arXiv:2602.01210v1 [math.AP] 1 Feb 2026

圆对称区域中关于 p-拉普拉斯算子的节点集猜想

Vladimir Bobkov

摘要

1990 年，Pütter 证明，对于有界单连通平面区域上任意一个狄利克雷拉普拉斯算子的第二特征函数，其节点线都会与边界相交，前提是该区域具有圆对称性。通过采用移动极化方法，我们得到了类似结论：在任意更高维度的圆对称区域上，狄利克雷p-拉普拉斯算子的第二特征函数的节点集具有类似性质。

关键词： p-拉普拉斯算子；第二特征函数；佩恩猜想；节点集；极化；圆对称性；帽对称化。

MSC2010：35J92, 35B06, 49K30.

1. 引言

设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界区域，且 $p\in(1,+\infty)$。考虑以下特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2}u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\mathcal{D}$}$$

其中 $\Delta_p u$ 是 p-拉普拉斯算子。该问题在弱意义下理解：参数 $\lambda\in\mathbb{R}$和函数 $u\in W^{1,p}_0(\Omega)\setminus\{0\}$ 分别称为 特征值 和 特征函数，前提是($\mathcal{D}$)

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u,\nabla\phi\rangle\,d\mathbf{x} = \lambda\int_\Omega |u|^{p-2}u\phi\,d\mathbf{x} \quad \text{for any } \phi\in W^{1,p}_0(\Omega).$$

下文中，我们用 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$ 等粗体单字符表示 $\mathbb{R}^N$ 中的点。利用 Lusternik-Shnirelman理论，可以证明 ($\mathcal{D}$) 存在一个由特征值构成的无限序列

$$0<\lambda_1<\lambda_2\le\cdots\le\lambda_k\to+\infty \quad \text{as } k\to+\infty,$$

其中 λ_1 和 λ_2 是 ($\mathcal{D}$) 的最小特征值，参见例如 [14], ；第二个不等式参见 [2, 10] 。($\mathcal{D}$) 的任意特征函数 均属于 $C^1(\Omega)$，参见例如 [13]。此外，若对某个$\mathbf{x}\in\partial\Omega$ 及 $\varepsilon>0$，$\Omega\cap B_\varepsilon(\mathbf{x})$ 属于 $C^{1,\delta}$类，其中 $\delta\in(0,1)$，则 $u\in C^1(\Omega\cup(\partial\Omega\cap B_\varepsilon(\mathbf{x})))$；这可由 [26, 第 3] 节推出。下文中，$B_\varepsilon(\mathbf{x})$ 表示以 $\mathbf{x}$ 为中心、半径为 ε 的开 N-球。

虽然关于第一特征函数的一般定性性质已相对充分地为人所知，但关于高阶特征函数行为的信息则较为有限；不过，任何高阶特征函数 u 都是变号的（例如参见 [22]），也就是说，$u^\pm\not\equiv 0$。下文中，我们始终记

$$u^+=\max\{u,0\} \quad \text{and} \quad u^-=\min\{u,0\},$$

使得 $u=u^+ + u^-$。我们关注第二特征函数的定性性质，并指出第二特征值 λ_2有如下便于使用的刻画，参见 [5, 命题 4.2] （或[8,引理 3.1]）以及 [6, 第 1165] 页。

引理 1.1. 设

$$\mu_2 := \inf\left\{ \max\left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla v^+|^p\,d\mathbf{x}}{\int_\Omega |v^+|^p\,d\mathbf{x}}, \frac{\int_\Omega |\nabla v^-|^p\,d\mathbf{x}}{\int_\Omega |v^-|^p\,d\mathbf{x}} \right\} :\ v\in W^{1,p}_0(\Omega),\ v^\pm\not\equiv 0 \right\}.$$

那么 $\lambda_2=\mu_2$，并且对于任意极小化子 v，存在 μ_2 使得 α，$\beta>0$ 满足 $\alpha v^+ + \beta v^-$ 是($\mathcal{D}$)的第二特征函数。

任意第二特征函数 u均连续且变号，我们将其节点集 定义为

$$\mathcal{Z}(u) = \overline{\{x \in \Omega : \ u(x) = 0\}}.$$

本工作的目的是描述一类区域 Ω，使得 u 的节点集与边界相交，也就是说，

$$\operatorname{dist}(\mathcal{Z}(u), \partial\Omega) = 0. \tag{1.1}$$

在线性情形 $p = 2$中，Payne 于 1967年 猜想 (1.1) 成立，参见 [29,猜想 5]。一般而言，Payne猜想（也称为节点集猜想）并不成立：确实存在一些域，其第二特征函数 u 满足dist($\mathcal{Z}(u)$ $\partial\Omega$) > 0。平面情形下的首个此类例子由 [21], 构造，另见 [11, 17] 以及近期的一项突破性工作 [19]。关于高维反例，参见 [16], ，以及 [23, 28] 中关于后续进展的讨论。

文献 [23, 28] 的结果表明，在高维情形下，可以在任意一个拓扑类别中找到 Payne猜想的反例。对于平面情形，鉴于 [19], ，在具有任意给定孔洞数的多重连通域这一类中，可以找到一个违反 (1.1) 的例子；而对于平面上的单连通区域，(1.1) 是否成立仍是一个悬而未决的问题。

在本文中，我们关注几何条件，它们加于Ω 之上并使Payne猜想成立。这方面的第一个结果由Payne本人在 [30], 中建立，其中他涵盖了关于一条直线对称且在垂直方向上凸的平面区域。换言之，Payne考虑了Steiner对称区域，参见注1.2 （见下文）。该结果的高维推广由 Damascelli [12]建立。Pütter [32] 证明了（1.1）对于具有圆对称性的平面区域（定义见下文）并在若干附加技术假设下成立。看来，本质上相同的结果后来由Yang & Guo在 [35][1]中重新建立。两个证明均源于 [30] 的思想，并且本质上基于该问题的线性。

