arXiv:2602.01235v1 [math.CA] 1 Feb 2026

关于 Askey 对克劳森恒等式的推广及其多项式扰动

DMITRII KARP[1,2] 和 VINAY SHUKLA[3, 4, #]

ABSTRACT. 著名的克劳森恒等式将高斯超几何级数 ${}_2F_1(a,\ b; a+b+1/2;\ x)$ 的平方表示为一个单一的超几何 ${}_3F_2$ 级数。Goursat 在 1883年证明，将 $1/2$ 替换为 $m+1/2$ 后，只要 m 是正整数，就会得到一个表示平方的超几何级数。Askey 明确求出了 $m=1$ 时的这个级数。本文的首要目标是推广这一结果，讨论任意自然数 m的情形。因此，右侧的 ${}_3F_2$ 级数将由其一个显式特征多项式扰动所取代，该多项式的次数为 $2m$；也就是说，级数的系数将乘以该多项式在非负整数处的取值。本文的第二个目标是更进一步，用高斯函数与其一个由任意 $s \le 2m+1$次多项式产生的扰动的乘积替代其平方。我们证明，这样的乘积仍是超几何级数，并以对 ${}_3F_2$ 级数作多项式扰动的形式，求出其显式表达式。我们给出特征多项式的一个显式公式，并证明其次数为 $2m+s$。

1. INTRODUCTION

若级数 $\sum_k c_k$ 中，c_{k+1}/c_k 是 k的有理函数，则称该级数为超几何级数。若$R(t) = P(t)/Q(t)$ 是另一个有理函数，则称级数 $\sum_k R(k)c_k$ 是原级数 $\sum_k c_k$ 的有理扰动。显然，超几何级数的有理扰动仍是超几何级数。当 $Q(t) \equiv 1$，即 $R(t)$化为多项式时，则称 $\sum_k R(k)c_k$ 是原级数 $\sum_k c_k$的多项式扰动。

用 $(a)_k = \Gamma(a+k)/\Gamma(a)$表示上升阶乘（或波赫哈默符号）。若$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)$是一个 p元组，则用 $(\mathbf{a})_k$表示乘积 $(\mathbf{a})_k = (a_1)_k \cdots (a_p)_k$，用$\mathbf{a}+\alpha$表示 p元组 $(a_1+\alpha, \dots, a_p+\alpha)$。现在，若将原级数按标准形式写成广义超几何函数 ${}_pF_q(\mathbf{a}; \mathbf{b}; x)$ [2, (2.1.2)], , 则也可以用标准记号将其有理扰动写为如下形式：

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{a})_k}{(\mathbf{b})_k k!} R(k) x^k = R(0)\, {}_{p+d+r}F_{q+d+r}\left(\begin{matrix} \mathbf{a}, 1-\boldsymbol{\lambda}, -\boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{b}, -\boldsymbol{\lambda}, 1-\boldsymbol{\eta} \end{matrix} \,\middle|\, x \right),$$

其中，$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$、$\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_r)$分别是 P和 Q的零点。这个公式解释了为什么右边的函数常被称为具有整数参数差的超几何函数。然而，左边只涉及函数 R 在非负整数处的取值，并不需要知道它的（通常未知的）零点。因此，下面这种表示有理/多项式扰动的记号非常有用：

$$F\left(\begin{matrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{matrix} \,\middle|\, R \,\middle|\, x \right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{a})_k}{(\mathbf{b})_k k!} R(k) x^k.$$

2020年 数学主题分类。 33C05 33C20、33C60、05A19。关键词和短语。 Clausen恒等式、多项式扰动、超几何函数、乘积公式、特征多项式。#通讯作者。

对于多项式扰动的情形， ${}_pF_q$ （或者实际上任何幂级数）的 $R(t) = P(t)$，还可以用另一种方式表示为

$$F\left(\begin{matrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{matrix}\middle| P\middle| x\right) = P(x\partial_x){}_pF_q\left(\begin{matrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{matrix}\middle| x\right), \tag{1.1}$$

其中， ∂_x 表示对 x求导。注意到 $x\partial_x[x^n] = nx^n$，即可得到此公式。这一表示将在第3节中发挥关键作用。

近几十年来，关于超几何函数各种求和与变换公式的多项式扰动，研究十分活跃；这类工作通常称为“整数参数差扩展”或类似名称。第一作者近期论文 [9] 的引言中对此作了简要概述。

乘积公式是超几何恒等式中的一个重要类别。一般而言，两个超几何级数的乘积并非超几何级数。相反，一般 ${}_pF_q \cdot {}_rF_s$ 的幂级数系数满足一个递推关系，其阶数最高可达[1] $\max(q+1,\ p)\ \max(s+1,\ r)\ [1+2\,(1+\max(p,\ q,\ r,\ s))\ \max(q+1,\ p)\ \max(s+1,\ r)]$。然而，已有若干已知情形使得此类递推关系的阶数降为一，即该乘积可以表示为单个超几何级数。这类结果中最早的是欧拉变换，它针对高斯超几何函数 ${}_2F_1$ [2,(2.2.7)], ，可视为如下形式的乘积公式： ${}_1F_0 \cdot {}_2F_1 = {}_2F_1$。另一个著名例子是1828年的克劳森恒等式，见 [5], [2, 第116, 180]页

$$\left[{}_2F_1\left(\begin{matrix}c, d\\ c+d+1/2\end{matrix}\middle| x\right)\right]^2 = {}_3F_2\left(\begin{matrix}2c, 2d, c+d\\ c+d+1/2, 2c+2d\end{matrix}\middle| x\right). \tag{1.2}$$

这一方向上的下一个重要结果归功于 Goursat（1883年） [6] ，他证明级数 $[{}_2F_1(a,\ b; c;\ x)]^2$ 是超几何级数，当且仅当 $c = a+b+1/2+m$ 且$m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$。然而，他没有给出明确的公式。受丘德诺夫斯基兄弟提出的问题启发，他们研究了 Ramanujan 关于 π 的级数改进，Dick Askey 在 [3] 找到了 Goursat 级数关于 $m = 1$ 的明确形式，即 [3, 式（3.7）]

$$\left[{}_2F_1\left(\begin{matrix}a, b\\ a+b+\frac{3}{2}\end{matrix}\middle| x\right)\right]^2 = {}_5F_4\left(\begin{matrix}2a, 2b, a+b, \zeta_1+1, \zeta_2+1\\ a+b+\frac{3}{2}, 2a+2b+2, \zeta_1, \zeta_2\end{matrix}\middle| x\right), \tag{1.3}$$

其中 ζ_1、 ζ_2 是二次多项式的相反数零点

$$t \to t^2 + (4a+4b+1+8ab)t + 2(a+b)(2a+1)(2b+1).$$

Askey 利用一个适用于 4-平衡的非常良配参数 ${}_7F_6$的求和公式，并借助 Whipple 的 ${}_7F_6$ 变换（2.1）（另见 [2, 定理 3.4。4]），推导出了这一结果。Askey 在推导过程中附有如下评论：“显然，这种方法可以推广，从而求出 $2m$-平衡的非常良配参数 ${}_7F_6$的和，但所得恒等式过于繁杂，在需要之前不值得写出来。”本文的首要目标是给出 Askey 所暗示的公式，并以一种不太繁杂的形式呈现。我们将在后续的第2节中实现这一目标，为任意自然数 m 给出 ${}_2F_1(a,\ b; a+b+m+1/2;\ x)$ 的平方的超几何表达式。

请注意，可以结合 Zeiberger 的算法（求出乘积的幂级数系数的递推关系）与 Petkovˇsek 的算法（验证上一步求得的递推关系是否有超几何解），来检验给定的超几何函数乘积是否为超几何函数。或者，

