Prepared for submission to JHEP

动力学引力下的黑洞内部与量子纠错

arXiv:2602.01241v1 [hep-th] 1 Feb 2026

Akihiro Miyata[a] **Tomonori Ugajin**[b]

[a]引力物理与量子信息中心（*CGPQI*），汤川理论物理研究所（*YITP*），京都大学，日本京都市左京区北白川追分町，邮编 *606-8502*[b]物理系，立教大学，日本东京丰岛区，邮编 *171-8501*

电子邮箱：akihiro.miyata@yukawa.kyoto-u.ac.jp，ugajin@rikkyo.ac.jp

Abstract: 根据岛公式，黑洞内部定义的编码子空间中的信息会在 Page 时间之后嵌入霍金辐射中。乍看之下，这种嵌入意味着作用于霍金辐射的操作可能会改变编码子空间中的信息，从而可能导致因果性表面上遭到违反。事实上，基于 PSSY 模型（该模型仅纳入引力的拓扑自由度）的先前研究表明，当误差足够大时，可能出现因果性违反，其表现为互信息非零。

本文研究动力学引力也作用于霍金辐射的情形。在这种情况下，对霍金辐射进行操作，会对互信息引力路径积分中出现的体区时空产生非平凡的反作用——而当霍金辐射处于非引力区域时，则不会出现这种效应。我们发现，这种反作用会使相关互信息消失。这一结果表明，在具有动力学引力的理论中，表面上的因果性违背得以消解。

目录

1 引言 **1**

2 西海岸模型中有引力浴里的量子纠错 3

2.1 黑洞内部与量子纠错 32.2 引力浴中的动力学 JT 引力 52.3 描述编码激发的膜 62.4 拓扑模型（西海岸模型） 72.5 编码子空间的嵌入 72.6 引力浴上的误差 112.7 解耦条件 112.8 R´拓扑模型中的 Rényi 二阶熵与互信息 142.8.1 R´拓扑模型中的 Rényi 二阶熵 152.9 相干信息的性质 192.9.1 R´ényi 二阶互信息 212.10 与非引力情形的比较 24

3 有引力浴中的量子纠错：包含引力反作用 28

3.1 Page 时间之后有质量膜作为误差的引力反作用 293.2 误差与局域标度算符关系的示例 353.3 Page 时间之前有质量膜作为误差的引力反作用 363.4 消失的 R´ényi-二互信息 39

4 讨论 **40**

A 引力浴中 R´ényi-二熵的评估 44

A.1 包含 Kraus 算子的西海岸模型 44A.2 R´ényi-二熵 46A.2.1 R´ényi-二熵：内部参考系统 46A.2.2 R´ényi-二熵：参考系统和环境系统 51

B 非引力浴中的 R´ényi-二量 **62**

B.1 解耦条件下的 R´ényi-二熵与互信息 62B.2 R´ényi-二辐射熵 66

C Haar随机误差的相干信息 67

D 弱次可加性给出的界 68E 相干信息的解释 70F 因果性违背与可恢复性条件 71G 反作用膨胀子剖面的细节 73G.1 膨胀子剖面 73G.2 沿有质量膜拼接两个膨胀子剖面 74**H 误差标度维数的上界 76**H.1 参数之间的层级关系 78

---

1 引言

量子纠错与全息密不可分。在 AdS/CFT 对应框架下 [1], , 纠缠楔重构的思想 [2, 3]指出，可从边界子区域 A 重构的体区域，恰好是由 A 和其 Ryu-Takayanagi 面围成的区域 [4, 5]。要使这一点成立，必须将体有效量子场论的希尔伯特空间理解为嵌入边界共形场论希尔伯特空间中的量子纠错码 [2, 3]。

此外，有人指出，蒸发黑洞中也会出现类似的量子纠错码结构 [6–9]。Hayden–Preskill 协议 [6]就是一个具体例子。设想一个通过发射霍金辐射而蒸发的黑洞。Page 时间之后，这样的黑洞与霍金辐射近似处于最大纠缠态 [10, 11]。在这一设定中，Hayden 和 Preskill 运用量子信息论工具，并以 Haar 随机幺正算符对黑洞动力学建模，证明被投入黑洞的某个物体（日记本）中的信息几乎会立即编码进霍金辐射 [6]。将日记本的希尔伯特空间视为嵌入霍金辐射希尔伯特空间中的编码子空间后，该系统便可看作一个量子纠错码，能够抵抗黑洞自由度的擦除 [6, 8, 9]。