我们还参见 [1, 27], ，其中（1.1）对平面凸域得到证明。具有某些对称性的平面双连通域在 [24, 33]中被考虑。在任意维数的情形下，一类长薄凸域被涵盖于 [20], 中；曲线与超曲面的细管状邻域在 [18, 25], 中得到研究；具有狭窄连接部的哑铃型域在 [28]中得到考察。

在非线性情形下 $p > 1$，式（1.1）在 [6] 所研究的 Steiner对称区域中得到了证明，这一结果随后被推广至 [7]中的非线性非局部情形。据我们所知，关于非线性问题（$\mathcal{D}$）的节点集猜想，目前尚无其他一般性结果。

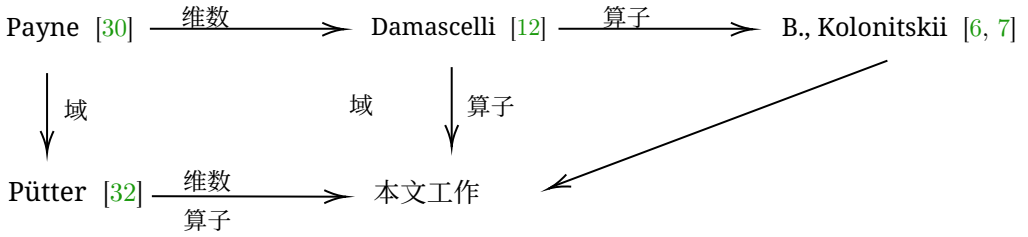


图 1. 对 [30]具有反射对称性的区域的推广。

在本文中，我们将 [32, 35]关于（1.1）成立性的结果推广到任意维度、更弱的Ω正则性假设以及非线性情形，方法是将 [6], 中的移动极化方法加以推广。示意图见图1 。极化（等价地说，两点重排）是一种对称化方法，将其应用于函数或集合后，会得到具有“更好”性质的新函数或集合，见第2节。它在定性理论中有多种应用，参见例如 [3, 4, 9, 15], ；其一个重要特点是不依赖于问题的线性。

[1]值得注意的是，尽管“Steinersymmetry”（施泰纳对称性）和“circular symmetry”（圆对称性）这两个概念在 [30, 32, 35]出现时就已存在，但 Payne、Pütter 以及 Yang & Guo 均未使用这两个术语。

先介绍一些记号。我们将 $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{N-2}$ 分解，并有时将点$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$写作（$x, y;\ z$），其中（$x, y$）$\in \mathbb{R}^2$且 $z \in \mathbb{R}^{N-2}$。给定 $r > 0$、 $a \in \mathbb{R}$和 $\xi \in \mathbb{R}^{N-2}$，考虑位于 $\mathbb{R}^N$ 中（x, y）平面内、半径为 r 且圆心为（$a, 0;\ \xi$）的（二维）圆：

$$S_r^2(a, 0; \xi) = \{(x, y; \xi) \in \mathbb{R}^N :\ (x-a)^2 + y^2 = r^2\}.$$

我们还考虑半超平面

$$H_a^h = \{(x, y; z) \in \mathbb{R}^N :\ x > a,\ y = 0\}.$$

我们称 Ω 关于 H_a^h 具有圆对称性，是指对于任意 $r > 0$ 和 $\xi \in \mathbb{R}^{N-2}$，交集 $\Omega \cap S_r^2(a, 0; \xi)$ 要么为空，要么为完整圆 $S_r^2(a, 0; \xi)$，要么为 $S_r^2(a, 0; \xi)$ 的一段圆弧，其中点为 $(a + r, 0; \xi)$，参见图 2。

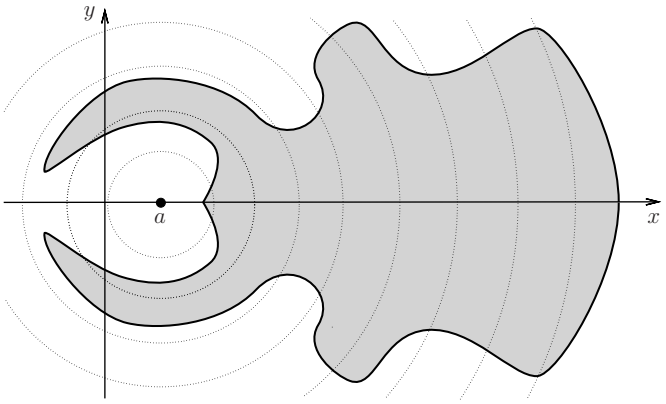


图 2. 一个具有圆对称性的区域示例。

圆对称性（或更一般地说，圆对称化）由 Pólya[31], 引入，我们参考 [3, 34] 了解相关进展；在该文献中，圆对称化被称为 $(1, N)$-（或一维）帽对称化。在平面情形中，圆对称性简单地意味着 Ω 在极坐标 (ρ, θ) 下的像关于直线$\{(\rho, \theta) :\ \theta = 0\}$ 对称，并且在 θ方向上凸（这一刻画见 [35]）。我们还参考 [32, 引理 2.2]，其中给出了对于足够规则的平面区域，这一对称类的另一种刻画。在下面的引理 2.2 中，我们通过极化给出圆对称集合的又一种有用刻画。

