arXiv:2602.01216v1 [math.LO] 1 Feb 2026

k 变量逻辑的一类广义量词

JanekHärtter
MartinOttomath@haertter.com otto@mathematik.tu-darmstadt.de

2026年1月

摘要

我们引入 k-量词逻辑——这类逻辑能够访问元素的 k 元组，并允许在 k 元组之间采用非常一般的量化模式。该框架表达能力很强，涵盖了一阶逻辑、模态逻辑以及单调邻域语义的 k 变量片段。我们还引入相应的互模拟概念，并证明经典 Ehrenfeucht–Fraïssé 定理和 Hennessy–Milner 定理的变体。最后，我们通过证明满足 Łoś 定理的 k-量词逻辑是满足 Łoś 定理且在相应互模拟关系下保持不变的表达能力最强的逻辑，给出了这类逻辑的林德斯特伦式刻画。

1 引言

一阶逻辑 FO 的 Lindström 定理是抽象模型论的一项标志性成果。在其主要版本中（例如在 [7],中作为 Lindström 第一定理加以讨论），它将 FO 刻画为在满足抽象逻辑的一些非常基本的标准性质，以及作为核心约束的表达能力极大和紧致性与向下*Löwenheim-Skolem* 定理的逻辑中，表达力最强的逻辑。竞争逻辑必须满足的标准性质包括一些基本语义原则，例如同构不变性、对布尔运算封闭、对符号重命名具有自然的行为，等等。在这一背景下，FO 所具有的两个关键额外性质是其紧致性（每个有限子集都可满足，就意味着整个集合可满足）和可数 Löwenheim-Skolem 条件（可数公式集可满足，就意味着它在至多可数无限的论域上可满足）。对于 FO，紧致性是 Gödel 完备性定理的直接推论，但也可以仅用模型论术语从 FO 与超积的相容性推导出来。这涉及相对于超滤子等价，对直积的自然商进行普遍代数生成。FO 的这一重要模型论特征由 Łoś 定理阐明（参见下文定理 6.2；教科书式的说明见例如 [7]）：该定理指出，在一个由无限多个结构构成的族上的超滤子约化积中，满足公式 $\varphi \in$ 的 FO 公式，恰好是那些其分量结构中满足 φ 的结构所成集合属于该超滤子的公式（第 6 节将极简回顾基本术语；这些术语都是教科书中的标准内容）。更深层的集合论原理则

也涉及 Keisler–Shelah 定理 [2, 定理 6.1。15], 。该定理将这一 Łoś 现象与 FO 的表达力更直接地联系起来，指出初等等价的结构具有同构的超幂。这意味着，任何尊重同构且与超积（甚至仅与超幂这一特殊情形）相容的逻辑，都不可能区分 FO 中不可区分的任何两个结构；换言之，任何这样的逻辑不仅必须满足紧致性，而且其表达能力还直接受 FO 支配。基于这一洞见，Sgro 证明，在某些模型类上，满足 Łoś 定理的逻辑具有极大性 [23]，即表达能力极大。经典图景大致如此。

人们对 Lindström 类结果的兴趣最近再次升温，其焦点是额外的语义约束，主要体现为不变性条件。这些研究往往受到典型应用领域的启发；在这些领域中，所需的表达能力可能远弱于一阶逻辑，也可能与一阶逻辑不可比较。这方面一个突出的情形是模态逻辑，其中有关信息可达性的特定约束由 Kripke 结构建模。在这种建模方式下，一阶逻辑的全部表达能力可能会捕捉到无关特征，同时也可能遗漏其他本可捕捉的特征。在基本模态情形中，语义所要施加的自然先验限制由双模拟不变性刻画。这一语义约束可视为对同构不变性的强力强化，不过在特定语境中，它可以说同样自然。van Benthem、ten Cate 和 Väänänen 的开创性论文 [24], 着重强调了以系统方式聚焦于此类受限情形、重新考察 Lindström 现象的做法；例如， [20]也对此进行了探讨。显然，Lindström 型极大性断言有许多变体：除了不变性条件所体现的额外领域特定语义约束，或像模态逻辑框架条件那样对模型类的限制 [8]之外，还可选择抽象模型论中的背景原则，例如紧致性、Tarski 并性质 TUP、Łoś 性质或局部性原则。背景原则本身对目标逻辑表达能力的限制程度不同，可能已足以将其约束为一阶逻辑这样的标准逻辑；因此，Lindström 结果也可以解读为针对额外不变性条件的刻画定理。举例来说，在以基本模态逻辑 ML 为目标的经典模态情形中，van Benthem 将 ML 刻画为双模拟不变的一阶逻辑片段中表达完备的逻辑；这也可以表述为某个 Lindström 定理的推论。该定理证明，在满足某些足够强的背景条件（这些条件实际上将逻辑限制在一阶逻辑之内）的双模拟不变逻辑中，ML 具有极大的表达能力，参见 [24, 20, 8]。有趣的是，基于 Ehrenfeucht–Fraïssé 式来回等价（即部分同构）的语义不变性条件，也可视为经典 Lindström 结果的根源（参见 [7]中的介绍），而更具表达力的逻辑中也存在遵循抽象模型论思路的变体 [9]。本文采用一种自然的推广，将双模拟不变性应用于k-元组，作为一种语义不变性条件，直接反映底层 k-量词所施加的语义约束。在这方面，我们的结果再次凸显了 Lindström 结果与表达完备性结果之间的密切联系。另一方面，Liao 最近的研究 [15] 将经典 Lindström 证明推广到了一个完整的逻辑类，这类逻辑能够编码各自的 Ehrenfeucht–Fraïssé 博弈。

本文的构想源自第一作者的学士论文 [14]。我们将与超积相容的 Łoś 性质作为抽象模型论中的一项极强背景条件，用于 Lindström 式刻画。鉴于 Keisler–Shelah 定理对表达能力设定了一阶上限，这一做法看起来或许有些过度；然而，它是一条非常简洁的原则，也可以从纯粹的泛代数视角加以阐释。更重要的是，我们在第 7 节中的主要 Lindström 论证并不依赖 Keisler–Shelah，而是通过不直接诉诸目标逻辑一阶本质的技巧，对范围极广的一类目标逻辑证明其极大性——尽管 Łoś 性质会间接施加这种一阶限制。即便考虑到这一更深层的蕴涵（我们将在第 6 节讨论），并将我们的主要结果相应地理解为关于一阶逻辑片段的刻画定理，我们仍认为，这些结果涉及的目标逻辑具有广泛的一般性，且其自然的语义不变性条件也使结果颇具意义。对于这些目标逻辑，我们着眼于一个相当一般的框架；它并不直接体现一阶逻辑的特征，而是着重体现一种直觉：对局部构型或状态的访问，以及它们之间的信息联系，都是有限的。模态逻辑和邻域语义中的常见例子便体现了这种直觉 [21]。对于相关的局部构型，我们聚焦于固定元数的元素元组，并相应地将固定 $k \geq 1$下含有 k 元素元组的结构，即k带点结构，作为抽象逻辑语义的输入。[1] 目标逻辑的表达能力建立在一种先验上非常一般的 k量词概念之上：这些量词从此类结构中的任意一个 k-元组出发，访问可达的 k-元组集合；若将可达的 k-元组集合视为邻域，其底层访问模式以及基于这些集合的量化方式便与（单调）邻域语义十分相似。关键在于，这些 k-量词（或支撑其语义的见证集所构成的相关邻域系统）采用了极为宽松的形式，几乎允许在 k-带点结构中以任何合理方式（即同构不变的方式）分配见证集系统；详情参见第2节。由一组 k-量词带来的额外语义不变性条件，则建立在双模拟不变性的自然推广之上。推广所依据的是一种 Ehrenfeucht–Fraïssé 式来回博弈：在此博弈中，对 k-构型的交替探测由对可用见证集的访问引导，而这些见证集构成 k-量词语义的基础。详见第 3、4、5 节。

过去，人们已经探索过其他用于刻画整类逻辑语义的框架。最值得注意的是，林德斯特伦量词 （参见 [5, 第 4]章）比我们的 k-量词通用得多，也灵活得多。尽管这种表达能力使它们几乎能够刻画任何可以想象的逻辑，但在我们的设定中，它们的强大反而成了障碍。它们极为通用，因此难以按照本文提出的方式刻画并限制其表达能力。

模态逻辑的邻域语义，正如 [21],中所深入探讨的，与我们提出的 1-量词逻辑概念密切相关，后者是 k-量词逻辑的一元版本。方框算子的向上单调邻域函数与我们的见证

[1]这与将标准逻辑限制在 k变量片段的做法理念相近；参见 k变量片段，例如一阶逻辑$^k \subseteq$ FO 及其无穷变体，尤其是它们通过计数量词所作的扩张，例如 C^k ⊆FO；这些逻辑在算法模型论中已被证实具有重要意义 [6, 16, 4, 19]。

集（对应 1-量词）之间基本上存在一一对应关系。这两种方法的主要区别在于，邻域语义将邻域函数视为所考察结构的容许规范的一部分，而 1-量词的见证集则被视为由量词「外部决定」。因此，可以将 1-量词看作对邻域函数施加了极其严格的框架条件。

有关 1-量词逻辑表达能力的示例，请参见下文的示例 2.8、2.9 和 2.10。

本文结构如下：在第2节中，我们介绍 k-量词和 k-量词逻辑的概念，并给出本框架所涵盖逻辑的著名示例。第3节中，我们定义相应的双模拟博弈。在第4节和第5节中，我们将经典的 Ehrenfeucht–Fraïssé 定理和 Hennessy–Milner 定理推广到 k-量词逻辑。在第 6 节中，我们研究具有 Łoś性质的 k-量词逻辑的性质，并在第 7 节中以针对这类 k-量词逻辑的 Lindström风格定理作为研究的总结。

2 抽象 k-逻辑

在整个研究过程中，我们将讨论范围限定为纯关系签名。给定关系 R 的元数记为 ar(R)。

σ结构 $\mathfrak{A}$ 的论域记作 A。由 σ结构 $\mathfrak{A}$ 及其对应的变量赋值 α 组成的有序对（$\mathfrak{A}$，α）称为带指派点的σ结构，简称带指派点的结构。

对于 $k \in \mathbb{N}$，k赋值是对 k 个变元的赋值。带指派点的 σ-结构（$\mathfrak{A}$，α）称为 k-带指派点的（σ-）结构，当且仅当 α 是一个 k-赋值。为简化记法，我们将 $\alpha : \{x_1, \ldots, x_k\} \to A$ 的赋值 k与 k元组（$\alpha(x_1)$，...，$\alpha(x_k)$）$\in A^k$对应起来。

