arXiv:2602.01214v1 [math.AT] 1 Feb 2026

由截断多重复形构造谱复形

Francesca Tripaldi

Abstract. 本文介绍了一种与截断多重复形相关的子复形新构造方法。受谱序列理论的启发，这种构造产生了一组彼此关联的子复形，其微分与谱序列微分相一致。这些复形细化了 Rumin 复形，同时保留了底层多重复形的上同调，为研究次黎曼几何，尤其是 Carnot群上的次黎曼几何，提供了新工具。

1. Introduction

从上链复形中提取有意义的子复形，是微分几何中的一个核心且十分活跃的研究主题。其根本目标是捕捉特定情境中可能存在的额外代数、几何或解析结构。此类子复形通常旨在更贴合所研究的问题，从而提取更精细的拓扑或度量不变量，或构造具有更强解析性质的微分算子。

对于复流形 X，复结构赋予 de Rham 复形（$\Omega^\bullet(X)\ d$）额外的代数性质。这是因为复结构将切丛分解为全纯分量和反全纯分量，并由此将外微分分解为满足 $d=\partial+\partial$ 的形式 $0=d^2=\partial^2=\partial^{2}=\partial\partial+\partial\partial$。这使 de Rham 复形具有双复形的结构。特别地，由于 $\partial^2=0$，我们可以考虑 Dolbeault 复形（$\Omega^\bullet(X)$–∂)–，其上同调为复流形提供了基本的解析不变量，并通过 Fr¨olicher 谱序列将全纯结构的复杂性与拓扑联系起来。事实上，复形（$\Omega^\bullet(X)\ \partial$）在复结构的研究与分类中发挥着至关重要的作用 [48]。

–

当复流形 X 带有额外的几何结构时，可以利用其他子复形及其相关的上同调群提取更多信息。对于 K¨ahler 流形X，复结构、辛结构与黎曼结构彼此相容。这种相容性使我们能够通过 Bott-Chern 上同调群和 Aeppli 上同调群来探测底层流形的信息

$$H_A^{\bullet,\bullet}:=\frac{\ker\partial\overline{\partial}}{\operatorname{Im}\left(\partial+\overline{\partial}\right)}\quad\text{and}\quad H_{BC}^{\bullet,\bullet}:=\frac{\ker\left(\partial+\overline{\partial}\right)}{\operatorname{Im}\partial\overline{\partial}},$$

它们是良定义的，因为 $d\circ\partial\partial=\overline{\partial}\partial\circ\overline{d}=0$。对这些上同调群的研究后来启发了一个新子复形的构造，在文献中称为 Bigolin [59], Schweitzer [68], 复形，或 Aeppli-Bott-Chern 复形 [45], ； 事实证明，它是椭圆的 [69] ，并且具有 Hodge 理论性质以及上同调不变量 [59]。

对于一般情况下未必是 K¨ahler 的辛流形，人们也引入了复 Bott-Chern 上同调群和 Aeppli 上同调群的辛类比 [71], ，其性质与 K¨ahler 情形类似 [70]。最后，Dolbeault 复形 [26] 以及 Bott–Chern 和 Aeppli 上同调 [67] 已成功推广到更广泛的殆复流形情形。

构造子复形的另一种基本方法是伯恩斯坦–盖尔范德–盖尔范德（BGG）序列，它们在抛物几何的研究中发挥着核心作用 [19]。BGG 分解最初是在半单李代数的表示论中引入的 $\mathfrak{g}$ [12]，后来扩展到抛物子代数的情形 $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{g}$ [52]。人们很快发现，这些代数构造具有深刻的几何意义。具体而言，在抛物子代数的情形下 [52], ，BGG 分解中出现的同态对应于作用在齐性向量截面上的不变微分算子

2020 *Mathematics Subject Classification.* 18G40, 46L87, 22E25 .*Key words and phrases.* 谱序列、截断多重复形、Rumin复形。

广义旗流形上的向量丛 G/P 由适当抛物子群的不可约表示 $P \subset G$诱导而来。对于合适的选择 G 和 P，相应的 G/P 与某些基本几何结构的齐性模型重合，例如 CR 几何和共形几何 [32]。这些早期工作推动了对具有齐性模型的几何的系统研究，这类几何如今通常称为抛物几何。21 世纪初，文献 [20]发展出一种植根于微分几何的 BGG 序列表述。在这一框架下，人们构造出一系列内禀于相应嘉当几何的微分算子。在局部同构于齐性模型 G/P的几何上，诱导出的 BGG 序列构成一个复形，其中可能包含高阶微分算子，并且计算出与（扭曲）德拉姆上同调相同的上同调。关于 BGG 序列的构造及其几何动机的深入探讨，请参阅文献 [17]的引言。

尽管 BGG 机制严重依赖于通过拖拉丛和联络关联的规范嘉当几何，使得原始构造不易理解，但在某些特定情形下可以大大简化：在滤过流形上通过密切群 [28]，以及在光滑黎曼流形上 [34, 17]。

重要的是，滤过流形的情形也涵盖了等正则次黎曼流形，其中最常用且广为人知的子复形是 Rumin复形（$E_0^\bullet$，d_c）。M. Rumin 于 20 世纪 90 年代初首先在切触流形上引入了这一子复形 [60, 61]，随后又将其推广至等正则滤过流形 [63, 64]。值得注意的是，从不同视角出发，等价的（$E_0^\bullet$，d_c）构造早已独立发展出来。受切触流形上 Monge-Amp`ere 方程研究的启发，Lychagin 于 1979 年构造了一个等价的子复形 [55]（并于后来作了扩展 [56]），旨在作为辛流形有效上同调群的一种切触变体 [13]。这一问题自 21 世纪初以来一直悬而未决，近期研究表明，在齐性群 [33] 以及更一般的等正则滤过流形 [34]上，BGG序列与Rumin复形彼此一致。

为了将黎曼几何中的几何与解析构造推广到次黎曼情形，Rumin复形已成为 de Rham 复形的重要替代。在切触流形的情形下，子复形 $(E_0^\bullet,\ d_c)$ 已成功用于构造（最大）次椭圆的霍奇-拉普拉斯算子，作用于形式 [61]，并应用于计算解析挠率[66, 50, 51, 65]，、锐拟等距不变量 [62, 3, 58, 57, 4, 5, 6]，以及形式值偏微分方程 [8, 35, 10, 9]。近来，几何测度论中也出现了更多应用，特别是与内禀利普希茨图 [37] 的联系，以及斯托克斯定理对 $(E_0^\bullet,\ d_c)$ [38, 29, 30], 的有效性，为切触流形上的次黎曼流理论奠定了基础 [49, 15, 16, 36]。然而，尽管 Rumin 复形可以定义在任意（等正则）次黎曼流形上，这些结果在切触流形和 (2，3，5) 流形之外并不成立（关于局部微分同胚于嘉当群的 (2，3，5) 流形的一些最新解析结果，请参见[41, 43, 42, 11]）。

本综述并非旨在全面介绍文献中已构造的所有子复形，而是着重介绍在三种基础几何背景（复几何、抛物几何和次黎曼几何）中发展起来、并在应用中尤为成功的一些工具。其他背景下也存在许多构造和推广，包括 CR流形[24, 21, 22, 23], 奇异滤过流形 [14], 以及有限元外微分演算 [1, 18, 47, 46]。本简短综述旨在阐明研究微分复形的一条共同指导原则：找出一个最适合特定几何或分析问题的子复形。而在本文中，我们采用了不同的视角。我们不选取一个单一的优选子复形，而是提出一个框架，其中包含若干由底层几何结构自然导出的子复形集合 。

这种方法的主要灵感来源是次黎曼几何中的 Rumin复形。更具体地说，本文引入“谱复形”的构造，旨在应对在任意 Carnot群上处理（$E_0^\bullet$，d_c）时出现的问题。当 Rumin微分 d_c 分解为若干具有不同齐次（海森堡）阶数的微分算子之和时，恰会出现这些困难。等价地说，这一性质意味着，Rumin形式空间在至少一个次数 [64, 2, 39] 上分解为多个（齐次）权。对于 Carnot群而言，这种情况绝非例外，反而是常态（合理的假设是，至

在维数不超过 9 的范围内，Rumin形式在每个次数都只具有一个权的群，只有海森堡群和五维卡当群 [40, 27]）。另一方面，在不会发生这种分解、且 Rumin微分只有一个齐次微分阶数的特殊情形下 j，在给定次数上（因此 $d_c = d_c^j$），Rumin微分与权重滤过所关联的谱序列中相应的微分 Δ_j 相一致 [53]。这些观察揭示了一个根本性的矛盾。一方面，我们需要一个“精简”的子复形，最好由齐次阶数的微分算子构成，以适用于分析用途。另一方面，由于相关谱序列的上同调分布于所有权中，因此必须“追踪”全部 Rumin形式。本文构造的谱复形旨在调和这两项相互竞争的要求。

受谱序列方法的启发，我们不再试图构造一个单一的最优子复形，而是选择考察一组子复形。与经典谱序列的情形不同，在经典情形中，每一页都有一族彼此平行的子复形，而这些新的 谱复形 并非如此。相反，它们可能以非平凡的方式相交和重叠。这种现象在简单的例子中已经出现。例如，正如第 4.3小节所示，在恩格尔群的情形下，该构造得到两个如下形式的谱复形

$$E_0^0 \xrightarrow{d_c^1} \quad E_0^1 \quad \xrightarrow{d_c^2} E_0^2 \cap \mathcal{C}_{3,-1} \xrightarrow{d_c^3} E_0^3 \cap \left(\operatorname{Im} d_c^2\right)^{\perp} \xrightarrow{d_c^1} E_0^4$$
$$E_0^0 \xrightarrow{d_c^1} E_0^1 \cap \ker d_c^2 \xrightarrow{d_c^3} E_0^2 \cap \mathcal{C}_{4,-2} \xrightarrow{d_c^2} \quad E_0^3 \quad \xrightarrow{d_c^1} E_0^4$$

显然，在次数 0 和 4 时，这两个子复形中的形式空间相同；在次数 1 和 3 时，它们存在重叠，因为 $E_0^1 \cap$ 核 $d_c^2 \subset E_0^1$ 且 $E_0^3 \cap \left(\text{像 } d_c^2\right)^{\perp} \subset E_0^3$。只有在次数 2 时，这两个子复形才没有交集。我们还要强调，这两个子复形同等重要，应当一并考察：正是它们构成的集合承载着我们所要寻找的信息。

由于构造仅依赖于多重复形是截断的这一事实（以及我们有一个标量积，使得与 $\Box_0$ 相关的 d_0 拉普拉斯算子具有 Hodge分解，见注2.5），因此将完全以多重复形的形式来描述这些子复形。因此，尽管研究动机主要源于对 Carnot群的研究，这一构造的适用范围更广，也包括齐性群和等正则滤过流形。

本文组织如下。第2节中，在回顾截断多重复形 $\mathcal{C}$ 的主要定义和性质之后，我们介绍与之相关的 Rumin复形（$E_0^\bullet, d_c$）。有趣的是，从同伦论的角度考虑，我们发现每个多重复形 $\mathcal{C}$ 都可以分解为直和 $K \oplus H$，其中 K 是平凡的，而 H 是极小的 [31]。在满足注 2.5 假设的标量积选取下，Rumin复形与这个极小多重复形 H 重合。第3节中，我们能够用 Rumin形式及其微分来表示与$\mathcal{C}$ 相关的谱序列的商空间 $E^{\bullet,\bullet}_r$ 和微分 Δ_r。这一步依赖于 [54] 的工作，其中商空间$E^{\bullet,\bullet}_r$ 被表示为某些分次模 $Z^{\bullet,\bullet}_r$ 和 $B^{\bullet,\bullet}_r$。第4节中，我们介绍谱复形，并在这一框架下确立其主要性质。

这些子复形解决了最初促使我们开展这项工作的若干问题：它们刻画了多重复形的上同调；对于每个非平凡的 Rumin形式空间，至少存在一个经过该空间的子复形；其微分与谱序列微分一致 Δ_r，因此与标量积的选择无关；此外，每个子复形都更加“纤薄”，因为其中涉及的微分次数更少。正如第 4.1小节所述，当某个次数中出现的 Rumin形式具有三个以上的权时，相应谱复形的微分可能不具有齐次微分算子。理解这一现象所带来的解析后果，以及是否需要对该构造作进一步完善，仍是未来研究中一个有趣的方向。

致谢。 这项工作得益于多年来的多次交流。作者特别感谢 Atabey Kaygun、Filippa Lo Biundo 和 Sarah Whitehouse，感谢他们付出的时间、兴趣以及富有洞见的讨论，这些讨论帮助塑造了本文。

2. The Rumin complex associated with a truncated multicomplex

定义2.1（定义2.1，见 [54]）。设 k 为一个含幺交换基环。一个 s-多重复形（亦称扭曲链复形）是一个（$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$）-分次的 k-模 $\mathcal{C}$，配备映射 d_i: $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$，对于$i \geq 0$，其双次数为 $|d_i| =$（i, $1-i$），使得

$$\sum_{i+j=n} d_i d_j = 0 \quad \text{for all } n \geq 0 \quad \text{and } d_k = 0 \quad \text{for all } k \geq s\,. \tag{2.1}$$

对于 $\mathcal{C}$ 多重复形和（a, b） $\in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$，我们将 $\mathcal{C}_{a,\,b}$ 记作双次数（a, b）下的 k-模。受 Carnot群上 de Rham 复形研究中所使用术语的启发，给定元素 $x \in \mathcal{C}_{a,\,b}$，我们将 a 称为 x 的权，将 $a+b$ 称为 x的次数。作为简写，我们记作

$$\text{if } x \in \mathcal{C}_{a,b} \quad \text{then} \quad w(x) = a \quad \text{and} \quad deg(x) = a+b\,.$$

为了使全文中所介绍的构造有意义，我们要求 $\mathcal{C}$ 是一个截断多重复形，即一个具有 $s < \infty$的 s-多重复形；对于 $s = \infty$的情形，我们无法加以涵盖。

注 2.2。在定义 2.1中，我们选择了特定的符号和次数约定。由于本工作的动机范例是 de Rham 复形，因此结构映射 d_i 采用上同调约定。文献中通常采用的则是带有微分的第一象限多重复形d_i： $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 其双次数为 $|d_i| =$（$-i$, $i-1$），这类复形更常在同调论中研究。此外，另一种常见的替代做法是要求结构映射满足关系

$$\sum_{i+j=n} (-1)^i d_i d_j = 0 \quad \text{for all } n \geq 0$$

而不是（2.1）中的那些。

最后，在Carnot群 G上的de Rham 复形的背景下，微分形式的权总是非负的。这意味着光滑形式空间$\Omega^\bullet(G)$实际上是一个$(\mathbb{N}_0, \mathbb{Z})$-分次 $C^\infty(G)$-模。不仅如此，由于群 G 是有限维的，权 a的值域是有限的，并取介于0与体积形式的权 Q 之间的整数值。

定义2.3（ [54]中的定义2.2）。对于一个 s-多重复形 $\mathcal{C}$，其相关总复形定义为(Tot $\mathcal{C}, d$)，其中

$$(\mathrm{Tot}\,\mathcal{C})_h = \left(\prod_{\substack{a+b=h \\ a \leq 0}} \mathcal{C}_{a,b} \right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{a+b=h \\ a>0}} \mathcal{C}_{a,b} \right) = \left(\bigoplus_{\substack{a+b=h \\ b \leq 0}} \mathcal{C}_{a,b} \right) \oplus \left(\prod_{\substack{a+b=h \\ b>0}} \mathcal{C}_{a,b} \right) \tag{2.2}$$

并且Tot $\mathcal{C}$ 上的微分 d 对任意元素 $x \in$(Tot $\mathcal{C}$)由下式给出

$$(dx)_a = \sum_{i=0}^{s} d_i\,(x)_{a-i}\,. \tag{2.3}$$

借用Carnot群背景下所用的记号，我们也可以把Tot $\mathcal{C}$上的微分写成 $d = d_0 + d_1 + \cdots + d_s$，由（2.1）可知它是一个复形，因为

$$d^2 = (d_0 + d_1 + \cdots + d_s)(d_0 + d_1 + \cdots + d_s) = \sum_{n=0}^{2s} \left(\sum_{i+j=n} d_i d_j \right) = 0\,.$$

一般而言，在处理 (Tot $\mathcal{C}$)$_h$时，不一定总能考虑直积全复形 $\prod_{a+b=h} \mathcal{C}_{a,\,b}$ 在次数 h，因为公式 (2.2) 可能涉及无穷级数。不过请注意，对于 Carnot群上的 de Rham 复形，这并不成问题（见注释 2.2）。因此，在这一特定情形下，相关总复形可简化为

$$(\mathrm{Tot}\,\mathcal{C})_h = \bigoplus_{\substack{a+b=h \\ 0 \leq a \leq Q}} \mathcal{C}_{a,b} \quad \text{with differential } d = d_0 + d_1 + \cdots + d_s\,.$$

现在，我们将采用 Rumin 在 [63, 64] 中提出的构造，从 (Tot $E_0^\bullet, d_c$) 中提取子复形 ($\mathcal{C}$, $d = d_0 + d_1 + \cdots + d_s$)，后者通常称为 Rumin复形；前者是与我们的 s-多重复形 $\mathcal{C}$相关的全复形。

2.1. **在 $\mathcal{C}$上引入标量积**。Rumin形式空间 $E_0^\bullet$ 同构于复形 ($\operatorname{Tot}\mathcal{C}, d_0$) 的上同调。然而，由于我们希望将 $E_0^\bullet$ 定义为 $\mathcal{C}$ 的子空间，而非商空间，因此需要一种方法来确定子空间 $\operatorname{Im} d_0$的补空间。一个自然的解决办法是在 $\mathcal{C}$ 上引入标量积，然后取 $\operatorname{Im} d_0$的正交补。

在我们的设定中，只需在每个 $(\operatorname{Tot}\mathcal{C})_h$ 上定义标量积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_h$ ，使不同权的元素彼此正交，即对每个 h，我们有

$$\text{given } x_1 \in \mathcal{C}_{a_1,b_1} \text{ and } x_2 \in \mathcal{C}_{a_2,b_2} \text{ with } a_1+b_1 = a_2+b_2 = h\,, \quad \text{if } a_1 \neq a_2 \text{ then } \langle x_1, x_2\rangle_h = 0\,.$$

给定 $\operatorname{Tot}\mathcal{C}$ 的子空间 S，我们将到 S 上的正交投影记为 pr_S。

定义 2.4 （ d_0的伴随算子）。我们可以利用刚引入的标量积来定义 d_0的形式转置（伴随算子），记作 δ_0。换言之， $\delta_0\colon \mathcal{C}_{a,b} \to \mathcal{C}_{a,b-1}$ 由以下条件确定

$$\langle d_0 x, y\rangle_{h+1} = \langle x, \delta_0 y\rangle_h \quad \text{for any } x \in (\operatorname{Tot}\mathcal{C})_h \text{ and } y \in (\operatorname{Tot}\mathcal{C})_{h+1}\,.$$

这是因为 $w(\delta_0 x) = w(x)$ 直接源于不同权的元素彼此正交这一事实（完整证明见引理 4.8 ）。

注 2.5. 本文始终假设映射 $d_0\colon \mathcal{C}_{a,\,b} \to \mathcal{C}_{a,\,b+1}$ 具有闭值域。对于 Carnot 群上的 de Rham 复形，映射 d_0 是 Chevalley-Eilenberg 微分在光滑形式空间上的延拓，因此它是有限维空间之间的线性映射（关于这一事实的详细说明，参见 [33]）。这一假设对于考察与 d_0相关的拉普拉斯算子的性质至关重要。

定义 2.6 （(Tot $\mathcal{C}$, d) 上的 Rumin 形式）。 给定带有微分$d = d_0 + d_1 + \cdots + d_s$的相关总复形 $\operatorname{Tot}\mathcal{C}$，根据 s-多重复形的定义，很容易推出 (Tot $\mathcal{C}$, d_0) 本身是一个复形，即 $d_0^2 = 0$。因此，可以考察其上同调。由于我们关注的是子空间而非商空间，下面将引入与全复形 (Tot $\mathcal{C}$, $d = d_0 + d_1 + \cdots + d_s$) 相关的 Rumin 形式空间 $E_0^\bullet$，定义如下

$$E_0^h = \ker d_0 \cap (\operatorname{Im} d_0)^\perp \cap (\operatorname{Tot}\mathcal{C})_h = \ker d_0 \cap \ker \delta_0 \cap (\operatorname{Tot}\mathcal{C})_h\,, \tag{2.4}$$

最后一个等式由闭值域定理得出（参见注2.5）。

利用标量积，可以从 d_0 定义另一个重要算子，即它的部分逆。这个算子在所谓的 Rumin 微分 d_c的构造中将起核心作用。

定义 2.7 （部分逆 d_0^{-1}）。线性映射 d_0 意味着它将 $(\ker\ d_0)^\perp = \operatorname{Im}\delta_0$ 双射到 $\operatorname{Im}\ d_0$。按照 Rumin 的构造，通常使用简写符号d_0^{-1}表示由下式给出的线性映射：

$$d_0^{-1} := d_0^{-1}\mathrm{pr}_{\operatorname{Im} d_0}\colon \mathcal{C}_{a,b} \to \mathcal{C}_{a,b-1}\,.$$

特别地，很容易得到 $(d_0^{-1})^2 = 0$，以及 $\ker d_0^{-1} = \ker\ \delta_0 = (\operatorname{Im} d_0)^\perp$。

定义 2.8 （到 $E_0^\bullet$上的正交投影）。考虑算子

$$\Pi_0 := \mathrm{Id} - d_0^{-1}d_0 - d_0 d_0^{-1}\colon \mathcal{C}_{a,b} \longrightarrow \mathcal{C}_{a,b}\,.$$

根据映射 d_0^{-1}的定义，我们有

- Π_0 maps elements of $\mathcal{C}_{a,b}$ onto elements of $\mathcal{C}_{a,b}$, i.e. it preserves both the weight and the degree;
- $d_0^{-1}d_0 = \mathrm{pr}_{\operatorname{Im}\delta_0}$ and $d_0 d_0^{-1} = \mathrm{pr}_{\operatorname{Im} d_0}$;
- $\Pi_0^2 = \left(\mathrm{Id} - d_0^{-1}d_0 - d_0 d_0^{-1}\right)\left(\mathrm{Id} - d_0^{-1}d_0 - d_0 d_0^{-1}\right) = \mathrm{Id} - d_0^{-1}d_0 - d_0 d_0^{-1} = \Pi_0$.