[1]我们感谢张毅教授给出的这一阶数界

也可以利用 D-有限闭包性质的算法，推导出该乘积满足的微分方程，再将其转化为系数的递推方程。对于无约束 ${}_2F_1(a,\ b;\ c;\ x)$ 的平方，Mao 和 Tian 最近在一篇论文 [10] 中手动完成了这项工作。他们证明了 $({}_2F_1)^2$ 的幂级数系数满足二阶递推关系，并给出了该递推关系的显式形式。

在一篇近期论文中，[9], 第一作者通过将左侧的 ${}_2F_1(a,b;a+b+1/2;\ x)$ 替换为其如下形式的有理扰动，得到了 Clausen公式 (1.2) 的一个扩展：$F(a,b;\ a+b+m+1/2|F_m|x)$，其中 F_m 是一个次数为 m 的任意多项式。在本文第3节中，我们将平方替换为 ${}_2F_1(a,b;a+b+m+1/2;x)$ 与其任意次数多项式扰动 s 的乘积，且该多项式满足 $s\le 2m+1$。

本引言最后提及 Clausen 恒等式的其他一些较新的类似结果。陈、Tani- gawa、杨和祖迪林运用模形式理论，在 [4] 中发现了这些在数论中具有重要意义的类似结果。沿着这些思路开展的进一步研究可见 [1]。与上述两篇参考文献同为 2011年，维杜纳斯在 [13] 发表了 Clausen 恒等式 (1.2) 的另一类推广。他的推广以二元超几何级数的形式给出，且左侧 ${}_2F_1$ 函数的下参数不受限制。

2. Contiguous extension of Clausen's identity

惠普尔变换 [3, (2.5)] 给出了一个非常良态终止 ${}_7F_6$ 与一个 1-平衡终止 ${}_4F_3$ 之间的关系，其形式为

$$
\begin{aligned}
&{}_7F_6\left(\begin{matrix} a,\frac{a}{2}+1,b,c,d,e,-n \\ \frac{a}{2},a+1-b,a+1-c,a+1-d,a+1-e,a+n+1\end{matrix}\right)\\
&=\frac{(a+1)_n(a+1-b-c)_n}{(a+1-b)_n(a+1-c)_n}{}_4F_3\left(\begin{matrix} -n,a+1-d-e,b,c \\ b+c-n-a,a+1-d,a+1-e\end{matrix}\right),
\end{aligned}\tag{2.1}
$$

下文中，我们将省略超几何函数记号中的自变量 1。我们将需要以下关于参数差为整数（且为正）的函数展开式，该展开式由卡尔松 [8, 式 (1)-(3)]给出

$$
{}_{s+r}F_{t+r}\left(\begin{matrix}\mathbf{a},\mathbf{f}+\mathbf{m}\\ \mathbf{c},\mathbf{f}\end{matrix}\,\middle|\,x\right)=\sum_{j_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{j_r=0}^{m_r}A(\mathbf{j})x^{|\mathbf{j}|}{}_sF_t\left(\begin{matrix}\mathbf{a}+|\mathbf{j}|\\ \mathbf{c}+|\mathbf{j}|\end{matrix}\,\middle|\,x\right),\tag{2.2}
$$

其中，$\mathbf{m}=(m_1,\dots,m_r)$ 为正整数，$\mathbf{j}=(j_1,\dots,j_r)$，$|\mathbf{j}|=j_1+j_2+\cdots+j_r$与 $A(\mathbf{j})$ 的定义为

$$
A(\mathbf{j})=\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{j}}\frac{(f_2+m_2)_{j_1}(f_3+m_3)_{j_1+j_2}\dots(f_r+m_r)_{j_1+\dots+j_{r-1}}(\mathbf{a})_{|\mathbf{j}|}}{(f_1)_{j_1}(f_2)_{j_1+j_2}\dots(f_r)_{|\mathbf{j}|}(\mathbf{c})_{|\mathbf{j}|}}.
$$

这里，向量的二项式系数表示相应二项式的乘积，$\binom{m_k}{j_k}$ 且 $(\mathbf{a})_q$ 是上升阶乘 $(a_k)_q$ 的乘积。

我们的第一个结果是以下定理，它给出了 Askey公式 (1.3) 的一个扩展，另见 [3,(3.7)]。

定理 2.1。设 $m\ge 0$是一个整数，且没有下参数等于非正整数。则以下乘积公式成立：

$$
\left[{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\ a+b+m+\frac12\end{matrix}\,\middle|\,x\right)\right]^2=F\left(\begin{matrix}2a,2b,a+b\\ a+b+m+\frac12,2a+2b+2m\end{matrix}\,\middle|\,P_{2m}^{a,b}\,\middle|\,x\right),\tag{2.3}
$$

其中，次数为 $2m$ 的多项式 $P^{a,b}_{2m}(t)$ 由下式给出

$$P^{a,b}_{2m}(t)=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{(a)_m(b)_m(a+b+\frac{t}{2}+j)_{m-j}(-\frac{t}{2})_j}{(-1)^j(a+b)_m(a+\frac{1}{2})_m(b+\frac{1}{2})_m}{}_3F_2\left(\begin{matrix}-m+j,\frac{1-t}{2}-a-b-m,1/2\\1-a-m,1-b-m\end{matrix}\right). \tag{2.4}$$

注 2.2。 如果 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ldots,\ \lambda_{2m})$ 是 $P^{a,b}_{2m}(t)$ 的负零点，那么我们可以将 (2.3) 改写如下

$$\left[{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\a+b+m+\frac{1}{2}\end{matrix}\,\middle|\,x\right)\right]^2={}_{3+2m}F_{2+2m}\left(\begin{matrix}2a,2b,a+b,\boldsymbol{\lambda}+1\\a+b+m+\frac{1}{2},2a+2b+2m,\boldsymbol{\lambda}\end{matrix}\,\middle|\,x\right). \tag{2.5}$$

证明。 在 (2.1) 中令 $e=2a+n-m-b-c-d+1$，我们将得到右侧的 ${}_4F_3$，其中包含一个下参数 $f:=b+c-n-a$ 和一个上参数 $f+m$。因此，我们可以应用 (2.2)，令 $r=1$、$s=3$、$t=2$ 和 $f=b+c-n-a$ 取 $x=1$，从而得到

$$\begin{aligned}\frac{(a+1)_n(a+1-b-c)_n}{(a+1-b)_n(a+1-c)_n}{}_4F_3\left(\begin{matrix}-n,b+m+c-n-a,b,c\\b+c-n-a,a+1-d,b+m+c+d-n-a\end{matrix}\right)\\=\sum_{j=0}^{m}A(j){}_3F_2\left(\begin{matrix}-n+j,b+j,c+j\\a+1-d+j,b+m+c+d-n-a+j\end{matrix}\right),\end{aligned} \tag{2.6}$$

其中

$$A(j)=\binom{m}{j}\frac{(-n)_j(b)_j(c)_j}{(a+1-d)_j(b+m+c+d-n-a)_j(b+c-n-a)_j}.$$

右侧的函数 ${}_3F_2$ 是 $m-j+1$ 平衡的。通过应用 [12, 附录中的公式 (VIII)]，可以将其变换为由 $m-j+1$ 项组成的和，该公式为

$${}_3F_2\left(\begin{matrix}A,B,-N\\D,E\end{matrix}\right)=(-1)^N\frac{(D-A)_N(D-B)_N}{(D)_N(E)_N}{}_3F_2\left(\begin{matrix}1-S,1-D-N,-N\\1+A-D-N,1+B-D-N\end{matrix}\right),$$