在半经典时空图景中，岛公式 [12–16] 实现了将黑洞内部信息嵌入霍金辐射的过程，正如 Hayden-Preskill协议所描述的那样。岛公式计算霍金辐射的熵,

并且，与HEE公式非常相似 [4, 5, 17–19] 在 AdS/CFT 对应中，它确定了黑洞内部霍金辐射的纠缠楔——即岛区域。在半经典图景中，Hayden-Preskill协议中日记本的恢复因此可以理解为日记本落入岛区域。

岛公式通常是在这样一种设置下表述的：在黑洞外部连接一个非引力热浴，作为霍金辐射的储存库 [12, 14]。如果黑洞内部嵌入在霍金辐射中，那么似乎可以通过对热浴中的辐射进行操作来改变内部状态。然而，由于热浴与黑洞内部之间不存在因果联系，这种可能性将意味着因果性遭到违反[1]。

Kim、Tang 和 Preskill 认为，对霍金辐射进行复杂度关于黑洞熵呈多项式增长的操作，无法改变内部 [20]。具体而言，他们表明，当内部同时编码在黑洞及其辐射中时，通过证明解耦条件 [20]成立，说明内部能够免受作用于辐射的低复杂度误差影响。Balasubramanian等人[21] 利用一种带有膜末端（EoW）膜的简单引力拓扑模型 [15]重现了这一结果。然而，如果存在复杂度足够高的操作，解耦条件便不再成立，因此这些操作确实能够改变黑洞内部。

这些结果是在引力不作用于储存霍金辐射的热浴这一假设下推导出来的。相比之下，在我们实际的宇宙中，一旦霍金辐射传播到远离黑洞之处，引力便会作用于霍金辐射。特别是，对辐射实施高度复杂的量子操作需要巨大的能量，使其引力反作用不可忽略。在本文中，我们研究在引力同样作用于霍金辐射的情形下，黑洞内部作为量子纠错码的性质。

我们在两个二维引力模型中进行了这项计算。第一个是西海岸模型 [15], ，该模型只包含引力的拓扑自由度。在这个模型中，黑洞的微观态由 EoW 膜实现。我们还利用 EoW 膜构造霍金辐射的状态，并考察是否会发生解耦。通过计算一种特定的 Rényi-2 互信息（RMI），我们发现，即便在这个模型中，当错误足够大时，解耦条件也会在 Page 时间之后的一小段时间内失效。这是因为在该参数区域中，连接对应霍金辐射的边界、对应黑洞自由度的边界及其副本的全连通虫洞，会成为 RMI 某一熵贡献的主导鞍点。

[1]在附录F中，我们总结了误差可恢复性条件与编码子空间上的算符同该误差的 Kraus 算子之间的对易性的关系。

霍金辐射、对应黑洞自由度的边界，以及它们的副本所对应的边界。

接下来，我们在 JT引力中考察同一条件 [22–24], 该理论包含动力学自由度。在这种情况下，由于错误引发的反作用，全连通虫洞不可能在所有参数区域内都是主导鞍点，因此解耦成立。

这意味着，一旦将引力的动力学自由度考虑在内，无论错误有多大，都无法改变黑洞内部。Page 时间之后，会形成一种时空构型，其中黑洞与霍金辐射通过虫洞相连，而编码子空间位于霍金辐射的纠缠楔内。然而，引力作用于霍金辐射这一事实意味着，错误引发的引力反作用会使时空变形，从而保护编码子空间。这种保护机制的具体细节仍有待充分阐明。

本文其余部分安排如下。在第2节中，我们首先介绍引力模型，并说明体希尔伯特空间编码在由霍金辐射和黑洞微观态构成的物理希尔伯特空间中的条件。随后，我们利用西海岸模型中的引力路径积分，计算刻画解耦的 Rényi-2 互信息。我们将表明，在这一拓扑模型中，由于全连接鞍点占主导，错误较大时，解耦会在 Page 时间之后的一小段时间内失效。在第3节中，我们将在存在动力学自由度的情况下，也就是在 JT引力中，计算相同的 Rényi-2 互信息。我们将表明，作用于辐射自由度的错误所产生的反作用，会使全连通虫洞的作用量足够大，从而令其成为次主导鞍点。因此，Rényi-2 互信息消失，解耦条件始终成立。在第4节中，我们总结全文并展望未来方向。