注 1.2. Ω 关于超平面 $\{(x, y; z) :\ y = 0\}$ 的 Steiner 对称性意味着，对于任意点 $(x, 0;\ z)$，Ω 与直线 $\{(x, t;\ z) :\ t \in \mathbb{R}\}$ 的交集要么为空，要么是以 $(x, 0; z)$ 为中心的线段。换言之，这样的 Ω 关于$\{(x, y; z) :\ y = 0\}$ 对称，且沿 y 方向凸。关于H_a^h 的圆对称性，在形式上的极限情形 $a = -\infty$ 下，退化为关于 $\{(x, y; z) :\ y = 0\}$ 的 Steiner 对称性。关于这两个概念之间的其他关系，另请参见 [34, 第 4 节。13] 实际上，直接取极限可能并不方便，因此通常会分别使用这些工具，参见 [3, 9, 15, 34]。

现在我们对 Ω 提出若干假设，并陈述主要结果。

(O_1) 存在 $a \in \mathbb{R}$，使得 Ω 关于 H_a^h 圆对称。

(O_2) 对任意 $r > 0$ 和 $\xi \in \mathbb{R}^{N-2}$，交集 $\Omega \cap S_r^2(a,\ 0;\ \xi)$ 不是完整圆。

(O_3) 如果 Ω 在$\mathbf{x} \in \partial\Omega$ 处满足内球条件，那么对于某个 $\delta \in (0,1)$，Ω 在$\mathbf{x}$ 的某个邻域内属于 $C^{1,\delta}$ 类。

(O_4) Ω 在任意$\mathbf{x} \in \partial\Omega$ 处都满足外球条件。

定理 1.3. 设假设 (O_1)–(O_4) 成立。则任意第二特征函数 u 对于 $(\mathcal{D})$满足

$$\operatorname{dist}(\mathcal{Z}(u), \partial\Omega) = 0.$$

我们认为，假设(O_3)与(O_4)本质上是技术性的，并且在一定程度上可以减弱，参见 [12]。与此同时，假设 (O_2)至关重要，正如来自 [19] 的构造所表明的那样。

T定理1.3 将在第3节中证明，我们在第2节讨论主要辅助工具。

2. 极化

对于固定的 $a \in \mathbb{R}$，考虑仿射超平面族

$$H_\theta = \{(x, y; z) \in \mathbb{R}^N : \ (x-a)\sin\theta - y\cos\theta = 0\},$$

其中 $\theta \in [-\pi, \pi]$。将由 H_θ 分隔的开半空间记为

$$\Sigma_\theta^{\pm} = \{(x, y; z) \in \mathbb{R}^N : \ \pm((x-a)\sin\theta - y\cos\theta) > 0\},$$

见图 3。我们还用 $\sigma_\theta(\mathbf{x})$ 表示点 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ 关于 H_θ 的反射：

$$\sigma_\theta(x, y; z) = ((x-a)\cos(2\theta) + y\sin(2\theta) + a, (x-a)\sin(2\theta) - y\cos(2\theta); z).$$

设 $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个可测函数。相对于 v 的 H_θ 极化是函数 $P_\theta v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，其定义如下（例如，参见 [3, 4, 9]）

$$P_\theta v(\mathbf{x}) = \begin{cases} \min\{v(\mathbf{x}), v(\sigma_\theta(\mathbf{x}))\}, & \mathbf{x} \in \Sigma_\theta^+, \\ v(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in H_\theta, \\ \max\{v(\mathbf{x}), v(\sigma_\theta(\mathbf{x}))\}, & \mathbf{x} \in \Sigma_\theta^-. \end{cases} \tag{2.1}$$

~为方便起见，我们还考虑“互补”极化 $P_\theta v := -P_\theta(-v)$ 或者
~等价地， $P_\theta v := P_{\theta+\pi} v$。换言之，在 $P_\theta v$的定义中，min 和max 的位置与（2.1）相反。

可以将集合的极化定义为相应示性~函数的极化。实际上，对于可测集 Ω， $P_\theta\Omega$ 和 $P_\theta\Omega$ 定义为

$$P_\theta\Omega = \begin{cases} \Omega \cap \sigma_\theta(\Omega) & \text{in } \Sigma_\theta^+, \\ \Omega & \text{on } H_\theta, \\ \Omega \cup \sigma_\theta(\Omega) & \text{in } \Sigma_\theta^-, \end{cases} \quad \text{and} \quad \widetilde{P}_\theta\Omega = \begin{cases} \Omega \cup \sigma_\theta(\Omega) & \text{in } \Sigma_\theta^+, \\ \Omega & \text{on } H_\theta, \\ \Omega \cap \sigma_\theta(\Omega) & \text{in } \Sigma_\theta^-, \end{cases} \tag{2.2}$$

分别见图 3。注意， $\widetilde{P}_\theta\Omega = \mathbb{R}^N \setminus (P_\theta(\mathbb{R}^N \setminus \Omega))$ 或者等价地， $\widetilde{P}_\theta\Omega = P_{\theta+\pi}\Omega$。由~（2.2）可不难看出， P_θ 和 P_θ 满足集合包含关系。

~ ~**引理 2.1.** 若$\Omega_1 \subset \Omega_2$, 则 $P_\theta\Omega_1 \subset P_\theta\Omega_2$ 且 $P_\theta\Omega_1 \subset P_\theta\Omega_2$ 对任意 θ均成立。

以下结果通过极化刻画圆对称性，参见 [6, 引理 2.2] 关于 Steiner 对称性的类似刻画。

引理 2.2. Ω 关于 H_a^h 圆对称，当且仅当以下三个等价假设之一成立：

(i) $P_\theta\Omega = \Omega$ *for all* $\theta \in [-\pi/2, 0]$ *and* $\widetilde{P}_\theta\Omega = \Omega$ *for all* $\theta \in [0, \pi/2]$.