其中 $S=D+E+N-A-B$。在上述公式中令 $N=n-j$、$A=b+j$、$B=c+j$、$D=a+1-d+j$ 和 $E=b+m+c+d-n-a+j$，可得

$$\begin{aligned}LHS\ of\ (2.6)=\sum_{j=0}^{m}A(j)\frac{(-1)^{n-j}(a+1-d-b)_{n-j}(a+1-d-c)_{n-j}}{(a+1-d+j)_{n-j}(b+c+d+m-n-a+j)_{n-j}}\\\times{}_3F_2\left(\begin{matrix}-m+j,d-a-n,-n+j\\d-n+b+j-a,d-a-n+c+j\end{matrix}\right).\end{aligned} \tag{2.7}$$

接下来，我们将 $c=a/2$ 和 $d=(a+1)/2$ 代入（2.1）的左边，并对（2.7）作类似处理。此时，平衡条件变为 $e=a+n-m-b+1/2$，于是得到

$$\begin{aligned}{}_4F_3\left(\begin{matrix}a,b,e,-n\\a+1-b,a+1-e,a+n+1\end{matrix}\right)=\frac{(a+1)_n(a/2+1-b)_n}{(a+1-b)_n(a/2+1)_n}\sum_{j=0}^{m}A(j)\\\times\frac{((a+1)/2-b)_{n-j}(1/2)_{n-j}}{((a+1)/2+j)_{n-j}(1/2-b-m)_{n-j}}{}_3F_2\left(\begin{matrix}-m+j,\frac{1-a}{2}-n,-n+j\\\frac{1-a}{2}-n+b+j,\frac{1}{2}-n+j\end{matrix}\right),\end{aligned}$$

其中

$$A(j)=\binom{m}{j}\frac{(-n)_j(b)_j(a/2)_j}{((a+1)/2)_j(b+m-n+1/2)_j(b-n-a/2)_j}.$$

在上述公式中将 a 替换为 $-k$、 $k\in\mathbb{N}$，并将 $-n$ 改为（一个新的） a ，得到

$$
{}_4F_3\left(\begin{matrix}-k,b,e,a\\-k+1-b,-k+1-e,-k-a+1\end{matrix}\right)=\frac{(-k+1)_{-a}(-k/2+1-b)_{-a}}{(-k+1-b)_{-a}(-k/2+1)_{-a}}\sum_{j=0}^{m}A(j)
$$

$$
\frac{((-k+1)/2-b)_{-a-j}(1/2)_{-a-j}}{((-k+1)/2+j)_{-a-j}(1/2-b-m)_{-a-j}}{}_3F_2\left(\begin{matrix}-m+j,(k+1)/2+a,a+j\\(k+1)/2+a+b+j,1/2+a+j\end{matrix}\right),\tag{2.8}
$$

其中，对于任意 w，我们使用记号 $(z)_w=\Gamma(z+w)/\Gamma(z)$，平衡条件变为 $e=1/2-k-a-b-m$。系数 A_j 现在具有如下形式

$$
A(j)=\binom{m}{j}\frac{(a)_j(b)_j(-k/2)_j}{(-k/2+1/2)_j(b+m+a+1/2)_j(b+a+k/2)_j}.
$$

要证明 (2.8) 确实是一个等式，只需说明两边都是关于 a 的有理函数。事实上，由于它们在无限多个值 $a=0,\ -1,\ -2\ldots$ 处相等，因此必定恒等。接下来，我们将证明 (2.8) 右端关于变量 a 的有理性。

为简化上述 ${}_3F_2$ 处的系数，应用勒让德倍增公式、伽马函数的递推关系以及恒等式 $(x)_n=(-1)^n(1-x-n)_n$和 $(x)_{p+q}=(x)_p(x+p)_q$。由此得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{(1-k)_{-a}(1-b-k/2)_{-a}(1/2-b-k/2)_{-a}(1/2)_{-a}}{(1-k-b)_{-a}(1-k/2)_{-a}(1/2-k/2)_{-a}(1/2-b-m)_{-a}}\\
=&\frac{(1-k)_{-a}(1-k-2b)_{-2a}(1/2)_{-a}}{(1-k-b)_{-a}(-k+1)_{-2a}(1/2-b-m)_{-a}}\\
=&\frac{\Gamma(1-k-2b-2a)\Gamma(1/2-a)\Gamma(1-k-b)\Gamma(1-k-a)\Gamma(1/2-b-m)}{\Gamma(1-k-2b)\Gamma(1/2)\Gamma(1-k-b-a)\Gamma(1-k-2a)\Gamma(1/2-b-m-a)}\\
=&\frac{\Gamma(1/2-a)\Gamma(1-k-a)\Gamma(1/2-b)\Gamma(1-k-b)}{\Gamma(1-k-2b)\Gamma(1/2)\Gamma(1-k-2a)}\\
&\times\frac{\Gamma(1-k-2b-2a-2m)(1-k-b-a)_{-m}}{\Gamma(1/2-b-m-a)\Gamma(1-k-b-a-m)(1-k-2b-2a)_{-2m}(1/2-b-m)_m}.
\end{aligned}\tag{2.9}
$$

此外，鉴于

$$
\begin{aligned}
\Gamma(1/2-A)\Gamma(1-A-k)&=2^{2A}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(1-2A)}{(A)_k},\\
\frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-k-2A)}&=\frac{\Gamma(2A+k)}{\Gamma(2A)}=(2A)_k,
\end{aligned}
$$

式 (2.9) 中的表达式可写为

$$
\begin{aligned}
RHS\ of\ (2.9)&=\frac{2^{2a}\sqrt{\pi}2^{2b}\sqrt{\pi}}{2^{2a+2b+2m}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}\frac{(1-k-b-a)_{-m}}{(1-k-2b-2a)_{-2m}(\frac{1}{2}-b-m)_m}\\
&\times\frac{\Gamma(1-2a)}{\Gamma(1-k-2a)(a)_k}\frac{\Gamma(1-2b)}{\Gamma(1-k-2b)(b)_k}\frac{\Gamma(1-k-2b-2a-2m)(a+b+m)_k}{\Gamma(1-2a-2b-2m)}\\
&=\frac{1}{2^{2m}}\frac{(1-k-b-a)_{-m}}{(1-k-2b-2a)_{-2m}(\frac{1}{2}-b-m)_m}\frac{(2a)_k(2b)_k(a+b+m)_k}{(a)_k(b)_k(2a+2b+2m)_k}.
\end{aligned}
$$

将上述结果代入 (2.8)，得到（其中 $e=1/2-k-a-b-m$）

$$
{}_4F_3\left(\begin{matrix}-k,b,e,a\\ -k+1-b,-k+1-e,-k-a+1\end{matrix}\right)
= \frac{(k+2b+2a)_{2m}}{2^{2m}(k+b+a)_m(b+1/2)_m}\frac{(2a)_k(2b)_k(a+b+m)_k}{(a)_k(b)_k(2a+2b+2m)_k}P(k), \quad (2.10)
$$

其中 $P(k)$ 是一个多项式，定义如下

$$
P(k)=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{(-1)^{-j}(a)_j(b)_j(-k/2)_j}{(a+b+k/2)_j((k+1)/2+a+b)_j(a+1/2)_j}
\times {}_3F_2\left(\begin{matrix}-m+j,(k+1)/2+a,a+j\\ (k+1)/2+a+b+j,1/2+a+j\end{matrix}\right).
$$