定义 2.1（抽象逻辑）。一个抽象逻辑 $\mathcal{L} = (L, \vDash_{\mathcal{L}})$ 是由以下部分组成的一对：

– 一个将签名映射到公式集的函数 L，以及 – 一个满足关系 $\vDash_{\mathcal{L}}$，用于关联带指派点的 σ结构与 $L(\sigma)$ 中的公式。

我们要求一种抽象逻辑满足以下条件：

– 在同构下保持不变，即对于任意一对同构的 $\varphi \in L(\sigma)$-结构 $\iota : \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$，以及 $\mathfrak{A}$ 中的变量赋值 α，

$$\mathfrak{A}, \alpha \vDash_{\mathcal{L}} \varphi \quad \iff \quad \mathfrak{B}, \iota \circ \alpha \vDash_{\mathcal{L}} \varphi,$$

– 对布尔联结词封闭，即

$$\varphi, \psi \in L(\sigma) \quad \implies \quad \top, \neg\varphi, (\varphi \wedge \psi) \in L(\sigma),$$

– 具有（句法上的）有限出现性质，即对于每个签名 σ,$\varphi \in \mathcal{L}(\sigma)$，都存在一个有限的 $\sigma_0 \subseteq \sigma$，使得 $\varphi \in \mathcal{L}(\sigma_0)$,

– 具有重命名不变性，即对于任意签名 σ、新鲜的 k 元关系R，$R' \notin \sigma$，以及 $\varphi \in \mathcal{L}(\sigma \cup \{R\})$，都存在某个 $\varphi' \in \mathcal{L}(\sigma \cup \{R'\})$，使得对于所有带指定点的 σ-结构 $(\mathfrak{A}, \alpha)$ 和 $R^{\mathfrak{A}} = R'^{\mathfrak{A}} \subseteq A^k$，

$$\mathfrak{A}, R^{\mathfrak{A}}, \alpha \vDash \varphi \quad \iff \quad \mathfrak{A}, R'^{\mathfrak{A}}, \alpha \vDash \varphi'.$$

一种抽象 k逻辑 $\mathcal{L}$ 是一种抽象逻辑，它为带变量赋值、定义在 $\mathcal{X}_k$ 上的 k-指向 σ-结构提供语义$= \{x_1, \ldots, x_k\}$。

我们按通常方式将联结词 $\vee$、$\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ 以及公式 $\bot$ 视为缩写。为简化记号，我们还不区分 L 和 $\mathcal{L}$；在不会引起混淆时，也只写 $\vDash$ 而不写 $\vDash_{\mathcal{L}}$。

请注意，由于我们的研究大多考虑紧致逻辑，因此有限出现性质主要是为了方便而陈述的，因为紧致性和对重命名的不变性在语义意义上蕴含有限出现性质（参见 [5, 命题 5.1.2]）。

若对于每个签名 σ 和每个公式 $\varphi \in \mathcal{L}_1(\sigma)$，都存在一个公式 $\psi \in \mathcal{L}_2(\sigma)$，使得对所有指向$\sigma$的结构 $(\mathfrak{A}, \alpha)$，抽象逻辑 $\mathcal{L}_1$ 是抽象逻辑的一个片段 $\mathcal{L}_2$ 或 $\mathcal{L}_2$ 是 $\mathcal{L}_1$的一个扩展，记作 $\mathcal{L}_1 \preccurlyeq \mathcal{L}_2$ 或 $\mathcal{L}_2 \succcurlyeq \mathcal{L}_1$。

$$\mathfrak{A}, \alpha \vDash \varphi \quad \iff \quad \mathfrak{A}, \alpha \vDash \psi.$$

句法差异对我们的目的无关紧要，因此我们假设对于所有签名 σ，

$$\mathcal{L}_1 \preccurlyeq \mathcal{L}_2 \quad \implies \quad L_1(\sigma) \subseteq L_2(\sigma).$$

两个抽象逻辑 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 是等价的，记作 $\mathcal{L}_1 \equiv \mathcal{L}_2$，如果 $\mathcal{L}_1 \preccurlyeq \mathcal{L}_2$且 $\mathcal{L}_2 \preccurlyeq \mathcal{L}_1$。

定义2.2（k-量词）。 k-量词 Q 是一个符号，并附带

– 一个关联签名 σ_Q，以及

– 对于每个（扩张后的） k-指向的 σ_Q-结构 $(\mathfrak{A}, \alpha)$，一个见证集 $Q(\mathfrak{A}, \alpha) \subseteq \mathcal{P}(A^k)$。 Q 关于同构和扩张必须表现良好，即如果 $\iota : (\mathfrak{A} \restriction \sigma_Q) \simeq (\mathfrak{B} \restriction \sigma_Q)$，那么对于任意 k-赋值 α

$$Q(\mathfrak{B} \restriction \sigma_Q, \iota \circ \alpha) = Q(\mathfrak{B}, \iota \circ \alpha) = \{\{\iota \circ \gamma \mid \gamma \in s\} \mid s \in Q(\mathfrak{A} \restriction \sigma_Q, \alpha)\}.$$

请注意， k-量词关于扩张表现良好的规定已经意味着 k-量词尊重同构。

我们将见证集中的元素称为见证，而且，由于底层结构通常可由上下文明确，我们可以将 $Q(\mathfrak{A}, \alpha)$ 简写为 $Q(\alpha)$。

对于给定的 $\mathcal{Q}$ k-量词集，我们记

$$\mathcal{Q}_\sigma := \{Q \in \mathcal{Q} \mid \sigma_Q \subseteq \sigma\}.$$

定义 2.3（k-量词逻辑）。一个 k-量词逻辑 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$ 是一种基于一类 k-量词 $\mathcal{Q}$ 的抽象 k-逻辑，其语法和语义定义如下。

对于给定的签名 σ， $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}(\sigma)$ 的语法 归纳给出如下

– $\top \in \mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}(\sigma)$, – 对所有 l 元关系 $R \in \sigma$ 以及变元 $y_1, \ldots, y_l \in \mathcal{X}_k$, 公式$R(y_1, \ldots, y_l)$ 属于 $\mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}(\sigma)$, – 对所有 $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}(\sigma)$, 亦有 $\neg\varphi \in \mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}(\sigma)$, – 对所有 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}(\sigma)$, 亦有 $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \in \mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}(\sigma)$, – 对所有 $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}(\sigma)$ 与 $Q \in \mathcal{Q}_\sigma$, 亦有 $Q\varphi \in \mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}(\sigma)$。

该满足关系 也以归纳方式定义：对于所有签名 σ、 $Q \in \mathcal{Q}_\sigma$ 以及 k带点的 σ结构 $(\mathfrak{A}, \alpha)$，

– $\mathfrak{A}, \alpha \vDash \top$,

– $\mathfrak{A}, \alpha \vDash R(y_1, \ldots, y_l)$ if $(\alpha(y_1), \ldots, \alpha(y_l)) \in R^{\mathfrak{A}}$,

– $\mathfrak{A}, \alpha \vDash \neg\varphi$ if $\mathfrak{A}, \alpha \nvDash \varphi$,

– $\mathfrak{A}, \alpha \vDash (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ if $\mathfrak{A}, \alpha \vDash \varphi_1$ and $\mathfrak{A}, \alpha \vDash \varphi_2$,

– $\mathfrak{A}, \alpha \vDash Q\varphi$ if there exists an $s \in Q(\mathfrak{A}, \alpha)$ such that for all $\gamma \in s$: $\mathfrak{A}, \gamma \vDash \varphi$.

受平坦团队语义启发，我们对子集 $s \subseteq A^k$ 作如下定义：

$$\mathfrak{A}, s \vDash \varphi \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \text{f.a. } \alpha \in s : \mathfrak{A}, \alpha \vDash \varphi.$$

请注意，虽然我们可以在 k量词逻辑的定义中将等号作为一个文字纳入，但我们选择不这样做，因为如有需要，可以很容易地通过将其作为额外二元关系引入来添加。

观察2.4 （向上单调性）. 设 $\mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}$ 为一个 k量词逻辑。则$\mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}$ 是向上单调的，即对于任意公式 $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}(\sigma)$、 k带点的 σ结构$(\mathfrak{A}, \alpha)$以及 $s \in Q(\alpha)^{\uparrow} := \{s' \subseteq A^k \mid \textit{ex. } t \in Q(\alpha) \text{ 且 } t \subseteq s'\}$,

$$\mathfrak{A}, s \vDash \varphi \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{A}, \alpha \vDash Q\varphi.$$

定义2.5 （量词秩）. 对于给定的 k量词逻辑 $\mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}$ 和签名 σ，我们归纳地将 $\mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}(\sigma)$中公式的量词秩 定义为

$$\begin{aligned}
\mathrm{qr}(\top) &:= 0, \\
\mathrm{qr}(R(y_1, \ldots, y_l)) &:= 0 && \text{for any } R \in \sigma, \text{variables } y_1, \ldots, y_l, \\
\mathrm{qr}(\neg\varphi) &:= \mathrm{qr}(\varphi) && \text{for any } \varphi \in \mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}(\sigma), \\
\mathrm{qr}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) &:= \max\{\mathrm{qr}(\varphi_1), \mathrm{qr}(\varphi_2)\} && \text{for any } \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}(\sigma), \\
\mathrm{qr}(Q\varphi) &:= 1 + \mathrm{qr}(\varphi) && \text{for any } \varphi \in \mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}(\sigma), Q \in \mathcal{Q}_\sigma.
\end{aligned}$$

定义2.6 （$\mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}$-初等等价）。设 $\mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}$ 为 k-量词逻辑。那么，两个 k-指点的 σ-结构 $(\mathfrak{A}, \alpha)$ 和 $(\mathfrak{B}, \beta)$ 称为 $\mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}$-初等等价，记作 $(\mathfrak{A}, \alpha) \equiv_{\mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}} (\mathfrak{B}, \beta)$，如果对所有 $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}(\sigma)$，

$$\mathfrak{A}, \alpha \vDash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{B}, \beta \vDash \varphi.$$

类似地，若对于所有满足 $\mathrm{qr}(\varphi) \leq q$ 的 $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}(\sigma)$，均有.....，则 $(\mathfrak{A}, \alpha)$ 与 $(\mathfrak{B}, \beta)$ 对 $q \in \mathbb{N}$ 是 $\mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}_q$-初等等价 的，记作 $(\mathfrak{A}, \alpha) \equiv^q_{\mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}} (\mathfrak{B}, \beta)$,

$$\mathfrak{A}, \alpha \vDash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{B}, \beta \vDash \varphi.$$