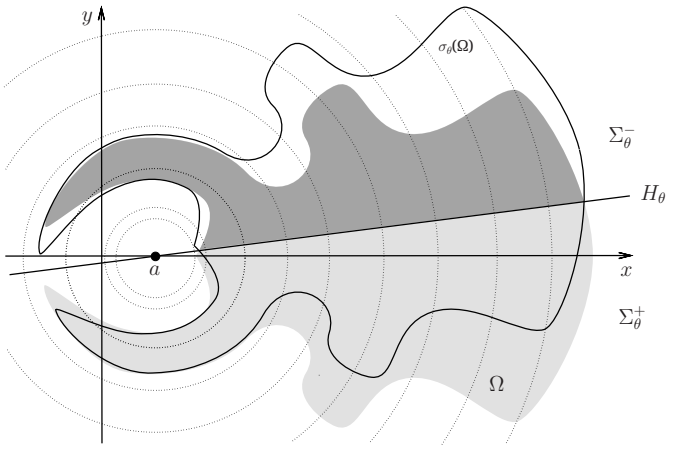


图3. 深灰色——Σ_θ^- 中的 $\Omega \cap \sigma_\theta(\Omega)$，浅灰色——$\Sigma_\theta^+$ 中的 $\Omega \cup \sigma_\theta(\Omega)$，因此 $\widetilde{P}_\theta\Omega = \Omega$。

(ii) $P_\theta\Omega = \Omega$ 对所有 $\theta \in [-\pi, 0]$.

(iii) $P_\theta\Omega = \Omega$ 对所有 $\theta \in [0, \pi]$。

证明。假设 (i)、(ii)、(iii) 根据等式 $P_\theta\Omega = P_{\theta+\pi}\Omega$是等价的。因此，只需处理其中一个即可。

设 Ω 关于 H_a^h圆对称。由于对任意 $r > 0$ 和 $\xi \in \mathbb{R}^{N-2}$，交集 $\Omega \cap S_r^2(a, 0; \xi)$ 要么为空集，要么是完整圆，要么是中点为$(a + r, 0; \xi)$的圆弧，由（2.2）可推得，这样的交集在$\smile P_\theta$ 对 $\theta \in [-\pi/2, 0]$ 以及 P_θ 对 $\theta \in [0, \pi/2]$ 的作用下均不改变。这就证明了引理的必要性部分。

现在假设对于所有 $\theta \in [0, \pi]$, $P_\theta\Omega = \Omega$。取 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$，由 (2.2) 可知，Ω 关于 H_0 对称。假设存在 $r > 0$ 和 $\xi \in \mathbb{R}^{N-2}$，使得交集 $A := \Omega \cap S_r^2(a, 0; \xi)$ 至少有两个连通分支。那么可以找到 $\mathbf{x} \in S_r^2(a, 0; \xi) \setminus A$ 和 $\mathbf{y} \in A$，使得在极坐标下，$\mathbf{x} = (\rho, \theta_1; \xi)$，$\mathbf{y} = (\rho, \theta_2; \xi)$，且 $0 \le \theta_1 < \theta_2 \le \pi$。记 $\theta_0 = (\theta_1 + \theta_2)/2$，可知 $\sigma_{\theta_0}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$，这与假设 $\widetilde{P}_{\theta_0}\Omega = \Omega$ 矛盾。因此，对于任意 $r > 0$和 $\xi \in \mathbb{R}^{N-2}$，$\Omega \cap S_r^2(a, 0; \xi)$ 要么为空，要么是一个连通集（因而要么是完整圆，要么是关于 H_0 对称的圆弧）。最后，由于 $\widetilde{P}_{\pi/2}\Omega = \Omega$，我们得出：若对于某些 $r > 0$和 $\xi \in \mathbb{R}^{N-2}$，$\Omega \cap S_r^2(a, 0; \xi)$ 是一段圆弧，则其中点为 $(a + r, 0; \xi)$。

□

下面讨论函数极化的一些性质。已知$(P_\theta v)^\pm = P_\theta(v^\pm)$，例如参见 [4, 引理 2。1], 因此我们可以简写为 $P_\theta v^\pm$。由此可得，

$$P_\theta(v^+ + v^-) = P_\theta v = (P_\theta v)^+ + (P_\theta v)^- = P_\theta v^+ + P_\theta v^-. \tag{2.3}$$

对于任意 $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$，有

$$\int_{\mathbb{R}^N} |P_\theta v^\pm|^p \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^N} |v^\pm|^p \, d\mathbf{x}, \tag{2.4}$$

因此 $P_\theta v \in L^p(\mathbb{R}^N)$，参见 [4,引理 2。2]或 [9,式 (3.7)]。若 $v \in W^{1,\,p}(\mathbb{R}^N)$，则 $P_\theta v \in W^{1,\,p}(\mathbb{R}^N)$，并且

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla P_\theta v^\pm|^p \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v^\pm|^p \, d\mathbf{x}, \tag{2.5}$$

参见 [9,引理 5.3]和 [4,引理 2.2 及 2.3]。此外，也可以通过将定义在 $W^{1,0}{}^{p}(\Omega)$ 上的函数平凡延拓至 $\mathbb{R}^N$，再对其进行极化，其中 Ω 是一个开集。所得函数

属于 $W^{1,p}_0(P_\theta\Omega \cup \widetilde{P}_\theta\Omega)$，如 [9, 推论 5.1] 和 (2.3) 所示。利用 [10, 引理 5.6]，可以通过以下方式阐明这一结果。