这个表达式显然是关于 a 的有理式，这证明了 (2.8) 右侧关于 a 是有理式这一断言。此外，根据柯西乘积，我们有

$$
\left[{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix}\,\middle|\,x\right)\right]^2=\sum_{k=0}^{\infty}x^k\sum_{n=0}^{k}\frac{(a)_n(b)_n(a)_{k-n}(b)_{k-n}}{(c)_k(c)_{k-n}n!(k-n)!}
=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_kk!}{}_4F_3\left(\begin{matrix}-k,a,b,1-k-c\\ 1-k-a,1-k-b,c\end{matrix}\right)x^k.
$$

在此代入 $c=a+b+m+\frac{1}{2}$，得到

$$
\left[{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\ a+b+m+\frac{1}{2}\end{matrix}\,\middle|\,x\right)\right]^2
=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(a+b+m+\frac{1}{2})_kk!}{}_4F_3\left(\begin{matrix}-k,a,b,\frac{1}{2}-k-a-b-m\\ 1-k-a,1-k-b,a+b+m+\frac{1}{2}\end{matrix}\right)x^k. \quad (2.11)
$$

此处的 ${}_4F_3$ 与 (2.10) 中的相同，这是由于平衡条件 $e=1/2-k-a-b-m$，如 (2.8) 下方所示。因此，根据 (2.10) 对 (2.11) 中的 ${}_4F_3$ 求和，得到

$$
\left[{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\ a+b+m+\frac{1}{2}\end{matrix}\,\middle|\,x\right)\right]^2
=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2a)_k(2b)_k(a+b+m)_k(2a+2b+k)_{2m}}{2^{2m}(a+b+m+\frac{1}{2})_k(2a+2b+2m)_k(a+b+k)_m(\frac{1}{2}+b)_mk!}P(k)x^k
=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2a)_k(2b)_k(a+b)_k(2a+2b)_{2m}}{2^{2m}(a+b+m+\frac{1}{2})_k(2a+2b)_k(a+b)_m(\frac{1}{2}+b)_mk!}P(k)x^k, \quad (2.12)
$$

这里用到了以下公式

$$
\frac{(a+b+m)_k}{(a+b+k)_m}=\frac{(a+b)_k}{(a+b)_m}, \quad \frac{(2a+2b+k)_{2m}}{(2a+2b+2m)_k}=\frac{(2a+2b)_{2m}}{(2a+2b)_k}.
$$

接下来，应用附录 (VI) 阅读

$$
{}_3F_2\left(\begin{matrix}A,B,-N\\ D,E\end{matrix}\right)=(-1)^N\frac{(1-S)_N(B)_N}{(D)_N(E)_N}{}_3F_2\left(\begin{matrix}E-B,D-B,-N\\ 1-B-N,S-N\end{matrix}\right),
$$

其中 $S=D+E+N-A-B$，在 $P(k)$ 的定义中取 ${}_3F_2$，我们得到

$$
P(k)=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{(-1)^j(a)_j(b)_j(-\frac{k}{2})_j}{(a+b+k/2)_j(a+\frac{1}{2})_j(\frac{k+1}{2}+a+b)_j}
$$

$$\times \frac{(\frac{1}{2}+b+j)_{m-j}(a+j)_{m-j}}{(\frac{1+k}{2}+a+b+j)_{m-j}(\frac{1}{2}+a+j)_{m-j}}{}_3F_2\left(\begin{matrix}-m+j,\frac{1+k}{2}+b,1/2\\1-a-m,\frac{1}{2}+b+j\end{matrix}\right)$$

$$=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{(-1)^j(a)_m(b)_j(\frac{1}{2}+b+j)_{m-j}(-k/2)_j}{(a+\frac{1}{2})_m(a+b+k/2)_j(a+b+k/2+1/2)_m}{}_3F_2\left(\begin{matrix}-m+j,\frac{1+k}{2}+b,1/2\\1-a-m,\frac{1}{2}+b+j\end{matrix}\right).$$

写作

$$\frac{1}{(a+b+k/2)_j}=\frac{(a+b+k/2+j)_{m-j}}{(a+b+k/2)_m},$$

并从内层求和中提出 $(a+b+k/2)_m(a+b+k/2+1/2)_m=2^{-2m}(2a+2b+k)_{2m}$，则 (2.12) 的右端可写为

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2a)_k(2b)_k(a+b)_k(2b+2a)_{2m}}{(2a+2b+k)_{2m}(a+b+m+\frac{1}{2})_k(2a+2b)_k k!}P_{2m}^{a,b}(k)x^k, \tag{2.13}$$

其中

$$P_{2m}^{a,b}(k)=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{(-1)^j(a)_m(b)_j(\frac{1}{2}+b+j)_{m-j}(a+b+k/2+j)_{m-j}(-k/2)_j}{(a+b)_m(b+1/2)_m(a+1/2)_m}$$

$$\times {}_3F_2\left(\begin{matrix}-m+j,\frac{1+k}{2}+b,1/2\\1-a-m,\frac{1}{2}+b+j\end{matrix}\right) \tag{2.14}$$

与 $P(k)$ 的关系为

$$P_{2m}^{a,b}(k)=\frac{P(k)}{(a+b)_m(b+1/2)_m}.$$

为使 $P^{a,b}_{2m}$ 关于 a、b 呈对称形式，应用 [12, 附录 (V)] 阅读

$${}_3F_2\left(\begin{matrix}A,B,-N\\D,E\end{matrix}\right)=\frac{(D-B)_N}{(D)_N}{}_3F_2\left(\begin{matrix}E-A,B,-N\\1+B-D-N,E\end{matrix}\right)$$

得到

$$P_{2m}^{a,b}(k)=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{(-1)^j(a)_m(b)_j(\frac{1}{2}+b+j)_{m-j}(a+b+\frac{k}{2}+j)_{m-j}(-\frac{k}{2})_j}{(a+b)_m(b+\frac{1}{2})_m(a+\frac{1}{2})_m}$$

$$\times\frac{(b+j)_{m-j}}{(\frac{1}{2}+b+j)_{m-j}}{}_3F_2\left(\begin{matrix}-m+j,\frac{1-k}{2}-a-b-m,1/2\\1-a-m,1-b-m\end{matrix}\right),$$

由此化简为 (2.4)。

最后，我们回到 (2.13)，并应用变换

$$\frac{(2b+2a)_{2m}}{(2b+2a)_k(2a+2b+k)_{2m}}=\frac{1}{(2b+2a+2m)_k}$$

从而得到 (2.3)。 □

Remark 2.3. 对于 $m=0$，公式 (2.5) 化为经典的克劳森恒等式 (1.2) .

注 2.4. 由对比（2.3）中的系数并见于（2.10）的求和公式可简化为

$${}_4F_3\left(\begin{matrix}-k,a,b,\frac{1}{2}-k-a-b-m\\1-k-a,1-k-b,a+b+m+\frac{1}{2}\end{matrix}\right)=\frac{(2a)_k(2b)_k(a+b)_k}{(a)_k(b)_k(2a+2b+2m)_k}P_{2m}^{a,b}(k).$$

从此公式中解出 $P^{a,b}_{2m}(k)$，我们可以用拉格朗日插值或牛顿插值写出 $P^{a,b}_{2m}$的另一种表达式，形式如下： [9,引理 1]

$$P_n(t)=\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-t)_k(t-n)_{n-k}a_k=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-t)_k}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}a_j \tag{2.15}$$

对于满足 $P_n(j)=a_j$（$j=0,\ldots,n$）的 n 次多项式。例如，第一个公式给出：

$$P^{a,b}_{2m}(t)=\frac{1}{(2m)!}\sum_{k=0}^{2m}\binom{2m}{k}\frac{(-t)_k(t-2m)_{2m-k}(a)_k(b)_k(2a+2b+2m)_k}{(2a)_k(2b)_k(a+b)_k}$$
$$\times\,{}_4F_3\left(\begin{matrix}-k,a,b,\frac{1}{2}-k-a-b-m\\1-k-a,1-k-b,a+b+m+\frac{1}{2}\end{matrix}\right).$$

