},\ \mathbf{d})$ be attained for a quasi-extreme scenario with a supply-demand vector $(s,\ d) \in \mathcal{SD}$ and let k be the index of the free value. Then, $\overline{f}_{\text{fin}}$ is also attained for a scenario with the supply-demandvector $(s',\ d')$ where*

$$s'_k = \max\left\{\underline{s}_k,\ \sum_{j\in J} d_j - \sum_{i\in I\setminus\{k\}} s_i\right\}, \quad s'_i = s_i \text{ for } i \in I\setminus\{k\}, \quad d' = d$$

for a supply-quasi-extreme scenario $(C, \overline{s},\ d)$ or,

$$d'_k = \min\left\{\overline{d}_k,\ \sum_{i\in I} s_i - \sum_{j\in J\setminus\{k\}} d_j\right\}, \quad d'_j = d_j \text{ for } j \in J\setminus\{k\}, \quad s' = s$$

for a demand-quasi-extreme scenario $(\overline{C}, s, d)$.

情景（C, s, d）称为平衡，如果总供给等于总需求，即 $\sum_{i\in I} s_i = \sum_{j\in J} d_j$ 成立。我们可以进一步强化定理2的结果，并证明无需考察不平衡场景，因为值 f_{fin} 总会在某个平衡情景上取得。

定理 3 *Consider a feasible quasi-extreme scenario* (C, s, d) *with a supply-demand vector* $(s, d) \in \mathcal{SD}$ *and let* k *be the index of the free value.*

If the scenario is supply-quasi-extreme and

$$\underline{s}_k > \sum_{j\in J} d_j - \sum_{i\in I\setminus\{k\}} s_i \tag{4}$$

holds, or, if the scenario is demand-quasi-extreme and

$$\overline{d}_k < \sum_{i\in I} s_i - \sum_{j\in J\setminus\{k\}} d_j \tag{5}$$

holds then there exists a quasi-extreme scenario $C\ s'\ d'$ *with* $\sum_{i\in I} s'_i = \sum_{j\in J} d'_j$ *such that* $f\ C\ s\ d\ \leq f\ C\ s'\ d'$.

Proof 首先，假设定理陈述中的情景 $(C, \overline{s}, d)$ 是供给准极端的，且其自由值为 s_k。考虑一个修改后的完全极端情景，其供给向量为

$$s^* = (s_1, \ldots, s_{k-1}, \underline{s}_k, s_{k+1}, \ldots, s_m)^T$$

以及相同的需求向量 d。在该情景中将值 s_k 替换为（更低或相等的）值 s_k，只会使最优值增加，也就是说，我们有 $f\ C\ s\ d \leq$ (,,) (,,)。此外，根据不等式 ( )，修改后的情景仍然可行。 4

由存在不可行场景这一假设可知 $\sum s_i \leq \sum d_j$ 成立。因此，可以依次将剩余供给量降低至下界，并在必要时依次将需求量提高至上界，直到得到一个满足 $\sum s'_i = \sum d'_j$ 的情景（C, s', d'）。根据构造，所得情景是准极端情景，显然也是可行情景。此外，在需求固定时减少供给，或在供给固定时增加需求，都只会使最优值变差（详情请参见（Cerulli 等人 2017年）。因此，我们得到所需的不等式

$$f(\overline{C}, s', d') \geq f(\overline{C}, s^*, d) \geq f(\overline{C}, s, d).$$

需求准极端情景这一后一种情况可以用类似的方法证明。 □

以下推论给出了定理 3的直接推论，可用于构造一个精确的有限算法，以计算平衡准极端情景下的 f_{fin}。

推论 4 *The worst finite optimal value* f_{fin} *of interval transportation problem* (区间运输问题) *can be computed as the maximum over the optimal values of all balanced quasi-extreme scenarios.*

算法1 概述了通过检查至多 f_{fin} 个$m+n$）2^{m+n-1} 相关的平衡准极端情景来精确计算。

算法 1 用于计算 f_{fin}（区间运输问题）

最差值 $\leftarrow -\infty$对于 $k \in I$ 中的所有 $s_i \in \{s_i, \overline{s}_i\}$ 选择，令 $i \in I \setminus \{k\}$ 和 $d_j \in \{\underline{d}_j, d_j\}$ 中的所有 $j \in J$选择，令：若 $\sum_{j\in J} d_j - \sum_{i\in I\setminus\{k\}} s_i > s_k$，则情景（$C$，$s$，$d$）对所有 $s_k \in \mathsf{s}_k$均不可行，可忽略；否则，若 $s_k > \sum_{j\in J} d_j - \sum_{i\in I\setminus\{k\}} s_i$，则情景（$C$，$s$，$d$）不平衡，可忽略；否则，若 f（C，s，d）$>$最差值，则最差值 $\leftarrow f$（C，s，d），最差情景 $\leftarrow$（C，s，d）。对于$k \in J$ 中的所有 $s_i \in \{\underline{s}_i, s_i\}$ 选择，令 $i \in I$和 $d_j \in \{\underline{d}_j, d_j\}$ 中的所有 $j \in J \setminus \{k\}$ 选择，令：若 $\sum_{i\in I} s_i - \sum_{j\in J\setminus\{k\}} d_j < d_k$，则情景（$C$，$s$，$d$）对所有 $d_k \in \mathsf{d}_k$均不可行，可忽略；否则，若 $d_k < \sum_{i\in I} s_i - \sum_{j\in J\setminus\{k\}} d_j$，则情景（$C$，$s$，$d$）不平衡，可忽略；否则，若 f（C，s，d）$>$最差值，则最差值$\leftarrow f$（C，s，d），最差情景 $\leftarrow$（C，s，d）。返回最差值、最差情景