引理 *2.3.* 设 $v \in W^{1,p}_0(\Omega) \cap C(\Omega)$，并设 $\Omega_v^+ := \{x \in \Omega : v(x) > 0\}$ 且 $\Omega_v^- := \{x \in \Omega : v(x) < 0\}$。则对任意 θ，有 $P_\theta v \in W^{1,p}_0(P_\theta\Omega_v^+ \cup \widetilde{P}_\theta\Omega_v^-)$。

3. 定理1.3的证明

在本节中，$u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ 表示（$\mathcal{D}$）的第二特征函数。将 u 的节点域记为

$$\Omega_u^+ = \{\mathbf{x} \in \Omega : u(\mathbf{x}) > 0\} \quad \text{and} \quad \Omega_u^- = \{\mathbf{x} \in \Omega : u(\mathbf{x}) < 0\}.$$

反设 u 的节点集与 Ω的边界不相交，即

$$\operatorname{dist}(\mathcal{Z}(u), \partial\Omega) > 0. \tag{3.1}$$

不失一般性，设 $u < 0$ 在 Ω的 ∂附近，因此 $\Omega_u^+ \subset \Omega$。我们的目标是导出矛盾，论证分为验证以下两个步骤:

第一步。考虑 $P_\theta u$ 的极化 u，我们增大 θ，直到某个值 θ^*，使得$\mathcal{Z}$（$P_{\theta^*}u$）首次接触 ∂ Ω。由引理 1.1，我们推得 $\alpha P_{\theta^*}u^+ + \beta P_{\theta^*}u^-$ 是（$\mathcal{D}$）的第二特征函数，其中 α，$\beta > 0$。在这一步中，我们仅假设 Ω满足假设（O_1）和（O_2）。

第二步。进一步加入假设（O_3）和（O_4），我们通过基于边界点引理的论证证明，函数 $\alpha P_{\theta_0}u^+ + \beta P_{\theta_0}u^-$ 不可能是（$\mathcal{D}$）的特征函数。

现在讨论**第一步**。对于任意点$\mathbf{x}$ ∈Ω，考虑

$$\theta_{\mathbf{x}} := \inf\{\theta > 0 : \sigma_\theta(\mathbf{x}) \in \partial\Omega\}.$$

由于 Ω 关于 H_0 对称，我们看到 σ_0（$\mathbf{x}$）∈ Ω。因此，鉴于 Ω 的开性以及映射 $\theta \mapsto \sigma_\theta$（$\mathbf{x}$）的连续性，我们得到 $\theta_{\mathbf{x}} > 0$，并且下确界可以取到。由假设（O_2），我们进一步得到 $\theta_{\mathbf{x}} < \pi$。（这是唯一使用（$O_2$）的地方。）注意到映射 $\mathbf{x} \mapsto \theta_{\mathbf{x}}$ 在 Ω 中是下半连续的。事实上，任取$\mathbf{x}$ ∈ Ω以及任意序列 $\{\mathbf{x}_n\} \subset \Omega$ 收敛到$\mathbf{x}$。由于 $\{\theta_{\mathbf{x}_n}\}$ 有界，$\{\sigma_{\theta_{\mathbf{x}_n}}(\mathbf{x}_n)\} \subset \partial\Omega$，且 $\partial\Omega$ 是一个紧集，因此不妨设取一个子序列，

$$\sigma_{\theta_{\mathbf{x}_n}}(\mathbf{x}_n) \to \sigma_{\lim\theta_{\mathbf{x}_n}}(\lim \mathbf{x}_n) \in \partial\Omega,$$

因此 $\liminf\ \theta_{\mathbf{x}_n} \geq \theta_{\mathbf{x}}$。由于序列 $\{\mathbf{x}_n\}$ 的初始选取是任意的，我们得到所需的下半连续性。

现在我们定义[2]

$$\theta^* := \inf\left\{\theta_{\mathbf{x}} : \mathbf{x} \in \overline{\Omega_u^+} \cup \mathcal{Z}(u)\right\},$$

从而 $\theta^* < \pi$。由我们的假设（3.1）以及 $\Omega_u^+ \subset \Omega$，我们还可得 $\theta^* > 0$。由于 $\Omega_u^+ \cup \mathcal{Z}(u)$是一个紧集，且 $\mathbf{x} \mapsto \theta_{\mathbf{x}}$ 是下半连续的，因此 θ^* 中的下确界可以取到。此外，由于 Ω_u^+ 是开集，下确界由来自 $\mathcal{Z}(u)$的点取得。将极小点集记为$\mathcal{Y}(u)$，即:

$$\mathcal{Y}(u) := \{\mathbf{x} \in \mathcal{Z}(u) : \sigma_{\theta^*}(\mathbf{x}) \in \partial\Omega\}.$$

[2]由于具有 $p \neq 2$ 的 p-拉普拉斯算子特征函数的唯一延拓性质尚不明确，我们不能直接断言 $\mathcal{Z}(u) \subset \Omega_u^+$，这正是我们在定义 θ^*时使用 $\Omega_u^+ \cup \mathcal{Z}(u)$的原因。

我们不知道 $\mathcal{Y}(u)$是否为单点集，因此将其相对边界定义为

$$\partial\mathcal{Y}(u) := \{\mathbf{x} \in \mathcal{Y}(u) : \mathbf{x} \text{ 的任意足够小邻域包含} \mathbf{y} \in \mathcal{Z}(u) \setminus \mathcal{Y}(u)\},$$

见图4。由于 $\mathcal{Z}(u)$ 没有孤立点（由强最大值原理 [36, 定理 5]推出）且（3.1）成立，可见 $\partial\mathcal{Y}(u)$ 非空。