定义 2.7 ($\mathcal{L}$-理论)。 对于给定的 k-量词逻辑 $\mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}$ 和签名 σ，我们将带指定点的 σ-结构 $(\mathfrak{A}, \alpha)$ 的 $\mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}$-理论 记作

$$\mathrm{Th}_{\mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}}(\mathfrak{A}, \alpha) := \left\{\varphi \in \mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}(\sigma) \mid \mathfrak{A}, \alpha \vDash \varphi\right\}$$

以及给定量词秩 $q \in \mathbb{N}$ 的 $\mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}_q$-理论，作为

$$\mathrm{Th}^q_{\mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}}(\mathfrak{A}, \alpha) := \left\{\varphi \in \mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}(\sigma) \mid \mathfrak{A}, \alpha \vDash \varphi, \mathrm{qr}(\varphi) \leq q\right\}.$$

类似地，对于 $s \subseteq A^k$，我们定义

$$\mathrm{Th}_{\mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}}(\mathfrak{A}, s) := \left\{\varphi \in \mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}(\sigma) \mid \mathfrak{A}, s \vDash \varphi\right\},$$
$$\mathrm{Th}^q_{\mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}}(\mathfrak{A}, s) := \left\{\varphi \in \mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}(\sigma) \mid \mathfrak{A}, s \vDash \varphi, \mathrm{qr}(\varphi) \leq q\right\}.$$

例2.8（模态量词作为1-量词）。 对于给定的二元关系$R \subseteq A \times A$，我们将给定元素 $a \in A$ 的后继集记为

$$R[a] := \{c \in A \mid (a, c) \in R\}.$$

我们首先定义一些在模态语境中出现的著名1-量词，如下表所总结，其中 R 表示一个二元关系。

Q	语义	σ_Q	参考文献
$\Diamond$	存在一个 R-后继，使得	(R)	[1]
$\Diamond^{\geq k}$	至少存在 k R个后继，使得	(R)	[25]
$\forall$	所有元素都满足	$\emptyset$	[11]
$\exists$	存在一个元素，使得	$\emptyset$	[11]
$\circ$	存在一个由满足条件的元素组成的长度为 ≥ 3 的环	(R)	
$\bullet$	存在无限多个自反 R-后继，使得	(R)	[24]
$\hookrightarrow$	存在一个可达元素，使得	(R)	[22]

这些可表示为具有以下见证集的 1-量词:

$$\begin{aligned}
\Diamond(\mathfrak{A}, a) &:= \left\{\{c\} \mid c \in R^{\mathfrak{A}}[a]\right\},\\
\Diamond^{\geq k}(\mathfrak{A}, a) &:= \left\{s \subseteq A \mid \left|s \cap R^{\mathfrak{A}}[a]\right| \geq k\right\},\\
\forall(\mathfrak{A}, a) &:= \{A\},\\
\exists(\mathfrak{A}, a) &:= \{s \subseteq A \mid s \neq \emptyset\},\\
\circ(\mathfrak{A}, a) &:= \left\{\{c_0, \ldots, c_{l-1}\} \subseteq A \mid l \geq 3 \text{ s.t. f.a. } i \in \mathbb{Z}_l : (c_i, c_{i+1}) \in R^{\mathfrak{A}}\right\},\\
\bullet(\mathfrak{A}, a) &:= \left\{s \subseteq R^{\mathfrak{A}}[a] \mid |s| = \infty, \text{ f.a. } c \in s : (c, c) \in R^{\mathfrak{A}}\right\},\\
\hookrightarrow(\mathfrak{A}, a) &:= \left\{\{c_l\} \subseteq A \mid l \geq 0, c_0, \ldots, c_l \in A\right.\\
&\qquad \left.\text{s.t. } c_0 = a \text{ and f.a. } 0 \leq i < l : (c_i, c_{i+1}) \in R^{\mathfrak{A}}\right\}.
\end{aligned}$$

例 2.9（单调邻域语义与 1-量词）。 更一般地，我们可以用 1-量词逻辑来刻画单调邻域语义。

一个邻域模型 $\mathfrak{M} := (W, N, V)$ 由一个论域 W、一个邻域函数 $N: W \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ 以及一个赋值 $V: p_i \mapsto P_i \in \mathcal{P}(W)$ 构成，

它为基本命题 p_i 定义关系解释。标准逻辑以基本模态语言为模型，并为原子公式、命题联结词以及

$$\mathfrak{M}, w \vDash \Box\varphi \quad :\Longleftrightarrow \quad \{u \in W \mid \mathfrak{M}, u \vDash \varphi\} \in N(w).$$

关于邻域语义的全面介绍，请参阅 [21]。若所有 $N(w)$ 在取超集时都保持封闭，则称邻域模型是单调的： $N(w) = N(w)^{\uparrow}$。设 $\mathcal{C}$为一类单调邻域模型，使得对于每一对 $(W,\ N,\ V)$，$(W',\ N',\ V') \in \mathcal{C}$

$$(W, V) \simeq (W', V') \quad \Longrightarrow \quad (W, V, N) \simeq (W', V', N'). \tag{1}$$

这使我们能够以归纳方式将任意给定的 $\varphi \in$ ML 翻译成 1-量词逻辑的语言，其方式类似于基本模态逻辑在克里普克框架上的标准翻译。我们将方框翻译为 $\mathrm{ST}(\Box\psi) := Q\mathrm{ST}(\psi)$，并根据 $Q((W,\ V)\ w) := N(w)$ 来确定见证集。我们发现，对于 $P_i^{\mathfrak{M}} := V(p_i)$ 和 $w \in W$，

$$(W, N, V), w \vDash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad (W, (P_i^{\mathfrak{M}})_{i\in\mathbb{N}}), w \vDash_{\mathcal{L}^{\{Q\}}} \mathrm{ST}(\varphi).$$

从这个意义上说，在上述框架条件所确定的一类模型范围内，1-量词等价于邻域语义。

请注意，这种构造将邻域函数“外部化”，以便将其编码为 1-量词。因此，必须满足 (1)，以避免违反 $\mathcal{L}^{\{Q\}}$ 的同构不变性。

例 2.10 （一阶量词和计数量词）。 固定某个 $k \geq 1$ 并定义

$$\mathcal{Q} := \left\{\exists_{x_i}^{\geq n} \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k\right\}$$

其中 $\exists_{x_i}^{\geq n}(\mathfrak{A}, \alpha) := \left\{s \subseteq A^k \mid |s| \geq n, \text{f.a. } \gamma \in s, j \neq i\colon \gamma(x_j) = \alpha(x_j)\right\}$。那么，逻辑 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}} \equiv \mathsf{C}^k$ 是带计数量词的一阶逻辑的 k-变量片段；而对 $(\exists_{x_i}^{\geq 1})_{1\leq i\leq k}$ 的限制对应于一阶逻辑 [6, 16, 4, 19] 的 k-变量片段 FO^k 。

3 互模拟

我们旨在按照传统模型论中往返技术的思路，对 k-量词逻辑的表达力作出自然刻画；这些技术刻画了带赋值结构之间不同层次的 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$-不可区分性。对于经典一阶逻辑 FO，这体现于最初的 Ehrenfeucht–Fraïssé 方法（参见 [7]）；该方法针对 FO^k 和 C^k 有许多自然的限制与改编，也可用于 FO 的守卫片段 GF 等逻辑，并以适当的卵石博弈等价来刻画。

在模态传统中，同一思想以一种更为根本的方式，体现在双模拟博弈和等价的传统形式中。我们将双模拟框架下的往返等价视为这一思想最根本的体现，因此采用这一术语；但出于历史优先性的考虑，我们将关键联系称为（对）埃伦福伊希特–弗赖塞定理的（改编）。为了便于阐述，我们也将自然的博弈直觉置于前景，而非采用以

来回系统为基础、外延性更强的形式化方式。我们对 k-量词逻辑中的互模拟概念所作的改编，也与将基本模态互模拟自然地推广到单调邻域逻辑（参见 [21]）或探究模态逻辑（参见 [3]）的做法一致。

定义 3.1 （$\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$-互模拟）。 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$-互模拟博弈 有两种变体——无界博弈 $G^{\mathcal{Q}}$ 和 q 回合博弈 $G_q^{\mathcal{Q}}$。两种博弈都由两名博弈者**I** 和**II** 在两个 σ-结构 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$上进行。博弈中的局面是成对的 k-带点结构（$\mathfrak{A}$，α；$\mathfrak{B}$，β），其中 $\alpha \in A^k$和 $\beta \in B^k$。

博弈者**II** 在任何违反原子等价的局面（$\mathfrak{A}$，α；$\mathfrak{B}$，β）中都会输；也就是说，存在无量词公式可以区分（$\mathfrak{A}$，α）和（$\mathfrak{B}$，β）。

从局面（$\mathfrak{A}$，α；$\mathfrak{B}$，β）开始的一回合按如下方式进行：

– **I** 从两个带点结构中选一个，例如（$\mathfrak{A}$，α），再选一个量词 $Q \in \mathcal{Q}_\sigma$和一个见证集 $s \in Q$（$\mathfrak{A}$，α）。– **II** 必须用见证集 $t \in Q$（$\mathfrak{B}$，β）作出回应。– **I** 必须选取某个赋值 $\delta \in t$。– **II** 必须用某个赋值 $\gamma \in s$ 作出回应。– 博弈中的新局面为（$\mathfrak{A}$，γ；$\mathfrak{B}$，δ），

若任一博弈者因无法给出所需回应而受阻，则该博弈者会在这一回合中落败。

我们称**II** 在 $G^{\mathcal{Q}}$ 的一局博弈中获胜，当且仅当**I**落败，或对局无限继续且**II**始终未落败。类似地，我们称**II** 在 $G_q^{\mathcal{Q}}$中获胜，当且仅当博弈者**I**落败，或在该博弈的全部 q 回合中双方均未落败。

我们称带点结构$(\mathfrak{A}, \alpha)$和$(\mathfrak{B}, \beta)$是 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$-互模拟的，记作$(\mathfrak{A}, \alpha) \sim_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}} (\mathfrak{B}, \beta)$，当且仅当**II** 对初始配置为$(\mathfrak{A}, \alpha; \mathfrak{B}, \beta)$的 $G^{\mathcal{Q}}$ 拥有必胜策略。

类似地，对于某个$q \in \mathbb{N}$，我们称这些 k-带点结构是 $\mathcal{L}_q^{\mathcal{Q}}$-互模拟的，记作$(\mathfrak{A}, \alpha) \sim^q_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}} (\mathfrak{B}, \beta)$，当**II** 从该初始位置开始对 $G_q^{\mathcal{Q}}$拥有必胜策略。

由于 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$-互模拟博弈是博雷尔博弈，因此它是确定的 [17] ，也就是说，博弈的任一局面都恰有一位博弈者拥有必胜策略。

4 埃伦福伊希特–弗赖塞定理

一阶逻辑（FO）的埃伦福伊希特–弗赖塞定理，本质上阐述了这样一种对应关系：在给定量词秩 q 以内，公式无法区分两者，当且仅当在进行 q 回合的一阶逻辑卵石博弈中，**II** 拥有必胜策略。该定理也适用于基本模态逻辑；正如我们将在本节看到的，它还适用于 k-量词逻辑，并可采用与之对应的 $\mathcal{L}_q^{\mathcal{Q}}$双模拟等价概念。

定理 4.1 (Ehrenfeucht–Fraïssé 定理，关于 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$)。 设 σ 是一个有限符号集，且 $\mathcal{L} := \mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$ 是一个 k-量词逻辑，其中 $\mathcal{Q}_\sigma$中只有有限个量词。对于任意 $q \in \mathbb{N}$ 以及一对带标记点的 σ-结构 $(\mathfrak{A}, \alpha)$、$(\mathfrak{B}, \beta)$，以下各项等价：

(i) $(\mathfrak{A}, \alpha) \sim^q_{\mathcal{L}} (\mathfrak{B}, \beta)$,

(ii) $(\mathfrak{A}, \alpha) \equiv^q_{\mathcal{L}} (\mathfrak{B}, \beta)$.