因此，映射 Π_0 是到.....上的正交投影

$$\operatorname{Im}\Pi_0 = \ker d_0 \cap \ker d_0^{-1} = \ker d_0 \cap \ker\delta_0 = E_0\,,$$

即 $\Pi_0 = \mathrm{pr}_{E_0}$。

我们希望将 Rumin形式刻画为与 d_0 及其伴随算子 δ_0相关的拉普拉斯算子的"调和形式"。我们还将看到，在假设 d_0 具有闭值域的情况下，这样的拉普拉斯算子允许进行 Hodge分解。

定义2.9(Th e 拉普拉斯算子 $\Box_0$)。 考虑利用 d_0 及其伴随算子定义的拉普拉斯算子 t

$$\Box_0 := d_0\delta_0 + \delta_0 d_0 \colon \mathcal{C}_{a,b} \longrightarrow \mathcal{C}_{a,b}\,.$$

与投影 Π_0 一样， $\Box_0$ 保持权和次数不变。它是一个对称算子，也就是说 $\langle \Box_0 x,\ y\rangle_h = \langle x,\ \Box_0 y\rangle_h$ 对任意 $x,\ y \in$ (Tot $\mathcal{C}$)$_h$均成立，且其核与 Rumin形式空间重合

$$\ker \Box_0 = \ker d_0 \cap \ker \delta_0 = E_0\,.$$

ker $d_0 \cap$ ker $\delta_0 \subseteq$ ker $\Box_0$ 的包含关系显然，反向包含则由以下事实得出：

$$0 = \langle \Box_0 x, x\rangle_h = \langle d_0\delta_0 x, x\rangle_h + \langle \delta_0 d_0 x, x\rangle_h = |d_0 x|_h^2 + |\delta_0 x|_h^2 \quad \text{for any } x \in (\operatorname{Tot}\mathcal{C})_h\,.$$

命题2.10 (关于 $\Box_0$ 的Hodge分解)。 相关总复形 Tot $\mathcal{C}$ 可按 $\Box_0$、 d_0及其伴随算子 δ_0作直和（或*Hodge*）分解。更明确地说，

$$\operatorname{Tot}\mathcal{C} = \operatorname{Im} d_0 \oplus \ker \Box_0 \oplus \operatorname{Im}\delta_0 \tag{2.5}$$

证明。 结论由以下事实得出：值域闭的映射的核的正交补与其伴随算子的值域重合：

$$\begin{aligned}\operatorname{Tot}\mathcal{C} &= \ker d_0 \oplus (\ker d_0)^{\perp} = \ker d_0 \oplus \operatorname{Im}\delta_0\\ &= \ker d_0 \cap \ker\delta_0 \oplus \ker d_0 \cap (\ker\delta_0)^{\perp} \oplus \operatorname{Im}\delta_0\\ &= \ker\Box_0 \oplus \ker d_0 \cap \operatorname{Im} d_0 \oplus \operatorname{Im}\delta_0 = \ker\Box_0 \oplus \operatorname{Im} d_0 \oplus \operatorname{Im}\delta_0\end{aligned}$$

□

注记2.11. 应当注意，在 s-多重复形这一具体情形中，算子之间存在明显的对称性（关于这一对称性的更深入探讨，请参见 [25] ）。对于截断多重复形，我们显然有两个算子 d_0 和 d_s ，它们满足条件 $d_0^2 = d_s^2 = 0$, 因此原则上可以完全重复相同的构造，利用 d_s 算子得到一个 Hodge分解。然而，在我们考虑的应用情形中，即 Carnot群上的微分几何，这种对称性因 d_0 和 d_s 具有不同性质而被打破。在这种次黎曼情形下， d_0 是一个在有限维空间之间作用的线性算子，因此注记 2.5 总是成立。另一方面， d_s 是作用于光滑形式空间上的微分算子，因此一般而言，其值域并不闭。这正是我们选择在此以 $\mathcal{C}$ 的形式来给出 Tot d_0空间的 Hodge分解的主要原因。

2.2. **构造 Rumin复形**。 我们已经将 Rumin形式 $E_0^\bullet$ 定义为 $\Box_0$ 拉普拉斯算子 的调和形式空间，它与复形 (Tot $\mathcal{C}, d_0$) 的上同调同构。现在我们可以定义一个上链映射 d_c: $E_0^h \to E_0^{h+1}$， 使得复形 ($E_0^\bullet, d_c$) 的上同调与 (Tot $\mathcal{C}, d = d_0 + d_1 + \cdots + d_s$) 的上同调同构。

请注意，为了使这一构造成立，我们假设权的值域 a是有限的（见注 2.2）。

引理 2.12。 若 $B\colon \operatorname{Tot}\mathcal{C} \to \operatorname{Tot}\mathcal{C}$ 是一个严格增加权的算子，即 $e.$

$$\textit{given } x \in \mathcal{C}_{a,\bullet}\,,\ \textit{we have that } Bx \in \mathcal{C}_{a',\bullet} \textit{ with } a' > a\,,$$

那么 B 是幂零的，即存在一个与 B 无关的 $N \in \mathbb{N}$ ，使得 $B^N = 0$。

证明。 任何严格提高 Tot$\mathcal{C}$ 中元素权的算子都是幂零的，这直接源于我们假设权的取值范围有限。□

引理 2.13。 设 $A_0\colon \mathrm{Tot}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Tot}\,\mathcal{C}$ 是一个保持权不变的可逆线性映射，而 $B\colon \mathrm{Tot}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Tot}\,\mathcal{C}$ 是一个严格提高权的算子。那么，算子 $A := A_0 - B\colon \mathrm{Tot}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Tot}\,\mathcal{C}$ 是可逆的，其逆 $A^{-1}\colon \mathrm{Tot}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Tot}\,\mathcal{C}$ 具有如下形式

$$A^{-1} = A_0^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} \left(BA_0^{-1}\right)^j = \left(\sum_{j=0}^{N-1} \left(A_0^{-1}B^j\right) \right) A_0^{-1} ,$$

其中 $N \in \mathbb{N}$ 是 B 的幂零指数，如引理 *2.12*中所述。

证明。 根据构造，我们有 $A = A_0 - B = (\mathrm{Id} - BA_0^{-1})A_0 = A_0(\mathrm{Id} - A_0^{-1}B)$。算子 BA_0^{-1}和 $A_0^{-1}B$ 在 $\mathrm{Tot}\,\mathcal{C}$ 上作用时均严格递增权，因此根据引理 2.12，它们都是幂零的。因此，我们通过诺伊曼级数得到可逆性：$\mathrm{Id} - BA_0^{-1}$和 $\mathrm{Id} - A_0^{-1}B$ 均可逆，且

$$(\mathrm{Id} - BA_0^{-1})^{-1} = \sum_{j=0}^{N-1} \left(BA_0^{-1}\right)^j \quad \text{and} \quad (\mathrm{Id} - A_0^{-1}B)^{-1} = \sum_{j=0}^{N-1} \left(A_0^{-1}B\right)^j .$$

结论直接由以下事实得出：$A^{-1} = A_0^{-1}(\mathrm{Id} - BA_0^{-1})^{-1} = (\mathrm{Id} - A_0^{-1}B)^{-1}A_0^{-1}$。 □

利用前面的结果，我们现在能够构造定义上链映射 d_c 所需的投影映射。

引理 2.14。 考虑作用于 $\mathrm{Tot}\,\mathcal{C}$ 上的算子 $b := d_0^{-1}d_0 - d_0^{-1}d = -d_0^{-1}(d - d_0)$ 。

1. 映射 $b\colon \mathrm{Tot}\,\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Tot}\,\mathcal{C}$ 保持次数，且它是幂零的，因此$\mathrm{Id} - b$ 可逆。2. 算子

$$\Pi := (\mathrm{Id} - b)^{-1}d_0^{-1}d + d(\mathrm{Id} - b)^{-1}d_0^{-1} \tag{2.6}$$

是$\mathrm{Tot}\,\mathcal{C}$ 到……上的投影

$$F := \mathrm{Im}\, d_0^{-1} + \mathrm{Im}\, dd_0^{-1} = \mathrm{Im}\, \delta_0 + \mathrm{Im}\, d\delta_0$$

沿着

$$E := \ker d_0^{-1} \cap \ker d_0^{-1}d = \ker \delta_0 \cap \ker \delta_0 d .$$

证明。

1. 根据定义，算子 b 严格增加权，因此由引理 2.12 它是幂零的，即存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $b^N = 0$。现在我们可以应用引理 2.13 ，取 $A_0 =$Id 和 $B = b$ ，因此算子 $\mathrm{Id} - b$ 可逆，其逆由下式给出

$$(\mathrm{Id} - b)^{-1} = \sum_{j=0}^{N-1} b^j = \sum_{j=0}^{N-1} \left[-d_0^{-1}(d - d_0)\right]^j . \tag{2.7}$$

这也意味着， Π 按式（2.6）定义的算子在 $\mathrm{Tot}\,\mathcal{C}$上是良定义的。

2. 根据（2.6）和（2.7），我们有， Π 的像包含于陈述中定义的子空间 $F \subset \mathrm{Tot}\,\mathcal{C}$ 中。此外，利用 d、 d_0和 d_0^{-1}的性质，我们得到

$$\Pi d_0^{-1} = d_0^{-1} \quad \text{and} \quad \Pi dd_0^{-1} = dd_0^{-1}$$

因此， $\Pi =$在 F和 $\Pi^2 = \Pi$上为恒等算子，即 Π是沿着核Π到像$\Pi = F$上的投影。最后，核Π包含陈述中引入的子空间 E 。由于我们还有以下等式

$$d_0^{-1}\Pi = d_0^{-1} \quad \text{and} \quad d_0^{-1}d\Pi = d_0^{-1}d ,$$

我们得到核$\Pi = E$。

□

沿用 Rumin 的记号，我们分别将到 F 和 E 上的两个投影记为

$$\Pi_F := \Pi \quad \text{and} \quad \Pi_E := \mathrm{Id} - \Pi ,$$

其中 Π 是（2.6）中定义的算子。

引理 2.15. 投影算子 Π_E、 Π_F 和 Π_0 具有以下性质：

1. $d_0^{-1}\Pi_E = \Pi_E d_0^{-1} = 0$; 2. $d\Pi_F = \Pi_F d$ 和 $d\Pi_E = \Pi_E d$; 3. $\Pi_0\Pi_E\Pi_0 = \Pi_0$ 和 $\Pi_E\Pi_0\Pi_E = \Pi_E$。

证明。 1.中的等式由以下事实得出：$d_0^{-1}\Pi = \Pi d_0^{-1}$；而2.中的等式则可通过进行显式计算轻松验证，从而得到 $d\Pi = d(\mathrm{Id} - b)^{-1}d_0^{-1}d = \Pi d$。

最后，为了得到3.中的等式，我们需要运用以下事实：像$\Pi \subset$像$d_0^{-1} \subset$(核$\square_0$)$^\perp$，以及1.中的等式，因此

$$\Pi_E\Pi_0\Pi_E = \Pi_E^2 - \Pi_E(d_0 d_0^{-1} + d_0^{-1}d_0)\Pi_E = \Pi_E \quad \text{and} \quad \Pi_0\Pi_E\Pi_0 = \Pi_0^2 - \Pi_0\Pi\,\Pi_0 = \Pi_0\,.$$

□

引理2.15 推出以下结果。

命题 2.16 （ [63]中的定理 2.6）。 相关总复形（全复形 $\mathcal{C}, d = d_0 + d_1 + \cdots + d_s$） 分解为两个子复形（$E^\bullet, d$）和（$F^\bullet, d$）。此外，以下算子

$$d_c := \Pi_0 d \Pi_E \Pi_0 \colon E_0^\bullet \subset \mathrm{Tot}\,\mathcal{C} \longrightarrow E_0^\bullet \subset \mathrm{Tot}\,\mathcal{C}$$

满足

$$d_c^2 = 0 \quad \textit{and for any } x \in (\mathrm{Tot}\,\mathcal{C})_h \;\; d_c x \in (\mathrm{Tot}\,\mathcal{C})_{h+1}\,.$$

最后，复形（$E_0^\bullet, d_c$） 计算出的上同调与全复形（全复形 $\mathcal{C}, d$） 相同，它被称为 ***Rumin*复形**

证明。 由引理2.15中性质 2 可知， Π_E 是全复形（Tot$\mathcal{C}$， d）与复形（$E^\bullet$， d）之间的同伦等价，因此结论显然成立。最后，引理2.15 中的性质 3 进一步推出， E 与 E_0 一一对应，并且 Π_E 限制在 E_0 上与 Π_0 限制在 E上互为逆映射。因此，按照陈述中的定义，复形（$E^\bullet$， d）与（$E_0^\bullet$， d_c）共轭，其中 $d_c = \Pi_0 d \Pi_E \Pi_0$。 □

2.3. **为算子 d_c引入简写记号**。在继续描述与我们的 s-多重复形相关的谱序列所产生的空间之前，我们将研究 d_c 的显式表达式。在此过程中，我们将引入一种新的简写记号，以便更方便地进行后续各节所需的计算。

定义 2.17. 给定我们 $d_0, d_1, \ldots, d_s$ 多重复形的结构映射 s，以及定义 d_0^{-1} 中的部分逆 2.7，我们将通过归纳在 Tot$\mathcal{C}$ 上定义以下映射：

$$\partial_1 = d_1 \quad \text{and } \partial_r = d_r - \sum_{j=1}^{r-1} d_{r-j} d_0^{-1} \partial_j \quad \text{for } r \geq 2. \tag{2.8}$$

为清楚起见，我们来看算子 ∂_3 的显式表达式：

$$\begin{aligned}\partial_3 =& d_3 - \sum_{j=1}^{2} d_{3-j} d_0^{-1}\partial_j = d_3 - d_2 d_0^{-1}\partial_1 - d_1 d_0^{-1}\partial_2 = d_3 - d_2 d_0^{-1} d_1 - d_1 d_0^{-1}\left(d_2 - d_1 d_0^{-1}\partial_1\right)\\ =& d_3 - d_2 d_0^{-1} d_1 - d_1 d_0^{-1} d_2 + d_1 d_0^{-1} d_1 d_0^{-1} d_1\end{aligned}$$

注 2.18. 注意，根据定义，每个算子 ∂_r 的双次数为 $|\partial_r| = (r, 1-r)$，也就是说，它使权增加 r ，次数增加 1：

$$\text{for any } x \in \mathcal{C}_{a,b} \text{ we have } \partial_r x \in \mathcal{C}_{a+r,b+1-r}\,.$$

引理 2.19 (表达 d_c 在 E_0上)。 利用定义 *2.17* 中引入的算子，可以将作用于 d_c 上的算子 E_0 表示如下：

$$d_c x = \Pi_0 \sum_{r=1}^{N-1} \partial_r x = \sum_{r=1}^{N-1} \partial_r x - d_0^{-1} d_0 \sum_{r=1}^{N-1} \partial_r x - d_0 d_0^{-1} \sum_{r=1}^{N-1} \partial_r x \quad \textit{for any } x \in E_0 \tag{2.9}$$

其中 $N \in \mathbb{N}$ 与 x 或 d 无关，并且满足 $\partial_N x = 0$。

证明。 我们首先关注 Π 在 E_0的元素上的作用。根据定义，若 $x\in E_0$，则 $x\in$核 $d_0\cap$核 $\delta_0=$核 $d_0\cap$ 核d_0^{-1}，因此 Π 的作用简化为

$$\begin{aligned}\Pi x =&(\mathrm{Id}-b)^{-1}d_0^{-1}dx=\sum_{j=0}^{N-1}\left[-d_0^{-1}(d-d_0)\right]^j d_0^{-1}(d-d_0)x=\sum_{j=1}^{N-1}(-1)^{j-1}[d_0^{-1}(d-d_0)]^j x\\ =&d_0^{-1}(d-d_0)x-[d_0^{-1}(d-d_0)]^2x+[d_0^{-1}(d-d_0)]^3x+\cdots+(-1)^{N-2}[d_0^{-1}(d-d_0)]^{N-1}x\\ =&\underbrace{d_0^{-1}d_1}_{d_0^{-1}\partial_1}x+\underbrace{d_0^{-1}\left(d_2-d_1d_0^{-1}d_1\right)}_{d_0^{-1}\partial_2}x+\underbrace{d_0^{-1}\left(d_3-d_2d_0^{-1}d_1-d_1d_0^{-1}d_2+d_1d_0^{-1}d_1d_0^{-1}d_1\right)}_{d_0^{-1}\partial_3}x+\cdots\\ =&\sum_{r=1}^{N-1}d_0^{-1}\partial_r x\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}d\Pi_E x=&d\left(x-\sum_{r=1}^{N-1}d_0^{-1}\partial_r x\right)=(d-d_0)x-d_0d_0^{-1}\sum_{r=1}^{N-1}\partial_r x-(d-d_0)\sum_{r=1}^{N-1}d_0^{-1}\partial_r x\\ =&\sum_{j=1}^{s}d_jx-\sum_{j=1}^{s}d_jd_0^{-1}\sum_{r=1}^{N-1}\partial_r x-d_0d_0^{-1}\sum_{r=1}^{N-1}\partial_r x\\ =&d_1x+d_2x+\cdots+d_sx-d_1d_0^{-1}\sum_{r=1}^{N-1}\partial_r x-d_2d_0^{-1}\sum_{r=1}^{N-1}\partial_r x-\cdots-d_sd_0^{-1}\sum_{r=1}^{N-1}\partial_r x-d_0d_0^{-1}\sum_{r=1}^{N-1}\partial_r x\\ =&\underbrace{d_1x}_{\partial_1 x}+\underbrace{d_2x-d_1d_0^{-1}\partial_1 x}_{\partial_2 x}+\underbrace{d_3x-d_1d_0^{-1}\partial_2-d_2d_0^{-1}\partial_1 x}_{\partial_3 x}+\cdots-d_0d_0^{-1}\sum_{r=1}^{N-1}\partial_r x\\ =&\sum_{r=1}^{N-1}\partial_r x-d_0d_0^{-1}\sum_{r=1}^{N-1}\partial_r x=\sum_{r=1}^{N-1}\partial_r x-\mathrm{pr}_{\mathrm{Im}\,d_0}\sum_{r=1}^{N-1}\partial_r x=\mathrm{pr}_{(\mathrm{Im}\,d_0)^\perp}\sum_{r=1}^{N-1}\partial_r x\,.\end{aligned}$$

最后，由于 d_0^{-1}在 (像 $d_0)^\perp$ 上平凡作用，而我们刚刚证明了 $d\Pi_E x\in$(像 $d_0)^\perp$，于是得到

$$\begin{aligned}\Pi_0 d\Pi_E x=&\left(\mathrm{Id}-d_0^{-1}d_0\right)d\Pi_E x=\left(\mathrm{Id}-d_0^{-1}d_0\right)\left(\sum_{r=1}^{N-1}\partial_r x-d_0d_0^{-1}\sum_{r=1}^{N-1}\partial_r x\right)\\ =&\sum_{r=1}^{N-1}\partial_r x-d_0^{-1}d_0\sum_{r=1}^{N-1}\partial_r x-d_0d_0^{-1}\sum_{r=1}^{N-1}\partial_r x\,.\end{aligned}$$

□

注 2.20。 事实 $d\Pi_E x$ 属于 (像 $d_0)^\perp$ 也可由以下事实推出： $d\Pi_E x=\Pi_E dx\in E\subset$核 $\delta_0=$(像 $d_0)^\perp$ 根据引理 2.14。

此外，一般而言， s 与 N之间并无关联。视所考虑的多重复形以及元素 $x\in\mathrm{Tot}\,\mathcal{C}$ 的权和次数而定，s可能大于、小于或等于 N。唯一可以确定的是，它们都是有限正整数。例如，在 $N-1>s$ 的情况下，我们有

$$\partial_r x=d_r x-\sum_{j=1}^{r-1}d_{r-j}d_0^{-1}\partial_j x=-\sum_{j=r-s}^{r-1}d_{r-j}d_0^{-1}\partial_j\quad\text{for any } r>s\,.$$

由于 $d_0d_0^{-1}$和 $d_0^{-1}d_0$ 都是双次数为 (0，0) 的投影，即它们保持权和次数不变，因此算子 d_c由一系列双次数为 $|\partial_r|=(r,\ 1-r)$ 的算子 $\partial_r-d_0d_0^{-1}\partial_r-d_0^{-1}d_0\partial_r$ 构成。由于我们将关注这些算子中的每一个，因此引入以下记号。

定义 2.21。 给定 Rumin微分 d_c，其表达式如（2.9）所示，我们引入以下记号 n

$$d_c^r=\partial_r-d_0^{-1}d_0\partial_r-d_0d_0^{-1}\partial_r\quad\text{for each } r=1,\dots,N-1$$

用来表示 d_c 中双次数为 $|d_c^r| = (r,\ 1-r)$ 的各个加数。

3. Characterising spectral sequences in terms of the Rumin differentials

本节聚焦于由 s-多重复形导出的谱序列。我们的主要目标是说明该谱序列的结构：通过证明在 [54] 中引入、用于描述每一页商空间 $E^{p,\bullet}_r$ 的分次模 $Z^{p,\bullet}_r$ 和 $B^{p,\bullet}_r$ 可以用Rumin形式及Rumin微分 d_c 的作用等价地表述。为使讨论完整且自成一体，下面回顾模 $Z^{p,\bullet}_r$ 和 $B^{p,\bullet}_r$ 的定义，并调整其指标，使之符合定义2.1中采用的双次数约定。

定义 3.1 （ [54]中的定义 2.6）。 设$\alpha \in \mathcal{C}_{p,\bullet}$，并设 $r \geq 1$。我们定义$\mathcal{C}_{p,\bullet}$ 的子分次模 $Z^{p,\bullet}_r$ 和$B^{p,\bullet}_r$ 如下。

$$\begin{aligned}
\alpha \in Z^{p,\bullet}_r &\iff \text{对于 } 1 \leq j \leq r-1, \text{ 存在 } z_{p+j} \in \mathcal{C}_{p+j,\bullet} \text{ 使得} \\
&\qquad d_0\alpha = 0 \text{ and } d_n\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} d_i z_{p+n-i} \text{ for all } 1 \leq n \leq r-1\,. \\
\alpha \in B^{p,\bullet}_r &\iff \text{对于 } 0 \leq k \leq r-1 \text{ 存在 } c_{p-k} \in \mathcal{C}_{p-k,\bullet} \text{ 使得} \\
&\qquad \alpha = \sum_{k=0}^{r-1} d_k c_{p-k} \text{ and } 0 = \sum_{k=l}^{r-1} d_{k-l} c_{p-k} \text{ for } 1 \leq l \leq r-1\,.
\end{aligned}$$

回顾命题 2.10，我们有一个由拉普拉斯算子 $\square_0 = d_0\delta_0 + \delta_0 d_0$ 对 Tot 中任意元素成立的 Hodge分解 $\mathcal{C}$。为明确这一额外结构，我们引入以下记号。

定义 3.2. 令 $\alpha \in \operatorname{Tot}\mathcal{C}$。根据式（2.5）中描述的 Hodge分解，我们有

$$\alpha = \check{\alpha} + \overline{\alpha} + \hat{\alpha}$$

其中

- $\check{\alpha} = d_0 d_0^{-1}\alpha \in$ 像 d_0;
- $\hat{\alpha} = d_0^{-1} d_0\alpha \in$ 像 δ_0;
- $\overline{\alpha} = \Pi_0\alpha = \alpha - d_0 d_0^{-1}\alpha - d_0^{-1} d_0\alpha \in$ 核 $\square_0$。