注 2.5。最近在 [10, 定理 2.1] 中得到的平方 $\left({}_2F_1\right)^2$ 的幂级数系数递推关系，特别给出了 $P^{a,b}_{2m}(t)$ 在正整数 $t=n\in\mathbb{N}$ 处取值的递推关系：

$$P^{a,b}_{2m}(n+1)=\beta_0(n)P^{a,b}_{2m}(n)+\beta_1(n)P^{a,b}_{2m}(n-1), \tag{2.16}$$

其中 $c=a+b+m+1/2$，并且

$$\beta_0(n)=\frac{2n^3+3(a+b+c-1)n^2+((a+b)(4c-3)+4ab-c+1)n+2ab(2c-1)}{(2a+n)(2b+n)(a+b+n)},$$
$$\beta_1(n)=-\frac{n(c+n-1)(2c-2+n)}{(2a+n)(2b+n)(a+b+n)}.$$

例 1。当 $m=1$ 时，我们得到 Askey 在 [3, 式 (3.7)] 中给出的 Askey公式 (1.3)。事实上，公式 (2.5) 的形式为

$$\left[{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\a+b+\frac{3}{2}\end{matrix}\,\middle|\,x\right)\right]^2={}_5F_4\left(\begin{matrix}2a,2b,a+b,1+\zeta_1,1+\zeta_2\\a+b+\frac{3}{2},2a+2b+2,\zeta_1,\zeta_2\end{matrix}\,\middle|\,x\right),$$

其中 ζ_1 和 ζ_2 是将 $m=1$ 代入 (2.4) 后得到的特征多项式的零点。经过简单计算可得

$$P^{a,b}_{2}(-t)=\frac{t^2-(4a+4b+1+8ab)t+2(a+b)(2a+1)(2b+1)}{2(a+b)(2a+1)(2b+1)}.$$

除归一化因子外，这恰好是由 [3, 式 (3.8)]得到的 (1.3) 中的特征多项式。

例 2。对于 $m=2$，我们得到

$$\left[{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\a+b+\frac{5}{2}\end{matrix}\,\middle|\,x\right)\right]^2={}_7F_6\left(\begin{matrix}2a,2b,a+b,1+\boldsymbol{\zeta}\\a+b+\frac{5}{2},2a+2b+4,\boldsymbol{\zeta}\end{matrix}\,\middle|\,x\right),$$

其中，$\boldsymbol{\zeta}=(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4)$ 是将 $m=2$ 代入 (2.4) 后得到的特征多项式的负根。也就是说，

$$64(a+1/2)_2(b+1/2)_2(a+b)_2P^{a,b}_4(t)=3t^4+2(8ab+12(a+b)+9)t^3+\big(64a^2b^2+4(a+b)(36ab+27)+72(a^2+b^2)+288ab+33\big)t^2+\big((a+b)(64a^2b^2+360ab+66)+4(a^2+b^2)(32ab+27)+48(a^3+b^3)+288a^2b^2+26ab+9\big)2t+64(a+1/2)_2(b+1/2)_2(a+b)_2.$$

3. Polynomial perturbation of the extended Askey's formula

我们将使用标准记号 $S(n,\ k)$ 表示由下式生成的第二类斯特林数

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)[x]_k, \text{ where } [x]_k = x(x-1)\cdots(x-k+1),$$

并通过以下关系计算

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}i^n.$$

本节的主要目标是证明以下定理。

定理 3.1。 设 $s \le 2m+1$ 且 $F_s\ (y)\ = \sum_{n=0}^{s}\sigma_n y^n$。则以下乘积公式成立:

$$\begin{aligned}{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\ a+b+m+\frac{1}{2}\end{matrix}\,\middle|\,x\right) F\left(\begin{matrix}a,b\\ a+b+m+\frac{1}{2}\end{matrix}\,\middle|\,F_s\,\middle|\,x\right)\\ = F\left(\begin{matrix}2a,2b,a+b\\ a+b+m+1/2,2a+2b+2m\end{matrix}\,\middle|\,\hat{P}_{2m+s}\,\middle|\,x\right),\end{aligned}\quad (3.1)$$

ˆ其中， P_{2m+s}的 $2m+s$ 次特征多项式可由以下两个表达式中的任意一个给出

$$\begin{aligned}\hat{P}_{2m+s}(t) = \frac{(-1)^s}{(2m+s)!}\sum_{k=0}^{2m+s}\binom{2m+s}{k}(-t)_k(t-2m-s)_{2m+s-k}\\ \times\frac{(a)_k(b)_k(2a+2b+2m)_k}{(2a)_k(2b)_k(a+b)_k}F\left(\begin{matrix}-k,a,b,\frac{1}{2}-k-a-b-m\\ a+b+m+\frac{1}{2},1-a-k,1-b-k\end{matrix}\,\middle|\,F_s\right)\end{aligned}\quad (3.2)$$

and

$$\begin{aligned}\hat{P}_{2m+s}(t) = \sigma_0 P_{2m}^{a,b}(t) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{s}\sigma_n\sum_{k=1}^{n}(-1)^k S(n,k)\sum_{j=0}^{\lfloor k/2\rfloor}\frac{k}{k-j}\binom{k-j}{j}\\ \times\frac{(a)_j(b)_j(a+b+m)_j(1/2-a-b-m-t)_j}{4^j(a+1/2)_j(b+1/2)_j(a+b)_{2j}}(-t)_k P_{2m-2j}^{a+j,b+j}(t-2j),\end{aligned}\quad (3.3)$$

其中 $P^{\alpha}{}_{,\ 2q}{}^{\beta}$ 定义见 (2.4)。

ˆ注 3.2。交换 (3.2) 中求和的顺序，还可将 P_{2m+s} 写成如下形式

$$\begin{aligned}\hat{P}_{2m+s}(t) = \frac{(1-t)_{2m+s}}{(2m+s)!}\sum_{j=0}^{2m+s}\frac{(-2m-s)_j(a)_j(b)_j(2a+2b+2m)_j(-t)_j F_s(j)}{(2a)_j(2b)_j(a+b)_j j!(1-t)_j}\\ \times{}_6F_5\left(\begin{matrix}-2m-s+j,a,b,a+b+m+j+1/2,2a+2b+2m+j,-t+j\\ a2+j,2b+j,a+b+j,a+b+m+1/2,1-t+j\end{matrix}\right).\end{aligned}$$

这种形式使对 F_s 的依赖更加明确，但代价是对 t 的依赖变得更加复杂。

该定理的证明将依赖三个引理。第一个引理很容易证明。

引理 3.3。 对于每个整数 $n \geq 0$，我们有

$$\frac{d^n}{dx^n} F\left(\begin{matrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{matrix}\middle| P \middle| x\right) = \frac{(\mathbf{a})_n}{(\mathbf{b})_n} F\left(\begin{matrix}\mathbf{a}+n\\ \mathbf{b}+n\end{matrix}\middle| S_n P \middle| x\right), \tag{3.4}$$

其中， S_n 是移位算子， $S_n P\left(x\right) = P\left(x+n\right)$ 。

接下来，我们需要如下形式的正交关系：

引理 3.4。 对于每个整数 $k \geq 1$，以下恒等式成立

$$\sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(-1)^j k}{k-j} \binom{k-j}{j} \binom{k-2j}{\ell-j} = \delta_{\ell,0} + \delta_{\ell,k} = \begin{cases} 1, & \ell = 0, k \\ 0, & \ell = 1, 2 \ldots, k-1 \end{cases} . \tag{3.5}$$