3 区间运输问题的启发式方法

本节将基于准极端约简，推导用于求解最坏最优值 f_{fin} 下界的启发式方法。首先，我们定义准极端情景的简化编码。

令 χ 表示所有向量（a_1，……，a_{m+n}）$\in \{-1, 0, 1\}^{m+n}$ 的集合，其中恰好有一个$a_i = 0$。给定一个区间运输问题，每个向量 $a \in \chi$ 都可以与一个准极端情景（C，s，d）相关联，其中 $a_i = -1$ 对应于设置为相应区间下界的值，$a_i = 1$ 对应于设置为上界的值，而自由值 s_k 或 d_k 则按照定理 2 中的描述计算（或者，如果不存在能够使情景可行的自由值选择，则设 $s_k = s_k$ 或 $d_k = d_k$）。形式化地，对于给定的 $a \in \chi$，我们将供需向量（s，d）定义如下：

$$
\begin{aligned}
&\forall i \in \{1, \ldots, m\}\colon s_i = s_i^c + a_i s_i^{\Delta} && \text{if } a_i \neq 0,\\
&\forall j \in \{1, \ldots, n\}\colon d_j = d_j^c + a_{m+j} d_j^{\Delta} && \text{if } a_{m+j} \neq 0,\\
&s'_k = \max\left\{\underline{s}_k,\ \min\left\{\sum_{j\in J} d_j - \sum_{i\in I\setminus\{k\}} s_i, \overline{s}_k\right\}\right\}, && \text{if } a_k = 0 \text{ with } k \in \{1, \ldots, m\},
\end{aligned}
$$

$$d'_k = \min\left\{\overline{d}_k,\ \max\left\{\sum_{i\in I} s_i - \sum_{j\in J\setminus\{k\}} d_j, \underline{d}_k\right\}\right\},\quad \text{if } a_{m+k}=0 \text{ with } k\in\{1,\ldots,n\}.$$

因此，上文引入的集合 χ 编码了与计算给定区间运输问题的最差有限最优值 f_{fin} 相关的所有准极端情景。下面，我们描述用于近似 f_{fin} 的启发式算法，这些算法在由集合 χ （或其子集）定义的搜索空间中运行。这里，我们将给定的 $a\in\chi$ （其编码了一个供需向量（$\underline{s}$，$\overline{d}$））的值定义为情景（C，$\underline{s}$，$\overline{d}$）的最优值，即 $f(a) = f(C, \underline{s}, \overline{d})$。

3.1 局部搜索算法

本节通过探索 χ 中配置的适当子集，推导一种用于近似区间运输问题最坏有限最优值的局部搜索方法。考虑配置 $(a_1, \ldots, a_{m+n}) \in \chi$，其中 $a_k = 0$ 编码了一个平衡准极端情景。对于索引 $i \neq k$，采用以下修改来获得相邻配置：

- 我们尝试将值 a_i 切换为另一个边界值，同时修改与 a_k 对应的自由值，以保持情景平衡。
- 如果无法进行此类修改，则将与 a_k 对应的值设为其中一个边界值，并将与 a_i 对应的值改为自由值。

令 $\gamma_i^k(a)$ 表示对由a编码的情景的 i^{th} 系数进行的此类扰动。然后，我们将给定配置 $a\in\chi$ （其中 $a_k=0$）的邻域 $\mathcal{N}(a)$定义为集合

$$\mathcal{N}(a) = \{\gamma_i^k(a) : i\in\{1,\ldots,m+n\}\setminus\{k\}\}.$$

现在，我们总结用于计算区间运输问题最差有限最优值的局部搜索启发式算法框架。在算法的每一步中，根据相应情景的最优值选择一个相邻配置。算法2采用首次改进策略，即选择第一个遇到的相邻配置，该配置编码的情景具有低于当前情景的最优值 $(\underline{s}, \overline{d})$。

另一方面，算法 3 采用（成本更高的）最佳改进策略，即探索所有相邻配置，并使用最优值最低的准极端情景来选择下一个配置。

3.2 遗传算法

遗传算法（Sivanandam 和 Deepa 2008年）提供了一种基于种群的方法，用于构建受自然选择启发、解决具有挑战性的优化问题的启发式方法。遗传算法的主要构成部分是用于实现选择（基于适应度函数的评估）、交叉和变异的算子，这些算子可在迭代进化过程中应用于给定种群中的个体。

算法2 用于计算的首次改进局部搜索 f_{fin} （区间运输问题）

$a \leftarrow$ 初始可行准极端情景
重复
  已改进 $\leftarrow$假
  对于 $a' \in \mathcal{N}(a)$ **执行**
    如果 $f(a') > f(a)$ **则**
      $a \leftarrow a'$
      改进 $\leftarrow$真
      跳出
直到非 改进
返回 a

算法3 一种最佳改进局部搜索，用于计算 f_{fin} 的（区间运输问题）

$a \leftarrow$ 初始可行准极端情景
重复
  改进的 $\leftarrow$False
  邻域值 $\leftarrow -\infty$
  对 $a' \in \mathcal{N}(a)$ **执行**
    如果 $f(a') >$ 邻域值 **则**
      邻域值 $\leftarrow f(a')$
      邻解 $\leftarrow a'$
  如果 邻解值 $> f(a)$ **则**
    $a \leftarrow$ 邻解
    已改进 $\leftarrow$真
直到不是 已改进
返回 a

在此，我们将遗传算法框架应用于计算区间运输问题的最坏最优值 f_{fin}。在我们的情形中，种群对应于一组配置 χ，这些配置表示第3节中引入的准极端情景。种群大小由参数 N_{pop}决定。