在本节中，对于任意 $\alpha \in \mathcal{C}_{p,\bullet}$，我们将使用记号 β_p 表示 $\check{\alpha} = d_0\beta_p$ 的情形，以便追踪元素 β_p 的权。

请注意，一般而言，这样的元素 $\beta_p \in \mathcal{C}_{p,\bullet}$ 并不只属于像 δ_0。这是因为方程 $d_0\beta_p = \check{\alpha}$ 的解在加上核 d_0 中的一个元素后仍是解。由于核 $d_0 =$ 核 $\square_0 \oplus$ 像 d_0，我们有

$$\beta_p = \check{\beta}_p + \overline{\beta}_p + \hat{\beta}_p \quad \text{with} \quad \hat{\beta}_p = d_0^{-1} d_0\beta_p = d_0^{-1}\alpha = d_0^{-1}\check{\alpha}\,.$$

请注意，这种代数拉普拉斯算子的调和代表元确实是 Rumin形式。例如，对于任意 $\alpha \in \mathcal{C}_{p,\bullet}$，$\alpha = \Pi_0\alpha \in E_0$ 是一个 Rumin形式（除非它是平凡的）。

最后，下面的公式将有助于本节其余部分的计算。

引理 3.3. 给定任意元素 $\alpha \in \mathcal{C}_{p,\bullet}$，则 $\partial_1\alpha \in$ 核 d_0，即 $d_0\partial_1\alpha = 0$，且对任意 $r \geq 2$

$$d_0\partial_r\overline{\alpha} = -\sum_{i=1}^{r-1} d_i\left(\partial_{r-i} - d_0 d_0^{-1}\partial_{r-i}\right)\overline{\alpha}\,. \tag{3.1}$$

证明。 第一个结论直接由以下事实得出：$\alpha \in$ 核 $\square_0 \cap \mathcal{C}_{p,\bullet}$，因此

$$d_0\partial_1\overline{\alpha} = d_0 d_1\overline{\alpha} = -d_1 d_0\overline{\alpha} = 0\,.$$

这里我们利用结构映射的关系（2.1），以及以下事实：$\alpha \in$ 核 $\square_0 \subset$ 核 d_0。若 $r = 2$，则

$$d_0\partial_2\overline{\alpha} = d_0\left(d_2 - d_1 d_0^{-1} d_1\right)\overline{\alpha} = -d_1^2\overline{\alpha} - d_2\underbrace{d_0\overline{\alpha}}_{=0} + d_1 d_0 d_0^{-1} d_1\overline{\alpha} = -d_1\left(d_1\overline{\alpha} - d_0 d_0^{-1} d_1\overline{\alpha}\right)\,.$$

一般而言，由结构映射的关系（2.1），可得

$$d_0 d_r = -\sum_{i=1}^{r-1} d_i d_{r-i} - d_r d_0 \quad \text{for any } r \geq 1 \tag{3.2}$$

因此

$$\begin{aligned}
d_0\partial_r\overline{\alpha} =& d_0\left(d_r - \sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i}d_0^{-1}\partial_i\right)\overline{\alpha} = d_0 d_r\overline{\alpha} - \sum_{i=1}^{r-1} d_0 d_{r-i}d_0^{-1}\partial_i\overline{\alpha}\\
=& -\sum_{i=1}^{r-1} d_i d_{r-i}\overline{\alpha} - d_r d_0\overline{\alpha} + \sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=1}^{r-i-1} d_j d_{r-i-j}d_0^{-1}\partial_i\overline{\alpha} + \sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i}d_0 d_0^{-1}\partial_i\overline{\alpha}\\
=& -\sum_{i=1}^{r-1} d_i d_{r-i}\overline{\alpha} + \sum_{j=1}^{r-2}\sum_{i=1}^{r-j-1} d_j d_{r-i-j}d_0^{-1}\partial_i\overline{\alpha} + \sum_{i=1}^{r-1} d_i d_0 d_0^{-1}\partial_{r-i}\overline{\alpha}\\
=& -d_{r-1}d_1\overline{\alpha} + d_{r-1}d_0 d_0^{-1}\partial_1\overline{\alpha} - \sum_{i=1}^{r-2}\left(d_i d_{r-i} - \sum_{j=1}^{r-i-1} d_i d_{(r-i)-j}d_0^{-1}\partial_j\right)\overline{\alpha} + \sum_{i=1}^{r-2} d_i d_0 d_0^{-1}\partial_{r-i}\overline{\alpha}\\
=& -d_{r-1}\left(d_1 - d_0 d_0^{-1}d_1\right)\overline{\alpha} - \sum_{i=1}^{r-2} d_i\left(d_{r-i} - \sum_{j=1}^{r-i-1} d_{(r-i)-j}d_0^{-1}\partial_j - d_0 d_0^{-1}\partial_{r-i}\right)\overline{\alpha}\\
=& -\sum_{i=1}^{r-1} d_i\left(\partial_{r-i} - d_0 d_0^{-1}\partial_{r-i}\right)\overline{\alpha}\,.
\end{aligned}$$

□

3.1. **用 Rumin 形式和 Rumin 微分表示空间** $Z^{p,\bullet}_r$。

r=1。 根据3.1 中关于 $r=1$的定义，有

$$\alpha \in Z_1^{p,\bullet} \iff d_0\alpha = 0 \iff \alpha = \breve{\alpha} + \overline{\alpha} \text{ and } \hat{\alpha} = d_0^{-1}d_0\alpha = 0\,.$$

这可以更明确地表述为

$$\alpha = d_0\beta_p + \overline{\alpha} \text{ for some } \beta_p \in \mathcal{C}_{p,\bullet}\,.$$

r=2。 根据3.1 中关于 $r=2$的定义，有

$$\alpha \in Z_2^{p,\bullet} \iff d_0\alpha = 0 \text{ and there exists a } z_{p+1} \in \mathcal{C}_{p+1,\bullet} \text{ such that } d_1\alpha = d_0 z_{p+1}\,.$$

我们的主张是，条件 $\alpha \in Z^{p,\bullet}_2$ 等价于要求 $\alpha = d_0\beta_p + \alpha$ 和 $d_c^1\alpha = 0$。事实上，

$$d_1\alpha = d_1(d_0\beta_p + \overline{\alpha}) = d_0 z_{p+1} \iff d_1\overline{\alpha} = d_0 z_{p+1} - d_1 d_0\beta_p = d_0(z_{p+1} + d_1\beta_p)\,,$$

这里我们使用结构映射的关系（2.1），即 $d_0 d_1 + d_1 d_0 = 0$。

此外，由引理 3.3，我们知道 $d_1\alpha \in$ 核 d_0，而且

$$d_1\overline{\alpha} = d_0\omega_{p+1} \text{ with } \omega_{p+1} := z_{p+1} + d_1\beta_p \implies d_1\overline{\alpha} \in \operatorname{Im} d_0$$

因此

$$d_c^1\overline{\alpha} = d_1\overline{\alpha} - d_0 d_0^{-1}d_1\overline{\alpha} - d_0^{-1}d_0 d_1\overline{\alpha} = d_1\overline{\alpha} - d_0 d_0^{-1}d_0\omega_{p+1} = d_1\overline{\alpha} - d_0\omega_{p+1} = 0\,.$$

总之，我们知道 $\alpha = d_0\beta_p + \alpha$ 对于某个 $\beta_p \in \mathcal{C}_{p,\bullet}$（这与条件$\alpha \in Z^{p,\bullet}_1$ 一致）。此外，已知存在 $\omega_{p+1} = z_{p+1} + d_1\beta_p \in \mathcal{C}_{p+1,\bullet}$ 使得 $d_1\alpha = d_0\omega_{p+1}$ 且 $\partial_1\alpha = d_1\alpha \in$ 核 d_0，我们得到

$$\begin{aligned}
&d_1\overline{\alpha} = d_1\overline{\alpha} - d_0 d_0^{-1}d_1\overline{\alpha} + d_0 d_0^{-1}d_1\overline{\alpha} = d_c^1\overline{\alpha} + d_0 d_0^{-1}d_1\overline{\alpha} = d_0\omega_{p+1}\\
\iff\ & \underbrace{d_c^1\overline{\alpha}}_{\in\ker\Box_0} = \underbrace{d_0(\omega_{p+1} - d_0^{-1}d_1\overline{\alpha})}_{\in\operatorname{Im} d_0}\,.
\end{aligned}$$

根据式（2.5）中的直和分解可知，等式右端和左端都必须为零，即

- $d_c^1\overline{\alpha}=0$;
- $d_0(\omega_{p+1}-d_0^{-1}d_1\alpha)\widehat{}=0$，这意味着 $\widehat{\omega}_{p+1}-d_0^{-1}d_1\alpha=d_0^{-1}d_0\overline{\omega}_{p+1}-d_0^{-1}d_1\alpha=0$，也就是 $\widehat{\omega}_{p+1}=d_0^{-1}d_1\alpha$，$\overline{\ }$其中 $\omega_{p+1}=z_{p+1}+d_1\beta_p$。

r=3。根据定义 3.1，对于 $r=3$，我们有

$$\begin{aligned}\alpha\in Z_3^{p,\bullet}\iff & d_0\alpha=0 \text{ and there exist } z_{p+i}\in\mathcal{C}_{p+i,\bullet} \text{ with } i=1,2 \text{ such that}\\ & d_1\alpha=d_0z_{p+1} \text{ and } d_2\alpha=d_1z_{p+1}+d_0z_{p+2}\,.\end{aligned}$$

根据前面的步骤，我们已经知道

- $\alpha=d_0\beta_p+\overline{\alpha}$ for some $\beta_p\in\mathcal{C}_{p,\bullet}$;
- $d_c^1\overline{\alpha}=0$;
- $z_{p+1}=\omega_{p+1}-d_1\beta_p=\check{\omega}_{p+1}+\overline{\omega}_{p+1}+\hat{\omega}_{p+1}-d_1\beta_p=d_0\beta_{p+1}+\overline{\omega}_{p+1}+d_0^{-1}d_1\overline{\alpha}-d_1\beta_p$ for some $\beta_{p+1}\in\mathcal{C}_{p+1,\bullet}$

附加条件 条件 $d_2\alpha=d_1z_{p+1}+d_0z_{p+2}$ 意味着存在某个 $z_{p+2}\in\mathcal{C}_{p+2,\bullet}$ 使得 t

$$\begin{aligned}&d_2(d_0\beta_p+\overline{\alpha})=d_1(d_0\beta_{p+1}+\overline{\omega}_{p+1}+d_0^{-1}d_1\overline{\alpha}-d_1\beta_p)+d_0z_{p+2}\\ \Leftrightarrow\ & d_2\overline{\alpha}-d_1d_0^{-1}d_1\overline{\alpha}-d_1\overline{\omega}_{p+1}=-d_2d_0\beta_p+d_1d_0\beta_{p+1}-d_1^2\beta_p+d_0z_{p+2}\\ \Leftrightarrow\ & \partial_2\overline{\alpha}-d_1\overline{\omega}_{p+1}=d_0d_2\beta_p+d_1^2\beta_p+d_1d_0\beta_{p+1}-d_1^2\beta_p+d_0z_{p+2}\\ \Leftrightarrow\ & \partial_2\overline{\alpha}-d_1\overline{\omega}_{p+1}=d_0(d_2\beta_p-d_1\beta_{p+1}+z_{p+2})\,.\end{aligned}$$

再次，根据引理 3.3，$\partial_2\overline{\alpha}-d_1\overline{\omega}_{p+1}\in$ 核 d_0，由于

$$d_0(\partial_2\overline{\alpha}-d_1\overline{\omega}_{p+1})=-d_1\left(d_1\overline{\alpha}-d_0d_0^{-1}d_1\overline{\alpha}\right)=-d_1\underbrace{d_c^1\overline{\alpha}}_{=0}=0\,.$$

和之前一样，我们有

$$\begin{aligned}\partial_2\overline{\alpha}-d_1\overline{\omega}_{p+1}=&\partial_2\overline{\alpha}-d_1\overline{\omega}_{p+1}-d_0d_0^{-1}\left(\partial_2\overline{\alpha}-d_1\overline{\omega}_{p+1}\right)+d_0d_0^{-1}\left(\partial_2\overline{\alpha}-d_1\overline{\omega}_{p+1}\right)\\ =&d_c^2\overline{\alpha}-d_c^1\overline{\omega}_{p+1}+d_0d_0^{-1}\left(\partial_2\overline{\alpha}-d_1\overline{\omega}_{p+1}\right)=d_0\left(d_2\beta_p-d_1\beta_{p+1}+z_{p+2}\right)\end{aligned}$$

从而

$$\underbrace{d_c^2\overline{\alpha}-d_c^1\overline{\omega}_{p+1}}_{\in\ker\Box_0}=d_0\left[\omega_{p+2}-d_0^{-1}(\partial_2\overline{\alpha}-d_1\overline{\omega}_{p+1})\right]$$

其中我们引入了 $\omega_{p+2}:=d_2\beta_p-d_1\beta_{p+1}+z_{p+2}$。按照前一步的推理，我们得到等式

- $d_c^2\overline{\alpha}-d_c^1\overline{\omega_{p+1}}=0$，以及
- $\widehat{\omega}_{p+2}=d_0^{-1}(\partial_2\overline{\alpha}-d_1\overline{\omega}_{p+1})$。

因此，条件 $\alpha\in Z^{p,\ }{}_3{}^{\bullet}$ 可以改写为

- $\alpha=d_0\beta_p+\overline{\alpha}$ 对某个$\beta_p\in\mathcal{C}_{p,\bullet}$;
- $d_c^1\overline{\alpha}=0$;
- $d_c^2\overline{\alpha}-d_c^1\overline{\omega}_{p+1}=0$ 对某个 $\omega_{p+1}^{-}\in$ 核$\Box_0\cap\mathcal{C}_{p+1,\bullet}$.

r=4. 根据定义 3.1 对 $r=4$，我们有

$$\begin{aligned}\alpha\in Z_4^{p,\bullet}\iff & d_0\alpha=0 \text{ and there exist } z_{p+i}\in\mathcal{C}_{p+i,\bullet} \text{ with } i=1,2,3 \text{ such that}\\ & d_1\alpha=d_0z_{p+1}\,,\ d_2\alpha=d_1z_{p+1}+d_0z_{p+2}\,,\ d_3\alpha=d_2z_{p+1}+d_1z_{p+2}+d_0z_{p+3}\,.\end{aligned}$$

由前面的步骤，我们已经知道

- $\alpha=d_0\beta_p+\overline{\alpha}$ 对某个$\beta_p\in\mathcal{C}_{p,\bullet}$;
- $d_c^1\overline{\alpha}=0$ 和 $z_{p+1}=d_0\beta_{p+1}+\overline{\omega_{p+1}^{-}}+d_0^{-1}d_1\overline{\alpha^{-}}-d_1\beta_p$ 对于某个 $\beta_{p+1}\in\mathcal{C}_{p+1,\bullet}$ 和 $\overline{\omega_{p+1}^{-}}\in\mathcal{C}_{p+1,\bullet}\cap$核$\Box_0$;
- $d_c^2\overline{\alpha}-d_c^1\overline{\omega}_{p+1}=0$，且
- $z_{p+2}=\omega_{p+2}+d_1\beta_{p+1}-d_2\beta_p=\check{\omega}_{p+2}+\overline{\omega_{p+2}^{-}}+\widehat{\omega}_{p+2}+d_1\beta_{p+1}-d_2\beta_p=d_0\beta_{p+2}+\omega_{p+2}^{-}+d_0^{-1}(\partial_2\alpha-\overline{d_1\omega_{p+1}^{-}})+d_1\beta_{p+1}-d_2\beta_p$ 对于某些 $\beta_{p+2}\in\mathcal{C}_{p+2,\bullet}$ 且 $\omega_{p+2}\overline{\in}\mathcal{C}_{p+2,\bullet}\cap$ 核$\Box_0$。

附加条件

$$d_3\alpha = d_2 z_{p+1} + d_1 z_{p+2} + d_0 z_{p+3} \text{ for some } z_{p+3} \in \mathcal{C}_{p+3,\bullet}$$

于是得到

$$\begin{aligned} d_3(d_0\beta_p + \overline{\alpha}) =& d_2(d_0\beta_{p+1} + \overline{\omega}_{p+1} + d_0^{-1}d_1\overline{\alpha} - d_1\beta_p) + \\ &+ d_1\left[d_0\beta_{p+2} + \overline{\omega}_{p+2} + d_0^{-1}(\partial_2\overline{\alpha} - d_1\overline{\omega}_{p+1}) + d_1\beta_{p+1} - d_2\beta_p\right] + d_0 z_{p+3} \end{aligned}$$

和之前一样， $\partial_3\alpha = \partial_2\overline{\omega_{p+1}} - d_1\overline{\omega_{p+2}} \in$ 核 d_0，因为

$$d_0\left(\partial_3\overline{\alpha} - \partial_2\overline{\omega}_{p+1} - d_1\overline{\omega}_{p+2}\right) = -\,d_2 d_c^1\overline{\alpha} - d_1\left(d_c^2\overline{\alpha} - d_c^1\overline{\omega}_{p+1}\right) = 0$$

因此我们得到

- $d_c^3\overline{\alpha} - d_c^2\overline{\omega}_{p+1} - d_c^1\overline{\omega}_{p+2} = 0$ and
- $\hat{\omega}_{p+3} = d_0^{-1}\left(\partial_3\overline{\alpha} - \partial_2\overline{\omega}_{p+1} - d_1\overline{\omega}_{p+2}\right)$ where $\omega_{p+3} = d_3\beta_p - d_2\beta_{p+1} - d_1\beta_{p+2} + z_{p+3}$.

换言之，条件 $\alpha \in Z^{p,\bullet}_{4}$ 可以改写为

- $\alpha = d_0\beta_p + \overline{\alpha}$ 对于某个 $\beta_p \in \mathcal{C}_{p,\bullet}$;
- $d_c^1\overline{\alpha} = 0$ 并且 $z_{p+1} = d_0\beta_{p+1} - d_1\beta_p + \overline{\omega}_{p+1} + d_0^{-1}d_1\overline{\alpha}$ 对于某个 $\beta_{p+1} \in \mathcal{C}_{p+1,\bullet}$ 以及 $\overline{\omega}_{p+1} \in \mathcal{C}_{p+1,\bullet} \cap$ 核 $\square_0$;
- $d_c^2\overline{\alpha} - d_c^1\overline{\omega_{p+1}} = 0$ 且 $z_{p+2} = d_0\beta_{p+2} + d_1\beta_{p+1} - d_2\beta_p + \omega_{p+2} + \overline{d_0^{-1}(\partial_2\alpha - d_1\omega_{p+1})}$ 对于某个 $\beta_{p+2} \in \mathcal{C}_{p+2,\bullet}$ 且 $\omega_{p+2} \in \mathcal{C}_{p+2,\bullet} \cap$ 核 $\square_0$;
- $d_c^3\overline{\alpha} - d_c^2\overline{\omega}_{p+1} - d_c^1\overline{\omega_{p+2}} = 0$ 且 $z_{p+3} = d_0\beta_{p+3} + d_1\beta_{p+2} + d_2\beta_{p+1} - d_3\beta_p + \omega_{p+3} + \overline{d_0^{-1}(\partial_3\alpha - \partial_2\overline{\omega}_{p+1} - \overline{\partial_1\omega_{p+2}})}$ 对于某个 $\beta_{p+3} \in \mathcal{C}_{p+3,\bullet}$ 且 $\omega_{p+3} \in \mathcal{C}_{p+3,\bullet} \cap$ 核 $\square_0$

用 Rumin形式及其微分来表述，这意味着 $\alpha \in Z^{p,\bullet}_{4}$ 当且仅当

- $\alpha = d_0\beta_p + \overline{\alpha}$ 存在某个 $\beta_p \in \mathcal{C}_{p,\bullet}$;
- $d_c^1\overline{\alpha} = 0$;
- $d_c^2\overline{\alpha} - d_c^1\overline{\omega}_{p+1} = 0$ 存在某个 $\overline{\omega}_{p+1} \in \mathcal{C}_{p+1,\bullet} \cap$ 核 $\square_0$;
- $d_c^3\overline{\alpha} - d_c^2\overline{\omega}_{p+1} - d_c^1\overline{\omega}_{p+2} = 0$ 存在某个 $\overline{\omega}_{p+2} \in \mathcal{C}_{p+2,\bullet} \cap$ 核 $\square_0$。

命题 3.4. 我们用归纳法证明，对任意 $r \geq 2$，条件 $\alpha \in Z^{p,\bullet}_{r}$ 等价于存在某个 $\alpha = d_0\beta_p + \alpha\,\beta_p \in \mathcal{C}_{p,\bullet}$，并且存在 $\omega_{p+i} \in \mathcal{C}_{p+i,\bullet} \cap$ 核 $\square_0$，满足 $i = 1, \ldots, r-2$，使得

$$d_c^i\overline{\alpha} = \sum_{j=1}^{i-1} d_c^{i-j}\overline{\omega}_{p+j} \quad \textit{for each } i = 1, \ldots, r-1$$

*Pro*关于。 为了证明该断言，还需要证明对于每个 $i = 1, \ldots, r-1$

- $\omega_{p+i} = z_{p+i} + d_i\beta_p - \sum_{j=1}^{i-1} d_{i-j}\beta_{p+j}$, where
- $d_0\beta_{p+i} = \check{\omega}_{p+i}$ and $\hat{\omega}_{p+i} = d_0^{-1}\left(\partial_i\overline{\alpha} - \sum_{j=1}^{i-1}\partial_{i-j}\overline{\omega}_{p+j}\right)$, and
- $\partial_i\overline{\alpha} - \sum_{j=1}^{i-1}\partial_{i-j}\overline{\omega}_{p+j} \in \ker d_0$.

我们用归纳法来证明。根据已知的显式情形（其中 $r \leq 4$），接下来需要证明：如果这些公式对 $\alpha \in Z^{p,\bullet}_{r}$ 成立，那么它们对 $Z^{p,\bullet}_{r+1}$ 也成立。

根据定义 3.1，条件 $\alpha \in Z^{p,\bullet}_{r+1}$ 可直接表述为 $\alpha \in Z^{p,\bullet}_{r}$，此外还存在一个元素 $z_{p+r} \in \mathcal{C}_{p+r,\bullet}$ 使得

$$d_r\alpha = d_{r-1}z_{p+1} + d_{r-2}z_{p+2} + \cdots + d_1 z_{p+r-1} + d_0 z_{p+r}$$

其中，根据归纳假设，

- $\alpha = d_0\beta_p + \overline{\alpha}$ for some $\beta_p \in \mathcal{C}_{p,\bullet}$, and
- $z_{p+i} = \omega_{p+i} - d_i\beta_p + \sum_{j=1}^{i-1} d_{i-j}\beta_{p+j} = d_0\beta_{p+i} + \overline{\omega}_{p+i} + d_0^{-1}\left(\partial_i\overline{\alpha} - \sum_{j=1}^{i-1}\partial_{i-j}\overline{\omega}_{p+j}\right) - d_i\beta_p + \sum_{j=1}^{i-1} d_{i-j}\beta_{p+j}$ for each $i = 1, \ldots, r-1$.