引理3.1. 设(O_1)与(O_2)成立。则 $P_{\theta^*}u \in W^{1,p}_0(\Omega)\setminus\{0\}$ 且$\operatorname{dist}(\mathcal{Z}(P_{\theta^*}u)\ \partial\Omega) = 0$。此外，存在 α、$\beta > 0$，使得$\alpha P_{\theta^*}u^+ + \beta P_{\theta^*}u^-$ 是$(\mathcal{D})$的第二特征函数。

证明。 根据 θ^*的定义，有$\sigma_{\theta^*}(\Omega_u^+) \subset \Omega$，这意味着$\sigma_{\theta^*}(\overline{\Omega_u^+}) \subset \Omega$。因此，注意到$\Omega_u^+ \subset\Omega$，由 (2.2) 可推出

$$P_{\theta^*}\Omega_u^+ \subset \Omega. \tag{3.2}$$

On 另一方面，由于 $\theta^* \in (0,\pi)$，$\Omega_u^- \subset \Omega$，且$\Omega$ 满足(O_1)，由引理2.1 a nd 2.2 that

$$\widetilde{P}_{\theta^*}\Omega_u^- \subset \widetilde{P}_{\theta^*}\Omega = \Omega. \tag{3.3}$$

结合 (3.2) 和 (3.3)，并回顾 $u \in C(\Omega)$，由引理2.3 可得 t

$$P_{\theta^*}u \in W_0^{1,p}(P_{\theta^*}\Omega_u^+ \cup \widetilde{P}_{\theta^*}\Omega_u^-) \subset W_0^{1,p}(\Omega),$$

并且，根据构造有 $P_{\theta^*}u \not\equiv 0$。利用 (2.4)、(2.5)，并回顾 u 满足 $(\mathcal{D})$，且$\lambda = \lambda_2$，还可得到

$$\int_\Omega |\nabla P_\theta u^\pm|^p\, d\mathbf{x} = \int_\Omega |\nabla u^\pm|^p\, d\mathbf{x} = \lambda_2 \int_\Omega |u^\pm|^p\, d\mathbf{x} = \lambda_2 \int_\Omega |P_\theta u^\pm|^p\, d\mathbf{x}.$$

因此， $P_\theta u$ 是 μ_2 中定义的极小化子（见引理1.1）。该引理还保证存在 α， $\beta > 0$ 使得 $\alpha P_{\theta^*}u^+ + \beta P_{\theta^*}u^-$ 是 $(\mathcal{D})$ 的另一个第二特征函数。 □

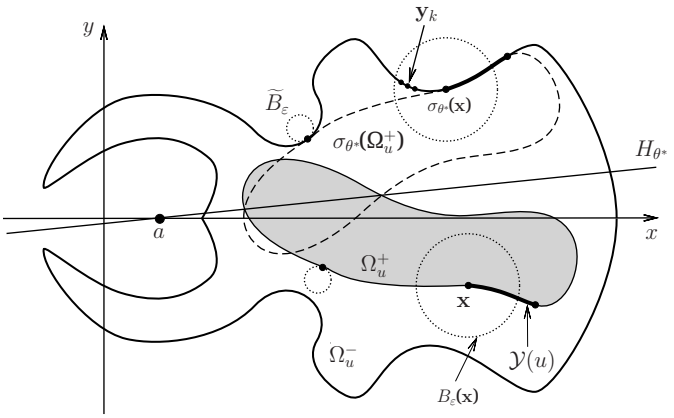


图4. 证明中的记号。

现在考虑**第二步**。我们从以下辅助结果开始。

引理3.2。 设满足(O_1)、(O_2)和(O_4)，并设$\mathbf{x} \in \mathcal{Y}(u)$。则 $|\nabla u(\mathbf{x})| > 0$，因此$\mathbf{x} \in \partial\Omega_u^+ \cap \partial\Omega_u^-$。此外， $\mathcal{Z}(u)$ 在$\mathbf{x}$ 的一个邻域内属于 C^2 类，且Ω_u^-在$\mathbf{x}$处满足内球条件。

证明。设 $\mathbf{x} \in \mathcal{Y}(u)$。根据外球条件（$O_4$），我们可以找到一个球 $\widetilde{B}_\varepsilon \subset \mathbb{R}^N \setminus \Omega$，其半径为 $\widetilde{\varepsilon} > 0$，使得 $\sigma_{\theta^*}(\mathbf{x}) \in \partial B_\varepsilon \cap \partial\Omega$，见图4。必要时取较小的 $\varepsilon > 0$，便得到 $\sigma_{\theta^*}(\widetilde{B}_\varepsilon) \subset \Omega$，且 $\mathbf{x} \in \sigma_{\theta^*}(\partial\widetilde{B}_\varepsilon)$。由于对任意 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$，映射 $\theta \mapsto \sigma_\theta(\mathbf{y})$ 连续，由 $\widetilde{\varepsilon}$ 的定义可得 $u < 0$ 属于 $\sigma_{\theta^*}(B_\varepsilon)$。由于 $u \in C^1(\Omega)$，我们在 $\sigma_{\theta^*}(B_\varepsilon)$ 中应用边界点引理（参见 [5]，例如定理 5]），并推得 $|\nabla u(\mathbf{x})| > 0$。这意味着 p-拉普拉斯算子在 $\mathbf{x}$ 的一个邻域内严格椭圆，因此 u 在该邻域内是 C^2 光滑的。利用隐函数定理，我们得出 $\mathcal{Z}(u)$ 在 $\mathbf{x}$ 的一个邻域内是一个 C^2 函数的图像，而 $\Omega_u^\pm$ 在 $\mathbf{x}$ 处的内球条件也随之成立。