算法 4 展示了用于计算f_{fin}的遗传算法框架。参数 π_{C} 和 π_{M} 分别决定应用交叉算子或变异算子的概率。给定参数 t_{GA}，迭代进化过程的终止准则是：在前面的 t_{GA} 次迭代中，种群的最大适应度（某个情景的最优值）没有得到改善。终止时，返回所找到的最优值最高的配置。

3.2.1 适应度与选择

个体配置 $a \in \chi$ 的适应度由该配置所表示的运输问题的最优值$f(a) = f(C, s, d)$决定。如果给定配置对应于一个不可行场景，则赋予它一个结构相似的可行场景的最优值（例如，通过反复将供应量从下界切换到上界，并将需求量反向调整，

算法4 用于计算 f_{fin} （区间运输问题）

$P \leftarrow$从 χ随机生成的 N_{pop} 个可行配置组成的种群
最差值 $\leftarrow -\infty$
重复
  $Q \leftarrow \emptyset$
  对 $a \in P$ **执行**
    计算适应度 $f(a)$
    如果 $f(a) >$ 最差值 **则**
      最差值 $\leftarrow f(a)$
      最差配置 $\leftarrow a$
  对 $l \in \{1, \ldots, N_{\text{pop}}\}$ **执行**
    根据选择策略选择 $a \in P$ 复制到 Q
  将 Q拆分为 $|Q|/2$ 对
  对于来自 Q **的每个已创建配对** (a, b)，**执行**
    以概率 π_{C} 将交叉(a, b) 插入 Q
  对于 $a \in Q$，**执行**
    以概率 π_{M} 将 a 替换为变异(a)
  $P \leftarrow Q$
直到最差值连续 t_{GA} 次迭代都没有变化
返回最差配置

供应量的值从下界到上界，并反向处理需求量的值，直到达到一个可行场景）。

我们考虑两种选择策略，其中从当前种群中选出 N_{pop} 个配置进入下一代。该算法使用：

- 适应度比例选择策略，其中每个配置 a具有由 $f(a)$决定的被选择概率，或者，
- 锦标赛选择策略，即先选出固定数量的配置，再从中选择适应度值 $f(a)$最高的配置。

此外，可以预先选出固定数量的适应度值 $f(a)$最高的配置予以保留。

对于适应度比例选择策略，可使用以下函数计算配置 a的选择概率：

$$\pi_S^1(a) = \frac{f(a)}{\sum_{b \in P} f(b)}, \quad \pi_S^2(a) = \frac{f(a) - f_{\min}}{\sum_{b \in P} f(b) - |P| \cdot f_{\min}}, \quad \pi_S^3(a) = \frac{f(a) - g}{\sum_{b \in P} f(b) - |P|g},$$

其中 $f_{\min}$ 表示种群中适应度的最小值，而值 g 的计算使得 π_S^3 的最高值与最低值之比保持恒定。

3.2.2 变异

给定带有 $a_k = 0$的配置 $a \in \chi$ ，算子变异(a)生成新配置 a' ，其方式为切换 a的一个系数，或改变自由值的索引，具体取决于相应的运输问题情景是否平衡。

对于对应非平衡情形的配置，变异算子会随机选择一个索引 $i \in \{1, \ldots, m+n\} \setminus \{k\}$，并设置 $a'_i = -a_i$，同时保持其余系数不变。

对于平衡情形，变异算子会尝试更改自由值的索引。这里，我们设置 $a'_k \in \{-1, 1\}$，优先选择能够在选定新自由值的合适索引后形成平衡情形的值。如果能够创建新的平衡情形，我们将 $a'_i = 0$ 设置为合适的索引 i ，以平衡 a_k 的变化，同时保持其余系数不变。

如果这两个选项 $a'_k \in \{-1, 1\}$ 都无法形成平衡情形，那么存在一个系数 a_i ，使得设置 $a'_k = 0$、 $a'_i = -a_i$ ，并对所有 $j \notin \{i, k\}$ 设置 $a'_j = a_j$ ，对应于一个平衡情形。在这种情况下，变异后的配置 a' 就按此方式定义。

请注意，尽管变异算子可能生成对应于不平衡或不可行情景的配置，但平衡情形总是会变异为新的平衡情形。

3.2.3 交叉

算子 crossover(a, b) 将两个父代配置 a， $b \in \chi$ 组合起来，生成一个子代配置 $z \in \chi$。其中， z 的每个值都继承自 a 或b。此外，自由值的位置也继承自其中一个父代。假设父代的自由值分别为 $a_k = 0$ 和 $b_l = 0$。那么，子代配置 z 按如下方式生成：

- 随机设置为 $z_k = 0$ 和 $z_l = a_l$，或 $z_l = 0$ 和 $z_k = b_k$。
- 对于每个 $i \neq k$， l，随机设置为 $z_i = a_i$ 或 $z_i = b_i$。

请注意，即使两个父代都是对应于平衡场景的配置，交叉算子也可能生成对应于不平衡和不可行情景的配置。

3.3 模因算法

文献中还提出并研究了混合遗传算法，这类算法将遗传算法的框架与其他启发式方法相结合。通过个体学习改进进化式种群方法的理念，促成了遗传算法与局部搜索方法的结合，这种方法在文献中称为模因算法。

算法 5 展示了用于计算区间运输问题最差有限最优值的模因算法框架，该框架基于第3.2节中推导的遗传算法。然而，此处的局部搜索方法

在第3.1 节中讨论的方法也被采用，以提高种群中所选个体配置的质量（选择概率由参数 π_{LS}确定）。

通过局部搜索进行的个体学习既用于初始种群，也用于由交叉算子产生的后代配置，并采用首次改进策略（另见算法 2 和第3.1 节了解详情）。为使计算时间保持合理，函数局部搜索(a)（见算法 5 ）也可限制为最多经过 t_{LS} 次局部搜索算法迭代后返回所找到的配置。