该定理的证明是对经典 Ehrenfeucht–Fraïssé 论证的简单改编。

对 q作归纳证明。 $q = 0$ 的基础情形是显然的。尚需证明归纳步骤。设 $q > 0$。

我们用句法归纳证明蕴涵"(i) $\Longrightarrow$ (ii)"。由于该断言在布尔联结词下保持不变，我们只需考虑满足 $\mathrm{qr}(\varphi) = q$ 的 $\varphi = Q\psi$ 。假设例如 $\mathfrak{A}$， $\alpha \vDash \varphi$，我们需要证明同样有 $\mathfrak{B}$， $\beta \vDash \varphi$。设 $s \in Q(\alpha)$是 $\mathfrak{A}$， $\alpha \vDash Q\psi$ 的一个见证，并令**I** 在$\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$-双模拟博弈中选取 s 作为挑战。

$\sim^q_{\mathcal{L}}$ 保证**II** 在双模拟博弈中有一个回应 $t \in Q(b)$，使得每个 $\delta \in t$ 都与某个 $\gamma_\delta \in s$是 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}_{q-1}$-互模拟的。根据归纳假设，由于 $\mathrm{qr}(\psi) = q - 1$， $\mathfrak{B}$， $\delta \vDash \psi$ 当且仅当 $\mathfrak{A}$， $\gamma_\delta \vDash \psi$。由于 s 见证 $Q\psi$，故对所有$\delta \in t$亦有 $\mathfrak{B}$， $\delta \vDash \psi$，从而确保 t 是 $\mathfrak{B}$， $\beta \vDash Q\psi$的一个见证。

对于逆蕴涵"(ii) $\Longrightarrow$ (i)"，假设 $\mathrm{Th}^q_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}}(\mathfrak{A}, \alpha) = \mathrm{Th}^q_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}}(\mathfrak{B}, \beta)$。不失一般性，假设 **I** 选择了某个 $s \in Q(\alpha)$。我们需要为**II**找到一个合适的应对。

由于关系、变元和量词只有有限多个，量词秩至多为 q 的公式在逻辑等价意义下只有有限多个。特别地，以下合取和析取

$$\chi := Q \bigvee_{\gamma \in s} \bigwedge \mathrm{Th}^{q-1}_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}}(\mathfrak{A}, \gamma)$$

实际上是有限的。根据构造， $\mathfrak{A}, \alpha \vDash \chi$ 由 s见证。由于 $\mathrm{Th}^q_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}}(\mathfrak{A}, \alpha) = \mathrm{Th}^q_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}}(\mathfrak{B}, \beta)$，因此也有 $\mathfrak{B}, \beta \vDash \chi$。取 χ的一个见证 $t \in Q_{\mathfrak{B}}(\beta)$。令 t为**II**在博弈中的应对，令 $\delta \in t$ 为**I**的挑战。根据见证 t的选择， $\mathfrak{B}, \delta \vDash \bigvee_{\gamma \in s} \bigwedge \mathrm{Th}^{q-1}_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}}(\mathfrak{A}, \gamma)$。因此，存在某个 $\gamma \in s$，使得$\mathfrak{B}, \delta \vDash \mathrm{Th}^{q-1}_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}}(\mathfrak{A}, \gamma)$，供**II** 进行下一步。 □

请注意，蕴涵"(i) $\Longrightarrow$ (ii)"即使在关系和量词无限多的情况下也成立；而根据以下可通过对 q 进行归纳法轻易证明的观察，有限性条件对于反向蕴涵至关重要。

观察 4.2. 设 $\mathcal{L} := \mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$ 是一个 k-量词逻辑，具有有限的 $\mathcal{Q}$ ，且 σ 是有限符号集。那么，等价关系 $\equiv^q_{\mathcal{L}}$、 $\sim^q_{\mathcal{L}}$ 的指数有限。

推论 4.3 ($\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$-互模拟不变性)。对于一个 k-量词逻辑 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$ 和签名 σ，设 $(\mathfrak{A}, \alpha)$ 和 $(\mathfrak{B}, \beta)$ 是 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$- 互模拟的、以 k 为指点的 σ- 结构。那么

$$\mathfrak{A}, \alpha \equiv_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}} \mathfrak{B}, \beta, \quad \textit{or, equivalently,} \quad \mathrm{Th}_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}}(\mathfrak{A}, \alpha) = \mathrm{Th}_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}}(\mathfrak{B}, \beta).$$

证明。这由定理 4.1 立即得出，因为对于所有 q， $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$-双模拟等价蕴含$\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}_q$-双模拟等价；并且每个单独的 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$-公式只涉及有限多个关系符号和量词，且量词秩有限。 □

k-指向的 σ-结构（$\mathfrak{A}$, α）的特征公式$_{\alpha,}$ 以及量词秩为 q的特征公式，是通过归纳构造的，用以刻画挑战-应答要求；这些要求使玩家**II** 能够在接下来的许多回合中跟上玩家 **I** 。这些特征公式满足

$$\mathfrak{B}, \beta \vDash \chi^q_{\mathfrak{A},\alpha} \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathfrak{A}, \alpha) \sim^q_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}} (\mathfrak{B}, \beta). \tag{2}$$

量词秩为 0 的公式 $\chi^0_{\mathfrak{A},\alpha}$ 仅指定 $\mathfrak{A}$ 中 k-赋值 α 的原子类型（通过有限个关系原子和否定原子的合取），从而保证 (2) 右侧的原子等价。

对于 $q > 0$, 特征公式是以下各项的合取:

– 量词秩为 0 的公式 $\chi^0_{\mathfrak{A},\alpha}$ ，以确保 (2) 中的原子等价；– 确保**I**在 $\mathfrak{A}$ 中进行的所有潜在挑战都有**II** 的向前应答 的条件；以及 – 在 (2) 的语境下，确保**I** 在 $\mathfrak{B}$ 中进行的所有潜在挑战都有**II** 的向后应答 的条件。

因此，量词秩为 $q+1$ 的特征公式为

$$\chi^{q+1}_{\mathfrak{A},\alpha} := \chi^0_{\mathfrak{A},\alpha} \wedge \bigwedge_{Q \in \mathcal{Q}_\sigma} \underbrace{\Big(\bigwedge_{s \in Q(\alpha)} Q \bigvee_{\gamma \in s} \chi^q_{\mathfrak{A},\gamma} \Big)}_{\text{“forth responses”}}$$

$$\wedge \underbrace{\bigwedge \Big\{ \neg Q \bigvee \Phi \mid \Phi \subseteq \Delta_q, \mathfrak{A}, \alpha \vDash \neg Q \bigvee \Phi \Big\}}_{\text{“back responses”}}$$

其中， $\Delta_q := \{\chi^q_{\mathfrak{B},\beta} \mid (\mathfrak{B}, \beta)$ k-指向的 σ-结构 $\}$ 是所有层级为 q 的特征公式的集合。

命题 4.4 （特征公式）。 对于有限签名 σ、具有有限 $\mathcal{Q}_\sigma$ 的 k-量词逻辑 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$，以及 k-指向的 σ-结构（$\mathfrak{A}, \alpha$）和（$\mathfrak{B}, \beta$），

$$\mathfrak{B}, \beta \vDash \chi^q_{\mathfrak{A},\alpha} \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathfrak{B}, \beta) \sim^q_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}} (\mathfrak{A}, \alpha).$$

证明。 我们只证明正向蕴涵，因为根据定理 4.1，逆向显然成立，因为 $\mathfrak{A}$, $\alpha \vDash \chi^q_{\mathfrak{A},\ \alpha}$。我们的策略是对 q进行归纳，证明 $\mathfrak{B}$, $\beta \vDash \chi^q_{\mathfrak{A},\ \alpha}$蕴涵着 **II** 在该游戏中进行 q 个回合时具有必胜策略，其中游戏定义在 $(\mathfrak{A}, \alpha; \mathfrak{B}, \beta)$ 上。对于 $q = 0$，这显然成立（基础情形）。

假设 $\mathfrak{B}$, $\beta \vDash \chi^{q+1}_{\mathfrak{A}\ \alpha,}$，首先考虑第一回合，在该回合中 **I** 首先选择某个 $s \in Q(\mathfrak{A}, \alpha)$。$\chi^{q+1}_{\mathfrak{A}\ \alpha,}$ 中的 *forth*部分保证 $\mathfrak{B}$, $\beta \vDash Q \bigvee_{\gamma \in s} \chi^q_{\mathfrak{A},\ \gamma}$。因此，我们可以让 **II** 选择一个见证 $t \in Q(\mathfrak{B}, \beta)$，使得 $\mathfrak{B}$, $t \vDash \bigvee_{\gamma \in s} \chi^q_{\mathfrak{A},\ \gamma}$，这显然使 **II** 能够对 **I** 可能提出的任意挑战 $d \in t$ 作出适当回应。