因此，我们得到

$$d_r\alpha = d_r(d_0\beta_p + \overline{\alpha}) = \sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i} z_{p+i} + d_0 z_{p+r} = \sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i} d_0 \beta_{p+i} + \sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i}\overline{\omega}_{p+i} + \sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i} d_0^{-1}\partial_i\overline{\alpha} +$$
$$- \sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i} d_0^{-1} \sum_{j=1}^{i-1} \partial_{i-j}\overline{\omega}_{p+j} - \sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i} d_i \beta_p + \sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i} \sum_{j=1}^{i-1} d_{i-j}\beta_{p+j} + d_0 z_{p+r}$$

Re标记 3.5。利用等式（3.2），并重新标记各个求和项，我们得到加数 s

$$\sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i} d_0 \beta_{p+i} + \sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=1}^{i-1} d_{r-i} d_{i-j}\beta_{p+j} \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i} d_0^{-1} \sum_{j=1}^{i-1} \partial_{i-j}\overline{\omega}_{p+j}$$

得到化简。事实上

$$\sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i} d_0 \beta_{p+i} + \sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=1}^{i-1} d_{r-i} d_{i-j}\beta_{p+j} = d_1 d_0 \beta_{p+r-1} + \sum_{i=1}^{r-2} d_{r-i} d_0 \beta_{p+i} + \sum_{j=1}^{r-2}\sum_{i=j+1}^{r-1} d_{r-i} d_{i-j}\beta_{p+j}$$
$$\underbrace{=}_{i-j=k} d_1 d_0 \beta_{p+r-1} + \sum_{i=1}^{r-2} d_{r-i} d_0 \beta_{p+i} + \sum_{j=1}^{r-2}\sum_{k=1}^{r-1-j} d_{r-k-j} d_k \beta_{p+j}$$
$$= d_1 d_0 \beta_{p+r-1} + \sum_{i=1}^{r-2}\left(d_{r-i} d_0 + \sum_{k=1}^{r-i-1} d_{r-i-k} d_k\right)\beta_{p+i} = -d_0 d_1 \beta_{p+r-1} - \sum_{i=1}^{r-2} d_0 d_{r-i}\beta_{p+i}$$
$$= -d_0\left(d_1\beta_{p+r-1} + \sum_{i=1}^{r-2} d_{r-i}\beta_{p+i}\right) = -d_0 \sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i}\beta_{p+i}$$

and

$$\sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i} d_0^{-1} \sum_{j=1}^{i-1} \partial_{i-j}\overline{\omega}_{p+j} = \sum_{j=1}^{r-2}\sum_{i=j+1}^{r-1} d_{r-i} d_0^{-1}\partial_{i-j}\overline{\omega}_{p+j} \underbrace{=}_{i-j=k} \sum_{j=1}^{r-2}\sum_{k=1}^{r-1-j} d_{r-(k+j)} d_0^{-1}\partial_k\overline{\omega}_{p+j}$$
$$= \sum_{i=1}^{r-2}\sum_{j=1}^{r-i-1} d_{(r-i)-j} d_0^{-1}\partial_j\overline{\omega}_{p+i}\,.$$

利用这些化简，我们得到

$$d_r\overline{\alpha} - \sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i} d_0^{-1}\partial_i\overline{\alpha} - \sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i}\overline{\omega}_{p+i} + \sum_{i=1}^{r-2}\sum_{j=1}^{r-i-1} d_{(r-i)-j} d_0^{-1}\partial_j\overline{\omega}_{p+i} =$$
$$= -d_0\sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i}\beta_{p+i} - d_r d_0\beta_p - \sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i} d_i\beta_p + d_0 z_{p+r}$$
$$\Leftrightarrow\ \partial_r\overline{\alpha} - \sum_{i=1}^{r-1}\partial_{r-i}\overline{\omega}_{p+i} = d_0\left(d_r\beta_p - \sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i}\beta_{p+i} + z_{p+r}\right).$$

关于以下断言： $\partial_r\overline{\alpha} - \sum_{i=1}^{r-1}\partial_{r-i}\overline{\omega}_{p+i} \in$ 核 d_0 由引理 3.3 结合归纳假设即可得出，因为

$$d_0\left(\partial_r\overline{\alpha} - \sum_{i=1}^{r-1}\partial_{r-i}\overline{\omega}_{p+i}\right) = -\sum_{j=1}^{r-1} d_j\left(\partial_{r-j} - d_0 d_0^{-1}\partial_{r-j}\right)\overline{\alpha} + \sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=1}^{r-i-1} d_j\left(\partial_{r-i-j} - d_0 d_0^{-1}\partial_{r-i-j}\right)\overline{\omega}_{p+i}$$
$$= -d_{r-1}\left(\partial_1 - d_0 d_0^{-1}\partial_1\right)\overline{\alpha} - \sum_{j=1}^{r-2} d_j\left(\partial_{r-j} - d_0 d_0^{-1}\partial_{r-j}\right)\overline{\alpha} + \sum_{j=1}^{r-2}\sum_{i=1}^{r-j-1} d_j\left(\partial_{r-i-j} - d_0 d_0^{-1}\partial_{r-i-j}\right)\overline{\omega}_{p+i}$$

$$= - d_{r-1} d_c^1 \overline{\alpha} + \sum_{j=1}^{r-2} d_j \left(d_c^{r-j} \overline{\alpha} - \sum_{i=1}^{r-j-1} d_c^{(r-j)-i} \overline{\omega}_{p+i} \right) = 0 \, .$$

因此，

$$d_c^r \overline{\alpha} - \sum_{i=1}^{r-1} d_c^{r-i} \overline{\omega}_{p+i} + d_0 d_0^{-1} \left(\partial_r \overline{\alpha} - \sum_{i=1}^{r-1} \partial_{r-i} \overline{\omega}_{p+i} \right) = d_0 \left(d_r \beta_p - \sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i} \beta_{p+i} + z_{p+r} \right) = d_0 \omega_{p+r}$$

如果我们施加 $\omega_{p+r} = d_r \beta_p - \sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i} \beta_{p+i} + z_{p+r}$。

总之，我们已经证明了

- $d_c^r \overline{\alpha} - \sum_{i=1}^{r-1} d_c^{r-i} \overline{\omega}_{p+i} = 0$ 根据 Hodge分解 2.5；
- $\hat{\omega}_{p+r} = d_0^{-1} \left(\partial_r \overline{\alpha} - \sum_{i=1}^{r-1} \partial_{r-i} \overline{\omega}_{p+i} \right)$，并且
- $\check{\omega}_{p+r} = d_0 \beta_{p+r}$ 对某个 $\beta_{p+r} \in \mathcal{C}_{p+r,\bullet}$。

□

3.2. **用 $B^{p,\bullet}_r$ 表示 Rumin形式和 Rumin微分。** 在这种情况下，利用命题 3.4 的结果，可以简化计算。

r=1. 根据定义 3.1 对 $r = 1$，我们有

$$\alpha \in B_1^{p,\bullet} \iff \exists \, c_p \in \mathcal{C}_{p,\bullet} \text{ such that } \alpha = d_0 c_p \, .$$

换言之，α 属于 $B^{p,\bullet}_1$ 当且仅当它是 $\operatorname{Im} d_0$中的一个元素。

r=2. 根据定义 3.1 对 $r = 2$，我们有

$$\begin{aligned} \alpha \in B_2^{p,\bullet} \iff & \exists \, c_{p-i} \in \mathcal{C}_{p-i,\bullet} \text{ with } i = 0, 1 \text{ such that} \\ & d_0 c_{p-1} = 0 \text{ and } d_1 c_{p-1} + d_0 c_p = \alpha \, . \end{aligned}$$

换言之，我们说的是 $c_{p-1} \in Z^{p-1,\bullet}_1$ 其中 $c_{p-1} = d_0 \beta_{p-1} + c_{p-1}$，对某个 $\beta_{p-1} \in \mathcal{C}_{p-1,\bullet}$成立。此外，

$$\alpha = d_1 c_{p-1} + d_0 c_p = d_1 (d_0 \beta_{p-1} + \overline{c}_{p-1}) + d_0 c_p = d_1 \overline{c}_{p-1} - d_0 d_1 \beta_{p-1} + d_0 c_p \, .$$

由于 $d_1 \overline{c}_{p-1} \in \ker d_0$，我们有

$$\alpha = d_c^1 \overline{c}_{p-1} + d_0 d_0^{-1} d_1 \overline{c}_{p-1} - d_0 d_1 \beta_{p-1} + d_0 c_p \, .$$

这尤其意味着 $\alpha \in \ker \Box_0 \oplus \operatorname{Im} d_0 = \ker d_0$。

r=3. 根据定义 3.1 对于 $r = 3$，我们有

$$\begin{aligned} \alpha \in B_3^{p,\bullet} \iff & \exists \, c_{p-i} \in \mathcal{C}_{p-i,\bullet} \text{ with } i = 0, 1, 2 \text{ such that} \\ & d_0 c_{p-2} = 0 \, , \; d_1 c_{p-2} + d_0 c_{p-1} = 0 \text{ and } d_2 c_{p-2} + d_1 c_{p-1} + d_0 c_p = \alpha \, . \end{aligned}$$

同样，前面的方程表明 $c_{p-2} \in Z^{p-2,\bullet}_2$ 其中 $c_{p-2} = d_0 \beta_{p-2} + c_{p-2}$ 对于某个 $\beta_{p-2} \in \mathcal{C}_{p-2,\bullet}$ 且

$$d_1 (d_0 \beta_{p-2} + \overline{c}_{p-2}) + d_0 c_{p-1} = 0 \iff d_1 \overline{c}_{p-2} = d_0 d_1 \beta_{p-2} - d_0 c_{p-1} \, .$$

令 $\omega_{p-1} = d_1 \beta_{p-2} - c_{p-1}$，并重复前面的推理，可得

- $\partial_1 \overline{c}_{p-2} \in$ 核 d_0；
- $d_c^1 \overline{c}_{p-2} = 0$；
- $\hat{\omega}_{p-1} = d_0^{-1} d_1 \overline{c}_{p-2}$ 且 $\check{\omega}_{p-1} = d_0 \beta_{p-1}$ 对于某个 $\beta_{p-1} \in \mathcal{C}_{p-1,\bullet}$。

此外，最后一个方程为

$$\begin{aligned} \alpha =& d_2 (d_0 \beta_{p-2} + \overline{c}_{p-2}) + d_1 (d_1 \beta_{p-2} - \omega_{p-1}) + d_0 c_p \\ =& d_2 d_0 \beta_{p-2} + d_2 \overline{c}_{p-2} + d_1^2 \beta_{p-2} - d_1 d_0 \beta_{p-1} - d_1 \overline{\omega}_{p-1} - d_1 d_0^{-1} d_1 \overline{c}_{p-2} + d_0 c_p \\ =& \partial_2 \overline{c}_{p-2} - d_1 \overline{\omega}_{p-1} - d_0 d_2 \beta_{p-2} + d_0 d_1 \beta_{p-1} + d_0 c_p \\ =& d_c^2 \overline{c}_{p-2} - d_c^1 \overline{\omega}_{p-1} + d_0 d_0^{-1} \left(\partial_2 \overline{c}_{p-2} - d_1 \overline{\omega}_{p-1} \right) - d_0 d_2 \beta_{p-2} + d_0 d_1 \beta_{p-1} + d_0 c_p \, . \end{aligned}$$

注意，这里我们用到了 $\partial_2 c_{p-2} - \partial_1 \omega_{p-1} \in$ 核 d_0 这一事实，它还意味着 $\alpha \in$ 核 $\Box_0 \oplus$像 $d_0 =$ 核 d_0。

命题 3.6。 我们来证明，对于任意 $r \geq 2$，条件 $\alpha \in B^{p,}{}_{r}{}^{\bullet}$等价于存在 $c_{p-r+1} \in Z^{p-(r-1)}{}_{,\,r-1}{}^{\bullet}$，从而 $c_{p-r+1} = d_0\beta_{p-r+1} + c_{p-r+1}$ 对于某个 $\beta_{p-r+1} \in \mathcal{C}_{p-r+1,\bullet}$ 以及$\omega_{p-r+i} \in \mathcal{C}_{p-r+i,\bullet}$ ∩核 $\square_0$，其中 $i = 2, \ldots, \overline{r} - 1$ 满足

$$d_c^i \overline{c}_{p-r+1} = \sum_{j=1}^{i-1} d_c^{i-j} \overline{\omega}_{p-r+1+j} \quad \textit{for each } i = 1, \ldots, r-2$$

and

$$\begin{aligned}\alpha =& d_c^{r-1}\overline{c}_{p-r+1} - \sum_{i=1}^{r-2} d_c^{r-1-i}\overline{\omega}_{p-r+1+i} + d_0 d_0^{-1}\left(\partial_{r-1}\overline{c}_{p-r+1} - \sum_{i=1}^{r-2}\partial_{r-1-i}\overline{\omega}_{p-r+1+i}\right) + \\ &- d_0 d_{r-1}\beta_{p-r+1} + d_0\sum_{i=1}^{r-2} d_i\beta_{p-i} + d_0 c_p \quad \textit{for some } \beta_{p-i} \in \mathcal{C}_{p-i,\bullet} \textit{ with } i = 1, \ldots, r-2\,.\end{aligned}$$

证明。 根据定义 3.1，若 $\alpha \in B^{p}{}_{,r}{}^{\bullet}$则存在 $c_{p-r+1} \in \mathcal{C}_{p-r+1,\bullet}$ 属于 $Z^{p-r+1}{}_{,r-1}{}^{\bullet}$。因此，根据我们在命题 3.4 中所证明的，我们有 $c_{p-r+1} = d_0\beta_{p-r+1} + c_{p-r+1}$ 对某个 $\beta_{p-r+1}\overline{\in} \mathcal{C}_{p-r+1,\bullet}$。此外，存在 $\beta_{p-r+1+i} \in \mathcal{C}_{p-r+1+i,\bullet}$ 以及 $\omega_{p-r+1+i} \in \mathcal{C}_{p-r+1+i,\bullet}\overline{\cap}$核 $\square_0$，对于 $i = 1, \ldots, r-3$ 使得

$$d_c^i \overline{c}_{p-r+1} = \sum_{j=1}^{i-1} d_c^{i-j}\overline{\omega}_{p-r+1+j} \quad \text{for each } i = 1, \ldots, r-2\,.$$

注意，对于 $i = 1, \ldots, r-3$（使用用于定义 $B^{p}{}_{,r}{}^{\bullet}$的相同记号，见定义 3.1）

- $\omega_{p-r+1+i} = -c_{p-r+1+i} + d_i\beta_{p-r+1} - \sum_{j=1}^{i-1} d_{i-j}\beta_{p-r+1+j}$, where
- $d_0\beta_{p-r+1+i} = \check{\omega}_{p-r+1+i}$ and $\hat{\omega}_{p-r+1+i} = d_0^{-1}\left(\partial_i\overline{c}_{p-r+1} - \sum_{j=1}^{i-1}\partial_{i-j}\overline{\omega}_{p-r+1+j}\right)$ and
- $\partial_i\overline{c}_{p-r+1} - \sum_{j=1}^{i-1}\partial_{i-j}\overline{\omega}_{p-r+1+j} \in \ker d_0$.

接下来，我们来研究最后一个方程，其中

$$\alpha = \sum_{i=0}^{r-2} d_{r-1-i}c_{p-r+1+i} + d_0 c_p \quad \text{for some } c_p \in \mathcal{C}_{p,\bullet}\,.$$

利用上文所述的事实 $c_{p-r+1} \in Z^{p-r+1}{}_{,\,r-1}{}^{\bullet}$，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{r-2} d_{r-1-i}c_{p-r+1+i} =& d_{r-1}d_0\beta_{p-r+1} + d_{r-1}\overline{c}_{p-r+1} - \sum_{i=1}^{r-2} d_{r-1-i}\omega_{p-r+1+i} + \sum_{i=1}^{r-2} d_{r-1-i}d_i\beta_{p-r+1} + \\ &- \sum_{i=1}^{r-2} d_{r-1-i}\sum_{j=1}^{i-1} d_{i-j}\beta_{p-r+1+j} \\ =& d_{r-1}d_0\beta_{p-r+1} + d_{r-1}\overline{c}_{p-r+1} - \sum_{i=1}^{r-2} d_{r-1-i}d_0\beta_{p-r+1+i} - \sum_{i=1}^{r-2} d_{r-1-i}\overline{\omega}_{p-r+1+i} + \\ &- \sum_{i=1}^{r-2} d_{r-1-i}d_0^{-1}\left(\partial_i\overline{c}_{p-r+1} - \sum_{j=1}^{i-1}\partial_{i-j}\overline{\omega}_{p-r+1+j}\right) + \\ &+ \sum_{i=1}^{r-2} d_{r-1-i}d_i\beta_{p-r+1} - \sum_{i=1}^{r-2} d_{r-1-i}\sum_{j=1}^{i-1} d_{i-j}\beta_{p-r+1+j} \\ =& \partial_{r-1}\overline{c}_{p-r+1} - \sum_{i=1}^{r-2}\partial_{r-1-i}\overline{\omega}_{p-r+1+i} - d_0 d_{r-1}\beta_{p-r+1} + d_0\sum_{i=1}^{r-2} d_{r-1-i}\beta_{p-r+1+i} \\ =& \partial_{r-1}\overline{c}_{p-r+1} - \sum_{i=1}^{r-2}\partial_{r-1-i}\overline{\omega}_{p-r+1+i} - d_0 d_{r-1}\beta_{p-r+1} + d_0\sum_{i=1}^{r-2} d_i\beta_{p-i}\end{aligned}$$

因此，我们得到了所要证明的结论。 □

3.3.用 Rumin 形式和 Rumin 微分表示谱序列的微分。利用 $Z^{p,\bullet}_r$和 $B^{p,\bullet}_r$分次子模，可以明确表示谱序列每一页上出现的微分。

命题 3.7 (定理 *2.10*）。谱序列的 r^{th} 微分对应于映射

$$\begin{aligned}\Delta_r\colon Z^{p,\bullet}_r/B^{p,\bullet}_r &\longrightarrow Z^{p+r,\bullet}_r/B^{p+r,\bullet}_r\\ \Delta_r([x]) &= \left[d_r x - \sum_{i=1}^{r-1} d_i z_{p+r-i}\right]\end{aligned}$$

其中 $x \in Z^{p,\bullet}_r$并且族 $\{z_{p+j}\}_{1\le j\le r-1}$ 满足定义 *3.1* 的方程

在一般情形下完整证明这一结论之前，我们先明确考察几个特例。为此，我们将沿用前面几个小节中已经得到的结果。

r=1。在这种情况下，我们有 $\alpha \in Z^{p,\bullet}_1$，即 $\alpha = d_0\beta_p + \overline{\alpha}$ 对于某个 $\beta_p \in \mathcal{C}_{p,\bullet}$。因此， Δ_1 的作用形式为

$$\Delta_1\alpha = d_1\alpha = d_1d_0\beta_p + d_1\overline{\alpha} = d_c^1\overline{\alpha} + d_0d_0^{-1}d_1\overline{\alpha} - d_0d_1\beta_p = d_c^1\overline{\alpha} + d_0\left(d_0^{-1}d_1\overline{\alpha} - d_1\beta_p\right).$$

由于一个元素属于 $B^{p+1,\bullet}_1$ 当且仅当它属于 d_0的像，因此

$$\left[d_c^1\overline{\alpha} + d_0\left(d_0^{-1}d_1\overline{\alpha} - d_1\beta_p\right)\right] = \left[d_c^1\overline{\alpha}\right].$$

*r=2. </style}*在这种情况下，如果存在 $,\bullet$ 和 $z_{p+1} \in \mathcal{C}_{p+1,\bullet}$，使得

$$\alpha = d_0\beta_p + \overline{\alpha} \quad \text{and} \quad d_1\alpha - d_0z_{p+1} = 0\,.$$

根据前面的讨论，如果我们施加 $\omega_{p+1} = z_{p+1} + d_1\beta_p$，那么

- $d_c^1\overline{\alpha} = 0$;
- $\omega_{p+1} = d_0\beta_{p+1}$ 对于某个 $\beta_{p+1} \in \mathcal{C}_{p+1,\bullet}$，且
- $\omega_{p+1} = d_0^{-1}d_1\alpha$

使得

$$\begin{aligned}d_2\alpha - d_1z_{p+1} =& d_2d_0\beta_p + d_2\overline{\alpha} - d_1d_0\beta_{p+1} - d_1\overline{\omega}_{p+1} - d_1d_0^{-1}d_1\overline{\alpha} + d_1^2\beta_p\\ =& \partial_2\overline{\alpha} - d_1\overline{\omega}_{p+1} + d_0d_1\beta_{p+1} - d_0d_2\beta_p\\ =& d_c^2\overline{\alpha} - d_c^1\overline{\omega}_{p+1} + d_0d_0^{-1}\left(\partial_2\overline{\alpha} - d_1\overline{\omega}_{p+1}\right) + d_0d_1\beta_{p+1} - d_0d_2\beta_p\,.\end{aligned}$$

注意到，元素 $x \in B^{p+2,\bullet}_2$，如果存在 $c_{p+1} \in Z^{p+1,\bullet}_1$，使得$c_{p+1} = d_0\beta_{p+1} + c_{p+1}$ 对某个 $\beta_{p+1} \in \mathcal{C}_{p+1,\bullet}$ 且

$$x = d_c^1\overline{c}_{p+1} + d_0d_0^{-1}d_1\overline{c}_{p+1} - d_0d_1\beta_{p+1} + d_0c_{p+2} \quad \text{for some } c_{p+2} \in \mathcal{C}_{p+2,\bullet}\,.$$

因此，如果我们选取

- $c_{p+1} = -d_0\beta_{p+1} - \overline{\omega}_{p+1}$, and
- $c_{p+2} = d_0^{-1}\partial_2\overline{\alpha} - d_2\beta_p$

我们有

$$\Delta_2([\alpha]) = \left[d_c^2\overline{\alpha} - \left(d_c^1\overline{\omega}_{p+1} + d_0d_0^{-1}d_1\overline{\omega}_{p+1} - d_0d_1\beta_{p+1}\right) + d_0\left(d_0^{-1}\partial_2\overline{\alpha} - d_2\beta_p\right)\right] = \left[d_c^2\overline{\alpha}\right].$$

$r=3$. 在此 在 s 的情形下，我们有 $\alpha\in Z^{p,3}_\bullet$ 如果存在 $\beta_p\in\mathcal{C}_{p,\bullet}$ 以及 $z_{p+i}\in\mathcal{C}_{p+i,\bullet}$ 对于 $i=1,2$，使得

$$\alpha=d_0\beta_p+\overline{\alpha}\ ,\ d_1\alpha-d_0z_{p+1}=0\ ,\ d_2\alpha-d_1z_{p+1}-d_0z_{p+2}=0\,.$$