2 西海岸模型中的引力浴量子纠错

2.1 黑洞内部与量子纠错

我们关注的问题是：当黑洞内部自由度的希尔伯特空间嵌入由黑洞微观态和霍金辐射构成的双部系统的希尔伯特空间时，它是否能作为量子纠错码，抵御作用于霍金辐射上的错误。特别是， [21] 在

引力不作用于霍金辐射的情况下研究了这个问题，并得出结论：足够复杂的操作可以改变内部自由度。本文分析了当引力作用于霍金辐射时，这一结论会如何变化。

我们简要回顾一下，当辐射自由度不受引力作用时，蒸发黑洞如何对应于一个量子纠错码。若将H_{BH} 记为黑洞微观态的希尔伯特空间，将 H_{HR} 记为霍金辐射的希尔伯特空间，那么双部系统 $H_{BH} \otimes H_{HR}$ 上的状态为

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{\alpha=1}^{k} |\psi_\alpha\rangle_{BH} \otimes |\alpha\rangle_{HR}. \tag{2.1}$$

随着 k增加，黑洞与霍金辐射之间的纠缠会增强。这意味着，直观而言， k 对应于黑洞开始蒸发后经过的时间。

这里，黑洞的微观状态 $|\psi_i\rangle_{BH}$ 由体区中插入 EoW 膜的一个状态来实现 [15]。与 $|\psi_\alpha\rangle$ 相关联的引力路径积分包含对体区时空中各种布兰构型的求和。另一方面，霍金辐射部分不受引力作用，也不包含非平凡的动力学。

黑洞上的体有效量子场论的希尔伯特空间可以分为两部分：对应于内部自由度的部分 H_{in}，以及对应于外部自由度的部分 H_{ex}。含有黑洞内部激发的量子场论态 $|i\rangle_{in}$，嵌入完整状态后为

$$|i\rangle_{in} \quad \rightarrow \quad |\psi_i\rangle_{phys} = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{\alpha} |\psi_{\alpha,i}\rangle_{BH} \otimes |\alpha\rangle_{HR}. \tag{2.2}$$

通过这种嵌入，当我们定义一个量子纠错码，并将 H_{in} 作为编码子空间、将 $H_{BH} \otimes H_{HR}$ 作为物理希尔伯特空间 H_{phys}时，我们希望了解它能否抵御对霍金辐射 H_{HR} 的操作；这些操作由量子信道 $\mathcal{E}$描述。为此，除了 H_{phys} 之外，我们还引入一个与编码子空间 H_{code}同构的参考系统 H_{ref} ，以及一个环境系统H_{env}，并考虑 $H_{ref} \otimes H_{phys} \otimes H_{env}$上的一个状态

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{d_{in}} \sum_{i'=1}^{d_{ex}} \sum_{m=1}^{d_{env}} |i, i'\rangle_{ref} \otimes E_m |\psi_{i,i'}\rangle_{phys} \otimes |e_m\rangle_{env} \tag{2.3}$$

其中， E_m 表示 $\mathcal{E}$的 Kraus 算子，环境系统的维数由误差的秩决定。编码子空间中的态由两个指标i， i' 标记，因为我们还纳入了由指标 i'指定的外部区域上的激发。

黑洞内部态免受 $\mathcal{E}$ 影响的条件是， $H_{ref} \otimes H_{env}$ 上的约化密度矩阵可分解为张量积，即

$$\rho'_{ref(in),ref(ex),E} = \rho'_{ref(in)} \otimes \rho_{ref(ex),E}. \tag{2.4}$$

这称为解耦条件 [25–29]。

我们关注引力也作用于霍金辐射的情形。对此类引力效应进行建模的最简单方法，是用 EoW 膜来描述霍金辐射的态。这对应于考虑分别存在于宇宙 A 和宇宙 B 中的两个纠缠黑洞 [30–32]。此时，物理希尔伯特空间上的态具有以下形式，

$$\sum_{\alpha=1}^{k} |\psi^{\alpha}\rangle_A^* \, |\psi^{\alpha}\rangle_B \,, \tag{2.5}$$

引力作用于辐射时出现的新效应包括：(1) 存在连接宇宙 A 和宇宙 B 的虫洞，必须将其纳入引力路径积分；(2) 作用于霍金辐射的错误充当引力动力学的源。本文分析这些效应如何影响解耦条件。