另一方面，如果**I** 首先选择某个 $t \in Q(\mathfrak{B}, \beta)$，我们就查看 $\chi^{q+1}_{\mathfrak{A}\ \alpha,}$ 中的后半部分：令 $\Phi := \{\chi^q_{\mathfrak{B},\delta} \mid \delta \in t\}$，使得 $\mathfrak{B}, \beta \vDash Q \bigvee \Phi$；由此可知，$\mathfrak{A}, \alpha \vDash Q \bigvee \Phi$ 也成立，因为否则 $\neg Q \bigvee \Phi$ 就会是 $\chi^{q+1}_{\mathfrak{A}\ \alpha,}$ 的一个合取项。如果**II** 为 $\mathfrak{A}, \alpha \vDash Q \bigvee \Phi$ 选择一个见证 $s \in Q(\mathfrak{A}, \alpha)$，那么在本回合的第二阶段中，**II** 能够安全地应对**I** 提出的挑战。 □

特征公式的存在性直接意味着存在一种范式，依据

$$\varphi \equiv \bigvee \{\chi^{\mathrm{qr}(\varphi)}_{\mathfrak{A},\alpha} \mid \mathfrak{A}, \alpha \vDash \varphi\}.$$

请注意，由于观察 4.2，右侧的析取在逻辑等价意义下只有有限多个。

5 AHennessy–Milner 定理

我们希望为推论 4.3 中蕴涵的逆命题找到充分条件。基本模态逻辑 ML 的经典 Hennessy–Milner 定理指出，如果底层框架是有限分支的，那么带指定点的 Kripke 结构之间的 ML-等价蕴涵它们互模拟；这一结论可大幅推广至所有 ML-饱和结构的类（参见 [10]）。此外，该证明已被改编用于邻域语义，见 [12, 第 4] 章。

我们在此将这一结果推广到 k-量词逻辑，证明 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$-等价的$k$-带指定点的 σ-结构若是 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$-饱和的（如下定义所述），则它们$\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$-互模拟。

定义 5.1（Q-类型）。设 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$ 是一个 k-量词逻辑，$\mathfrak{A}$ 是一个 σ-结构。对于每个 $Q \in \mathcal{Q}$ 和 $\alpha \in A^k$，若对所有有限的 $\Psi_0 \subseteq \Psi$，都有 $\mathfrak{A}$，$\alpha \vDash Q \bigwedge \Psi_0$，则称 $\Psi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{Q}}(\sigma)$ 为（部分）Q-类型。若$\mathfrak{A}$，$s \vDash \Psi$（采用定义 2.3 中引入的平坦语义），则称 Ψ 由 $s \in Q(\alpha)$ 实现。

类似地，如果对于所有有限的 $\Psi_0 \subseteq \Psi$，都存在一个 $\gamma \in s$，使得 $\mathfrak{A}$，$\gamma \vDash \Psi_0$，那么 $\Psi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{Q}}(\sigma)$ 就是给定的 $s \in Q(\alpha)$ 的一个 s-类型。如果 $\mathfrak{A}$，$\gamma \vDash \Psi$，我们就说 Ψ 由 $\gamma \in s$ 实现。

如果对于所有 $Q \in \mathcal{Q}$ 和 $\alpha \in A^k$，$(\mathfrak{A}, \alpha)$ 的每个 Q-类型以及每个 $s \in Q(\alpha)$ 的每个 s-类型都能实现，我们就称其为 $\mathfrak{A}$ $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$-饱和。

我们将此类饱和结构的构造推迟到第 7 节；在那里，我们会找到与超幂相容的 k-量词逻辑的饱和扩张（引理 7.2）。

为了更好地理解饱和性的重要性，请看图 1 中两个带指定点的 Kripke 结构这一标准例子。对于基本模态逻辑 ML $\equiv \mathcal{L}^{\{\Diamond\}}$，它们具有相同的理论，因为**II** 可以赢得任意有限的 $\mathcal{L}^{\{\Diamond\}}$-互模拟博弈；但它们并非 $\mathcal{L}^{\{\Diamond\}}$-互模拟，因为**I** 可以选择见证 $\{b^*\}$，从而能够无限期地继续选择后继；而如果 $\{a_n\}$ 被选作第一个应答，**II** 则会在 $n+1$ 回合后陷入困境。

问题似乎在于，$\mathfrak{B}$ 的内部结构比$\mathfrak{A}$更丰富；事实上，$\mathfrak{B}$ 是 $\mathcal{L}^{\{\Diamond\}}$-饱和的，而 $\mathfrak{A}$ 则不是。两个 $\mathcal{L}^{\{\Diamond\}}$-饱和结构之间不会出现这种不平衡；如下文定理 5.2 所示，这一现象自然也适用于 k-量词逻辑的情形。

注意，模态情形比较特殊，因为它只要求相对于 $\Diamond$-类型的饱和性；由于 s-类型本质上是（单元素集合的超集），因此总能实现。邻域逻辑和探究模态逻辑中的 Hennessy–Milner 结果与当前更一般的设定在精神上更为接近，相关讨论分别见 [12] 和 [18], 。

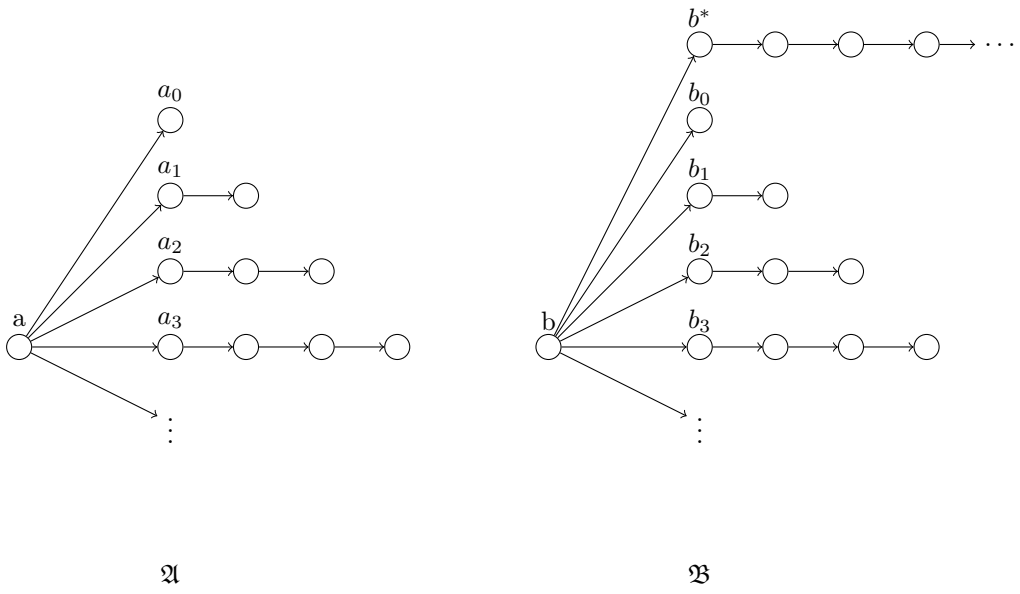

图 1：结构 $(\mathfrak{A},\ a)$ 和 $(\mathfrak{B},\ b)$ 具有相同的 ML 理论，但它们并非 ML 双模拟。

定理 5.2（Hennessy–Milner 定理）。设 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$ 是一种 k-量词逻辑，且 $(\mathfrak{A},\ \alpha)$ 和 $(\mathfrak{B},\ \beta)$ 是一对带指定点的 σ-结构。若 $(\mathfrak{A},\ \alpha)$ 和 $(\mathfrak{B},\ \beta)$ 是 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$-饱和的，那么

$$(\mathfrak{A},\alpha) \equiv_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}} (\mathfrak{B},\beta) \quad \Longrightarrow \quad (\mathfrak{A},\alpha) \sim_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}} (\mathfrak{B},\beta).$$

证明。我们展示了玩家**II** 能够维持 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$-等价性，以应对玩家 **I** 的任意挑战，并将其作为一种不变量，从而保证在任何无穷对局中获胜。不妨设 $s \in Q(\alpha)$ 是**I**在 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$-双模拟博弈中的挑战。考虑

$$\Psi := \Big\{ \bigvee_{\gamma\in s} \bigwedge \chi^{q}_{\mathfrak{A},\gamma}(\mathcal{L}^{\mathcal{Q}_0}(\sigma_0)) \mid q \in \mathbb{N}, \sigma_0 \subseteq \sigma \text{ finite}, \mathcal{Q}_0 \subseteq \mathcal{Q} \text{ finite} \Big\}$$

其中，$\chi^{q}_{\mathfrak{A},\ \gamma}(\mathcal{L}^{\mathcal{Q}_0}(\sigma_0))$ 是相对于片段 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}_0}(\sigma_0)$、量词秩为 q 时，结构 $(\mathfrak{A},\ \gamma)$ 的特征公式。注意，由于我们将语言限制为有限签名和量词集合，Ψ 中的合取和析取在逻辑等价意义下是有限的。集合 Ψ 按定义是结构 $(\mathfrak{A},\ \alpha)$ 的一个 Q-类型，因此也是结构 $(\mathfrak{B},\ \beta)$ 的一个 Q-类型，因为 $(\mathfrak{A},\ \alpha) \equiv_{\mathcal{L}} (\mathfrak{B},\ \beta)$。由于 $\mathfrak{B}$ 是饱和的，因此存在一个 $t \in Q_{\mathfrak{B}}(\beta)$ 实现 Ψ，即对于所有 $\delta \in t$，$\mathfrak{B},\ \delta \vDash \Psi$ 。

设 t 为 II 在本回合第二阶段的应答，$\delta \in t$ 为 I 的挑战。根据 t 的选取，对于每个 $q \in \mathbb{N}$ 和有限的 $\sigma_0 \subseteq \sigma$，$\mathcal{Q}_0 \subseteq \mathcal{Q}$，都存在某个 $\gamma \in s$ 使得 $\chi^{q}_{\mathfrak{B}},\ \delta(\mathcal{L}^{\mathcal{Q}_0}(\sigma_0)) = \chi^{q}_{\mathfrak{A}},\ \gamma(\mathcal{L}^{\mathcal{Q}_0}(\sigma_0))$。由于每个有限子集 $\Psi_0 \subseteq \mathrm{Th}_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}}(\mathfrak{B},\delta)$ 只包含有限个符号和量词，根据定理 4.1 和命题 4.4，它是某个 $\chi^{q}_{\mathfrak{B}},\ \delta(\mathcal{L}^{\mathcal{Q}_0}(\sigma_0))$ 的推论。因此，理论 $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}}(\mathfrak{B},\delta) \equiv \bigcup_{q,\ \sigma_0,\ \mathcal{Q}_0} \chi^{q}_{\mathfrak{B}},\ \delta(\mathcal{L}^{\mathcal{Q}_0}(\sigma_0))$ 是 s 的一个 $\mathfrak{A}$-型。由于 $\mathfrak{A}$ 是饱和的，必定存在某个 $\gamma \in s$，使得 $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}}(\mathfrak{B},\delta) = \mathrm{Th}_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}}(\mathfrak{A},\gamma)$，II 可以放心地选择它。