算法 5 用于计算 f_{fin} （区间运输问题）的模因算法

$P \leftarrow$由 N_{pop} 个取自 χ 的随机生成的配置构成的种群
对于 $a \in P$ **执行**
    以概率 π_{LS} 将 P 中的 a 替换为局部搜索(a)
最差值 $\leftarrow -\infty$
重复
    $Q \leftarrow \emptyset$
    对于 $a \in P$ **执行**
        评估适应度 $f(a)$
        如果 $f(a) >$ 最差值 **则**
            最差值 $\leftarrow f(a)$
            最差配置 $\leftarrow a$
    对 $l \in \{1, \ldots, N_{\mathrm{pop}}\}$ **执行**
        根据选择策略，选择 $a \in P$ 个复制到 Q
    将 Q 拆分成 $|Q|/2$ 对
    对于来自 Q **的每一对已创建的**（a, b）
        以概率 π_{C} 将 $z :=$ 交叉(a, b) 插入到 Q 中
        如果 z **已插入到** Q **中，则**
            以概率 π_{LS}，将 z 中的 Q 替换为 LocalSearch(z)
    对 $a \in Q$ **执行**
        以概率 π_{M}，将 a 替换为 mutate(a)
    $P \leftarrow Q$
直到 t_{GA} 次迭代内最差值没有变化
返回 最差配置

4 计算实验

我们针对一组区间运输问题实例开展了计算实验，以比较现有方法与本文所提出算法在计算效率和解的质量方面的表现。

4.1 实现细节

所提出的方法使用 Python 实现，并采用 Gurobi 12.0.1 求解器评估各个场景并计算适应度函数。该实现的源代码可在 GitHub 上获取（Rada 和 Radov´a Garajov´a 2025年）。

实验中考虑的用于逼近区间运输问题最差有限最优值的最先进方法是置换启发式遗传算法，提出者为Xie 等人（2017年）、迭代局部搜索算法，提出者为Cerulli 等人（2017年），以及混合整数线性规划模型，提出者为Garajov´a 与 Rada （2023年）。对于前两种方法，以文献中先前发表的结果作为参照，而最后一个模型则使用 Gurobi 12.0.1 求解。

为比较不同方法，模因算法采用了锦标赛选择策略，参数根据经验设置如下：

- 种群规模 $N_{\text{pop}} = 30$,
- 终止前未改进的迭代次数 $t_{\text{GA}} = 20$,
- 局部搜索概率 $\pi_{\text{LS}} = 0.7$,
- 局部搜索迭代次数不设上限 t_{LS},
- 变异概率 $\pi_{\text{M}} = 0.1$ 适用于平衡场景的配置，以及 $\pi_{\text{M}} = 0.7$ 适用于不平衡场景，
- 交叉概率 $\pi_{\text{C}} = 1$。

实验所用参数设置的完整说明可在 GitHub代码仓库的源代码中找到。

该实验在一台配备 32 GB内存和 Intel Core i7-1185G7 处理器的计算机上进行。

4.2 实例

实验中使用的区间运输问题实例数据集是一个标准的问题集合，由 Xie 等人（2017年）提出，随后被其他作者（Cerulli 等人 2017年；Garajov´a 和 Rada 2023年）采用。该数据集最初包含 60 个随机生成的基准实例，按规模分为每组 10 个实例，规模分别为 2×3、3×5、4×6、5×10、10×10 和 20×20（此处，规模指供应点和需求点的数量）。在所有这些实例中，供给区间向量和需求区间向量满足 $s = 2s$ 和 $d = 2d$。在本实验中，仅使用规模为 20×20 的最大规模实例，因为较小的实例可以通过精确算法在可忽略的时间内高效求解（另见Garajov´a 和 Rada（2023年）发表的结果）。

对规模为 40×40 和 60×60（Rada 和 Radov´a Garajov´a 2025年的实验中，使用更大的随机生成实例并未取得有用结果（相关数据可在 GitHub 上获取）。所有比较算法找到的最佳解都相同，且结构简单（大多数甚至所有供应量和需求量都取其上界）。简单的局部搜索很可能就能找到这些解。仍有一个引人关注的开放辅助问题：如何生成具有非平凡最大化解结构的“困难”实例。

4.3 结果与讨论

4.3.1 所提出方法的比较

表1 展示了使用本文提出的四种算法求解这些实例的计算实验结果：采用首次改进策略的局部搜索算法（算法2）和采用最佳改进策略的局部搜索算法（算法3）、遗传算法（算法4）以及混合模因算法（算法5）。对于每种方法，报告了作为区间运输问题最差有限最优值下界的目标值，以及计算该值所需的运行时间（秒）。

需要注意的是，尽管局部搜索算法的运行时间最快，但并非总能找到最高的目标值。另一方面，遗传算法通常能找到更好的解，但需要显著更长的运行时间。最后，模因算法结合了两种方法的优势，在生成高质量解（得益于基于种群的方法）与将计算时间控制在合理范围内（借助局部搜索减少所需代数）之间取得了平衡。

由于所实现的方法并非确定性方法，我们还研究了多次运行中所得解和运行时间的变化情况。图1展示了各算法在 5 次运行中得到的最小、最大和平均目标值的区间图2、3、4 和 5。可以看出，局部搜索方法所得目标值的变化最大，因为这些方法很大程度上取决于随机生成的初始配置，而基于种群的方法则更加稳定。类似地，图 2 展示了 5 次运行中的最小、最大和平均计算时间。图中凸显了局部搜索方法的高效性，而基于种群的方法的运行时间变化则更大。遗传算法在大多数情况下需要最长时间才能得到解；不过，模因算法在所有运行中都能在 10 秒内找到解。