若我们施加 $\omega_{p+1}=z_{p+1}+d_1\beta_p$ 和 $\omega_{p+2}=d_2\beta_p-d_1\beta_{p+1}+z_{p+2}$，则有

- $d_c^1\overline{\alpha}=d_c^2\overline{\alpha}-d_c^1\overline{\omega}_{p+1}=0$,
- $\check{\omega}_{p+1}=d_0\beta_{p+1}$ 和 $\check{\omega}_{p+2}=d_0\beta_{p+2}$，其中某个 $\beta_{p+i}\in\mathcal{C}_{p+i,\bullet}$ 满足 $i=1,2$;
- $\hat{\omega}_{p+1}=d_0^{-1}d_1\overline{\alpha}$ 和 $\hat{\omega}_{p+2}=d_0^{-1}(\partial_2\alpha-d_1\omega_{p+1})$

我们得到

$$\begin{aligned}d_3\alpha-d_2z_{p+1}-d_1z_{p+2}=&d_3d_0\beta_p+d_3\overline{\alpha}-d_2d_0\beta_{p+1}-d_2\overline{\omega}_{p+1}-d_2d_0^{-1}d_1\overline{\alpha}+d_2d_1\beta_p+\\&-d_1d_0\beta_{p+2}-d_1\overline{\omega}_{p+2}-d_1d_0^{-1}\left(\partial_2\overline{\alpha}-d_1\overline{\omega}_{p+1}\right)+d_1d_2\beta_p-d_1^2\beta_{p+1}\\=&\partial_3\overline{\alpha}-\partial_2\overline{\omega}_{p+1}-d_1\overline{\omega}_{p+2}-d_0d_3\beta_p+d_0d_2\beta_{p+1}+d_0d_1\beta_{p+2}\\=&d_c^3\overline{\alpha}-d_c^2\overline{\omega}_{p+1}-d_c^1\overline{\omega}_{p+2}+d_0d_0^{-1}\left(\partial_3\overline{\alpha}-\partial_2\overline{\omega}_{p+1}-d_1\overline{\omega}_{p+2}\right)+\\&-d_0d_3\beta_p+d_0d_2\beta_{p+1}+d_0d_1\beta_{p+2}\,.\end{aligned}$$

注意，元素 $x\in B^{p+3}_{\bullet,3}$，如果存在 $c_{p+1}\in Z^{p+1}_{\bullet,2}$，使得对于某个 $c_{p+1}=d_0\beta_{p+1}+c_{p+1}$ $\beta_{p+1}\in\mathcal{C}_{p+1,\bullet}$，有 $d_c^1c_{p+1}=0$ 且

$$x=d_c^2\overline{c}_{p+1}-d_c^1\overline{\omega}_{p+2}+d_0d_0^{-1}\left(\partial_2\overline{c}_{p+1}-d_1\overline{\omega}_{p+2}\right)-d_0d_2\beta_{p+1}+d_0d_1\beta_{p+2}+d_0c_{p+3}$$

对于某个 $\omega_{p+2}\in\mathcal{C}_{p+2,\bullet}$，使得 $\check{\omega}_{p+2}=d_0\beta_{p+2}$，并且存在某个 $c_{p+3}\in\mathcal{C}_{p+3,\bullet}$。因此，如果我们选择

- $c_{p+1}=-d_0\beta_{p+1}$，即我们取 $c_{p+1}=0$;
- $c_{p+2}=-d_1\beta_{p+1}+d_0\beta_{p+2}+\omega_{p+2}$，并且
- $c_{p+3}=d_0^{-1}(\partial_3\overline{\alpha}-\partial_2\overline{\omega}_{p+1})-d_3\beta_p$

我们有

$$\begin{aligned}\Delta_3\left([\alpha]\right)=&\left[d_c^3\overline{\alpha}-d_c^2\overline{\omega}_{p+1}-d_c^1\overline{\omega}_{p+2}-d_0d_0^{-1}\left(\partial_2\overline{\omega}_{p+1}+d_1\overline{\omega}_{p+2}\right)+d_0d_2\beta_{p+1}+d_0d_1\beta_{p+2}\right.\\&\left.+d_0d_0^{-1}\partial_3\overline{\alpha}-d_0d_3\beta_p\right]=\left[d_c^3\overline{\alpha}-d_c^2\overline{\omega}_{p+1}\right]\,.\end{aligned}$$

最重要的是，一般而言，我们无法同时取 $c_{p+1}=-d_0\beta_{p+1}-\omega_{p+1}$ 和 $c_{p+3}=d_0^{-1}\partial_3\alpha-d_3\beta_p$，尽管这样做会得到

$$x=-d_c^2\overline{\omega}_{p+1}-d_c^1\overline{\omega}_{p+2}+d_0d_0^{-1}\left(\partial_3\overline{\alpha}-\partial_2\overline{\omega}_{p+1}-d_1\overline{\omega}_{p+2}\right)+d_0\left(d_2\beta_{p+1}+d_1\beta_{p+2}-d_3\beta_p\right)$$

并进一步简化 Δ_3的表达式。这是因为一般而言，$d_c^1\omega_{p+1}$ 不会消失。实际上，只有当 $d_c^2\alpha=0$时，条件 $d_c^1\omega_{p+1}=0$ 才成立，因为 $d_c^2\alpha-d_c^1\omega_{p+1}=0$。

$r=4$。在这种情况下，若存在 $\beta_p\in\mathcal{C}_{p,\bullet}$和 $z_{p+i}\in\mathcal{C}_{p+i,\bullet}$，使得对于 $i=1,2,3$，$\alpha\in Z^{p,4}_\bullet$

$$\alpha=d_0\beta_p+\overline{\alpha}\,,\,d_1\alpha+d_0z_{p+1}=d_2\alpha+d_1z_{p+1}+d_2z_{p+2}=d_3\alpha+d_2z_{p+1}+d_1z_{p+2}+d_0z_{p+3}=0\,.$$

若我们施加 $\omega_{p+1}=z_{p+1}+d_1\beta_p$、$\omega_{p+2}=z_{p+2}+d_2\beta_p-d_1\beta_{p+1}$和 $\omega_{p+3}=z_{p+3}+d_3\beta_p-d_2\beta_{p+1}-d_1\beta_{p+2}$，则有

- $d_c^1\overline{\alpha}=d_c^2\overline{\alpha}-d_c^1\overline{\omega}_{p+1}=d_c^3\overline{\alpha}-d_c^2\overline{\omega}_{p+1}-d_c^1\overline{\omega}_{p+2}=0$;
- $\check{\omega}_{p+1}=d_0\beta_{p+1}$、$\check{\omega}_{p+2}=d_0\beta_{p+2}$和$\check{\omega}_{p+3}=d_0\beta_{p+3}$，对某些$\beta_{p+i}\in\mathcal{C}_{p+i,\bullet}$，具有 $i=1,2,3$;
- $\hat{\omega}_{p+1}=d_0^{-1}d_1\overline{\alpha}$、$\hat{\omega}_{p+2}=d_0^{-1}(\partial_2\alpha-d_1\omega_{p+1})$和$\hat{\omega}_{p+3}=d_0^{-1}(\partial_3\alpha-\partial_2\omega_{p+1}-d_1\omega_{p+2})$

于是我们得到

$$\begin{aligned}d_4\alpha-d_3z_{p+1}-d_2z_{p+2}-&d_1z_{p+3}=d_4(d_0\beta_p+\overline{\alpha})-d_3\left(d_0\beta_{p+1}+\overline{\omega}_{p+1}+d_0^{-1}d_1\overline{\alpha}-d_1\beta_p\right)+\\&-d_2\left[d_0\beta_{p+2}+\overline{\omega}_{p+2}+d_0^{-1}\left(\partial_2\overline{\alpha}-d_1\overline{\omega}_{p+1}\right)-d_2\beta_p+d_1\beta_{p+1}\right]+\\&-d_1\left[d_0\beta_{p+3}+\overline{\omega}_{p+3}+d_0^{-1}\left(\partial_3\overline{\alpha}-\partial_2\overline{\omega}_{p+1}-\partial_1\overline{\omega}_{p+2}\right)-d_3\beta_p+d_2\beta_{p+1}+d_1\beta_{p+2}\right]\\=&\partial_4\overline{\alpha}-\partial_3\overline{\omega}_{p+1}-\partial_2\overline{\omega}_{p+2}-d_1\overline{\omega}_{p+3}-d_0d_4\beta_p+d_0d_3\beta_{p+1}+d_0d_2\beta_{p+2}+d_0d_1\beta_{p+3}\\=&d_c^4\overline{\alpha}-d_c^3\overline{\omega}_{p+1}-d_c^2\overline{\omega}_{p+2}-d_c^1\overline{\omega}_{p+3}+d_0d_0^{-1}\left(\partial_4\overline{\alpha}-\partial_3\overline{\omega}_{p+1}-\partial_2\overline{\omega}_{p+2}-d_1\overline{\omega}_{p+3}\right)+\\&-d_0d_4\beta_p+d_0d_3\beta_{p+1}+d_0d_2\beta_{p+2}+d_0d_1\beta_{p+3}\,.\end{aligned}$$

另一方面，元素 $x \in B^{p+4}$, 4 • 如果存在 $c_{p+1} \in Z^{p+1}$, 3 •，使得 $c_{p+1} = d_0\beta_{p+1} + c_{p+1}$ 对于某个 $\beta_{p+1} \in \mathcal{C}_{p+1}$, •，以及 $\omega_{p+2} \in$ 核$\square_0 \cap \mathcal{C}_{p+2}$, •，满足 $d_c^1 c_{p+1} = d_c^2 c_{p+1} = d_c^1 \omega_{p+2} = 0$，并且

$$x = d_c^3 \bar{c}_{p+1} + d_0 d_0^{-1} \partial_3 \bar{c}_{p+1} - d_0 d_3 \beta_{p+1} - \sum_{i=1}^{2} \left(d_c^i \overline{\omega}_{p+4-i} + d_0 d_0^{-1} \partial_i \overline{\omega}_{p+4-i} + d_0 d_i \beta_{p+4-i} \right) + d_0 c_{p+4}$$

对于某个 $\omega_{p+3} \in \mathcal{C}_{p+3}$, • 以及 $\check{\omega}_{p+i} = d_0\beta_{p+i}$ 对于 $i = 2,3$。因此，如果我们选择

- $c_{p+1} = -d_0\beta_{p+1}$，即 $\bar{c}_{p+1} = 0$,
- $c_{p+2} = -d_1\beta_{p+1} + d_0\beta_{p+2}$，即 $\overline{\omega}_{p+2} = 0$,
- $c_{p+3} = -d_2\beta_{p+1} + d_1\beta_{p+2} + d_0\beta_{p+3} + \omega_{p+3}$，并且
- $c_{p+4} = d_0^{-1}(\partial_4\bar{\alpha} - \partial_3\overline{\omega}_{p+1} - \partial_2\overline{\omega}_{p+2}) - d_4\beta_p$

我们有

$$\begin{aligned}\Delta_4([\overline{\alpha}]) =& [d_c^4\overline{\alpha} - d_c^3\overline{\omega}_{p+1} - d_c^2\overline{\omega}_{p+2} - d_c^1\overline{\omega}_{p+3} + d_0 d_0^{-1}(\partial_4\overline{\alpha} - \partial_3\overline{\omega}_{p+1} - \partial_2\overline{\omega}_{p+2} - \partial_1\overline{\omega}_{p+3}) + \\ & - d_0 d_4\beta_p + d_0(d_3\beta_{p+1} + d_2\beta_{p+2} + d_1\beta_{p+3})] = \left[d_c^4\overline{\alpha} - d_c^3\overline{\omega}_{p+1} - d_c^2\overline{\omega}_{p+2}\right].\end{aligned}$$

同样，与前一种情况一样，除非有 $d_c^1\omega_{p+1} = d_c^2\omega_{p+1} + d_c^1\overline{\omega}_{p+2} = 0$，否则微分 $\Delta_4([\alpha])$ 的表达式无法化简为 $[d_c^4\alpha]$。注意，这也意味着 $d_c^2\alpha = d_c^3\alpha = 0$。

命题 3.8。我们来证明，对于任意 $r \geq 1$，给定任意一个 $\alpha \in Z^p$, r •谱序列第 r^{th} 页的作用由下式给出

$$\Delta_r([\alpha]) = \left[d_c^r\overline{\alpha} - \sum_{i=2}^{r-1} d_c^i\overline{\omega}_{p+r-i} \right], \tag{3.3}$$

其中 $\omega_{p+r-i} \in$ 核$\square_0 \cap \mathcal{C}_{p+r-i}$, • 使得 $d_c^j\alpha = \sum_{i=1}^{j-1} d_c^i\omega_{p+j-i} = 0$ 对于 $j = 1, \ldots, r-1$.

证明。设 $\alpha \in Z^p$, r •，那么根据命题 3.4 中已证明的结论可知，对于某个 $\beta_p \in \mathcal{C}_p$，有 $\alpha = d_0\beta_p + \alpha$ •。此外，对于每个 $i = 1, \ldots, r-1$，都存在 z_{p+i}，$\beta_{p+i} \in \mathcal{C}_{p+i}$, •，使得

- $\omega_{p+i} = z_{p+i} + d_i\beta_p - \sum_{j=1}^{i-1} d_{i-j}\beta_{p+j}$,
- $\check{\omega}_{p+i} = d_0\beta_{p+i}$ and $\hat{\omega}_{p+i} = d_0^{-1}\left(\partial_i\overline{\alpha} - \sum_{j=1}^{i-1}\partial_{i-j}\overline{\omega}_{p+j}\right)$.

因此

$$\begin{aligned}d_r\alpha - \sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i}z_{p+i} =& d_r d_0\beta_p + d_r\overline{\alpha} - \sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i}\omega_{p+i} + \sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i}d_i\beta_p - \sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i}\sum_{j=1}^{i-1} d_{i-j}\beta_{p+j} \\ =& d_r d_0\beta_p + d_r\overline{\alpha} - \sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i}d_0\beta_{p+i} - \sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i}\overline{\omega}_{p+i} - \sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i}d_0^{-1}\partial_i\overline{\alpha} + \\ & + \sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i}d_0^{-1}\sum_{j=1}^{i-1}\partial_{i-j}\overline{\omega}_{p+j} + \sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i}d_i\beta_p - \sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i}\sum_{j=1}^{i-1} d_{i-j}\beta_{p+j} \\ =& \partial_r\overline{\alpha} - \sum_{i=1}^{r-1}\partial_{r-i}\overline{\omega}_{p+i} + d_0\sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i}\beta_{p+i} - d_0 d_r\beta_p \\ =& d_c^r\overline{\alpha} + d_0 d_0^{-1}\partial_r\overline{\alpha} + d_c^{r-1}(-\overline{\omega}_{p+1}) + d_0 d_0^{-1}\partial_{r-1}(-\overline{\omega}_{p+1}) - d_0 d_{r-1}(-\beta_{p+1}) + \\ & - \sum_{i=2}^{r-1} d_c^{r-i}\overline{\omega}_{p+i} - d_0 d_0^{-1}\sum_{i=2}^{r-1}\partial_{r-i}\overline{\omega}_{p+i} + d_0\sum_{i=2}^{r-1} d_{r-i}\beta_{p+i} - d_0 d_r\beta_p.\end{aligned}$$

根据命题3.6，元素$x \in \mathcal{C}_{p+r}$, • 属于 B^{p+r}, r •，如果

$$\begin{aligned}x =& d_c^{r-1}\bar{c}_{p+1} - \sum_{i=1}^{r-2} d_c^{r-1-i}\overline{\omega}_{p+1+i} + d_0 d_0^{-1}\left(\partial_{r-1}\bar{c}_{p+1} - \sum_{i=1}^{r-2}\partial_{r-1-i}\overline{\omega}_{p+1+i}\right) + \\ & - d_0 d_{r-1}\beta_{p+1} + d_0\sum_{i=1}^{r-2} d_i\beta_{p+r-i} + d_0 c_{p+r}\end{aligned}$$

其中

- $c_{p+1} = d_0\beta_{p+1} + \overline{c}_{p+1} \in$ 核 d_0 对于某个 $\beta_{p+1} \in \mathcal{C}_{p+1,\bullet}$;
- 对于每个 $i = 1, \dots, r-2$，我们取 $\omega_{p+i} \in \mathcal{C}_{p+i,\bullet}$，使得 $\breve{\omega}_{p+i} = d_0\beta_{p+i}$ 对于某个 $\beta_{p+i} \in \mathcal{C}_{p+i,\bullet}$。

只需取

- $c_{p+1} = -d_0\beta_{p+1}$,
- $c_{p+i} = -d_{i-1}\beta_{p+1} + \sum_{j=0}^{i-2} d_j\beta_{p+i-j}$ for $i = 2, \dots, r-2$,
- $c_{p+r-1} = -d_{r-2}\beta_{p+1} + \sum_{j=0}^{r-3} d_j\beta_{p+r-1-j} + \overline{\omega}_{p+r-1}$,
- $c_{p+r} = d_0^{-1}\partial_r\overline{\alpha} - d_r\beta_p$,

即可得到所述结论

$$\Delta_r([\alpha]) = \left[d_r\alpha - \sum_{i=1}^{r-1} d_{r-i}z_{p+i}\right] = \left[d_c^r\overline{\alpha} - \sum_{i=2}^{r-1} d_c^i\overline{\omega}_{p+r-i}\right]$$

其中 $\omega_{\overline{p+r-i}} \in$ 核 $\square_0 \cap \mathcal{C}_{p+r-i}$ 使得 $d_c^j\alpha - \sum_{i=1}^{j-1} d_c^i\omega_{p+j-\overline{i}} = 0$ 对于 $j = 1, \dots, r-1$. □

4. Complexes from spectral sequences

本节的目的是依据上一节所讨论的谱序列的性质，从我们的截断 s-多重复形中提取子复形。

我们的方法与Rumin复形背后的方法截然不同，后者仅从原始全复形（Tot $\mathcal{C}, d = d_0 + d_1 + \cdots + d_s$）中提取一个子复形。这里的目标则是提取“尽可能多的复形”。这一方法源于次黎曼情形中出现的特殊问题，其中de Rham 复形是一个 s-多重复形。

如前所示，Rumin形式空间 $E_0^\bullet$ 与商空间 $E^{\bullet,1}{}^\bullet$ 之间存在同构，这些商空间出现在谱序列的第一页。利用第2.1小节中引入的标量积，我们可以说

$$E_0^k = \bigoplus_p Z_1^{p,k-p} \cap \left(B_1^{p,k-p}\right)^\perp .$$

一般而言，对于任意选取的双次数 (p,k)，$E_0^k \cap \mathcal{C}_{p,k-p}$ 上的Rumin微分将由若干算子之和给出。具体而言，存在$I_{p,k} = \{\nu_1, \dots, \nu_N\}$，使得每个 $\nu_i \in \mathbb{N}$ 与 $\nu_1 < \cdots < \nu_N$满足

$$d_c = \sum_{j\in I_{p,k}} d_c^j \colon E_0^k \cap \mathcal{C}_{p,k-p} \longrightarrow \bigoplus_{j\in I_{p,k}} E_0^{k+1} \cap \mathcal{C}_{p+j,k+1-p-j}$$

其中每个 d_c^j的双次数为 $(j, 1-j)$。等价地，这可以表述为：在每一页 $j \in I_{p,k}$微分 Δ_j 都是非平凡映射（见命题3.8）

$$\Delta_j \colon Z_j^{p,k-p}/B_j^{p,k-p} \longrightarrow Z_j^{p+j,k+1-p-j}/B_j^{p+j,k+1-p-j} .$$

在处理 Carnot群 时，必须面对这种情况会相当棘手：算子 $d_c = \sum_{j\in I_{p,k}} d_c^j$ 不仅不具有标量积选择下的不变性，而且复形 $(E_0^\bullet, d_c)$ 也不满足 Rockland 条件 [44]。这就是我们选择尽可能多地取复形的主要原因。

引理 4.1. 给定定义3.1中介绍的分次子模，我们有以下包含关系

$$B_1^{p,\bullet} \subseteq B_2^{p,\bullet} \subseteq \cdots \subseteq B_\infty^{p,\bullet} \subseteq Z_\infty^{p,\bullet} \subseteq \cdots \subseteq Z_2^{p,\bullet} \subseteq Z_1^{p,\bullet} \quad \textit{for any } p \in \mathbb{N}.$$

证明。 虽然两组包含关系

$$B_1^{p,\bullet} \subseteq B_2^{p,\bullet} \subseteq \cdots \subseteq B_\infty^{p,\bullet} \text{ and } Z_\infty^{p,\bullet} \subseteq \cdots \subseteq Z_2^{p,\bullet} \subseteq Z_1^{p,\bullet}$$

可直接推出　由这些子模的定义可知，我们重点明确证明以下包含关系

$$B_j^{p,\bullet} \subseteq Z_l^{p,\bullet} \text{ for any } j, l \in \mathbb{N} \text{ and any } p \in \mathbb{N}.$$

这些计算将有助于证明命题 4.2。

$j=1$。设 $\alpha\in B^{p,\bullet}_{\cdot,1}$，也就是说 $\alpha=d_0c_p$ 对于某个 $c_p\in\mathcal{C}_{p,\bullet}$。我们要证明 $\alpha\in Z^{p,\bullet}_{\cdot,l}$ 对于 $l\geq 1$。当 $l=1$ 时结论显然，因为 $\alpha\in$像 $d_0\subset$核 d_0，所以 $\alpha\in Z^{p,\bullet}_{\cdot,1}$。对于 $l\geq 2$，只需使用公式（3.2）即可得到

$$d_m\alpha=d_md_0c_p=-\sum_{i=1}^{m}d_{m-i}d_ic_p=\sum_{i=1}^{m}d_{m-i}\left(-d_ic_p\right)\quad\text{for any } m\in\mathbb{N},$$

因此 $\alpha\in Z^{p,\bullet}_{\cdot,l}$，其中 $z_{p+i}=-d_ic_p$ 对任意 $i=1,\ldots,l$。

$j=2$。设 $\alpha\in B^{p,\bullet}_{\cdot,2}$，即 $d_0c_{p-1}=0$ 与 $d_1c_{p-1}+d_0c_p=\alpha$ 对某个 $c_{p-i}\in\mathcal{C}_{p-i,\bullet}$，且 $i=0,1$。我们要证明 $\alpha\in Z^{p,\bullet}_{\cdot,l}$ 对 $l\geq 1$ 成立。若 $l=1$，则

$$d_0\alpha=d_0(d_1c_{p-1}+d_0c_p)=-d_1d_0c_{p-1}+d_0^2c_p=0\text{ since }d_0c_{p-1}=0\text{ and }d_0^2=0\,.$$