□

6 Łoś性质与一阶逻辑

我们先简要回顾一些与超积有关的定义。如需更全面的介绍，请参阅 [13, 第 9 章。5]。

一族 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I) \setminus \{\emptyset\}$ 非空子集，如果在取超集时封闭（向上封闭: $\mathcal{F}^{\uparrow} = \mathcal{F}$），并且在有限交下封闭（$J_1,\ J_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow J_1 \cap J_2 \in \mathcal{F}$，或 $\mathcal{F} \cap \mathcal{F} = \mathcal{F}$），则称为指标集 I 上的滤子 。指标集 I 上的超滤子 是满足以下条件的滤子 $\mathcal{U}$: 对于每个 $J \in \mathcal{P}(I),\ J \in \mathcal{U}$ 或 $I \setminus J \in \mathcal{U}$。后者是相对于 $\subseteq$- 关系（在滤子中，关于 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(I))$）的极大性条件；应用佐恩引理可知，每个滤子 $\mathcal{F}$ 都可以扩张为超滤子 $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$。若超滤子扩张了某个 $i \in I$ 对应的滤子 $\{\{i\}\}$，则称其为主 超滤子，否则称为非主 超滤子。对于$I = \mathbb{N}$，每个非主超滤子都包含弗雷歇滤子，该滤子由所有余有限子集构成。

一族 $\mathfrak{A}_{ii\in I}$ 个 σ-结构的直积记作 $\prod_{i\in I}\mathfrak{A}_{i}$。我们用 **粗体字母**（如 $\mathbf{a}$ ）表示其元素 $\mathbf{a} = (\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(n)}) \in (\prod_{i\in I} A_i)^n$，并将这一记号约定扩展到元素元组，同时也用 $\mathbf{a}_i := (a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(n)}) \in A_i^n$表示积中第 i 个分量里的元素元组。对常值族的直积，即 $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$ 对所有 $i \in I$，记作 $\mathfrak{A}^I$，称为直幂。族 $(\mathfrak{A}_i)$ 关于滤子 $\mathcal{F}$ 的 $\mathcal{F}$-约化积是一个以商集 $\prod_{i\in I} A_i/\sim_{\mathcal{F}}$ 为底集的 σ-结构 $\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{F}$。等价关系

$$\mathbf{a} \sim_{\mathcal{F}} \mathbf{a}' \ \text{ if } \ \{i \in I \mid a_i = a_i'\} \in \mathcal{F}$$

当且仅当它们在 $\mathcal{F}$多个分量中相等时，才将直积中的两个元素 $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in I}$ 和 $\mathbf{a}' = (a_i')_{i\in I}$ 视为等价。我们将元素 $\mathbf{a}$的 $\sim_{\mathcal{F}}$-等价类记为 $\mathbf{a}_{\mathcal{F}} \in \prod A_i/\sim_{\mathcal{F}}$，并再次将此记法扩展到 n-元组。注意，对于 $\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{b}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(k)}, \mathbf{b}^{(k)} \in \prod A_i$,

$$(\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(k)}) \sim_{\mathcal{F}} (\mathbf{b}^{(1)}, \dots, \mathbf{b}^{(k)}) \iff \mathbf{a}^{(1)} \sim_{\mathcal{F}} \mathbf{b}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(k)} \sim_{\mathcal{F}} \mathbf{b}^{(k)}.$$

关系符号 $R \in \sigma$ 在 $\mathfrak{C} := \prod \mathfrak{A}_i/\sim_{\mathcal{F}}$ 中的解释定义如下

$$\mathbf{a} \in R^{\mathfrak{C}} \ \text{ if } \ \{i \in I \mid \mathbf{a}_i \in R^{\mathfrak{A}_i}\} \in \mathcal{F},$$

表示在 $\mathcal{F}$多个分量中属于该集合（这在商中是良定义的，即与代表元的选择无关，因为 $\mathcal{F}$ 对有限交封闭）。类似地， $\mathfrak{A}^I/\mathcal{F}$ 或 $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$ 分别指 约化幂 或 超幂，即针对一族结构、以滤子或超滤子为依据的约化积，其中分量结构的每个分量都取常值 $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_i$。所有这些约定自然地扩展到以赋值 $\alpha_i := \mathbf{a} \in A_i^n$为分量对象的 σ-结构。仅从商的定义和关系符号的解释来看，就很适合在布尔幂集代数 $\mathcal{P}(I)$上，对带有赋值 $\alpha = \mathbf{a} \in (\prod_{i\in I} A_i)^n$的直积 $\prod_{i\in I}(\mathfrak{A}_i, \alpha_i)$求值公式，得到

$$[\![\varphi]\!]_{\alpha} := \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i, \alpha_i \vDash \varphi\} \in \mathcal{P}(I)$$

作为 φ over $\prod_{i\in I}(\mathfrak{A}_i, \alpha_i)$ 的“真值”。那么，约化积 $\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{F}$ 中关系的解释等价于以下对所有

原子公式 φ:

$$\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{F}, \alpha_{\mathcal{F}} \vDash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad [\![\varphi]\!] \in \mathcal{F}.$$

洛斯的经典定理恰好表明，对于所有 $\varphi \in$一阶逻辑，在超积的情形下这一等价关系成立。

定义 6.1（Łoś性质）。 如果一个抽象逻辑 $\mathcal{L}$ 具有***Łoś***性质 ，那么对于每个带点超积（$\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$， $\alpha_{\mathcal{U}}$）和公式 $\varphi \in \mathcal{L}$（σ），我们称之为具有 Łoś 性质。

$$\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}, \alpha_{\mathcal{U}} \vDash \varphi \iff [\![\varphi]\!]_\alpha \in \mathcal{U}.$$

定理 6.2（Łoś [13, 定理 9.5。1]）。 一阶逻辑具有 ***Łoś*** 性质。

定义 6.3（紧致性）。 如果一个抽象逻辑 $\mathcal{L}$ 具有紧致性 ，那么每个有限可满足 的公式集都是可满足的，也就是说，对于每个公式集 $\Phi \subseteq \mathcal{L}$（$\sigma$），以下两项等价:

（i） Φ 有一个模型 $\mathfrak{A}$， $\alpha \vDash \Phi$，并且

（ii）每个有限的 $\Phi_0 \subseteq \Phi$ 都有一个模型 $\mathfrak{A}_0$， $\alpha_0 \vDash \Phi_0$。

众所周知，对于抽象逻辑而言，Łoś性质蕴含紧致性（例如，参见 [2, 推论 4.1.11]中的一阶逻辑版本）。

有一个在集合论上深刻得多的结果，归功于Keisler和Shelah，该结果指出: 两个结构无法被一阶公式区分，当且仅当它们具有同构的超幂 [2,定理6.1.15]。

作为该定理的推论，具有Łoś性质等价于是一阶逻辑的一个片段。换言之，在定义2.1的语境中，一阶逻辑是所有具有Łoś性质的抽象逻辑中的全局极大元。

引理6.4. 设 $\mathcal{L}_1$ 与 $\mathcal{L}_2$ 是两个具有***Łoś***性质的抽象逻辑，且 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$的一阶逻辑-闭包 ，即 $\mathcal{L}(\sigma)$ 是 $\mathcal{L}_1(\sigma) \cup \mathcal{L}_2(\sigma)$ 在布尔联结词、全称量化与存在量化下的闭包。则 $\mathcal{L}$ 也具有***Łoś***性质。

句法归纳法证明。该证明与通常的一阶逻辑 Łoś 性质证明非常相似。
$\varphi \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$的基础情形由假设给出。在归纳步骤中，我们利用 $\mathcal{U}$ 的极大性来证明其与否定和析取相容，而对有限交和超集的封闭性则保证了合取。存在量词的情形也与通常一样。

□

引理 6.5. 设 $\mathcal{L}$ 是扩展抽象逻辑 $\mathcal{L}$ 的抽象逻辑。此外，设 $\varphi \in \mathcal{L}(\sigma)$、$\psi \in \mathcal{L}(\sigma)$ 和 $T \subseteq \mathcal{L}(\sigma)$。若对所有 $\chi \in \mathcal{L}(\sigma)$， $T \nvDash \psi \leftrightarrow \chi$，那么

$$\begin{aligned} & T \cup \{\varphi\} \nvDash \psi \leftrightarrow \chi \quad \textit{for all } \chi \in \mathcal{L}(\sigma) \\ \textit{or} \qquad & T \cup \{\neg\varphi\} \nvDash \psi \leftrightarrow \chi \quad \textit{for all } \chi \in \mathcal{L}(\sigma). \end{aligned}$$

证明。 反设存在公式 χ 和 χ'，使得 $T \vDash \varphi \to (\psi \leftrightarrow \chi)$ 且 $T \vDash \neg\varphi \to (\psi \leftrightarrow \chi')$。那么，对于给定的 η， $T \vDash \eta$ 为 $\eta := \psi \leftrightarrow ((\varphi \wedge \chi) \vee (\neg\varphi \wedge \chi'))$，这与我们的假设矛盾，因为 η 属于 $\mathcal{L}(\sigma)$。 □

引理 6.6. 设 $\mathcal{L}$是扩展抽象逻辑 $\mathcal{L}^{\wedge}$的紧致抽象逻辑，且 $\varphi \in \mathcal{L}^{\wedge} \setminus \mathcal{L}$ 无法用 $\mathcal{L}$表达。那么存在带有指定点的 σ-结构 $(\mathfrak{A}, \alpha)$和 $(\mathfrak{B}, \beta)$，满足

$$\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathfrak{A}, \alpha) = \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathfrak{B}, \beta),$$

而 $\mathfrak{A}, \alpha \vDash_{\mathcal{L}}^{\wedge} \varphi$，且 $\mathfrak{B}, \beta \vDash_{\mathcal{L}}^{\wedge} \neg\varphi$。

证明。 $\mathcal{L}$ 的紧致性保证，在引理 6.5 的情形下，集合T 对 $\subseteq$-链的并封闭。应用佐恩引理可得一个 $\subseteq$-极大这样的 T。引理 6.5 保证 T是完备的。此外， $T \cup \{\varphi\}$和 $T \cup \{\neg\varphi\}$ 均可满足，因为否则 φ 在 T下将等价于 $\top$ 或$\bot$ 。 □

结合这些观察，我们得到 Keisler 和 Shelah 定理的以下推论。

推论 6.7. 设 $\mathcal{L}$ 是一种抽象逻辑。则以下各项等价：

(i) $\mathcal{L}$ 具有 *Łoś*性质。

(ii) $\mathcal{L} \preccurlyeq \mathrm{FO}$.