4.3.2 与已发表方法的比较

表2 展示了三种此前发表的、用于近似区间运输问题最差有限最优值的方法，以及本文提出的模因算法的计算实验结果。Xie 等人 Xie 等人 (2017年) 和 Cerulli 等人 (2017年) 的数值基于文献中此前发表的结果。表中还报告了 Garajov´a 和 Rada (2023年) 使用 Gurobi 求解混合整数线性规划模型的运行时间（秒）（时间限制为 1 分钟），以及作者实现的模因算法的运行时间。

请注意，整数规划模型找到的解不一定是最优解，因为求解器未能在时间限制内将该规划问题求至最优。事实上，在实例 9 和 10 中，模因算法找到的情景，其最优值高于 Gurobi 得出的值。对于实例 2 和 10，模因算法返回的目标值 9200 和 9370，甚至高于此前任何竞争算法所找到的最高界

。在所有实例中，模因算法都能在不到 4 秒的运行时间内，计算出最坏最优值的最紧近似。

4.3.3 遗传算法的性质

图 3 展示了遗传算法和模因算法在两个实例（分别为实例 2 和实例 10）上，针对不同初始种群规模所得的目标值，以及计算该值所处理的代数

	局部搜索（算法2）		局部搜索（算法 3）		遗传算法（算法 4）		模因算法（算法 5）	
	目标值	Time	目标值	Time	目标值	Time	目标值	Time
1	9330	0.11	8315	0.03	**9425**	16.86	**9425**	3.25
2	9080	0.08	8060	0.03	**9200**	20.92	**9200**	2.86
3	9330	0.11	8315	0.03	**9425**	15.07	**9425**	3.11
4	**9130**	0.08	7785	0.03	**9130**	22.61	**9130**	1.53
5	**9420**	0.10	7500	0.02	**9420**	24.90	**9420**	2.76
6	10245	0.12	8380	0.02	**10320**	18.95	**10320**	1.08
7	8675	0.06	7565	0.02	8675	21.57	**8700**	3.15
8	**9260**	0.09	7575	0.03	**9260**	29.56	**9260**	1.40
9	**9885**	0.10	8180	0.02	**9885**	20.86	**9885**	1.23
10	**9370**	0.09	7425	0.03	9350	15.14	**9370**	3.29

表 1：本文提出的局部搜索算法（采用首次改进和最佳改进策略）、遗传算法及模因算法所找到的最坏最优值，适用于 20×20 中的实例，数据来自 Xie 等人（2017年）。每个实例所得的最高值以粗体标出。同时报告了各方法求得解所需的时间（秒）。

	Xie 等人 (2017年)	Cerulli 等人 (2017年)	Garajov´a 和 Rada (2023年)	Time	模因算法 （算法 5）	Time
1	9405	9405	**9425**	8	**9425**	3.25
2	9015	9140	**9200**	59	**9200**	2.86
3	9335	9405	**9425**	8	**9425**	3.11
4	8930	**9130**	**9130**	12	**9130**	1.53
5	9275	**9420**	**9420**	1	**9420**	2.76
6	10220	**10320**	**10320**	8	**10320**	1.08
7	8685	8630	**8700**	5	**8700**	3.15
8	**9260**	**9260**	**9260**	0	**9260**	1.40
9	**9885**	**9885**	9685	2	**9885**	1.23
10	9225	9220	9200	59	**9370**	3.29

表 2：四种比较算法在 20×20 Xie 等人 所提供的 (2017年) 实例中找到的最坏最优值。每个实例所获得的最高值以粗体标出。还在相应列中报告了混合整数线性规划模型和模因算法找到解所需的时间（秒）。混合整数线性规划模型的结果（Garajov´a 和 Rada 2023年）使用较新版本的 Gurobi 求解器重新计算（实例 2 和 10 的结果有所不同，这次找到的解更好；实例 9 的结果也有所不同，这次找到的解更差）。

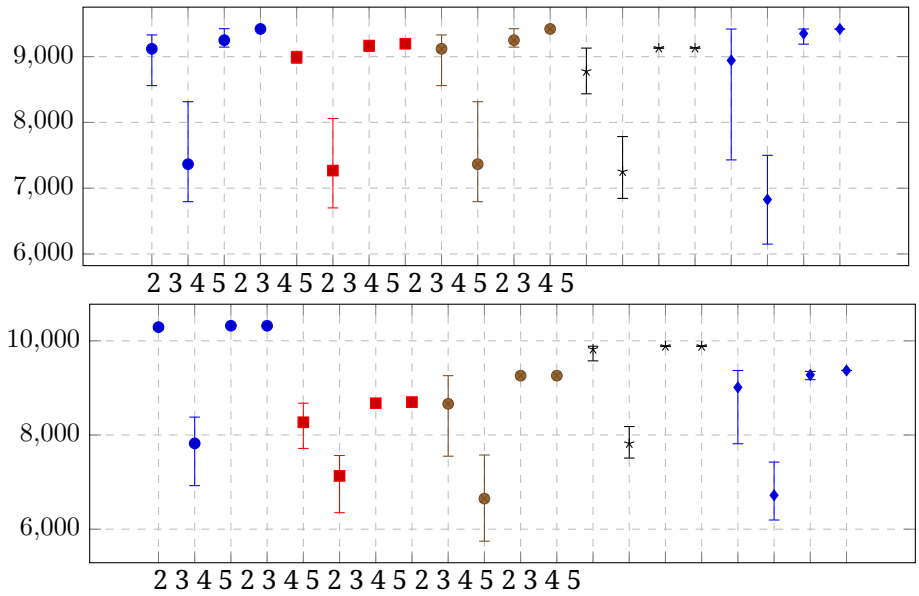


图1：本文介绍的四种算法在实例1–5（上方）和6–10（下方）上运行5次所得最大、最小和平均目标值的区间图。标签表示所使用的算法编号：局部搜索（2 和3）、遗传算法（4）和模因算法（5）。