对 $l\geq 3$，我们采用与前面类似的公式，因为

$$\begin{aligned}d_m\alpha=&d_md_1c_{p-1}+d_md_0c_p=-d_{m+1}d_0c_{p-1}-\sum_{i=1}^{m}d_{m-i}d_{i+1}c_{p-1}-\sum_{i=1}^{m}d_{m-i}d_ic_p\\&=-\sum_{i=1}^{m}d_{m-i}\left(d_{i+1}c_{p-1}+d_ic_p\right)\quad\text{for any } m\in\mathbb{N},\end{aligned}$$

从而 $\alpha\in Z^{p,\bullet}_{\cdot,l}$，其中 $z_{p+i}=-d_{i+1}c_{p-1}-d_ic_p$ 对 $i=1,\ldots,l$。

$j\geq 2$。设 $\alpha\in B^{p,\bullet}_{\cdot,j}$，则存在 $c_{p-i}\in\mathcal{C}_{p-i,\bullet}$，对 $i=0,\ldots,j-1$，使得

$$\sum_{k=i}^{j-1}d_{k-i}c_{p-k}=0\quad\text{for } 1\leq i\leq j-1\text{ and }\alpha=\sum_{k=0}^{j-1}d_kc_{p-k}\,.$$

对于每个 $m\in\mathbb{N}$，我们有

$$d_md_k=-\sum_{i=1}^{k}d_{m+i}d_{k-i}-\sum_{i=1}^{m}d_{m-i}d_{k+i}$$

从而

$$\begin{aligned}d_m\alpha=&\sum_{k=0}^{j-1}d_md_kc_{p-k}=d_md_0c_p-\sum_{k=1}^{j-1}\left(\sum_{i=1}^{k}d_{m+i}d_{k-i}+\sum_{i=1}^{m}d_{m-i}d_{k+i}\right)c_{p-k}\\&=-\sum_{i=1}^{m}d_{m-i}d_ic_p-\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{k=i}^{j-1}d_{m+i}d_{k-i}c_{p-k}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{j-1}d_{m-i}d_{k+i}c_{p-k}\\&=-\sum_{i=1}^{m}d_{m-i}\left(d_ic_p+\sum_{k=1}^{j-1}d_{k+i}c_{p-k}\right)-\sum_{i=1}^{j-1}d_{m+i}\underbrace{\left(\sum_{k=i}^{j-1}d_{k-i}c_{p-k}\right)}_{=0}=-\sum_{i=1}^{m}d_{m-i}\sum_{k=0}^{j-1}d_{k+i}c_{p-k}\end{aligned}$$

因此 $\alpha\in Z^{p,\bullet}_{\cdot,l}$，其中 $z_{p+i}=-\sum_{k=0}^{j-1}d_{k+i}c_{p-k}$ 对 $i=1,\ldots,l$。 □

命题 4.2. 我们考虑一个固定的双次数 (p,k) 并假设 $I_{p,k}=\{\nu_1,\ldots,\nu_N\}$，即

$$d_c^j\colon E_0^k\cap\mathcal{C}_{p,k-p}\longrightarrow E_0^{k+1}\cap\mathcal{C}_{p+j,k+1-p-j}$$

是一个双次数为 $(j,1-j)$ 的非平凡映射，对每个 $j\in I_{p,k}$。

则对每个 $j\in I_{p,k}$，该映射

$$\begin{aligned}&\Delta_j\colon Z_j^{p,k-p}/B_{m_1}^{p,k-p}\longrightarrow Z_{m_2}^{p+j,k+1-p-j}/B_j^{p+j,k+1-p-j}\\&\Delta_j\left([\alpha]\right)=\left[d_j\alpha-\sum_{i=1}^{j-1}d_{j-i}z_{p+i}\right]=\left[d_c^j\overline{\alpha}-\sum_{i=2}^{j-1}d_c^i\overline{\omega}_{p+j-i}\right]\end{aligned}\tag{4.1}$$

对于任意选择的 m_1、$m_2\in\mathbb{N}$，它都有明确定义。

此外，对于固定的$(p,\ k)$，如果我们有

$d_c^j\colon\ E_0^k\cap\mathcal{C}_{p,k-p}\longrightarrow E_0^{k+1}\cap\mathcal{C}_{p+j,k+1-p-j}$和 $d_c^l\colon\ E_0^{k+1}\cap\mathcal{C}_{p+j,k+1-p-j}\longrightarrow E_0^{k+2}\cap\mathcal{C}_{p+j+l,k+2-p-j-l}$是非平凡映射，那么对于任意 $m_1,m_2\in\mathbb{N}$

$$Z_j^{p,k-p}/B_{m_1}^{p,k-p}\xrightarrow{\Delta_j}Z_l^{p+j,k+1-p-j}/B_j^{p+j,k+1-p-j}\xrightarrow{\Delta_l}Z_{m_2}^{p+j+l,k+2-p-j-l}/B_l^{p+j+l,k+2-p-j-l}$$

我们有 $\Delta_l\circ\Delta_j=0$。

证明。由引理 4.1可知，给定任意 $m_1\in\mathbb{N}$，我们有包含关系 $B^{p,\ k-p}_{m_1}\subseteq Z^{p,\ k-p}_{\ l}$，对任意 $l\geq 1$ 均成立。特别地，

$$\alpha\in B_{m_1}^{p,k-p}\subseteq Z_{j+1}^{p,k-p}\ \text{ with }\ z_{p+i}=-\sum_{k=0}^{m_1-1}d_{k+i}c_{p-k}\ \text{ for } i=1,\dots,j+1$$

因此

$$d_j\alpha-\sum_{i=1}^{j-1}d_{j-i}z_{p+i}=d_j\sum_{k=0}^{m_1-1}d_kc_{p-k}+\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{k=0}^{m_1-1}d_{j-i}d_{k+i}c_{p-k}=-d_0\sum_{k=0}^{m_1-1}d_{k+j}c_{p-k}\in B_1^{p+j,k+1-p-j}\,.$$

关于见证 z_{p+i} 的选择，良定义性由 [54]，中的定理 2.10 得出，因为类 $[d_j\alpha-\sum_{i=1}^{j-1}d_{j-i}z_{p+i}]\in E^{p+j,\ \bullet}_{\ j}$ 与所选的 z_{p+i} 无关。

同样，由于

$$d_j\alpha-\sum_{i=1}^{j-1}d_{j-i}z_{p+i}\in B_{j+1}^{p+j,k+1-p-j}\subseteq Z_{l+1}^{p+j,k+1-p-j}\ \text{ for any }\ \alpha\in Z_j^{p,k-p}\,,$$

我们可以重复相同的推理，得到 $\Delta_l\circ\Delta_j=0$。

最后，等式（4.1）直接由命题 3.8 得出。 □

请注意，在命题 4.2 中，每个非平凡映射 d_c^j（或等价地 Δ_j），其双次数为（$j,\ 1-j$），都确定了 Z 定义域中的子模所在的页以及 B 值域中的子模所在的页，即

$$\Delta_j\colon Z_j^{p,\bullet}/B_{m_1}^{p,\bullet}\longrightarrow Z_{m_2}^{p+j,k+1-p-j}/B_j^{p+j,k+1-p-j}\,.$$

这里 $m_1,\ m_2\in\mathbb{N}$ 取为任意值；不过，如果我们要构造一个复形，那么 m_1 将由入射映射 Δ_{m_1} 的双次数（$m_1,\ 1-m_1$）确定，而 m_2 则由出射映射 Δ_{m_2} 的双次数（$m_2,\ 1-m_2$）确定，即

$$\xrightarrow{\Delta_{k_1}}Z_{m_1}^{p-m_1,k-1-p+m_1}/B_{k_1}^{p-m_1,k-1-p+m_1}\xrightarrow{\Delta_{m_1}}Z_j^{p,k-p}/B_{m_1}^{p,k-p}\xrightarrow{\Delta_j}Z_{m_2}^{p+j,k+1-p-j}/B_j^{p+j,k+1-p-j}\longrightarrow$$
$$\xrightarrow{\Delta_{m_2}}Z_{k_2}^{p+j+m_2,k+2-p-j-m_2}/B_{m_2}^{p+j+m_2,k+2-p-j-m_2}\xrightarrow{\Delta_{k_2}}$$

该推理可以扩展到包含每个次数 $k\in\mathbb{N}$。

这样，对于每个（p,k），只要$E^{p,\ k-p}_{\ 1}$ 非平凡，我们就能构造出与元素 $j\in I_{k,p}$ 数量相同的子复形。

由于我们感兴趣的是将这些复形定义为形式的子空间，而非像（4.1）那样定义为商空间，因此我们将借助小节 2.1 中引入的标量积来定义它们。

定义 4.3. [与 $\mathcal{C}$] 相关的谱复形：给定一个 s-多重复形，若对于某个双次数（p,k），有 $E^{p,\ k-p}_{\ 1}$ 非平凡（或等价地，$\ker\square_0\cap\mathcal{C}_{p,k-p}\neq 0$），则对于每个 $j\in I_{p,k}$ 和 $l\in I_{p-l,k-1}$，我们可以定义

$$E_{j,l}^{p,k-p}:=Z_j^{p,k-p}\cap\left(B_l^{p,k-p}\right)^{\perp}\subset\ker\square_0\cap\mathcal{C}_{p,k-p}\,. \tag{4.2}$$

此外，对于每个 $j\in I_{p,k}$、$l\in I_{p-l,k-1}$ 和 $i\in I_{p+j,k+1}$

$$E_{l,m_1}^{p-l,k-1-p+l}\xrightarrow{\Delta_l}E_{j,l}^{p,k-p}\xrightarrow{\Delta_j}E_{i,j}^{p+j,k+1-p-j}\xrightarrow{\Delta_i}E_{m_2,i}^{p+j+i,k+2-p-j-i}$$

对于任意（非平凡）选择的 $m_1,\ m_2\in\mathbb{N}$，均满足 $\Delta_j\circ\Delta_l=\Delta_i\circ\Delta_j=0$。

为了使定义更加明确，当我们写下

$$\Delta_j\colon E_{j,l}^{p,k-p}\to E_{m,j}^{p+j,k+1-p-j}$$

我们指的是算子 ac tion 的作用4.1，投影到 $B^{p+j}{}_{,j}{}^{k+1-p-j}$ 的正交补上。

由于这一构造适用于每个次数 k，它会产生一族子空间 $E^{\bullet}{}_{,j}{}^{\bullet}{}_{l}$。这些子空间由双次数为 $(j,1-j)$ 的算子 Δ_j 相连，因此构成一组复形。

由于定义 $E^{\bullet}{}_{,j}{}^{\bullet}{}_{l}$ 是通过谱序列给出的，我们将这组子复形称为与 s-多重复形 $\mathcal{C}$ 相关联的谱复形，并记作

$$\left\{\left(E_{j,l}^{\bullet,\bullet},\Delta_j\right)\right\}_{j\in I_{\bullet,\bullet}}.$$

4.1. 关于谱复形的考察。 定义 4.3 中给出的构造由一族复形组成。值得注意的是，对于每个满足 $E_0^k\cap\mathcal{C}_{p,\,k-p}$ 非平凡（或等价地，$E^{p}{}_{,\,1}{}^{k-p}$ 非平凡）的 (p,k)，至少会有一个 子复形包含一个双次数为 (p,k) 的 Rumin 形式子空间。

I确实，根据引理 4.1中所示的包含关系，对任意 $j,\ l\geq 1$

$$Z_j^{p,k-p}\cap\left(B_l^{p,k-p}\right)^{\perp}\subseteq Z_1^{p,k-p}\cap\left(B_1^{p,k-p}\right)^{\perp}=\ker\Box_0\cap\mathcal{C}_{p,k-p}\,.$$

换言之，对于每个非平凡的选择（$p,\ k$）以及任意 $j,\ l\geq 1$，都有 $E^{p}{}_{,\,j}{}^{k-p}{}_{,\,l}\subseteq E_0^k\cap\mathcal{C}_{p,\,k-p}$，即它是次数为 k、权为 p 的 Rumin形式的一个子空间。

更有意思的是，对于满足 $p_1<p_2$ 的任意两个非平凡双次数选择（$p_1,\ k$）和（$p_2,\ k+1$），至少存在一个复形，将其限制到次数 k 时，其形式如下

$$\Delta_{p_2-p_1}\colon E_{p_2-p_1,m_1}^{p_1,k-p_1}=Z_{p_2-p_1}^{p_1,k-p_1}\cap\left(B_{m_1}^{p_1,k-p_1}\right)^{\perp}\longrightarrow E_{m_2,p_2-p_1}^{p_2,k+1-p_2}=Z_{m_2}^{p_2,k+1-p_2}\cap\left(B_{p_2-p_1}^{p_2,k+1-p_2}\right)^{\perp}$$

对于某个适当的 $m_1,\ m_2\in\mathbb{N}$ 选择。

注 4.4。 可以利用命题 3.4 和 3.6 中的公式，以微分 d_c^j 来简化对这些子空间的刻画 $E^{p}{}_{,\,j}{}^{k-p}{}_{l}$，（这里假设 $j,\ l\geq 2$）：

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}\in Z_j^{p,k-p}\iff&\exists\,\overline{\omega}_{p+i}\in\ker\Box_0\cap\mathcal{C}_{p+i,k-p-i}\text{ with }i=1,\dots,j-2\text{ such that}\\
&\sum_{i=1}^{j-1}\left(d_c^i\overline{\alpha}-\sum_{h=1}^{i-1}d_c^h\overline{\omega}_{p+i-h}\right)=0\\
\overline{\beta}\in B_l^{p,k-p}\iff&\exists\,\overline{c}_{p-i}\in\ker\Box_0\cap\mathcal{C}_{p-i,k-1-p+i}\text{ with }i=1,\dots,l-1\text{ such that}\\
&\sum_{i=1}^{l-1}\left(d_c^i\overline{c}_{p-l+1}-\sum_{h=1}^{i-1}d_c^h\overline{c}_{p-l+1-h+i}\right)=\overline{\beta}
\end{aligned}$$

若我们引入记号

$$d_c^j\big|_p:=d_c^j\colon\ker\Box_0\cap\mathcal{C}_{p,\bullet}\longrightarrow\ker\Box_0\cap\mathcal{C}_{p+j,\bullet}$$

用来表示映射 d_c^j 在权严格等于 p的 Rumin 形式上的限制，我们得到

$$\begin{aligned}
Z_r^{p,k-p}=&\ker d_c^1\big|_p\cap\ker\left(d_c^2\big|_p+d_c^1\big|_{p+1}\right)\cap\dots\cap\ker\left(d_c^{r-1}\big|_p+d_c^{r-2}\big|_{p+1}+\dots+d_c^1\big|_{p+r-2}\right)\\
=&\bigcap_{j=1}^{r-1}\ker\left(d_c^j\big|_p+\sum_{i=1}^{j-1}d_c^i|_{p+j-i}\right)\\
B_r^{p,k-p}=&\operatorname{Im}d_c^1\big|_{p-r+1}+\operatorname{Im}\left(d_c^2\big|_{p-r+1}+d_c^1\big|_{p-r+2}\right)+\dots+\operatorname{Im}\left(d_c^{r-1}\big|_{p-r+1}+\dots+d_c^1\big|_{p-1}\right)\\
=&\sum_{j=1}^{r-1}\operatorname{Im}\left(d_c^j\big|_{p-r+1}+\sum_{i=1}^{j-1}d_c^i\big|_{p-r+1+j-i}\right).
\end{aligned}$$

在每个次数 $k=0,\dots,n$对应的 Rumin 形式空间仅在一种权下非平凡的情况下，也就是说，对每个 k，仅存在一个 $p=p(k)$ 使得 $E^{p,k-p}_1\neq 0$，那么谱复形的构造就提取出了 Rumin 复形。事实上，假设 $E^{p_1,k-p_1}_1$和 $E^{p_2,k+1-p_2}_1$分别是次数 k 和 $k+1$ 下唯一的非平凡空间（这里我们也隐含地假设了 $p_2>p_1$）。在这种情况下， $\Delta_{p_2-p_1}$ 将是唯一的非平凡算子，因此我们关注的是

$$Z^{p_1,k-p_1}_{p_2-p_1}\cap\left(B^{p_1,k-p_1}_{m_1}\right)^{\perp}\xrightarrow{\Delta_{p_2-p_1}}Z^{p_2,k+1-p_2}_{m_2}\cap\left(B^{p_2,k+1-p_2}_{p_2-p_1}\right)^{\perp}.$$

那么对于任意 $p>p_1$，$\ker\Box_0\cap\mathcal{C}_{p,k-p}=0$，但只要满足 $p<p_2$，$\ker\Box_0\cap\mathcal{C}_{p,k+1-p}=0$ 也成立。因此

$$\begin{aligned}Z^{p_1,k-p_1}_{p_2-p_1}=&Z^{p_1,k-p_1}_1\cap\ker d^1_c\big|_{p_1}\cap\ker\left(d^2_c\big|_{p_1}+d^1_c\big|_{p_1+1}\right)\cap\cdots\\&\cap\ker\left(d^{p_2-p_1-1}_c\big|_{p_1}+d^{p_2-p_1-2}_c\big|_{p_1+1}+\cdots+d^1_c\big|_{p_1+p_2-p_1-2}\right)\\=&Z^{p_1,k-p_1}_1\cap\ker d^1_c\big|_{p_1}\cap\ker d^2_c\big|_{p_1}\cap\cdots\cap\ker d^{p_2-p_1-1}_c\big|_{p_1}=\ker d_0\cap\mathcal{C}_{p_1,k-p_1},\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}B^{p_2,k+1-p_2}_{p_2-p_1}=&\operatorname{Im}d_0+\operatorname{Im}d^1_c\big|_{p_2-(p_2-p_1)+1}+\operatorname{Im}\left(d^2_c\big|_{p_2-(p_2-p_1)+1}+d^1_c\big|_{p_2-(p_2-p_1)+2}\right)+\cdots+\\&+\operatorname{Im}\left(d^{p_2-p_1-1}_c\big|_{p_2-(p_2-p_1)+1}+\cdots+d^1_c\big|_{p_2-1}\right)=\operatorname{Im}d_0=B^{p_2,k+1-p_2}_1.\end{aligned}$$

如果我们重复同样的推理来计算 $B^{p_1,k-p_1}_{m_1}$和 $Z^{p_2,k+1-p_2}_{m_2}$，由于我们还假设在次数 $k-1$ 和 $k+2$ 中，非平凡的 Rumin 形式也只出现在唯一的一个权上，我们便得到

- $Z^{p_1,k-p_1}_{p_2-p_1}\cap\left(B^{p_1,k-p_1}_{m_1}\right)^{\perp}=Z^{p_1,k-p_1}_1\cap\left(B^{p_1,k-p_1}_1\right)^{\perp}=\ker\Box_0\cap\mathcal{C}_{p_1,k-p_1}$,
- $Z^{p_2,k+1-p_2}_{m_2}\cap\left(B^{p_2,k+1-p_2}_{p_2-p_1}\right)^{\perp}=Z^{p_2,k+1-p_2}_1\cap\left(B^{p_2,k+1-p_2}_1\right)^{\perp}=\ker\Box_0\cap\mathcal{C}_{p_2,k+1-p_2}$, and
- $\Delta_{p_2-p_1}\colon\ker\Box_0\cap\mathcal{C}_{p_1,k-p_1}\longrightarrow\ker\Box_0\cap\mathcal{C}_{p_2,k+1-p_2}$ coincides with the Rumin differential $d^{p_2-p_1}_c$ of bidegree $(p_2-p_1,1-p_2+p_1)$.

通过扩展这种推理，我们还可以得到：如果在每个次数 $k=0,\ \dots,\ n$，空间 $E^{p,k-p}_1$ 至多对 2 个可能的权是非平凡的，那么每个非平凡 Δ_r 的作用都将与相应的双次数为 $(r,\ 1-r)$ 的 Rumin微分 d^r_c 一致。然而，在出现不同权的更一般情形下，集合 $\{\left(E^{\bullet,\bullet}_{j,l},\Delta_j\right)\}_{j\in I_\bullet,\bullet}$ 将由多个复形组成，因此空间 $E^{p,k-p}_{j,l}$ 将是 $\ker\Box_0\cap\mathcal{C}_{p,k-p}$ 的真子空间，至少对于某些 k 和 p的取值如此。

在最一般的情形中，对于某个次数 k ，空间 E^k_0 对三个或更多权的选取是非平凡的，此时带有 $r\geq 3$ 的算子 Δ_r 表现为不同阶微分 d^j_c 之和。然而，即便在这种情形下，每个算子 Δ_r：$E^{p,\bullet}_{r,m_1}\longrightarrow E^{p+r,\bullet}_{m_2,r}$，在标量积的选取下是不变的，因为它与由 d 在谱序列的 r^{th} 页上的作用所产生的微分算子的作用相一致。

最后，我们考虑由这类谱复形所计算的上同调。一般而言，每个子复形的上同调的直和并不同构于全复形（$\operatorname{Tot}\mathcal{C},d=d_0+d_1+\cdots+d_s$）的上同调。事实上，给定任意 $j,l\in\mathbb{N}$，使得序列

$$E^{p-l,k-1-p+l}_{l,m_1}\xrightarrow{\Delta_l}E^{p,k-p}_{j,l}\xrightarrow{\Delta_j}E^{p+j,k+1-p-j}_{m_2,j}$$

是非平凡的，则

$$\frac{\ker\Delta_j\colon E^{p,k-p}_{j,l}\longrightarrow E^{p+j,k+1-p-j}_{m_2,j}}{\operatorname{Im}\Delta_l\colon E^{p-l,k-1-p+l}_{l,m_1}\longrightarrow E^{p,k-p}_{j,l}}=\frac{Z^{p,k-p}_{j+1}}{B^{p,k-p}_{l+1}}.$$

然而，由于我们处理的是有限深度的按权重过滤（见注 2.2），对于每个 $(p,\ k)$，都会有一对特定的 $(J,\ L)=(J_{p,k},\ L_{p,k})\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 使得 $Z^{p,k-p}_{J+1}=Z^{p,k-p}_\infty$ 且 $B^{p,k-p}_{L+1}=B^{p,k-p}_\infty$，因此对每个次数 k:

$$\bigoplus_p\frac{\ker d^J_c\colon E^{p,k-p}_{J,L}\longrightarrow E^{p+J,k+1-p-J}_{m_2,J}}{\operatorname{Im}d^L_c\colon E^{p-L,k-1-p+L}_{L,m_1}\longrightarrow E^{p,k-p}_{J,L}}=\bigoplus_p E^{p,k-p}_\infty=H^k(\operatorname{Tot}\mathcal{C},d).$$

4.2. 霍奇对偶。 众所周知，Rumin复形 $(E_0^\bullet,\ d_c)$ 在霍奇-$\star$对偶下封闭。我们现在的目标是说明，尽管上文构造的每个子复形并非在霍奇-$\star$ 对偶下封闭，但整个集合 $\{\left(E_{j,l}^{\bullet,\bullet},d_c^j\right)\}_{j\in I_{\bullet,\bullet}}$ 是封闭的。