证明。令

$$H_{\ell,k} := \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(-1)^j k}{k-j} \binom{k-j}{j} \binom{k-2j}{\ell-j}.$$

所需关系等价于

$$H(x) := \sum_{\ell=0}^{k} H_{\ell,k} x^\ell = 1 + x^k. \tag{3.6}$$

鉴于 二项式公式以及 $\binom{m}{n} = 0$ 在 $n \notin \{0, \ldots, m\}$ 时这一事实，我们有

$$\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k-2j}{\ell-j} x^\ell = x^j (1+x)^{k-2j}.$$

在定义 $H(x)$ 时交换求和次序，便得

$$H(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(-1)^j k}{k-j} \binom{k-j}{j} x^j (1+x)^{k-2j} = (1+x)^k \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(-1)^j k}{k-j} \binom{k-j}{j} \left[\frac{x}{(1+x)^2}\right]^j.$$

为证明 (3.6)，我们将证明

$$H(x) = 2x^{k/2} T_k\Big(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\Big), \tag{3.7}$$

其中 T_k 表示第一类切比雪夫多项式。事实上， T_k 的一个已知表达式为 [11, (1.108)]

$$T_k(y) = \frac{k}{2} \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^j \frac{(k-j-1)!}{j!(k-2j)!} (2y)^{k-2j} = \frac{1}{2}(2y)^k \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(-1)^j k}{k-j} \binom{k-j}{j} \left(\frac{1}{4y^2}\right)^j.$$

令

$$\frac{x}{(1+x)^2} = \frac{1}{4y^2} \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1+x}{2\sqrt{x}} \;\Leftrightarrow\; (2y)^k = \frac{(1+x)^k}{x^{k/2}},$$

我们得到（3.7）。根据定义 $T_k(\cos(\theta)) = \cos(k\theta)$，可得

$$T_k\left(\frac{t+t^{-1}}{2}\right) = \frac{t^k + t^{-k}}{2},$$

因此，令 $t = \sqrt{x}$ 可得

$$\frac{t+t^{-1}}{2} = \frac{\sqrt{x} + 1/\sqrt{x}}{2} = \frac{1+x}{2\sqrt{x}}.$$

因此，我们得到

$$T_k\Big(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\Big)=\frac{x^{k/2}+x^{-k/2}}{2}.$$

将其代入 (3.7)，得到 (3.6)，从而也证明了 (3.5)。 □

定理 3.1 证明的关键内容如下：

引理 3.5. 对于光滑函数 f 和任意整数 $n\geq 1$，有

$$f(x)(x\partial_x)^n f(x)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}S(n,k)x^k\sum_{j=0}^{\lfloor k/2\rfloor}\frac{(-1)^j k}{k-j}\binom{k-j}{j}\partial_x^{k-2j}[f^{(j)}(x)]^2. \tag{3.8}$$

证明. 首先，我们将证明以下公式

$$2f(x)\partial_x^k f(x)=\sum_{j=0}^{\lfloor k/2\rfloor}\frac{(-1)^j k}{k-j}\binom{k-j}{j}\partial_x^{k-2j}[(\partial_x^j f(x)]^2. \tag{3.9}$$

将 $[(\partial_x^j f(x)]^2$ 视为乘积，根据莱布尼茨法则，我们有：

$$\begin{aligned}\partial_x^{k-2j}[(\partial_x^j f(x)]^2&=\sum_{r=0}^{k-2j}\binom{k-2j}{r}\partial_x^{r+j}f(x)\partial_x^{k-j-r}f(x)\\&=\sum_{\ell=j}^{k-j}\binom{k-2j}{\ell-j}\partial_x^{\ell}f(x)\partial_x^{k-\ell}f(x)=\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k-2j}{\ell-j}\partial_x^{\ell}f(x)\partial_x^{k-\ell}f(x),\end{aligned}$$

其中，第二个等号中我们令 $\ell=j+r$；第三个等号则利用了如下事实：当 $n<0$ 或 $n>m$时，$\binom{m}{n}=0$ 。将其代入 (3.9) 的右端并交换求和次序，由 (3.5) 得到

$$\sum_{\ell=0}^{k}\partial_x^{\ell}f(x)\partial_x^{k-\ell}f(x)\sum_{j=0}^{\lfloor k/2\rfloor}\frac{(-1)^j k}{k-j}\binom{k-j}{j}\binom{k-2j}{\ell-j}=2f(x)\partial_x^k f(x)$$

这就是 (3.9)。

现在我们可以证明 (3.8) 了。为此，我们需要用到如下众所周知的展开式：

$$(x\partial_x)^n=\sum_{k=0}^{n}S(n,k)x^k\partial_x^k.$$

将其应用于 f，把所得结果乘以 f，并利用 (3.9)，即可得到 (3.8). □

为说明 (3.8)，下面列出一些简单的特殊情形。

例子。 注意， $S(0,0)=1, S(n,0)=0$ 当 $n\geq 1$ 时。于是我们有

$$f(x)(x\partial_x)f(x)=\frac{1}{2}x\partial_x[f(x)]^2,$$

$$f(x)(x\partial_x)^2 f(x)=\frac{1}{2}x\partial_x[f(x)]^2+\frac{1}{2}x^2\partial_x^2[f(x)]^2-x^2[f'(x)]^2,$$

$$f(x)(x\partial_x)^3 f(x)=\frac{1}{2}x\partial_x[f(x)]^2+\frac{3}{2}x^2\partial_x^2[f(x)]^2-3x^2[f'(x)]^2+\frac{1}{2}x^3\partial_x^3[f(x)]^2-\frac{3}{2}x^3\partial_x[f'(x)]^2.$$

定理 *3.1* 的证明。设

$$f(x)={}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\ a+b+m+\frac{1}{2}\end{matrix}\,\middle|\,x\right),$$

使得

$$f^{(j)}(x)=\frac{(a)_j(b)_j}{(a+b+m+1/2)_j}{}_2F_1\left(\begin{matrix}a+j,b+j\\ a+b+m+\frac{1}{2}+j\end{matrix}\,\middle|\,x\right).$$

因此，由 (2.3) 并取 $a\to a+j$、$b\to b+j$、$m\to m-j$，可得

$$[f^{(j)}(x)]^2=\frac{(a)_j^2(b)_j^2}{(a+b+m+1/2)_j^2}\times F\left(\begin{matrix}2a+2j,2b+2j,a+b+2j\\ a+b+m+j+\frac{1}{2},2a+2b+2m+2j\end{matrix}\,\middle|\,P_{2m-2j}^{a+j,b+j}\,\middle|\,x\right).\quad(3.10)$$

记

$$\alpha=\frac{(a)_j^2(b)_j^2}{(a+b+m+1/2)_j^2}.$$

采用这一记号，由 (3.10) 和 (3.4) 可得

$$\begin{aligned}\partial_x^{k-2j}[f^{(j)}(x)]^2&=\alpha\partial_x^{k-2j}F\left(\begin{matrix}2a+2j,2b+2j,a+b+2j\\ a+b+m+j+\frac{1}{2},2a+2b+2m+2j\end{matrix}\,\middle|\,P_{2m-2j}^{a+j,b+j}\,\middle|\,x\right)\\&=\alpha\frac{(2a+2j)_{k-2j}(2b+2j)_{k-2j}(a+b+2j)_{k-2j}}{(a+b+m+j+1/2)_{k-2j}(2a+2b+2m+2j)_{k-2j}}\\&\times F\left(\begin{matrix}2a+k,2b+k,a+b+k\\ a+b+m+k-j+1/2,2a+2b+2m+k\end{matrix}\,\middle|\,S_{k-2j}P_{2m-2j}^{a+j,b+j}\,\middle|\,x\right).\end{aligned}$$