为检验解耦条件，我们研究以下 R´ényi 互信息

$$I^{(2)}(ref(in),\, ref(ex) \cup E) = S^{(2)}(\rho'_{ref(in)}) + S^{(2)}(\rho'_{ref(ex)\cup E}) - S^{(2)}(\rho'_{ref(in),ref(ex)\cup E}), \tag{2.6}$$

通过计算涉及 EoW 膜的引力路径积分（GPI）来实现。我们将在两类理论中进行计算：(1) 第一类理论是拓扑理论，称为西海岸模型[15] ，其中每个鞍点通过其欧拉示性数对 GPI 作出贡献。(2) 第二类理论是具有动力学膨胀子和动力学膜的 JT引力。

在本节中，我们在拓扑模型（西海岸模型）中计算（2.6）。由于该模型中不存在由错误引起的引力反作用，我们得到的结果在定性上与非引力浴的情况相似。在下一节3中，我们将在动力学 JT 引力中研究相同的设置，其中引力反作用对于系统抵御错误的稳健性起着非常重要的作用。

2.2 带引力浴的动力学 JT 引力

为了解释这一设定，我们首先引入完整的动力学理论，即（欧几里得）二维 Jackiw–Teitelboim（JT）引力以及具有张力μ 的世界末端（EoW）膜，然后将其拓扑化以简化计算。

完整理论的作用量为

$$I_{JT+\text{EoW}} = I_{\text{Topo. Dilaton}} + I_{\text{Dyn. Dilaton}} + I_{\text{EoW}}, \tag{2.7}$$

其中$I_{\text{Topo. 膨胀子}}$和$I_{\text{Dyn. 膨胀子}}$定义为

$$I_{\text{Topo. Dilaton}} = -S_0\chi, \tag{2.8}$$

$$I_{\text{Dyn. Dilaton}} = -\left[\frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}}\phi(R+2) + \int_{\partial\mathcal{M}}\sqrt{h}\phi(K-1)\right], \tag{2.9}$$

并且 S_0 是极值熵， χ 是（欧氏）时空$\mathcal{M}$的欧拉示性数， K 是边界 $\partial\mathcal{M}$的外在曲率。度规和动力学伸缩子的AdS边界条件为

$$ds^2|_{\partial\mathcal{M}} = \frac{du^2}{\epsilon^2}, \qquad \phi|_{\partial\mathcal{M}} = \phi_b = \frac{\phi_r}{\epsilon}, \tag{2.10}$$

其中 ϵ 是截断参数， u 是具有欧氏周期性 β的物理边界时间， ϕ_b 是边界膨胀子值， ϕ_r 是（常数）重整化膨胀子值。我们指出，为使JT引力中的描述有效，必须施加如下条件：拓扑伸缩子部分$I_{\text{Topo. 膨胀子}}$充分大于动力学伸缩子部分$I_{\text{Dyn. 膨胀子}}$,

$$\phi_0 \gg \phi_b. \tag{2.11}$$

除此之外，我们还有EoW 膜的作用量,

$$I_{\text{EoW}} = \mu\int_{\text{brane}} ds, \tag{2.12}$$

其中积分沿（欧氏）膜轨迹定义。膜位形的运动方程对EoW 膜施加边界条件,

$$\partial_n\phi|_{\text{brane}} = \mu, \quad K|_{\text{brane}} = 0, \tag{2.13}$$

其中 ∂_n 是 EoW 膜的向外法向导数。请注意，由于条件（2.11），在西海岸模型中，主要贡献来自作用量的拓扑部分 $I_{\text{Topo. 膨胀子}}$。

2.3 描述 code 激发的膜

我们还需要定义编码子空间，它由体有效量子场论希尔伯特空间中黑洞内部的激发组成。

这类激发由额外的体膜建模，我们将其称为带有几何味的编码布兰，其作用量为

$$I_{\text{code}} = m \int_{\text{brane}'} ds, \tag{2.14}$$

其中 m 是体激发的能标。在这一建模中，背景几何上的可能膜构型被解释为体激发的不同轨迹，而味被视为体激发的状态标签。

2.4 拓扑模型（西海岸模型）

由于完全动力学理论稍显复杂，我们考虑一个更简单的理论，在其中令$I_{\text{Dyn. 膨胀子}} = I_{\text{EoW}} = 0$，并保留拓扑部分的贡献。两类膜的贡献按照标准规则处理： [15], 也就是说，当我们将指标为 i和 j的两个膜位形连接起来时，将其与克罗内克$\delta\delta_{i\text{相关联，}j}$[2]。