为了在我们的交换微分分次代数 (Tot $\star$ 中引入 Hodge-$\mathcal{C},\ \wedge,\ d=d_0+d_1+\cdots+d_s$)，我们需要一个标量积（如第 2.1 小节所介绍），以及相应的体积形式。当 Tot$\mathcal{C}$ 是某个黎曼流形（不一定紧致）上的光滑微分形式空间时，可以从形式上的 L^2-内积的角度来理解这一点。关于单连通幂零李群情形的更详细介绍，请参见 [33] 。

定义 4.5 (Hodge-$\star$ 算子)。 给定一个微分代数 (Tot $\mathcal{C},\ \wedge,\ d,\ \langle\cdot,\ \cdot\rangle,$ vol)，其中 (Tot $\mathcal{C},\ d=d_0+d_1+\cdots+d_s$) 是一个 s-多重复形，$\langle\cdot,\ \cdot\rangle_k$ 在每个 (Tot $C)_k$ 上都有标量积，使不同权的元素彼此正交，并且 vol$\in\mathcal{C}_{Q,\ n-Q}$ 是相应的体积形式，则可以将 Hodge-$\star$算子定义为满足下述条件的线性算子

$$\star\colon \mathcal{C}_{p,k-p}\longrightarrow\mathcal{C}_{Q-p,n-k-Q+p}$$
$$\alpha\wedge\star\beta:=\langle\alpha,\beta\rangle_k\mathrm{vol}\ \text{ for any }\alpha,\beta\in\mathcal{C}_{p,k-p}\,.$$

根据定义，很容易得出

$$\alpha\wedge\star\beta=\beta\wedge\star\alpha\ ,\ \star\star\,\beta=(-1)^{k(n-k)}\beta\ \text{ and }\langle\star\alpha,\star\beta\rangle_{n-k}\ \text{ for any }\alpha,\beta\in(\mathrm{Tot}\,\mathcal{C})_k\,. \tag{4.3}$$

类似于定义 2.4，我们可以定义映射 d 的形式伴随算子，也可以定义每个结构映射 d_i 的形式伴随算子。

定义 4.6 （d 的伴随算子）。 利用标量积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$，我们可以定义 d 的形式伴随算子，记作 δ，其映射为

$$\delta\colon(\mathrm{Tot}\,C)_k\longrightarrow(\mathrm{Tot}\,\mathcal{C})_{k-1}$$
$$\langle d\alpha,\beta\rangle_k=\langle\alpha,\delta\beta\rangle_{k-1}\ \text{ for any }\alpha\in(\mathrm{Tot}\,\mathcal{C})_{k-1}\,,\beta\in(\mathrm{Tot}\,\mathcal{C})_k$$

注 4.7。 对于黎曼流形 X 上次数分别为 $k-1$ 和 k 的紧支撑微分形式 α 和 β，斯托克斯定理以及（4.3）中列出的性质也意味着

$$\delta=(-1)^{n(k+1)+1}\star d\star\colon(\mathrm{Tot}\,\mathcal{C})_k\longrightarrow(\mathrm{Tot}\,\mathcal{C})_{k-1}\ , \tag{4.4}$$

因为

$$\int_X d(\alpha\wedge\star\beta)=\int_X d\alpha\wedge\star\beta+(-1)^{k-1}\int_X\alpha\wedge d(\star\beta)=\int_X d\alpha\wedge\star\beta+(-1)^{k-1+(n-k+1)(k-1)}\int_X\alpha\wedge\star(\star d\star\beta)\,.$$

引理 4.8。 给定 s-多重复形 $(\mathrm{Tot}\ \mathcal{C},\wedge,d,\langle\cdot,\cdot\rangle,\mathrm{vol})$，其中 $d=d_0+d_1+\cdots+d_s$，一旦我们定义

$$\delta_i\colon(\mathrm{Tot}\,\mathcal{C})_k\longrightarrow(\mathrm{Tot}\,\mathcal{C})_{k-1}\ ,\ i=0,1,\ldots,s$$
$$\langle d_i\alpha,\beta\rangle_k=\langle\alpha,\delta_i\beta\rangle_{k-1}\ \ \textit{for any}\ \alpha\in(\mathrm{Tot}\,\mathcal{C})_{k-1}\,,\beta\in(\mathrm{Tot}\,\mathcal{C})_k\ ,$$

我们有

$$\delta_i\mathcal{C}_{p,k-p}\subset\mathcal{C}_{p-i,k-1-p+i}\ \ \textit{and}\ \delta_i=(-1)^{(k+1)n+1}\star d_i\star\ .$$

证明。 对于第一个断言，只需取 $\alpha\in\mathcal{C}_{p,k-p}$ 以及任意 $\beta\in$ (Tot $\mathcal{C})_{k-1}$，使得

$$\langle\delta_i\alpha,\beta\rangle_{k-1}=\langle\alpha,d_i\beta\rangle_k\neq0\iff\beta\in\mathcal{C}_{p-i,k-1-p+i}\,.$$

对于第二部分，由线性性可得

$$\sum_{i=0}^s\delta_i=\delta=(-1)^{n(k+1)+1}\star d\star=\sum_{i=0}^s(-1)^{n(k+1)+1}\star d_i\star$$

并且由于 不同权的元素彼此（正交，因此）线性无关，我们有 e

$$\delta_i=(-1)^{n(k+1)+1}\star d_i\star\ \text{ for each }i=0,1,\ldots,s\,.$$

□

Le引理 4.9. *Rumin* 形式 $E_0^\bullet = \text{核}\,\square_0 \cap \operatorname{Tot}\mathcal{C}$ 在 *Hodge-*$\star$ 下封闭，*i.* *e.*

$$\star\, E_0^k \cap \mathcal{C}_{p,k-p} = E_0^{n-k} \cap \mathcal{C}_{Q-p,n-k-Q+p}\,.$$

证明。 该结论由以下等式可直接得出

$$\begin{aligned} d_0 \star \alpha =& (-1)^{(k+1)(n-k-1)} \star \star d_0 \star \alpha = \pm \star \delta_0 \alpha = 0 \\ \delta_0 \star \alpha =& (-1)^{n(n-k+1)+1} \star d_0 \star \star \alpha = \pm \star d_0 \alpha = 0 \end{aligned}$$

以及 Hodge-$\star$ 映射的线性性可知。

□

定义 4.10 （d_c 的伴随算子）。 利用标量积以及刚才看到的映射 d_i 的形式伴随算子的所有性质，我们可以定义

$$\begin{aligned} &\delta_c \colon E_0^k \longrightarrow E_0^{k-1} \\ &\langle d_c\overline{\alpha}, \overline{\beta}\rangle_k = \langle \overline{\alpha}, \delta_c\overline{\beta}\rangle_{k-1} \quad \text{for any } \alpha \in E_0^{k-1}\,,\ \beta \in E_0^k\,. \end{aligned}$$

注 4.11。 与处理微分 d的形式伴随时一样，Rumin 微分 d_c的伴随算子也有与（4.4）类似的公式，即

$$\delta_c = (-1)^{n(k+1)+1} \star d_c \star \colon E_0^k \longrightarrow E_0^{k-1}\,.$$

该结论再次由斯托克斯定理的非平凡应用以及（4.3）中列出的性质得出，因为

$$\int_X d_c\overline{\alpha} \wedge \overline{\beta} + (-1)^{k-1} \int_X \overline{\alpha} \wedge d_c\overline{\beta} = 0 \quad \text{for any compactly supported } \overline{\alpha} \in E_0^{k-1},\ \overline{\beta} \in E_0^k\,. \tag{4.5}$$

我们强调，与用于证明（4.4）的公式不同，这个“分部积分”公式并非显而易见；关于此论证，我们请读者参见 [7] 中的注 2.16。

引理 4.12. 给定 s-多重复形 $(\operatorname{Tot}\mathcal{C}, \wedge, d, \langle\cdot,\cdot\rangle, \mathrm{vol})$，其中 $d = d_0 + d_1 + \cdots + d_s$，一旦我们定义

$$\begin{aligned} &\delta_c^i \colon E_0^k \longrightarrow E_0^{k-1}\ ,\ i = 1, \dots, S \\ &\langle d_c^i\overline{\alpha}, \overline{\beta}\rangle_k = \langle \overline{\alpha}, \delta_c^i\overline{\beta}\rangle_{k-1} \quad \textit{for any } \overline{\alpha} \in E_0^{k-1},\ \overline{\beta} \in E_0^k\,, \end{aligned}$$

我们便有

$$\delta_c^i\left(\ker \square_0 \cap \mathcal{C}_{p,k-p}\right) \subset \ker \square_0 \cap \mathcal{C}_{p-i,k-1-p+i} \quad \textit{and } \delta_c^i = (-1)^{n(k+1)+1} \star \delta_c^i \star\,.$$

证明. 证明过程与引理 4.8 的证明完全相同，因此给定 $\alpha \in \text{核}\,\square_0 \cap \mathcal{C}_{p,k-p}$以及任意 $\beta \in E_0^{k-1}$，我们有

$$\langle \delta_c^i\overline{\alpha}, \overline{\beta}\rangle_{k-1} = \langle \overline{\alpha}, d_c^i\overline{\beta}\rangle_k \neq 0 \iff \overline{\beta} \in \ker \square_0 \cap \mathcal{C}_{p-i,k-1-p+i}\,.$$

对于第二部分， 由线性性，并利用不同权的元素的线性无关性，我们有 e

$$\sum_{i=1}^S \delta_c^i = \delta_c = (-1)^{n(k+1)+1} \star d_c \star = \sum_{i=1}^S (-1)^{n(k+1)+1} \star d_c^i \star$$

因此

$$\delta_c^i = (-1)^{n(k+1)+1} \star d_c^i \star \quad \text{for each } i = 1, \dots, S\,.$$

注意，在处理 Rumin微分及其伴随算子时，值域 $i = 1,\dots,S$从 1 开始（而不是 0），并且 $S = N - 1$ 与 s 无关（正如引理 2.19中所指出的）。□

注 4.13。 在探讨子复形的集合 $\{\left(E_{j,l}^{\bullet,\bullet}, \Delta_j\right)\}_{j\in I_\bullet}$ • 是否在 Hodge-$\star$ 对偶下封闭之前，我们先研究子模 $B^{p,}{}_l{}^\bullet$ 是否是 $\mathcal{C}_{p,}{}_\bullet$的闭子空间。这个问题源于这样一个事实：由有界线性算子定义的空间 $Z^{p,}{}_l{}^\bullet$ 是 $\mathcal{C}_{p,}{}_\bullet$的闭子空间，但其值域 $B^{p,}{}_l{}^\bullet$ 一般并非如此。在本文中，为简化计算，我们将假设每个 $B^{p,}{}_l{}^\bullet$ 都是闭的。这是一个很强的假设，因为即使在我们所考虑的应用情形——Carnot群上的 de Rham 复形——中，除非 $l = 1,\ \infty$，一般也不满足这一条件。

命题 4.14（在 Hodge-$\star$下的闭性）。 在定义 *4.3* 中引入的谱复形 $\{\left(E^{\bullet,\bullet}_{j,l},\Delta_j\right)\}_{j\in I_\bullet,\bullet}$ 是 *Hodge-*$\star$ 闭的，特别地，对任意 $r_1,\ r_2\geq 1$ 我们有

$$\star\left[Z^{p,k-p}_{r_1}\cap\left(B^{p,k-p}_{r_2}\right)^\perp\right]=Z^{Q-p,n-k-Q+p}_{r_2}\cap\left(B^{Q-p,n-k-Q+p}_{r_1}\right)^\perp\,.$$

证明。 当 $r_1=r_2=1$ 的情形已在引理4.9中讨论过，因此我们可以直接考虑 $r_1,\ r_2\geq 2$。我们还可以通过取子模 $Z^{\bullet,\ \bullet}_{r_1}$与 $B^{\bullet,\ \bullet}_{r_2}$关于Rumin形式及微分 d^j_c 的刻画来简化讨论（见注记4.4）。此外，由引理4.12中列出的性质，我们有

$$\overline{\alpha}\in\ker d^i_c\big|_p\longleftrightarrow\star\overline{\alpha}\in\ker\delta^i_c\big|_{Q-p}\,,\ \left(d^i_c\big|_p\right)^*=\delta^i_c\big|_{p+i}\ \text{ and }\ \left(\delta^i_c\big|_p\right)^*=d^i_c\big|_{p-i}\,,$$

其中 $*$ 在此表示形式伴随（另见定义4.12）。因此，容易验证

$$\begin{aligned}\star Z^{p,k-p}_r&=\bigcap_{j=1}^{r-1}\ker\left(\delta^j_c\big|_{Q-p}+\sum_{i=1}^{j-1}\delta^i_c\big|_{Q-p-j+i}\right)=\left[\sum_{j=1}^{r-1}\operatorname{Im}\left(d^j_c\big|_{Q-p-j}+\sum_{i=1}^{j-1}d^i_c\big|_{Q-p-j}\right)\right]^\perp\\&=\left[\sum_{j=1}^{r-1}\sum_{i=1}^{j}\operatorname{Im}d^j_c\big|_{Q-p-j}\right]^\perp=\left(\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{k=Q-p-(r-1)}^{Q-p-i}\operatorname{Im}d^i_c\big|_k\right)^\perp.\end{aligned}$$

若考虑 $B^{Q-p,\ \ n-k-Q+p}_{\ \ r}$，则得到

$$\begin{aligned}B^{Q-p,n-k-Q+p}_r&=\sum_{j=1}^{r-1}\operatorname{Im}\left(d^j_c\big|_{Q-p-r+1}+\sum_{i=1}^{j-1}d^i_c\big|_{Q-p-r+1+j-i}\right)\\&=\sum_{j=1}^{r-1}\operatorname{Im}d^j_c\big|_{Q-p-r+1}+\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=i+1}^{r-1}\operatorname{Im}d^i_c\big|_{Q-p-r+1+j-i}\\&=\sum_{i=1}^{r-1}\operatorname{Im}d^i_c\big|_{Q-p-r+1}+\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{k=Q-p-r+2}^{Q-p-i}\operatorname{Im}d^i_c\big|_k=\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{k=Q-p-r+1}^{Q-p-i}\operatorname{Im}d^i_c\big|_k\end{aligned}$$

由此推出

$$\star Z^{p,k-p}_r=\left(B^{Q-p,n-k-Q+p}_r\right)^\perp.$$

用完全相同的方式推理，我们还可得到

$$\left(B^{p,k-p}_r\right)^\perp=\star Z^{Q-p,n-k-Q+p}_r$$

从而结论成立。 □

注释 4.15. 注意，我们已经证明了所有复形 $\{\left(E^{\bullet,\bullet}_{j,l},\Delta_j\right)\}_{j\in I_\bullet,\bullet}$ 的集合在 Hodge-$\star$意义下是闭的，但这并不意味着每个复形都是闭的。更具体地说，给定

$$\alpha\in E^{p,k-p}_{r_1,r_2}\ \text{ then }\ \star\,\alpha\in E^{Q-p,n-k-Q+p}_{r_2,r_1}$$

然而，两个子空间 $E^{p,\ k-p}_{r_1\ r_2}$和 $E^{Q-p,\ \ n-k-Q+p}_{r_2\ r_1}$可能不属于同一个复形，即它们之间可能不存在由非平凡映射 Δ_j构成的链。这一点在下面的具体例子中显而易见。

4.3. 一个具体例子：恩格尔群。 考虑四维丝状幂零李群 $\mathbb{G}$，它通常被称为恩格尔群。这是一个连通、单连通的幂零李群，其李代数 $\mathfrak{g}$ 具有以下非平凡括号

$$[X_1,X_2]=X_3\ ,\ [X_1,X_3]=X_4\,.$$

由于其李代数具有分层

$$\mathfrak{g}=V_1\oplus V_2\oplus V_3=\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{X_1,X_2\}\oplus\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{X_3\}\oplus\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{X_4\}$$

该群可以赋予 Carnot 群结构，因此 de Rham 复形是一个多重复形：

$$(\Omega^\bullet(\mathbb{G}), d = d_0 + d_1 + d_2 + d_3)\ .$$

文献中可以找到关于恩格尔群上 Rumin复形 $(E_0^\bullet, d_c)$ 的显式逐步计算 [63, 8, 33]。本文仅介绍构造谱复形 $\{(E^\bullet{}_{,j}\ l^\bullet{}_{,,}\Delta_j)\}_{j\in I_{\bullet,\bullet}}$ 所严格必需的微分形式及 Rumin复形的性质。

引入与分层相适应的标量积后，我们可以假设 $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的正交归一基，并构造其对偶基 $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$，使得 $\theta_i(X_j) = \delta_{ij}$。在 Carnot群上，微分形式的权这一概念与分层相关，因此

$$\begin{gathered} w(\theta_1) = w(\theta_2) = 1\,,\ w(\theta_3) = 2\,,\ \text{and}\ w(\theta_4) = 3 \\ w(\theta_1 \wedge \theta_2) = 2\,,\ w(\theta_1 \wedge \theta_3) = w(\theta_2 \wedge \theta_3) = 3\,, w(\theta_1 \wedge \theta_4) = w(\theta_2 \wedge \theta_4) = 4\,,\ w(\theta_3 \wedge \theta_4) = 5 \\ w(\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3) = 4\,,\ w(\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_4) = 5\,,\ w(\theta_1 \wedge \theta_3 \wedge \theta_4) = w(\theta_2 \wedge \theta_3 \wedge \theta_4) = 6 \\ w(\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3 \wedge \theta_4) = 7\,. \end{gathered}$$

此外，经过显式计算，可以得到

- $E_0^0 = C^\infty(\mathbb{G}) = \mathcal{C}_{0,0}$，这里将光滑函数视为权为 0 的 0-形式；
- $E_0^1 = \text{span}_{C^\infty(\mathbb{G})}\{\theta_1, \theta_2\} = \mathcal{C}_{1,0}$;
- $E_0^2 = \text{span}_{C^\infty(\mathbb{G})}\{\theta_2 \wedge \theta_3, \theta_1 \wedge \theta_4\} \subset \mathcal{C}_{3,\ -1} \oplus \mathcal{C}_{4,\ -2}$;
- $E_0^3 = \text{张成}_{C^\infty(\mathbb{G})}\{\theta_1 \wedge \theta_3 \wedge \theta_4, \theta_2 \wedge \theta_3 \wedge \theta_4\} = \mathcal{C}_{6,-3}$;
- $E_0^4 = \text{span}_{C^\infty(\mathbb{G})}\{\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3 \wedge \theta_4\} = \mathcal{C}_{7,-3}$;

这意味着

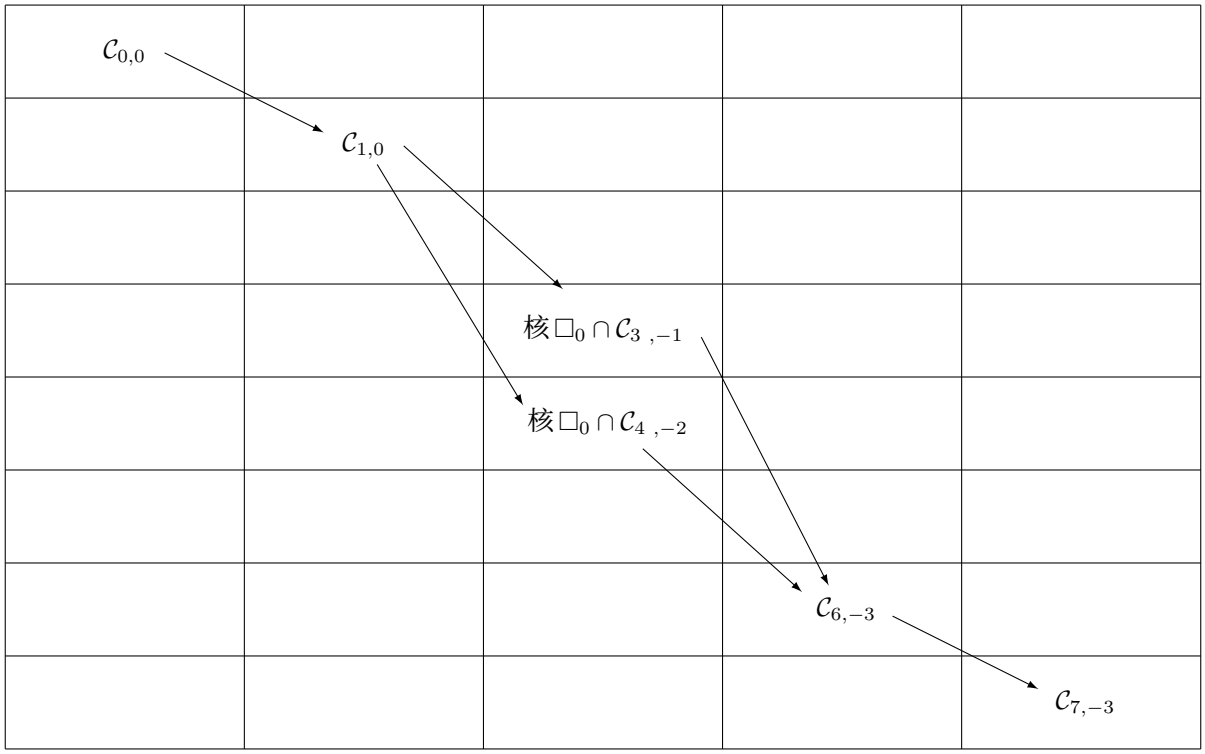
- d_c: $E_0^0 \longrightarrow E_0^1$ 由 $d_c = d_c^1$给出；
- d_c: $E_0^1 \longrightarrow E_0^2$ 由 $d_c = d_c^2 + d_c^3$给出；
- d_c: $E_0^2 \longrightarrow E_0^3$ 由 $d_c = d_c^2 + d_c^3$给出。不过，若分别考虑不同权的形式，Rumin微分仅具有一种双次数：d_c: $E_0^2 \cap \mathcal{C}_{3,-1} \longrightarrow E_0^3$ 由 $d_c = d_c^3$给出，而d_c: $E_0^2 \cap \mathcal{C}_{4,-2} \longrightarrow E_0^3$ 由 $d_c = d_c^2$给出；

- d_c: $E_0^3 \longrightarrow E_0^4$ 由 $d_c = d_c^1$给出。

换句话说，只有一种双次数（p, k）会使$I_{p,k}$ 包含多个元素，即（1, 1），对应$I_{1,1} = \{2, 3\}$。因此，相应的集合 $\{(E^\bullet{}_{,j}\ l^\bullet{}_{,,}\Delta_j)\}_{j\in I_{\bullet,\bullet}}$ 将只包含两个复形。这可以用图示来呈现。

给熟悉谱序列的读者一个简短提醒：我们采用一种图示约定，这种约定常用于处理 Carnot群上的微分形式。这意味着，空间 $\mathcal{C}_{p,\ k-p}$ 并不位于笛卡尔平面上的点（p, $k-p$）。相反，权 p 沿纵轴编码，而次数 $p+k-p=k$ 沿横轴编码，因此每个空间 $\mathcal{C}_{p,\ k-p}$ 都会放在笛卡尔平面上的点（$Q-p$, k），其中 Q 是体积形式的权。一个直观的想法是，在处理 Carnot群上的 de Rham 复形（$\Omega^\bullet(\mathbb{G})$ d）时，我们从左上角的 0- 形式（权为 0 ）开始。向右移动时，形式的次数增加；向下移动时，形式的权增加。