化简波赫哈默符号并记

$$Q_{k,j}(t)=S_{k-2j}P_{2m-2j}^{a+j,b+j}(t)=P_{2m-2j}^{a+j,b+j}(t+k-2j),$$

这是一个次数为 $2m-2j$ 的多项式，由此可得

$$\partial_x^{k-2j}[f^{(j)}(x)]^2=A_jB_kC_{k,j}F\left(\begin{matrix}2a+k,2b+k,a+b+k\\ a+b+m+1/2+k-j,2a+2b+2m+k\end{matrix}\,\middle|\,Q_{k,j}\,\middle|\,x\right),\quad(3.11)$$

其中

$$A_j=\frac{4^{-j}(a)_j(b)_j(a+b+m)_j}{(a+1/2)_j(b+1/2)_j(a+b)_{2j}},\ B_k=\frac{(2a)_k(2b)_k(a+b)_k}{(2a+2b+2m)_k},\ C_{k,j}=\frac{1}{(a+b+m+1/2)_{k-j}}.$$

接下来，我们有

$$F\left(\begin{matrix}a,b\\ a+b+m+\frac{1}{2}\end{matrix}\,\middle|\,F_s\,\middle|\,x\right)=\sum_{n=0}^{s}\sigma_n(x\partial_x)^n\left[{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix}\,\middle|\,x\right)\right],$$

其中 σ_n 是 $F_s(y)$、$F_s(y)=\sum_{n=0}^{s}\sigma_n y^n$的系数。将此公式乘以${}_2F_1(a,\ b;c;\ x)$，其中 $c=a+b+m+1/2$ 将每个乘积替换为展开式 (3.8)，并利用 (3.11)，得到

$$\begin{aligned}&{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix}\,\middle|\,x\right)F\left(\begin{matrix}a,b\\ a+b+m+\frac{1}{2}\end{matrix}\,\middle|\,F_s\,\middle|\,x\right)=\\&\quad=\left[{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix}\,\middle|\,x\right)\right]^2+\sum_{n=1}^{s}\sigma_n\cdot{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix}\,\middle|\,x\right)(x\partial_x)^n\left[{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix}\,\middle|\,x\right)\right]\\&=F\left(\begin{matrix}2a,2b,a+b\\ a+b+m+1/2,2a+2b+2m\end{matrix}\,\middle|\,P_{2m}^{a,b}\,\middle|\,x\right)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{s}\sigma_n\sum_{k=1}^{n}S(n,k)B_kx^k\end{aligned}$$

$$\times \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(-1)^j k}{k-j} \binom{k-j}{j} A_j C_{k,j} F\left(\begin{matrix} 2a+k, 2b+k, a+b+k \\ a+b+m+1/2+k-j, 2a+2b+2m+k \end{matrix} \middle| Q_{k,j} \middle| x \right).$$

化简后得到

$$x^k B_k C_{k,j} F\left(\begin{matrix} 2a+k, 2b+k, a+b+k \\ a+b+m+1/2+k-j, 2a+2b+2m+k \end{matrix} \middle| Q_{k,j} \middle| x \right)$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2a)_l (2b)_l (a+b)_l x^l (l-k+1)_k (a+b+m+1/2+l-j)_j}{(a+b+m+1/2)_l (2a+2b+2m)_l l!} Q_{k,j}(l-k).$$

注意到，鉴于对于 $l = 0$、1、.....、$k-1$，$(l-k+1)_k = 0$，我们将求和范围从 $l \geq k$ 扩展到了 $l \geq 0$。将其代入上面的乘积公式，得到

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x \right) F\left(\begin{matrix} a, b \\ a+b+m+\frac{1}{2} \end{matrix} \middle| F_s \middle| x \right) = F\left(\begin{matrix} 2a, 2b, a+b \\ a+b+m+1/2, 2a+2b+2m \end{matrix} \middle| \hat{P}_{2m+s} \middle| x \right),$$

其中，特征多项式为

$$\hat{P}_{2m+s}(t) = P_{2m}^{a,b}(t) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{s} \sigma_n \sum_{k=1}^{n} S(n,k)$$
$$\times \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(-1)^j k}{k-j} \binom{k-j}{j} A_j (t-k+1)_k (a+b+m+1/2+t-j)_j Q_{k,j}(t-k)$$
$$= P_{2m}^{a,b}(t) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{s} \sigma_n \sum_{k=1}^{n} (-1)^k S(n,k) \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{k}{k-j} \binom{k-j}{j}$$
$$\times \frac{(a)_j (b)_j (a+b+m)_j (1/2-a-b-m-t)_j}{4^j (a+1/2)_j (b+1/2)_j (a+b)_{2j}} (-t)_k P_{2m-2j}^{a+j,b+j}(t-2j).$$

Thi ˆ s 表明，$P_{2m+s}(t)$ 确实是一个次数为 $2m+s$ 的多项式，由 (3.3) 给出。

为证明 (3.2)，我们将使用 (2.15) 中给出的插值多项式。为此，我们可以将乘积 (3.1) 的系数写成如下形式：

$$F\left(\begin{matrix} a, b \\ a+b+m+\frac{1}{2} \end{matrix} \middle| F_s \middle| x \right) {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ a+b+m+\frac{1}{2} \end{matrix} \middle| x \right)$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(a)_l (b)_l x^l}{(a+b+m+\frac{1}{2})_l l!} F\left(\begin{matrix} -l, a, b, \frac{1}{2}-l-a-b-m \\ a+b+m+\frac{1}{2}, 1-a-l, 1-b-l \end{matrix} \middle| F_s \right),$$

因此

$$\hat{P}_{2m+s}(l) = \frac{(a)_l (b)_l (2a+2b+2m)_l}{(2a)_l (2b)_l (a+b)_l} F\left(\begin{matrix} -l, a, b, \frac{1}{2}-l-a-b-m \\ a+b+m+\frac{1}{2}, 1-a-l, 1-b-l \end{matrix} \middle| F_s \right),$$

从而（2.15）立即得到（3.2）。 □

注 3.6. 根据标准论证，对等式两边的幂级数系数进行比较，乘积公式 (3.1) 可推出一个求和公式，即

$$F\left(\begin{matrix} -k, a, b, \frac{1}{2}-k-a-b-m \\ a+b+m+\frac{1}{2}, 1-a-k, 1-b-k \end{matrix} \middle| F_s \right) = \frac{(2a)_k (2b)_k (a+b)_k \hat{P}_{2m+s}(k)}{(a)_k (b)_k (2a+2b+2m)_k}. \quad (3.12)$$

注 3.7. 条件 $s \le 2m+1$ 不可省略：若不满足该条件，公式 (3.1) 将不成立。同时，式 (3.2) 给出的多项式仍定义良好，将其代入 (3.1) 后，按构造可得到前 $2m+s$ 个正确的幂级数系数，但无法得到更多。似乎可以认为，(3.1) 的右侧仍保持为相应 ${}_3F_2$ 的多项式扰动这一形式，但此时扰动多项式的次数必须高于 $2m+s$。由此得到如下

Open 问题。当 $s > 2m+$ 时，(3.1) 的右端应替换为什么 1?