规模以及不同参数设置下的表现。具体而言，种群规模 $N_{\text{pop}} \in \{10, 30, 50, 100\}$ 分别采用锦标赛选择或适应度比例选择进行测试，使用策略 π_S^3 （详情见第 3.2.1 节），终止条件则由未改进的迭代次数 $t_{\text{GA}} \in \{5, 20\}$决定。

可以看出，遗传算法的表现随种群规模的变化更大（尤其是采用锦标赛选择策略时），而模因算法的表现则更加稳定。不过，即使种群规模较小，这两种基于种群的算法也能产生高质量的解。事实上，采用锦标赛选择时，即使使用 $N_{\text{pop}} = 10$，模因算法也能为两个实例找到最高目标值。

图 4 展示了遗传算法和模因算法在两种不同设置下求解实例 2 时的进展：适应度比例选择使用 π_S^3，配合$N_{\text{pop}} = 10$ 和 $t_{\text{GA}} = 20$，以及锦标赛选择使用 $N_{\text{pop}} = 50$ 和 $t_{\text{GA}} = 5$。对于该实例，所有测试的算法都找到了相同的最高值 9200。

返回解所需时间最长的是使用$N_{\text{pop}} = 50$的遗传算法，它在约 27 秒内处理了 50 代。其余所有算法均能在 8 秒内计算出解。使用 $N_{\text{pop}} = 10$ 的遗传算法处理了 80 代，但由于每一代的种群规模缩小为原来的五分之一，迭代速度快得多。

模因算法能够快速找到最高值，并在找到该值后，将大部分时间用于等待终止条件达到 t_{GA} 次迭代。在

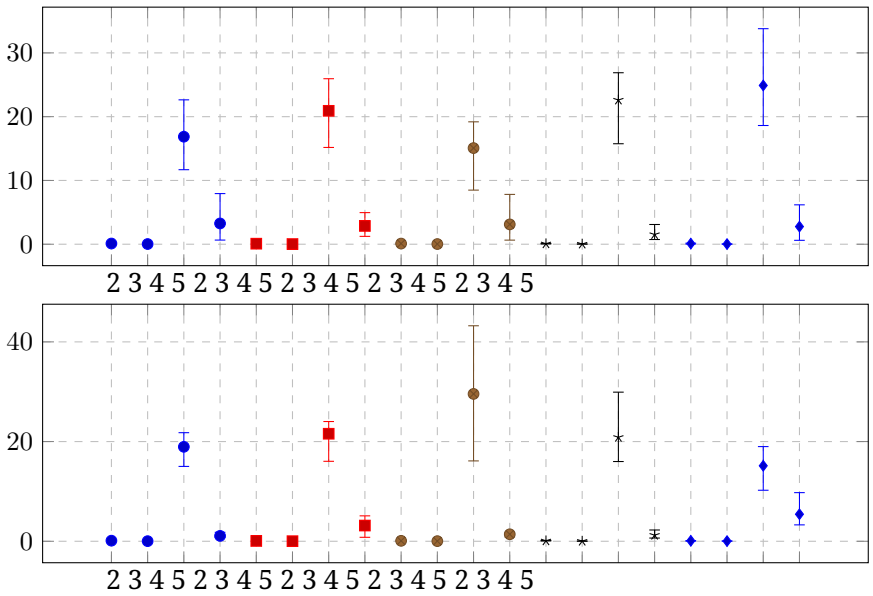


图 2：本文介绍的四种算法在实例 1-5（上方）和 6-10（下方）上运行 5 次的最大、最小和平均运行时间区间图。标签表示所用算法的编号：局部搜索（2和 3）、遗传算法（4）和模因算法（5）。

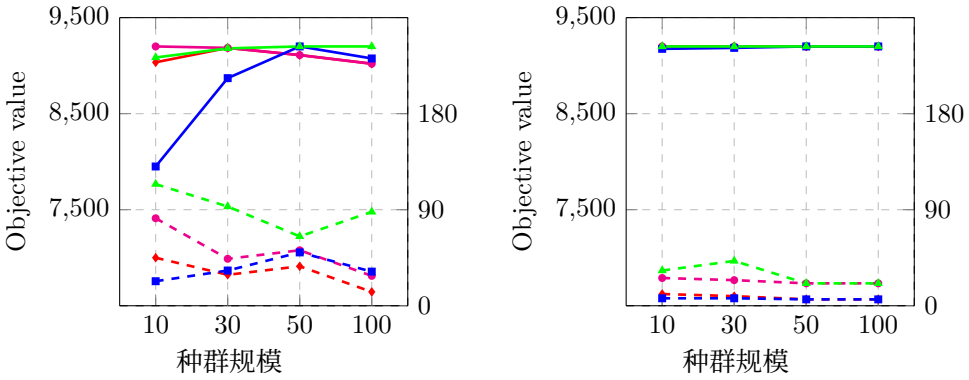
这种情况下，代数少于遗传算法（分别为 6 代和 26 代），但由于加入了局部搜索，迭代的计算开销更大。