按照这一约定，下图展示了恩格尔群上的 Rumin复形，其中仅列出非平凡的空间 $E_0^\bullet$。此外，粗线表示算子 d_c^j，它们作用于 Rumin形式空间时非零。



如前所述，我们聚焦于双次数 (1，1)，以看到 $I_{1,1} = \{2, 3\}$，因此我们将构造以下两个子复形

$$Z_1^{0,0} \xrightarrow{\Delta_1} Z_2^{1,0} \cap \left(B_1^{1,0}\right)^{\perp} \xrightarrow{\Delta_2} Z_3^{3,-1} \cap \left(B_2^{3,-1}\right)^{\perp} \xrightarrow{\Delta_3} Z_1^{6,-3} \cap \left(B_3^{6,-3}\right)^{\perp} \xrightarrow{\Delta_1} \mathcal{C}_{7,-3} \cap \left(B_1^{7,-3}\right)^{\perp}$$

$$Z_1^{0,0} \xrightarrow{\Delta_1} Z_3^{1,0} \cap \left(B_1^{1,0}\right)^{\perp} \xrightarrow{\Delta_3} Z_2^{4,-2} \cap \left(B_3^{4,-2}\right)^{\perp} \xrightarrow{\Delta_2} Z_1^{6,-3} \cap \left(B_2^{6,-3}\right)^{\perp} \xrightarrow{\Delta_1} \mathcal{C}_{7,-3} \cap \left(B_1^{7,-3}\right)^{\perp}$$

在这个特定情形下，空间 $E^{\bullet,\bullet}_{j}$ 的表达式大大简化：

- $Z_1^{0,0} = \text{核}\,\square_0 \cap \mathcal{C}_{0,0} = E_0^0$；
- $Z_2^{1,0} = Z^{1,0}{}_{1} = Z^{1,0}{}_{2,1}$ 于是 $E^{1,0}_{2,1} = Z^{1}{}_{1}{}^{0} \cap \left(B_1^{1,0}\right)^{\perp} = \text{核}\,\square_0 \cap \mathcal{C}_{1,0} = E_0^1$；
- $Z^{1,3}{}_{0} = \{\alpha \in \mathcal{C}_{1,0} \mid d_c^2 \alpha = 0\}$ 于是 $E^{1,0}_{3,1} = \{\alpha \in E_0^1 \mid d_c^2 \alpha = 0\}$；
- $B^{3,}{}_{2}{}^{-1} = B^{3,}{}_{1}{}^{-1}$ 并且 $Z^{3,}{}_{3}{}^{-1} = Z^{3,}{}_{1}{}^{-1}$ 因此 $E^{3,}{}_{3}{}^{-1}{}_{,2} = \text{核}\square_0 \cap \mathcal{C}_{3,-1} = E_0^2 \cap \mathcal{C}_{3,-1}$；
- $B^{4,}{}_{3}{}^{-2} = B^{4,}{}_{1}{}^{-2}$ 并且 $Z^{4,}{}_{2}{}^{-2} = Z^{4,}{}_{1}{}^{-2}$ 因此 $E^{4,}{}_{2}{}^{-2}{}_{,3} = \text{核}\square_0 \cap \mathcal{C}_{4,-2} = E_0^2 \cap \mathcal{C}_{4,-2}$；
- $B^{6,}{}_{3}{}^{-3} = \{\alpha \in \text{核}\,\square_0 \cap \mathcal{C}_{6,-3} \mid \alpha = d_c^2 c_4 \text{ 对于某个 } c_4 \in \text{核}\square_0 \cap \mathcal{C}_{4,-2}\}$ 因此 $E^{6,}{}_{1}{}^{-3}{}_{,3} = \text{核}\,\square_0 \cap \left(\text{像}\, d_c^2\big|_4\right)^{\perp} = E_0^3 \cap \left(\text{像}\, d_c^2\big|_4\right)^{\perp}$；
- $B^{6,}{}_{2}{}^{-3} = B^{6,}{}_{1}{}^{-3}$ 因此 $E^{6,}{}_{1}{}^{-3}{}_{,2} = \text{核}\,\square_0 \cap \mathcal{C}_{6,-3} = E_0^3$；
- $\mathcal{C}_{7,-3} \cap \left(B_1^{7,-3}\right)^{\perp} = \text{核}\,\square_0 \cap \mathcal{C}_{7,-3} = E_{0}^{4}$。

此外，每个微分 Δ_j 都与相应的算子 d_c^j 一致，因此我们得到以下两个复形

$$E_0^0 \xrightarrow{d_c^1} E_0^1 \xrightarrow{d_c^2} E_0^2 \cap \mathcal{C}_{3,-1} \xrightarrow{d_c^3} E_0^3 \cap \left(\operatorname{Im} d_c^2\right)^{\perp} \xrightarrow{d_c^1} E_0^4$$

$$E_0^0 \xrightarrow{d_c^1} E_0^1 \cap \ker d_c^2 \xrightarrow{d_c^3} E_0^2 \cap \mathcal{C}_{4,-2} \xrightarrow{d_c^2} E_0^3 \xrightarrow{d_c^1} E_0^4$$

让我们研 究这些复形所计算的上同调空间。对于第一个复形，我们有

- 核 d_c^1：$E_0^0 \to E_0^1 = Z^{0,}{}_{2}{}^{0} = Z^{0,0}{}_{\infty}{}^{0}$；

- 核 $d_c^2\colon\ E_0^1 \to E_0^2 \cap \mathcal{C}_{3,-1} = Z^{1}_{,\ 3}{}^{0} \subsetneq Z^{1,0\,4}$ 以及像 $d_c^1\colon\ \ E_0^0 \to E_0^1 = B^{1}_{,\ 2}{}^{0} = B^{1,\infty}{}^{0}$;
- 核 $d_c^3\colon\ E_0^2 \cap \mathcal{C}_{3,\ -1} \to E_0^3 \cap \big(\text{像 } d_c^2\big)^{\perp} = Z^{3}_{,\ 4}{}^{-1} = Z^{3,\ \infty}{}^{-1}$ 以及像 $d_c^2\colon\ E_0^1 \to E_0^2 \cap \mathcal{C}_{3,\ -1} = B^{3}_{,\ 3}{}^{-1} = B^{3,\ \infty}{}^{-1}$;
- 核 $d_c^1\colon\ \ E_0^3 \cap \big(\text{像 } d_c^2\big)^{\perp} \to E_0^4 = Z^{6}_{,\ 2}{}^{-3} = Z^{6,\ \infty}{}^{-3}$ 以及像 $d_c^3\colon\ E_0^3 \cap \mathcal{C}_{3,\ -1} \to E_0^3 \cap \big(\text{像 } d_c^2\big)^{\perp} = B^{6}_{,\ 4}{}^{-3} = B^{6,\ \infty}{}^{-3}$;
- 像 $d_c^1\colon\ \ E_0^3 \cap (\text{像}\, d_c^2)^{\perp} \to E_0^4 = B^{7}_{,\ 2}{}^{-3} = B^{7,\ \infty}{}^{-3}$

而对于第二个

- 核 $d_c^1\colon\ E_0^0 \to E_0^1 \cap \text{核 } d_c^2 = Z^{0}_{,\ 2}{}^{0} = Z^{0,\infty}{}^{0}$;
- 核 $d_c^3\colon\ E_0^1 \cap \text{核 } d_c^2 \to E_0^2 \cap \mathcal{C}_{4,-2} = Z^{1}_{,\ 4}{}^{0} = Z^{1,\infty}{}^{0}$ 和像 $d_c^1\colon\ E_0^0 \to E_0^1 \cap \text{核 } d_c^2 = B^{1}_{,\ 2}{}^{0} = B^{1,\infty}{}^{0}$;
- 核 $d_c^2\colon E_0^2 \cap \mathcal{C}_{4,-2} \to E_0^3 = Z^{3}_{,\ 3}{}^{-1} = Z^{3,\infty}{}^{-1}$ 和像 $d_c^3\colon\ E_0^1 \cap \text{核 } d_c^2 \to E_0^2 \cap \mathcal{C}_{4,-2} = B^{4}_{,\ 3}{}^{-2} = B^{4,\infty}{}^{-2}$;
- 核 $d_c^1\colon\ E_0^3 \to E_0^4 = Z^{6}_{,\ 2}{}^{-3} = Z^{6,\infty}{}^{-3}$ 和像 $d_c^2\colon E_0^3 \cap \mathcal{C}_{3,-1} \to E_0^3 = B^{6}_{,\ 3}{}^{-3} \subsetneq B^{6,4}{}^{-3}$;
- 像 $d_c^1\colon\ \ E_0^3 \to E_0^4 = B^{7}_{,\ 2}{}^{-3} = B^{7,\ \infty}{}^{-3}$。

因此，原多重复形的上同调（在此情况下为德拉姆上同调）分布如下：

- 次数 0、2 和 4 的上同调由两个子复形共同承载；
- 次数 1 的上同调由第二个子复形承载；
- 次数 3 的上同调由第一个子复形承载。

这直接由谱序列理论推出：事实上，在次数 0、2 和 4 中，整个上同调是每个子复形的上同调群的直和。在次数 0 和 4 中，我们只是将同一个群相加，而在次数 2 中，这个和并非平凡。

References

1. Douglas N. Arnold 和 Kaibo Hu, *Complexes from complexes*, Found. Comput. Math. **21** (2021年), 第 6 期, 1739–1774。MR 4343022 2. Annalisa Baldi 和 Bruno Franchi, *Maxwell's equations in anisotropic media and Carnot groups as variational limits*, Advanced Nonlinear Studies **15** (2015年), 第 2 期, 333–362。3. Annalisa Baldi、Bruno Franchi 和 Pierre Pansu, *Gagliardo-Nirenberg inequalities for differential forms in Heisenberggroups*, Mathematische Annalen **365** (2016年), 第 3 期, 1633–1667。4. , *L^1-Poincaré inequalities for differential forms on Euclidean spaces and Heisenberg groups*, 数学进展 **366** (2020年), 107084。5. , *Orlicz spaces and endpoint Sobolev-Poincaré inequalities for differential forms in Heisenberg groups*, Le Matematiche **75** (2020年), 第 1 期, 167–194。6. , *Continuous primitives for higher degree differential forms in Euclidean spaces, Heisenberg groups and applications*, 当代数学通讯 **27** 4975579 7 2025 10, 2550023, 53 (), 第 期。论文编号 。MR 。Annalisa Baldi、Bruno Franchi、Nicoletta Tchou 和 Maria Carla Tesi, *Compensated compactness for differential forms in Carnot groups and applications* **223** 2010 5, 1555 1607 2592503 , 数学进展 (), 第 期–。MR 。8 Annalisa Baldi、Bruno Franchi 和 Francesca Tripaldi, *Gagliardo-Nirenberg inequalities for horizontal vector fields in the Engel group and in the seven-dimensional quaternionic Heisenberg group*, 《PDE 的几何方法》, 施普林格 INdAM 丛书, 第 13 卷, 3617226 9 2015年, 287 312, 施普林格, Cham, 第 – 页。MR 。Annalisa Baldi 和 Alessandro Rosa, *L^p-Hodge decomposition with Sobolev classes in sub-Riemannian contact manifolds*, J. Math. Anal. Appl. **552** 4915068 10 2025 1, 129739, 36 (), 第 期。论文编号 。MR 。Annalisa Baldi、Maria Carla Tesi 和 Francesca Tripaldi, *Sobolev-Gaffney type inequalities for differential forms on sub-Riemannian contact manifolds with bounded geometry*, arXiv 预印本 arXiv:2203.13701 （2022 年）。11. Annalisa Baldi 和 Francesca Tripaldi, *Comparing three possible hypoelliptic Laplacians on the 5-dimensional Cartan group via div-curl type estimates* **25** 2025 4, 1079 1111 , (), 第 期 –。MR 4974404 12. I.N. Bernstein 、 Israel M. Gelfand 和 Sergei I. Gelfand, *Differential operators on the base affine space and a study of $\mathfrak{g}$-modules*, 《李群及其表示》（Bolyai J´anos 数学会布达佩斯暑期学校论文集）（1975年）, 21–64。13. Thierry Bouche, *La cohomologie effective d'une variété symplectique*, Bulletin des Sciences Math´ematiques **114** (1990年), 第 2 期, 115–122。14. Ovidiu Calin、Der-Chen Chang 和 Michael Eastwood, *Integrability conditions for the Grushin and Martinet distributions*, arXiv 预印本 arXiv:1207.5440（2012年）。15. Giovanni Canarecci, *Sub-Riemannian currents and slicing of currents in the Heisenberg group $\mathbb{H}^n$*, 几何分析杂志 **31** (2021年), 第 5 期, 5166–5200。16. , *Horizontal and straight triangulation on Heisenberg groups* **33** 2023 8, , 几何分析杂志 () , 第 期。17. Andreas ˇCap, *BGG sequences–A Riemannian perspective*, arXiv 预印本 arXiv:2502.17016（2025年）。254

18. Andreas ˇCap 和 Kaibo Hu, *Bounded Poincaré operators for twisted and BGG complexes*, 已接收, 《纯粹与应用数学杂志》（2023年）。19. Andreas ˇCap 和 Jan Slov´ak, *Parabolic geometries I: Background and general theory*, 第 154 卷, 美国数学会, 2024年。20. Andreas ˇCap、Jan Slov´ak 和 Vladim´ır Sou ˇcek, *Bernstein-Gelfand-Gelfand sequences*, 《数学年刊》154（2001年）, 第 1 期, 97–113。21. Jeffrey S Case, *Boundary operators associated with the Paneitz operator*, 印第安纳大学数学杂志（2018年）, 293–327。22. , *A simple construction of the Rumin algebra*, Comptes Rendus. Math´ematique 361（2023年）, 第 G8 期, 1375–1382。23. , *The bigraded Rumin complex via differential forms*, 美国数学会回忆录 305 （2025 年）, 第 1538 期, 1538。24. Jeffrey S. Case 、 Sagun Chanillo 和 Paul Yang, *The CR Paneitz operator and the stability of CR pluriharmonic functions*, 数学进展 287（2016年）, 109–122。25. Joana Cirici、Muriel Livernet 和 Sarah Whitehouse, *Model category structures on truncated multicomplexes for complexgeometry*, 2025年。26. Joana Cirici 和 Scott O. Wilson, *Dolbeault cohomology for almost complex manifolds*, 数学进展 391（2021年）, 107970。27. Diego Conti, *The Ricci-flatness that lurks in weight*, Revista Matem´atica Complutense（2024年）, 1–24。28. Shantanu Dave 和 Stefan Haller, *Graded hypoellipticity of BGG sequences*, 全球分析与几何年刊 62（2022年）, 第 4 期, 721–789。29. Marco Di Marco、Antoine Julia、Sebastiano Nicolussi Golo 和 Davide Vittone, *Submanifolds with boundary and Stokes' theorem in Heisenberg groups* **378** 2025 7, 4955 4990 4919585 , Trans. Amer. 30 Math. Soc.（）, 第 期–。MR 。Marco Di Marco 和 Davide Vittone, *Submanifolds with boundary in sub-Riemannian Heisenberg groups*, 2025年。31. Vladimir Dotsenko、Sergey Shadrin 和 Bruno Vallette, *De Rham cohomology and homotopy Frobenius manifolds*, 欧洲数学会杂志 17（2015年）, 第 3 期, 535–547。32. Michael G Eastwood 和 John W Rice, *Conformally invariant differential operators on Minkowski space and their curved analogues*, 数学物理通讯 109（1987年）, 第 2 期, 207–228。33. V´eronique Fischer 和 Francesca Tripaldi, *An alternative construction of the Rumin complex on homogeneous nilpotent Lie groups* **429** 2023 109192, 39 4613357 , 数学进展（）, 论文编号 。MR 。Veronique 34 Fischer 和 Francesca Tripaldi, *Subcomplexes on filtered Riemannian manifolds*, arXiv 预印本 arXiv:2312.02342（2023年）。35. Bruno Franchi、Francescopaolo Montefalcone 和 Elena Serra, *Gaffney-Friedrichs inequality for differential forms on Heisenberg groups*, Rev. Mat. Iberoam. 35（2019年）, 第 3 期, 643–692。36. Bruno Franchi 和 Pierre Pansu, *Currents in Heisenberg groups*, arXiv 预印本 arXiv:2511.18895（2025年）。37. Bruno Franchi 和 Raul Paolo Serapioni, *Intrinsic Lipschitz graphs within Carnot groups* **26** 2016 3, , J. 1946 1994 Geom. Anal.（）, 第 期–。38. Bruno Franchi、Nicoletta Tchou 和 Maria Carla Tesi, *Div-curl type theorem, H convergence and Stokes formula in the Heisenberg group* **8** 2006 01, 67 99 ,

当代数学通讯（）, 第 期–。39. Bruno Franchi 和 Francesca Tripaldi, *Differential Forms in Carnot Groups After M. Rumin: an Introduction*, 意大利数学联盟丛刊, 《数学专题》, 博洛尼亚, Pitagora（2015年）, 75–122。40. Eero Hakavuori、Ville Kivioja、Terhi Moisala 和 Francesca Tripaldi, *Gradings for nilpotent Lie algebras*, 李理论杂志 32（2022年）, 第 2 期, 383–412。41. Stefan Haller, *Regularized determinants of the Rumin complex in irreducible unitary representations of the* $2,3,5$ *nilpotent*( ) , 。 *Lie group* 2024 42. Stefan Haller, *Analytic torsion of nilmanifolds with*(2, 3, 5) *distributions*, 度量空间中的分析与几何 13（2025年）, 第 1 期, 20250028。43. Stefan Haller, *On the eta invariant of*(2, 3, 5) *distributions*, 2025年。44. Bernard Helffer 和 Jean Nourrigat, *Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs*, Journ´ees ´equations aux d´eriv´ees partielles（1980年）, 1–2。45. Tom Holt 和 Riccardo Piovani, *The L^2 Aeppli-Bott-Chern Hilbert complex*, J. Funct. Anal. 287（2024年）, 第 9 期, 论文编号 110596, 59。MR 4779813 46. Kaibo Hu, *Many facets of cohomology: Differential complexes and structure-aware formulations*, arXiv 预印本 arXiv:2503.22813（2025年）。47. Kaibo Hu、Ting Lin 和 Qian Zhang, *Distributional Hessian and divdiv complexes on triangulation and cohomology*, 已接收, SIAM应用代数与几何杂志（2025年）。48. Daniel Huybrechts, *Complex geometry: an introduction*, 施普林格, 2005年。49. Antoine Julia 和 Pierre Pansu, *Flat compactness of normal currents, and charges in Carnot groups*, arXiv 预印本 arXiv:2303.02012（2023年）。50. Akira Kitaoka, *Analytic torsions associated with the Rumin complex on contact spheres*, International Journal of Mathematics 31（2020年）, 第 13 期, 2050112。51. , *Harmonic forms and the Rumin complex on Sasakian manifolds*, arXiv 预印本 arXiv:2204.03446（2022年）。52. James Lepowsky, *A generalization of the Bernstein-Gelfand-Gelfand resolution*, 代数杂志 49（1977年）, 第 2 期, 496–511。

53. Antonio Lerario与Francesca Tripaldi, *Multicomplexes on Carnot groups and their associated spectral sequence*, 《几何分析杂志》33（2023年），第7期，199. 54. Muriel Livernet、Sarah Whitehouse与Stephanie Ziegenhagen, *On the spectral sequence associated to a multicomplex*, 《纯粹与应用代数杂志》224（2020年），第2期，528–535. 55. Valentin Lychagin, *Contact geometry and non-linear second-order differential equations*, 《俄罗斯数学综述》34（1979），第1期，149. 56. Valentin Lychagin与Vladimir Rubtsov, *Non-holonomic filtration: algebraic and geometric aspects of non-integrability*, 《偏微分方程中的几何》，世界科学出版社，新泽西州里弗埃奇（1994），189–214. 57. Pierre Pansu与Michel Rumin, *On the ℓ^q, ^{p} cohomology of Carnot groups*, 《亨利·勒贝格纪事》1（2018年），267–295. 58. Pierre Pansu与Francesca Tripaldi, *Averages and the ℓ^q,^{1} cohomology of Heisenberg groups*, Annales Math´ematiques Blaise Pascal，第26卷，2019年，第81–100页. 59. Riccardo Piovani, *On the cohomology of the Bigolin complex*, 2025年. 60. Michel Rumin, *Un complexe de formes différentielles sur les variétés de contact*, CR Acad. Sci. Paris S´er. I Math 310（1990），第6期，401–404. 61. , *Formes différentielles sur les variétés de contact*, 《微分几何杂志》39（1994），第2期，281–330. 62. , *Differential geometry on CC spaces and application to the Novikov-Shubin numbers of nilpotent Lie groups*, Comptes Rendus de l'Acad´emie des Sciences-Series I-Mathematics 329（1999），第11期，985–990. 63. , *Around heat decay on forms and relations of nilpotent Lie groups*, S´eminaire de Th´eorie Spectrale et G´eom´etrie，第19卷，Ann´ee 2000–2001年，S´emin. Th´eor. Spectr. G´eom.，第19卷，格勒诺布尔第一大学，2001年，第123–164页. MR MR1909080 (2003f:58062) 64. , *An introduction to spectral and differential geometry in Carnot-Carathéodory spaces*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2)增刊75（2005年），139–196. MR MR2152359 (2006g:58053) 65. , *Topological and dynamical aspects of some spectral invariants of contact manifolds with circle action*, arXiv预印本 arXiv:2409.11787（2024年）. 66. Michel Rumin与Neil Seshadri, *Analytic torsions on contact manifolds*, 《傅里叶研究所纪事》，第62卷，2012，第727–782页. 67. Lorenzo Sillari与Adriano Tomassini, *On Bott-Chern and Aeppli cohomologies of almost complex manifolds and related spaces of harmonic forms* **41** 2023 4, 125517, 34 , Expo. Math.（），第 期，论文编号 . MR 4646801 68. Jonas Stelzig, *On linear combinations of cohomological invariants of compact complex manifolds*, 《数学进展》407（2022年），108560. 69 *Some remarks on the Schweitzer complex* **75** 2025 1, 35 47 4862341 . 70 **12** 2019 Jonas Stelzig, , Ann. Inst. Fourier（格勒诺布尔）（），第–期 . MR . Nicoletta Tardini与Adriano Tomassini, *Symplectic cohomologies and deformations*, 《意大利数学联合会通报》（），第1-2期，221–237. MR 3936304 71. Li-Sheng Tseng与丘成桐, *Cohomology and Hodge theory on symplectic manifolds: I*, 《微分几何杂志》91（2012），第3期，383–416. MR 2981843

（F. Tripaldi） Department of Pure Mathematics, University of Leeds, Woodhouse, LS2 9JT Leeds, UK
Email address: f.tripaldi@leeds.ac.uk