最后，我们给出公式 (3.1) 的若干显式特例。

例 1。对于 $\mathbf{s} = 1$，对任意整数 $m \ge 0$，我们得到：

$$
{}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ a+b+m+\frac{1}{2} \end{matrix}\,\middle|\, x\right) {}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, f+1 \\ a+b+m+\frac{1}{2}, f \end{matrix}\,\middle|\, x\right) \\
= F\left(\begin{matrix} 2a, 2b, a+b, 2f+1 \\ a+b+m+\frac{1}{2}, 2a+2b+2m, 2f \end{matrix}\,\middle|\, P_{2m}^{a,b}\,\middle|\, x\right),
$$

其中 $P^{a}{}_{,2m}^{\ b}$ 由 (2.4) 定义。特别地，令 $m=0$，我们得到

$$
{}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ a+b+\frac{1}{2} \end{matrix}\,\middle|\, x\right) {}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, f+1 \\ a+b+\frac{1}{2}, f \end{matrix}\,\middle|\, x\right) = {}_4F_3\left(\begin{matrix} 2a, 2b, a+b, 2f+1 \\ a+b+\frac{1}{2}, 2a+2b, 2f \end{matrix}\,\middle|\, x\right),
$$

这似乎是一个新的显式乘积恒等式。

若令 $f=a$，我们便得到两个高斯超几何函数的乘积公式 ${}_2F_1$，这似乎也是新的

$$
{}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ a+b+m+\frac{1}{2} \end{matrix}\,\middle|\, x\right) {}_2F_1\left(\begin{matrix} a+1, b \\ a+b+m+\frac{1}{2} \end{matrix}\,\middle|\, x\right) \\
= F\left(\begin{matrix} 2a+1, 2b, a+b \\ a+b+m+\frac{1}{2}, 2a+2b+2m \end{matrix}\,\middle|\, P_{2m}^{a,b}\,\middle|\, x\right).
$$

特别地，对于 $m=0$，我们有：

$$
{}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ a+b+\frac{1}{2} \end{matrix}\,\middle|\, x\right) {}_2F_1\left(\begin{matrix} a+1, b \\ a+b+\frac{1}{2} \end{matrix}\,\middle|\, x\right) = {}_3F_2\left(\begin{matrix} 2a+1, 2b, a+b \\ a+b+\frac{1}{2}, 2a+2b \end{matrix}\,\middle|\, x\right),
$$

这等价于 Orr公式 [7, (15)]。通过比较系数，上述乘积恒等式推出了一个与 (3.12) 略有不同的求和公式，我们记录如下以供后用：

$$
{}_4F_3\left(\begin{matrix} -k, a+1, b, \frac{1}{2}-k-a-b-m \\ a+b+m+\frac{1}{2}, 1-k-a, 1-k-b \end{matrix}\right) = \frac{(2a+1)_k (2b)_k (a+b)_k P_{2m}^{a,b}(k)}{(a+b+m+1/2)_k (2a+2b+2m)_k}. \tag{3.13}
$$

例 2。对于$\mathbf{s} = 2$，我们得到 $m \ge 1$

$$
{}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ a+b+m+\frac{1}{2} \end{matrix}\,\middle|\, x\right) {}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, f+2 \\ a+b+m+\frac{1}{2}, f \end{matrix}\,\middle|\, x\right) \\
= F\left(\begin{matrix} 2a, 2b, a+b \\ a+b+m+\frac{1}{2}, 2a+2b+2m \end{matrix}\,\middle|\, \hat{P}_{2m+2}\,\middle|\, x\right),
$$

其中

$$
\hat{P}_{2m+2}(t) = \Big(1 + \frac{(2f+1)}{2f(f+1)} t + \frac{t^2}{2f(f+1)}\Big) P_{2m}^{a,b}(t)
$$

$$-\frac{ab(a+b+m)(a+b+m-1/2+t)t(t-1)}{f(f+1)(2a+1)(2b+1)(a+b)_2}P_{2m-2}^{a+1,b+1}(t-2).$$

特别地，对于 $m=1$，利用 (3.2) 可写为：

$$\hat{P}_4(t)=\frac{1}{24}\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}(-t)_k(t-4)_{4-k}$$
$$\times\frac{(a)_k(b)_k(2a+2b+2)_k}{(2a)_k(2b)_k(a+b)_k}\cdot{}_5F_4\left(\begin{matrix}-k,a,b,\frac{1}{2}-k-a-b-1,f+2\\ a+b+\frac{3}{2},1-a-k,1-b-k,f\end{matrix}\right).$$

References

[1] G. Almkvist, D. van Straten, and W. Zudilin，*Clausen*公式的推广及卡拉比–丘微分方程的代数变换，《爱丁堡数学学会会刊》，*54*（*2011*年），第*273–295*页。[2] G.E. Andrews, R. Askey, and R. Roy，《特殊函数》，剑桥大学出版社，*1999*年。[3] R. Askey，特殊 ${}_2F_1$ 平方的*Clausen*公式变体，载于《数论及相关主题》（孟买，*1988*年），*Tata*基础研究院数学研究丛书第*12*卷，*Tata*基础研究院，孟买，*1989*年，第*1–12*页。[4] H. Chan, Y. Tanigawa, Y. Yang, , and W. Zudilin，模形式理论引出的*Clausen*恒等式新类比，《数学进展》，*228*（*2011*年），第*1294–1314*页。[5] T. Clausen，关于级数为 $y=1+\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha.\alpha+1}{1.2}\cdot\frac{\beta.\beta+1}{\gamma\cdot\gamma+1}x^2+$ 等形式的情形具有 $z=1+\frac{\alpha'}{1}\cdot\frac{\beta'}{\gamma'}\cdot\frac{\delta'}{\epsilon'}x+\frac{\alpha'.\alpha'+1}{1.2}\cdot\frac{\beta'.\beta'+1}{\gamma'\cdot\gamma'+1}\cdot\frac{\delta'.\delta'+1}{\epsilon'.\epsilon'+1}x^2+$ 等形式的平方，《纯粹与应用数学杂志》，*3*（*1828*年），第*89–91*页。[6] E. Goursat，关于高阶超几何函数的回忆录，《高等师范学校科学年刊》第*2*辑，*12*（*1883*年），第*216–285*页；*395–430*页。[7] A. Z. Grinshpan，广义超几何函数：乘积恒等式与加权范数不等式，《拉马努金杂志》，*31*（*2013*年），第*53–66*页。[8] P. W. Karlsson，具有整数参数差的超几何函数，《数学物理杂志》，*12*（*1971*年），第*270–271*页。[9] D. Karp，欧拉恒等式与克劳森恒等式的多项式扰动，《应用数学进展》，*175*（*2026*年），第*103042*页。
[10] Z.-X. Mao and J.-F. Tian，平方与立方超几何函数麦克劳林系数的递推关系及其应用，*arXiv*预印本 *arXiv:2601.09154*，（*2026*年）。[11] T. J. Rivlin，切比雪夫多项式——从逼近论到代数与数论，多佛出版社，纽约州米尼奥拉，*2020*年。重印自*1990*年第二版。[12] K. Srinivasa Rao, J. Van der Jeugt, J. Raynal, R. Jagannathan, and V. Rajeswari，终止的 ${}_3F_2$*(1)* 级数的群论基础，《物理学杂志*A*辑》，*25*（*1992*年），第*861–876*页。[13] R. Vidunas，克劳森恒等式的一种推广，《拉马努金杂志》，*26*（*2011*年），第*133–146*页。

[1]Holon Institute of Technology, Holon, Israel

[2]Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria
电子邮件地址: dimkrp@gmail.com

[3]School of Mathematical Sciences, Shanghai Jiao Tong University, 800 DongchuanRD, Shanghai 200240, China

[4]Department of Mathematics, School of Computer Science Engineering and Technol-ogy, Bennett University, Greater Noida, India
电子邮件地址: vinayshukla4321@gmail.com, vnshukla01@sjtu.edu.cn