4.3.4 局部搜索算法的性质

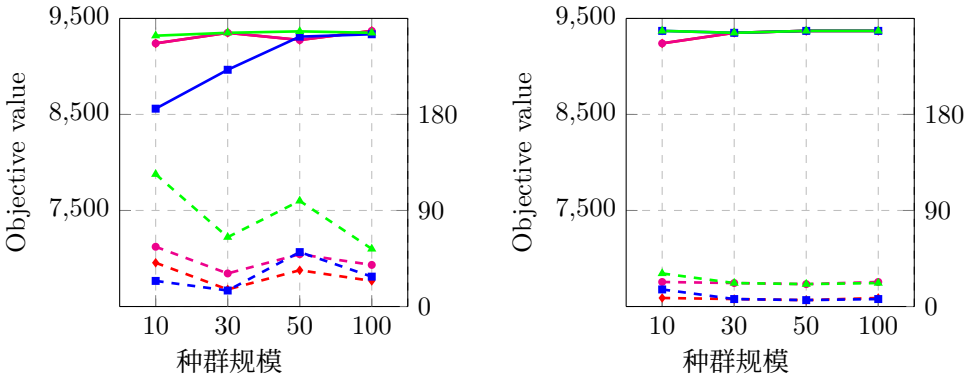
表 3 展示了局部搜索方法采用首次改进策略（算法 2）或最佳改进策略（算法 3）运行 10 次的结果。每次运行中，两种局部搜索方法都从同一个随机生成的配置开始。报告了每种方法在运行过程中找到的最高最优值、求解线性规划的平均数量以及平均迭代次数。

首次改进策略会选择第一个目标值更高的相邻配置，并且能够为所有实例找到更好的解。迭代次数表明，最佳改进策略很快就会陷入局部最大值。另一方面，随机选择首个改进邻居的方式似乎使算法能够找到质量尚可的解。

首次改进策略的迭代次数（平均而言）大于供应量和需求量的总数（40）。这意味着某些供应量或需求量会被反复修改。此外，线性规划的平均数量表明，采用首次改进策略进行局部搜索时，每次迭代平均考察的邻居数量为 ≈ 12 （在可用的 39 个邻居中）。对于最佳改进策略，每次迭代的平均线性规划数量为 ≈ 39 （符合预期）。



(a) 实例 2



(b) 实例 10

图 3：遗传算法（左）和模因算法（右）在种群规模为$N_{\text{pop}} \in \{10, 30, 50, 100\}$的两个实例上的目标值和代数。采用了不同的参数设置：采用策略 π_S^3 和 $t_{\text{GA}} = 5$ ( )的适应度比例选择，采用策略 π_S^3 和 $t_{\text{GA}} = 20$ ( )的适应度比例选择，采用 $t_{\text{GA}} = 5$ ( )的锦标赛选择，以及采用 $t_{\text{GA}} = 20$ ( )的锦标赛选择。

5 结论

区间运输问题为处理和求解受不确定性影响的运输问题提供了一种数学模型，其中供给、需求和运输成本的取值可以在给定的区间范围内变化。本文研究了区间运输问题最差有限最优值的计算问题，该问题此前已被证明是 NP难。由于精确计算该值的计算开销可能很大，我们着重研究了用于近似该值的启发式方法。

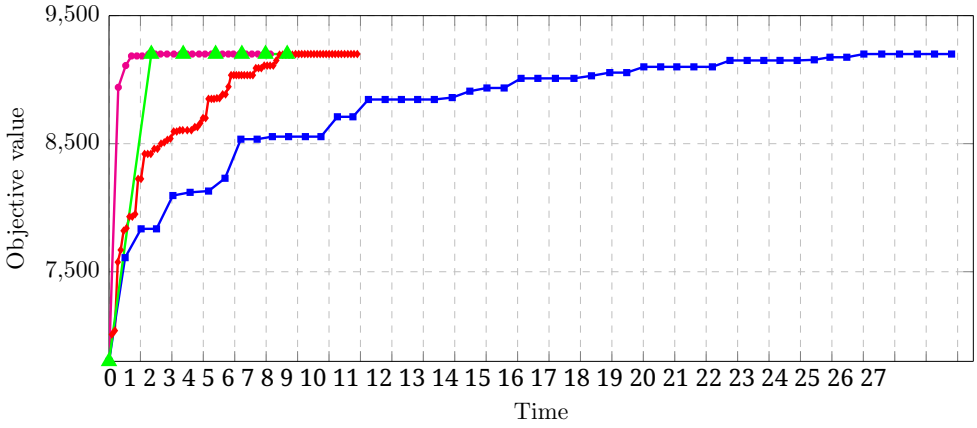


图 4：实例 2。 以及：遗传算法和模因算法，采用 $N_{\text{pop}} = 10$，策略 π_S^3，$t_{\text{GA}} = 20$。 以及：遗传算法和模因算法，采用 $N_{\text{pop}} = 50$，锦标赛选择策略， $t_{\text{GA}} = 5$。

所有算法都找到了相同的解（9200）。代数：：80，但迭代次数成本最低；26，但由于局部搜索，各代更为复杂，使其仅比遗传算法快 2 秒；：50，更大的种群使各代的计算需求更高；：6，此处局部搜索的需求很高，甚至比代数多 4 倍的品红色算法更慢。

请注意，并且大部分时间都花在检查取值相同的 t_{GA} 代上。

	采用首次改进的局部搜索			采用最佳改进的局部搜索		
	目标值	LPs	迭代次数	目标值	LPs	迭代次数
1	**9405**	535.0	42.1	8175	90.7	2.3
2	**9080**	523.7	41.2	7845	94.6	2.4
3	**9405**	535.0	42.1	8175	90.7	2.3
4	**9130**	499.0	37.2	7810	110.2	2.8
5	**9420**	599.1	47.4	7340	110.2	2.8
6	**10320**	679.4	53.5	7825	98.5	2.5
7	**8700**	487.2	37.8	7780	102.4	2.6
8	**9260**	575.0	44.9	7370	110.2	2.8
9	**9885**	546.2	40.4	8285	110.2	2.8
10	**9315**	548.3	44.7	7710	102.4	2.6