证明。 (ii) 蕴含 (i) 显然。对于 (i) $\Rightarrow$ (ii)，我们采用反证法。假设 $\mathcal{L}$ 具有 Łoś性质，但存在某个无法用一阶逻辑表达的 $\varphi \in \mathcal{L}(\sigma)$。设 $\mathcal{L}$ 为 $^{\wedge}\mathcal{L} \cup$FO 的一阶闭包。那么，根据引理6.4， $\mathcal{L}$ 也具有 Łoś性质，因此是紧致的。因此，我们可以应用引理 6.6，找到带指定点的 σ-结构 $(\mathfrak{A}, \alpha)$ 和 $(\mathfrak{B}, \beta)$，使得 $\mathrm{Th}_{\mathrm{FO}}(\mathfrak{A}, \alpha) = \mathrm{Th}_{\mathrm{FO}}(\mathfrak{B}, \beta)$，而 $\mathfrak{A}, \alpha \vDash \varphi$ 和 $\mathfrak{B}, \beta \vDash \neg\varphi$。

由于 $(\mathfrak{A}, \alpha)$ 和 $(\mathfrak{B}, \beta)$ 在一阶逻辑下不可区分，我们可以应用 Keisler–Shelah 定理，得到两个同构的超幂 $(\prod \mathfrak{A}/\mathcal{U}, \alpha_{\mathcal{U}}) \cong (\prod \mathfrak{B}/\mathcal{U}, \beta_{\mathcal{U}})$，它们分别取自 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$。 $\mathcal{L}$ 的 Łoś性质保证 $\prod \mathfrak{A}/\mathcal{U}, \alpha_{\mathcal{U}} \vDash \varphi$，而 $\prod \mathfrak{B}/\mathcal{U}, \beta_{\mathcal{U}} \vDash \neg\varphi$，这与 $\mathcal{L}$ 的同构不变性矛盾。因此，$\mathcal{L}$ 必须是一阶逻辑的片段。 □

对于 k-量词逻辑，我们可以得到一个更强的结果：如果相应的 k-量词逻辑具有 Łoś性质，那么每个量词都可以一致地翻译为一阶逻辑。

定理6.8 （一致一阶逻辑翻译）。 设 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$ 是具有 *Łoś*性质的一个 k-量词逻辑。那么，对于每个量词 $Q \in \mathcal{Q}$ 和每个 k元关系符号$R \notin \sigma_Q$，都存在一个公式 $\eta \in$一阶逻辑$(\sigma_{\mathcal{Q}} \cup \{R\})$，它有 k 个自由变量，使得对于所有满足 $R \notin \sigma$的签名 $\sigma \supseteq \sigma_Q$、带指定点的 σ结构 $(\mathfrak{A}, \alpha)$ 以及 $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{Q}}(\sigma)$

$$\mathfrak{A}, \alpha \vDash_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}} Q\varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A}, \alpha \vDash_{\mathrm{FO}} \eta[\varphi^*/R]$$

其中， $\varphi^* \in$一阶逻辑(σ) 是将 φ 翻译为一阶逻辑的一种翻译。

特别地，这得出了从 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$ 到一阶逻辑的一致翻译。

证明。 根据推论 6.7，我们知道 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$ 是一阶逻辑的片段。因此，令 $\eta \in \mathrm{FO}(\sigma_Q \cup \{R\})$ 为将 $QR(x_1, \ldots\ldots, x_k) \in \mathcal{L}^{\mathcal{Q}}(\sigma_Q \cup \{R\})$ 翻译为一阶逻辑的翻译。

任取 $\sigma \supseteq \sigma_Q$、一个新的关系符号 $R' \notin \sigma$、 $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{Q}}(\sigma)$，其翻译为$\varphi^* \in$ 一阶逻辑(σ)，以及一个带点 σ-结构 $(\mathfrak{A}, \alpha)$。定义

$$R'^{\mathfrak{A}} := R^{\mathfrak{A}\restriction\sigma_Q} := \left\{\gamma \in A^k \mid \mathfrak{A}, \gamma \vDash \varphi\right\}.$$

于是，由于 k-量词逻辑相对于扩张表现良好，

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}, \alpha \vDash_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}} Q\varphi &\iff \mathfrak{A}, \alpha, R'^{\mathfrak{A}} \vDash_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}} QR'(x_1, \ldots, x_k) \\
&\iff \mathfrak{A}\restriction\sigma_Q, \alpha, R^{\mathfrak{A}\restriction\sigma_Q} \vDash_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}} QR(x_1, \ldots, x_k) \\
&\iff \mathfrak{A}\restriction\sigma_Q, \alpha, R^{\mathfrak{A}\restriction\sigma_Q} \vDash_{\mathrm{FO}} \eta.
\end{aligned}$$

一阶逻辑在关系重命名下不变，并且相对于扩张表现良好。因此，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}, \alpha \vDash_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}} Q\varphi &\iff \mathfrak{A}\restriction\sigma_Q, \alpha, R'^{\mathfrak{A}} \vDash_{\mathrm{FO}} \eta[R'/R] \\
&\iff \mathfrak{A}, \alpha \vDash_{\mathrm{FO}} \eta[\varphi^*/R].
\end{aligned}$$

□

7 一个林德斯特伦定理

在本节中，我们确立具有 Łoś性质的 k-量词逻辑在相应的双模拟不变性概念以及 Łoś性质本身之下的极大性。至关重要的是，我们在证明中并不援引 Keisler–Shelah，而只采用远为初等的论证。

引理 7.1 （提升见证）。 设 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$ 是具有 *Łoś*性质的 k-量词逻辑， $Q \in \mathcal{Q}$，且 $(\mathfrak{A}, \alpha_{\mathcal{U}}) := (\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}, \alpha_{\mathcal{U}})$ 是基于 $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ 与 I 上的超滤子 $\mathcal{U}$ 的 k-带点超积。则对任意 $J \in \mathcal{U}$ 以及见证族$(s_i)_{i\in J}$，其中 $s_i \in Q(\mathfrak{A}_i, \alpha_i)$，存在 $s \in Q(\mathfrak{A}, \alpha_{\mathcal{U}})$ 与 $K \in \mathcal{U}$，使得

$$s \subseteq \{\gamma_{\mathcal{U}} \mid \gamma_i \in s_i \text{ for all } i \in J \cap K\}.$$

证明。 对所有经由元数 k 的新关系 $R \notin \sigma$ 得到的 $\mathfrak{A}_i$ 的 $i \in I$ 扩张 $\mathfrak{A}_i^*$，考虑

$$R^{\mathfrak{A}_i^*} := \begin{cases} s_i & \text{if } i \in J, \\ \emptyset & \text{otherwise.} \end{cases}$$

超积 $\mathfrak{A}^* := \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i^*/\mathcal{U}$ 是 $\mathfrak{A}$ 由 R 得到的一个扩张，并且根据k-量词的定义（定义2.2），见证集 $Q(\mathfrak{A}, \alpha_{\mathcal{U}})$与 $Q(\mathfrak{A}^*, \alpha_{\mathcal{U}})$相同。因此，只需找到一个合适的 $s \in Q(\mathfrak{A}^*/\mathcal{U}, \alpha_{\mathcal{U}})$。

根据构造，对所有 $i \in J$， $\mathfrak{A}_i^*, \alpha_i \vDash QR(x_1, \ldots, x_k)$由 $s_i \in Q(\mathfrak{A}_i, \alpha_i)$见证。因此， $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$的Łoś性质保证 $\mathfrak{A}^*, \alpha_{\mathcal{U}} \vDash QR(x_1, \ldots, x_k)$由某个见证 $s \in Q(\mathfrak{A}, \alpha_{\mathcal{U}}) = Q(\mathfrak{A}^*, \alpha_{\mathcal{U}})$（满足 $s \subseteq R^{\mathfrak{A}^*}$）所见证。利用Łoś性质，我们找到一个 $K \in \mathcal{U}$，使得

$$s \subseteq R^{\mathfrak{A}^*} = \{\gamma_{\mathcal{U}} \mid \gamma_i \in s_i \text{ for all } i \in J \cap K\}.$$

□

结合此前的见解，我们现在可以通过相当朴素的论证，证明在可数 σ 和 $\mathcal{Q}$ 的情形下， $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$饱和结构的存在性。

引理 7.2（饱和扩张）。设 $\mathcal{L} := \mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$ 是一种 k-量词逻辑，具有可数多个 k-量词，满足 *Łoś* 性质，且 $\mathfrak{A}$ 具有一个针对可数 σ 的 σ-结构。那么，对于 $\mathbb{N}$ 上的任意非主超滤子 $\mathcal{U}$，$\mathfrak{A}^* := \mathfrak{A}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的一个 $\mathcal{L}$-饱和 $\mathcal{L}$-初等扩张。

证明。利用洛斯性质，很容易验证 $\mathfrak{A}^*$ 是通过嵌入 ι 得到的 $\mathcal{L}$-初等扩张：$a \mapsto [(a)_{i\in I}]_{\mathcal{U}}$。

设 Ψ 是 $(\mathfrak{A}^*, \alpha_{\mathcal{U}})$ 的任意 Q-型。由于 $\mathcal{L}(\sigma)$ 因而 $\Psi \subseteq \mathcal{L}(\sigma)$ 是可数的，我们可以将其枚举为 $(\delta_j)_{j\in\mathbb{N}}$，并对每个 $k \in \mathbb{N}$ 考虑集合 $J_k := [\![Q(\delta_0 \wedge \cdots \wedge \delta_k)]\!] \cap \{i \in I \mid i \geq k\}$。所有 J_k 都属于 $\mathcal{U}$，因为 Ψ 是 $(\mathfrak{A}, \alpha_{\mathcal{U}})$ 的一个 Q-型；这是因为 $\mathcal{U}$ 扩张了弗雷歇滤子，且滤子对有限交封闭。此外，序列 $(J_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是递减的，且 $\bigcap J_k = \emptyset$。对每个 $i \in \mathbb{N}$，令 $k_i := \max\{k \in \mathbb{N} \mid i \in J_k\}$，并为 $(\mathfrak{A}, \alpha_i) \vDash Q(\delta_0 \wedge \cdots \wedge \delta_{k_i})$ 选取一个见证 s_i。根据引理 7.1，我们知道存在一个 $t_{\mathcal{U}} \in Q(\alpha_{\mathcal{U}})$ 和一个 $K \in \mathcal{U}$，使得 $t_{\mathcal{U}} \subseteq \{\gamma_{\mathcal{U}} \mid \gamma_i \in s_i \text{ f.a. } i \in K\}$。任取 $\delta_k \in \Psi$ 和 $\gamma_{\mathcal{U}} \in t_{\mathcal{U}}$。那么，根据构造，对所有 $i \in J_{k_i} \cap K$，$(\mathfrak{A}, \gamma_i) \vDash \delta_k$。由于 $J_{k_i} \cap K \in \mathcal{U}$，$t_{\mathcal{U}}$ 实现了 Ψ。