□

引理3.3。 设 (O_1)–(O_4) 成立。那么由引理 $\alpha P_{\theta^*} u^+ + \beta P_{\theta^*} u^-$ 给出的函数*3.1*不是$(\mathcal{D})$的特征函数。

证明。为简便起见，记 $w = P_{\theta^*} u$。任取 $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{Y}(u)$。特别地，我们有 $\sigma_{\theta^*}(\mathbf{x}) \in \partial\Omega$。由引理3.2可知，对任意充分小的 $\varepsilon > 0$，球 $B_\varepsilon(\mathbf{x})$ 与 Ω_u^+ 相交，而 $B_\varepsilon(\sigma_{\theta^*}(\mathbf{x}))$ 不相交（因为我们假设 $u < 0$ 在 Ω ∂的某个邻域内）。因此，考虑任意 $\mathbf{y} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap \Omega_u^+$，可知 $w(\mathbf{y}) = u(\sigma_{\theta^*}(\mathbf{y})) < 0$ 且 $w(\sigma_{\theta^*}(\mathbf{y})) = u(\mathbf{y}) > 0$。此外，由 $\widetilde{\varepsilon}$ $\widetilde{\text{引理3.2可知，存在一个充分小的球}}$ $B_\delta \subset B_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap \Omega_u^+$，使得 $\mathbf{x} \in \partial B_\delta$。因此，$_\sim w > 0$ 属于 $\sigma_{\theta^*}(B_\delta)$，且 Ω 在 $\sigma_{\theta^*}(\mathbf{x})$ 处满足内球条件。由（O_3）以及第1节中的讨论，可得 $w \in C^1(\Omega \cup (\partial\Omega \cap B_\varepsilon(\sigma_{\theta^*}(\mathbf{x}))))$，因此边界点引理（例如参见 [36, 定理 5]）给出

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(\sigma_{\theta^*}(\mathbf{x})) < 0, \tag{3.4}$$

其中 ν 是 $\partial\Omega$的单位外法向量。

另一方面，由于Ω属于 C^1类, $^\delta$ 在$\sigma_{\theta^*}(\mathbf{x})$的一个邻域内，根据$(O_3)$，$\sigma_{\theta^*}(\mathcal{Z}(u))$根据引理 C^2 在 $\sigma_{\theta^*}(\mathbf{x})$的一个邻域内属于类，且3.2，$\mathbf{x}$ 属于 $\partial\mathcal{Y}(u)$，我们便可得到一个序列的存在

$$\{\mathbf{y}_k\} \subset \partial\Omega \setminus \sigma_{\theta^*}(\mathcal{Z}(u)) \quad \text{such that } \mathbf{y}_k \to \sigma_{\theta^*}(\mathbf{x}) \quad \text{as } k \to +\infty.$$

根据 θ^*的定义，对于任意 k，有 $u(\sigma_{\theta^*}(\mathbf{y}_k)) < 0$。此外，回想一下，根据假设，$\{\mathbf{y}_k\} \subset \overline{\Omega_u^-}$，因此我们得出 $\{\mathbf{y}_k\} \subset \Omega_w^-$。因此，由于 w在 $\partial\Omega \cap B_\varepsilon(\sigma_{\theta^*}(\mathbf{x}))$处具有 C^1-正则性，我们得到

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(\mathbf{y}_k) \geqslant 0 \quad \text{for any sufficiently large } k,$$

这与（3.4）矛盾。 □

结合引理3.1 和3.3，我们得到矛盾，这意味着（3.1）不成立，因此定理1.3 成立。

□

参考文献

[1] Alessandrini, G.（1994年）。一般凸区域中固定膜问题的特征函数节线。Commentarii Mathematici Helvetici，69(1)，142-154。doi:10.1007/BF02564478 2[2] Anane, A.（1987年）。带权第一特征值的简单性与孤立性 p-拉普拉斯算子。Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics，305(16)，725-728。http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k57447681/f27 1[3] Baernstein II, A.、Drasin, D. 与 Laugesen, R.（2019年）。分析中的对称化。剑桥大学出版社。doi:10.1017/9781139020244 2，3，4[4] Bartsch, T.、Weth, T. 与 Willem, M.（2005年）。某些变分问题中最小能量节点解的部分对称性。Journal d'Analyse Mathématique，96(1)，1-18。doi:10.1007/bf02787822 2，4，5