表3：局部搜索算法采用首次改进和最佳改进策略运行10次所找到的最高最坏最优值。各算法求解的线性规划平均数量和平均迭代次数分别列于相应列中。

基于一项近期成果（该成果表明，可将问题分解为一组准极端情景），我们提出了一种模因算法，用于求解区间运输问题最差有限最优值的下界。我们首先推导出

一项更强的结果，将分解范围限定为平衡准极端情景，即总供给与总需求相等的情景。基于这一理论结果，我们定义了情景的编码，并提出了针对编码集合的局部搜索算法，以及一种采用适当变异算子和交叉算子的遗传算法。结合这两种方法，我们构建了一种模因算法，同时利用进化改进和通过局部搜索进行学习。

所进行的计算实验表明，所提出的模因算法融合了局部搜索方法的效率，以及基于种群的遗传算法所找到解的质量。因此，该方法能够找到更好的下界，同时保持较短的计算时间。此外，模因算法为 10 个实例中的 2 个找到了新的最佳结果；对于其他实例，它也比竞争算法更快地找到已知的最佳解。

声明

经费支持。 E. Radov´a Garajov´a 和 M. Rada 获得了捷克科学基金会的资助，项目编号为 23-07270S。

利益冲突。 作者声明，不存在与本文内容相关的利益冲突。

数据可用性。 作者生成的数据可在 GitHub代码仓库（Rada 和 Radov´a Garajov´a 2025年）中获取。其他作者此前发表的论文中的数据未在此披露。

代码可用性。 该实现的源代码可在GitHub代码仓库中获取（Rada与Radov´aGarajov´a 2025年）。

作者贡献。 两位作者对本工作的贡献相同。

参考文献

Carrabs, F., Cerulli, R., D'Ambrosio, C., Della Croce, F., Gentili, M.：区间免疫运输问题的一种改进启发式方法。Omega **104**，102492（2021年）
https://doi.org/10.1016/j.omega.2021.102492

Cerulli, R., D'Ambrosio, C., Gentili, M.：区间运输问题最优成本的最佳值与最差值。见：Sforza, A., Sterle, C.（编）《优化与决策科学：方法与应用》。Springer数学与统计学论文集，第367–374页。Springer，Cham（2017年）。
https://doi.org/10.1007/978-3-319-67308-0 37

D'Ambrosio, C., Gentili, M., Cerulli, R.：区间（免疫）运输问题的最优值范围问题。Omega **95**，102059（2020）https://doi.org/10.1016/j.omega.2019.04.002

Garajov´a, E., Rada, M.：区间运输问题：可行性、最优性与最坏最优值。《中欧运筹学杂志》31(3), 769–790（2023年）
https://doi.org/10.1007/s10100-023-00841-9 Garajov´a, E., Rada, M.：计算区间运输问题最坏最优值的复杂性。《中欧运筹学杂志》（2024年）
https://doi.org/10.1007/s10100-024-00947-8 Garajov´a, E., Rada, M.：区间运输问题的准极端约简。载于：Moosaei, H., Hlad´ık, M., Pardalos, P.M.（编），《信息系统动力学》，第83–92页。Springer，Cham（2024年）。
https://doi.org/10.1007/ 978-3-031-50320-7 6 Hlad´ık, M.：区间线性规划中的最坏情形有限最优值。《克罗地亚运筹学评论》9(2), 245–254（2018）
https://doi.org/10.17535/ crorr.2018.0019 Hoppmann-Baum, K.：计算最大与最小最小成本流的复杂性。《网络》79(2), 236–248（2022）
https://doi.org/10.1002/ net.22060 Juman, Z.A.M.S., Hoque, M.A.：一种启发式求解技术，用于获得在需求与供给变化情况下运输同质产品的最小总成本界。《欧洲运筹学杂志》239(1), 146–156（2014）https://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.05.004 Liu, S.-T.：需求与供给变化时运输问题的总成本界。Omega 31(4), 247–251（2003）https://doi.org/10.1016/S0305-0483(03) 00054-9 Moscato, P., Cotta, C.：模因算法现代导论。载于：Gendreau, M., Potvin, J.-Y.（编），《元启发式方法手册》，第141–183页。Springer，马萨诸塞州波士顿（2010年）。
https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1665-5 6 Mohammadi, M., Hlad´ık, M., Gentili, M.：区间线性规划：最优值范围。载于：Pardalos, P.M., Prokopyev, O.A.（编），《优化百科全书》，第1–11页。Springer，Cham（2020年）。
https://doi.org/10.1007/978-3-030-54621-2 718-1 Rohn, J.：区间线性规划。载于：Fiedler, M., Nedoma, J., Ram´ık, J., Rohn, J., Zimmermann, K.（编），《带不精确数据的线性优化问题》，第79–100页。Springer，马萨诸塞州波士顿（2006年）。
https://doi.org/10.1007/0-387-32698-7 3 Rada, M., Radov´a Garajov´a, E.：区间运输问题。GitHub（2025年）。https://github.com/polyraroh/itp Sivananda m, S.N., Deepa, S.N.：《遗传算法导论》。Springer，柏林，

海德堡（2008年）。 https://doi.org/10.1007/978-3-540-73190-0

Xie, F., Butt, M.M., Li, Z., Zhu, L.: 具有变化的需求与供给的运输问题最小总成本的上界。Omega **68**, 105–118（2017年） https://doi.org/10.1016/j.omega.2016.06.007