类似地，令 $\Psi = \{\delta_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ 为 $\mathfrak{A}^*$ 的 $s_{\mathcal{U}}$型，并考虑所有 $k \in \mathbb{N}$，

$$J_k := \{i \in \mathbb{N} \mid \text{ex. } \gamma_i \in s_i \text{ s.t. } A, \gamma_i \vDash \delta_0 \wedge \cdots \wedge \delta_k\} \cap \{i \in \mathbb{N} \mid i \geq k\}.$$

对于 $i \in \mathbb{N}$，令 $k_i := \max\{k \in \mathbb{N} \mid i \in J_k\}$，并迭代地选取满足$\mathfrak{A}$，$\gamma_i \vDash \delta_0 \wedge \cdots \wedge \delta_{k_i}$的 $\gamma_i \in s_i$。然后 $\gamma_{\mathcal{U}}$如所需地实现了 $s_{\mathcal{U}}$。 □

为证明我们的林德斯特伦结果中的极大性主张，我们使用自然的 $\sim_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}}$ 不变性概念。

定义 7.3（$\sim_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}}$不变性）。设 $\mathcal{L}$ 是一个抽象的 k逻辑，$\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$ 是一个 k量词逻辑。若对于所有 k指向的σ结构（$\mathfrak{A}$，α），（$\mathfrak{B}$，β），公式 $\varphi \in \mathcal{L}(\sigma)$ 都是 $\sim_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}}$不变的，则称其为 $\sim_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}}$-不变的。

$$(\mathfrak{A}, \alpha) \sim_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}} (\mathfrak{B}, \beta) \quad \Longrightarrow \quad (\mathfrak{A}, \alpha \vDash \varphi \iff \mathfrak{B}, \beta \vDash \varphi).$$

若一个抽象的 k逻辑 $\mathcal{L}$ 的所有公式都具有 $\sim_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}}$不变性，则称其为 $\sim_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}}$-不变的，即 $\sim_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}}$ 蕴含$\equiv_{\mathcal{L}}$。

最后，我们得到一个林德斯特伦定理，它刻画了具有 Łoś性质的 $\sim_{\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}}$-不变 k-量词逻辑。

定理 7.4（一个林德斯特伦定理）。设 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$ 是一种具有 *Łoś*性质的 k-量词逻辑。那么，每个具有 *Łoś*性质的 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$-互模拟不变抽象 k-逻辑 $\mathcal{L}$ 都是 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$ 的一个片段。

证明。设 $\mathcal{L}$ 是这样一个抽象 k-逻辑，满足 $\mathcal{L} \not\leq \mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$，且 $\varphi \in \mathcal{L}(\sigma)$ 是任意一个无法用 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$ 表示的公式。由于 $\mathcal{L}$ 具有有限出现性质，我们可以假设 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}(\sigma)$ 是可数的，因为按定义 $\mathcal{Q}$ 是可数的，并且对于某个有限的 $\sigma_0 \subseteq \sigma$，有 $\hat{}\varphi \in \mathcal{L}(\sigma_0)$。定义逻辑 $\mathcal{L}$ 为 $\mathcal{L} \cup \mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$ 的一阶闭包。根据引理6.4，$\hat{}\mathcal{L}$ 具有 Łoś性质，因此是紧致的。因此，我们可以应用引理 6.6，得到两个带指定点的 σ-结构（$\mathfrak{A}$，α）和（$\mathfrak{B}$，β），它们具有相同的 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$-理论，而 $\mathfrak{A}$，$\alpha \vDash \varphi$ 且 $\mathfrak{B}$，$\beta \vDash \neg\varphi$。

利用引理 7.2，我们得到 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$-饱和的 $\mathcal{L}$-初等扩张 $\mathfrak{A}^*$ 和$\mathfrak{B}^*$，它们分别是 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$的扩张。由于 $\mathfrak{A}^*$ 和 $\mathfrak{B}^*$ 是 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$-饱和的，且（$\mathfrak{A}^*$，$\alpha$）与（$\mathfrak{B}^*$，$\beta$）具有相同的 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$理论，定理 5.2 推出这些带点结构是 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$-互模拟的，因此 $\varphi \in \mathcal{L}$ 将违反 $\mathcal{L}$ 的 $\mathcal{L}^{\mathcal{Q}}$双模拟不变性，因为 $\mathfrak{A}^*$，$\alpha \vDash \varphi$，而 $\mathfrak{B}^*$，$\beta \vDash \neg\varphi$。 □

根据推论 6.7，一阶逻辑的片段与具有 Łoś 性质之间实质上没有区别。因此，任何关于 Łoś 性质的林德斯特伦定理也是一个刻画定理，由此我们可以从不同角度看待定理 7.4。

推论 7.5 (刻画定理)。 设 $\mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}$ 是一个具有 *Łoś*性质的 k量词逻辑。那么，一阶逻辑^{k} 中任何 $\sim_{\mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}}$不变公式都可以等价地表示为 $\mathcal{L}^{\mathfrak{Q}}$中的公式。

8 总结与展望

本文提出了一种看待特定量化方式的视角：这种量化仅限于处理由 k个元素组成的元组，但会考虑给定 k元组所对应的 k元组集合族的内在可达性概念。因此，其底层模式让人联想到模态情境（广义而言），但又有所不同，因为其中涉及二阶对象。尽管邻域语义和探究模态逻辑都研究过类似概念，但就具体量词的实际语义而言，我们的 k量词在某种意义上更加一般；然而，就每个单独的 k量词的语义而言，它们又更加受限，因为底层纯一阶结构的同构类型完全决定了该结构上定义其语义的可达性模式。与固定的一组此类量词相关的 Ehrenfeucht–Fraïssé 式往返等价概念，自然会呈现出预期的结果。至于相关的饱和性概念以及与之相应的自然 Hennessy–Milner 定理，本文采用了一个非常强的假设，即与超积相容。根据 Keisler 和 Shelah 的一个深刻得多的定理，这一假设实际上当然会使所考察逻辑的表达能力局限于一阶范围内。然而，本文的 Lindström 结果——这正是本研究的主要目标——针对抽象 k逻辑背景下的此类 k量词逻辑，却是通过一条更为直接的路径得到的；这条路径以更加明确的方式展现了紧致性论证以及适当饱和性性质所发挥的作用。对于本文提出的关于抽象 k逻辑的极其一般的背景假设，诸如将紧致性与适当调整后的 Tarski 并性质结合起来这样的较弱假设，能在多大程度上达到类似效果，仍有待研究。因此，相关未来研究的另一个有前景的方向，也可以是探讨对这种一般性作出有意义的限制，或许将重点转向更接近邻域语义或探究语义等熟悉情形的方向。

参考文献

[1] Patrick Blackburn 和 Johan van Benthem。《模态逻辑：语义视角》。载于《逻辑与实践推理研究》，第 3 卷，页 1–84。爱思唯尔，2007年。[2] 陈仲昌和 H Jerome Keisler。《模型论》。爱思唯尔，1990年。[3] Ivano Ciardelli 和 Martin Otto。询问双模拟。《符号逻辑杂志》，86(1):77–109，2021年。

[4] Anuj Dawar、Steven Lindell 和 Scott Weinstein。有限结构上的无穷逻辑与归纳可定义性。*Information and Computation*，119(2):120–175，1995年。[5] H.-D. Ebbinghaus。第二章：扩展逻辑：总体框架。载于模型论逻辑，*Perspectives in Logic*丛书第 8 卷，页 25–76。符号逻辑协会，1985年。[6] Heinz-Dieter Ebbinghaus 和 Jörg Flum。《有限模型论》。施普林格，第 2 版，2006年。[7] Heinz-Dieter Ebbinghaus、Jörg Flum 和 Wolfgang Thomas。《数理逻辑》。Undergraduate Texts in Mathematics。施普林格，第 2 版，1994年。[8] Sebastian Enqvist。若干正规模态逻辑的一般林德斯特伦定理。*Logica Universalis*，7:233–264，2013年。[9] Jörg Flum。第三章：逻辑刻画。载于模型论逻辑，*Perspectives in Logic*丛书第 8 卷，页 77–120。符号逻辑协会，1985年。[10] Valentin Goranko 和 Martin Otto。模态逻辑模型论。载于*Handbook of Modal Logic*，2007年。[11] Valentin Goranko 和 Solomon Passy。运用全局模态：收获与问题。*Journal of Logic and Computation*，2(1):5–30，1992。[12]Helle Hvid Hansen、Clemens Kupke 和 Eric Pacuit。邻域结构：互模拟与基础模型论。*Logical Methods in Com-puter Science*，5，2009。[13] Wilfrid Hodges。《模型论》。剑桥大学出版社，1993年。[14] Janek Härtter。一阶逻辑若干片段的林德斯特伦定理。学士论文，达姆施塔特工业大学，2023年。[15] Cheng Liao。博弈与林德斯特伦定理。*Logica Universalis*，17(1):1– 21，2023年。[16] Leonid Libkin。《有限模型论要素》。施普林格，2004年。[17] Donald A. Martin。博雷尔确定性。*Ann. of Math. (2)*，102(2):363–371，1975年。[18] Silke Meißner 和 Martin Otto。探究模态逻辑的一阶框架。*Review of Symbolic Logic*，15:311–333，2022年。[19]M. Otto。有界变量逻辑与计数——有限模型研究，Lecture Notes in Logic 丛书第 9 卷。施普林格，1997年。[20] Martin Otto 和 Robert Piro。守卫片段与带全局模态的模态逻辑的林德斯特伦刻画。*Advancesin Modal Logic*，2008年。[21] Eric Pacuit。《模态逻辑的邻域语义》。施普林格，2017年。

[22]Nicholas Rescher 和 Alasdair Urquhart。《时态逻辑》，第 3 卷。Springer Science & Business Media，2012 年。[23] Joseph Sgro。《极大逻辑》。《美国数学学会会刊》，63(2):291–298，1977 年。[24] Johan van Benthem、Balder ten Cate 和 Jouko Väänänen。《一阶逻辑片段的林德斯特伦定理》。《Logical Methods in Computer Science》，5，2009 年。[25] Wiebe Van der Hoek。《论分级模态的语义》。《Journal of Applied Non-Classical Logics》，2(1):81–123，1992 年。