[5] Bobkov, V.（2014年）。具有不定非线性的椭圆方程的最小能量节点解。微分方程定性理论电子期刊，（56），1-15。doi:10.14232/ejqtde.2014.1.56 1[6] Bobkov, V. 与 Kolonitskii, S.（2019年）。拟线性椭圆方程最小能量变号解节点集的一个性质。爱丁堡皇家学会会刊A辑：数学，149(5)，1163-1173。doi:10.1017/prm.2018.88 1，2，4[7] Bobkov, V. 与 Kolonitskii, S. B.（2024年）。Steiner对称区域中的分数 p-拉普拉斯算子的Payne节点集猜想。Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI，536(0)，96-125。https://www. mathnet.ru/eng/znsl7506 2[8] Brasco, L. 与 Franzina, G.（2013年）。关于 p-拉普拉斯算子的Hong-Krahn-Szegő不等式。Manuscripta mathematica，141(3)，537-557。doi:10.1007/s00229-012-0582-x 1[9] Brock, F. 与 Solynin, A.（2000年）。通过极化实现对称化的一种方法。美国数学会汇刊，352(4)，1759-1796。doi:10.1090/s0002-9947-99-02558-1 2，3，4，5，6[10] Cuesta, M.、De Figueiredo, D. 与 Gossez, J. P.（1999年）。p-拉普拉斯算子的Fučik谱起点。微分方程杂志，159(1)，212-238。doi:10.1006/jdeq.1999.3645 1，6[11] Dahne, J.、Gómez-Serrano, J. 与 Hou, K.（2021年）。一个具有少量孔洞的Payne节点线猜想反例。非线性科学与数值模拟通讯，103，105957。doi:10.1016/j.cnsns.2021.105957 2[12] Damascelli, L.（2000年）。 $\mathbb{R}^N$对称区域中拉普拉斯算子第二特征函数的节点集。Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni，11(3)，175-181。http://eudml.org/doc/252373 2，4[13] DiBenedetto, E.（1983年）。 $C^{1+\alpha}$ 退化椭圆方程弱解的局部正则性。非线性分析：理论、方法与应用，7(8)，827-850。doi:10.1016/0362-546X(83)90061-5 1[14] Drábek, P. 与 Robinson, S. B.（1999年）。 p-拉普拉斯算子的共振问题。泛函分析杂志，169(1)，189-200。doi:10.1006/jfan.1999.3501 1[15] Dubinin, V. N.（2014年）。几何函数论中的电容器容量与对称化。Springer Basel。doi:10.1007/978-3-0348-0843-9 2，3[16] Fournais, S.（2001年）。拉普拉斯算子第二特征函数的节点曲面 $\mathbb{R}^D$ 可以闭合。微分方程杂志，173(1)，145-159。doi:10.1006/jdeq.2000.3868 2[17] Freitas, P. 与 Krejčiřík, D.（2007年）。第二节点线不接触边界的无界平面区域。数学研究快报，14(1)，107-111。doi:10.4310/MRL.2007.v14.n1.a9 2[18] Freitas, P. 与 Krejčiřík, D.（2008年）。薄弯曲管中节点集的位置。印第安纳大学数学杂志，57(1)，343-375。doi:10.1512/iumj.2008.57.3170 2[19] Freitas, P. 与 Leylekian, R.（2025年）。双连通平面区域上的Payne节点线猜想失效。arXiv:2510.24436 2，4[20] Jerison, D.（1995年）。凸区域的第一个节点集。载于《纪念Elias M. Stein的傅里叶分析论文集》（第42卷，第225-249页）。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州。doi:10.1515/9781400852949.225 2[21] Hoffmann-Ostenhof, M.、Hoffmann-Ostenhof, T. 与 Nadirashvili, N.（1997年）。拉普拉斯算子第二特征函数的节点线 $\mathbb{R}^2$ 可以闭合。杜克数学杂志，90(3)，631-640。doi:10.1215/S0012-7094-97-09017-7 2[22] Kawohl, B. 与 Lindqvist, P.（2006年）。 p-拉普拉斯算子的正特征函数再探。Analysis——国际数学分析及其应用杂志，26(4)，545。doi:10.1524/anly.2006.26.4.545 1[23] Kennedy, J. B.（2013年）。高维单连通区域中的闭合节点曲面。印第安纳大学数学杂志，62(3)，785-798。doi:10.1512/iumj.2013.62.4975 2[24] Kiwan, R.（2018年）。双连通区域中第二狄利克雷特征函数的节点集。图卢兹科学学院年刊：数学，27(4)，863-873。doi:10.5802/afst.1585 2[25] Krejčiřík, D. 与 Tušek, M.（2015年）。薄弯曲层的节点集。微分方程杂志，258(2)，281-301。doi:10.1016/j.jde.2014.09.009 2[26] Lieberman, G. M.（1988年）。退化椭圆方程解的边界正则性。非线性分析：理论、方法与应用，12(11)，1203-1219。doi:10.1016/0362-546x(88)90053-3 1

[27] Melas, A. D. (1992). 关于 $\mathbb{R}^2$中拉普拉斯算子第二特征函数的节点线。微分几何杂志, 35(1), 255-263. doi:10.4310/jdg/1214447811 2[28] Mukherjee, M., & Saha, S. (2025年). 关于小扰动对低能拉普拉斯特征函数的影响。谱理论杂志, 15(3), 1045-1087. doi:10.4171/JST/570 2[29] Payne, L. E. (1967年). 等周不等式及其应用。SIAM评论, 9(3), 453-488. doi:10.1137/1009070 2[30] Payne, L. E. (1973). 固定膜特征值问题中的两个猜想。应用数学与物理杂志, 24(5), 721-729. doi:10.1007/BF01597076 2[31] Pólya, G. (1950). 关于圆周对称化。法国科学院周报, 230(1), 25-27. 3[32] Pütter, R. (1990). 关于固定膜问题第二特征函数的节线。Commentarii Mathematici Helvetici, 65(1), 96-103. doi:10.1007/BF02566596 2, 3[33] Sarswat, A. (2014年). 关于具有二面体对称性的某些环域中狄利克雷拉普拉斯算子第二特征函数的节点线。arXiv:1411.0221. 2[34] Sarvas, J. (1973). n空间中电容器的对称化。芬兰数学年刊, (522). doi:10.5186/aasfm.1973.522 3[35] Yang, D. H., & Guo, B. Z. (2013年). 关于 $\mathbb{R}^2$中凹域上拉普拉斯算子第二特征函数的节点线。系统科学与复杂性杂志, 26(3), 483-488. doi:10.1007/s11424- 013-1175-9 2, 3[36] Vázquez, J. L. (1984). 某些拟线性椭圆方程的强最大值原理。应用数学与优化, 12(1), 191-202. doi:10.1007/bf01449041 7, 8

(V. Bobkov)俄罗斯科学院乌法联邦研究中心数学研究所，俄罗斯乌法车尔尼雪夫斯基街112号，邮编450008
0000-0002-4425-0218
电子邮箱：bobkov@matem.anrb.ru, bobkovve@gmail.com