2.5 codesubspace 的嵌入

在这个由引力作用量描述的系统中，我们考虑两个包含黑洞的引力宇宙 A 和 B 处于纠缠态的情形，其中一个——例如宇宙 B ——被视为收集霍金量子的引力浴系统。该系统在拓扑模型 [32]中处理。这与（2.2）中的情形一样，得到两个宇宙之间的（未归一化）纠缠态 [32],

$$\sum_{\alpha=1}^{k} |\psi^{\alpha}\rangle_A^* \, |\psi^{\alpha}\rangle_B \,, \tag{2.15}$$

其中， $|\psi^{\alpha}\rangle_A$ 和 $|\psi^{\alpha}\rangle_B$ 分别表示系统A和 B上处于状态 α 的、带有 EoW 膜的引力态。参数 k 表征两个系统之间的纠缠，并对宇宙 A 应用 CPT共轭，使几何可定向。为简单起见，我们考虑微正则系综，并假设系统 A 和 B 中的黑洞具有相同的黑洞熵 S_{BH}；在当前的简化情形下，该熵等于极值熵$S_{BH} = S_0$ 。我们还假设平面极限 k， $e^{S_{BH}} \gg 1$，以简化计算。

对于这个引力系统，我们考虑宇宙 A 中黑洞内部和外部的体半经典激发。它们在一个半经典

[2]我们禁止连接两种不同类型的膜。

鞍点几何 H_{code} 上构成一个体希尔伯特空间，而该希尔伯特空间由内部和外部两部分组成，即 $H_{code} = H_{code,\ in} \otimes H_{code,\ ext}$。令 $|i,\ i'\rangle_{\text{code}}(i = 1,\ \cdots,\ d_{in},\ i' = 1,\ \cdots,\ d_{ex})$ 表示一个正交归一编码态，其中内部和外部激发分别处于状态 i 和 i'。系统上的体物理激发可以通过将编码态嵌入纠缠态来引入，特别是宇宙 A。于是，系统状态可表示为

$$|\Psi_{i,i'}\rangle_{phys} = V\,|i,i'\rangle_{\text{code}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\alpha=1}^{k}|\psi^{\alpha}_{i,i'}\rangle^{*}_{A}\,|\psi^{\alpha}\rangle_{B}\,, \tag{2.16}$$

其中 V 是从编码希尔伯特空间 H_{code} 到物理希尔伯特空间的嵌入映射H_{phys}，而 N 是一个归一化因子，我们将在后文确定。我们需要澄清状态 $|\psi^{\alpha}_{i,\ i'}\rangle_{A}$ 在宇宙 A 中的确切含义：该宇宙具有处于状态 i 和 i' 的内部与外部编码激发。每个激发分别由两条带有味 i 和 i' 的编码布兰指定（图 1中的绿线和蓝线）。通过 AdS/CFT 对应，我们可以在欧几里得 AdS 边界上适当地插入合适的 CFT 缺陷，从而制备这些状态 $|\Psi_{i,\ i'}\rangle_{phys}$。这些 CFT 缺陷与带有味 i 和 i'、连接各缺陷的体膜对偶。

为获得一致的体激发，我们对 CFT 缺陷及其对偶膜作出两个假设。首先，我们假设味的数量（对应于内部与外部编码希尔伯特空间 $d_{in}d_{ex}$的维数）远小于黑洞熵的指数 $d_{in}d_{ex} \ll e^{S_{BH}}$，这是嵌入映射为等距映射的必要条件[3],；但该数量须大于 1，以简化维克演算；$1 \ll d_{in},\ d_{ex} \ll e^{S_{BH}}$。请注意，在当前情形下，黑洞熵 S_{BH} 由 S_0给出，定义见（2.8）。其次，假设与内部激发对应的体膜具有一种构型，该构型穿过对应于黑洞内部的区域，以描述内部激发[4]。这一条件意味着，稍后我们使用复制技巧计算熵时，所考虑的引力路径积分中的布兰构型必须穿过黑洞内部。计算熵时，这一说法的确切含义将变得清楚。

鉴于上述讨论，让我们确定状态的归一化因子 N （2.16）。我们首先计算物理态重叠的引力路径积分。在

[3]人们可以将我们的讨论推广到非等距情形 [21, 34]。[4]虽然还可能存在其他体内布兰构型，但它们并不对应于内部激发。此外，设置内部构型有多种不同的方案，最终结果取决于采用哪种方案。很容易验证，最终结果确实取决于所采用的方案。

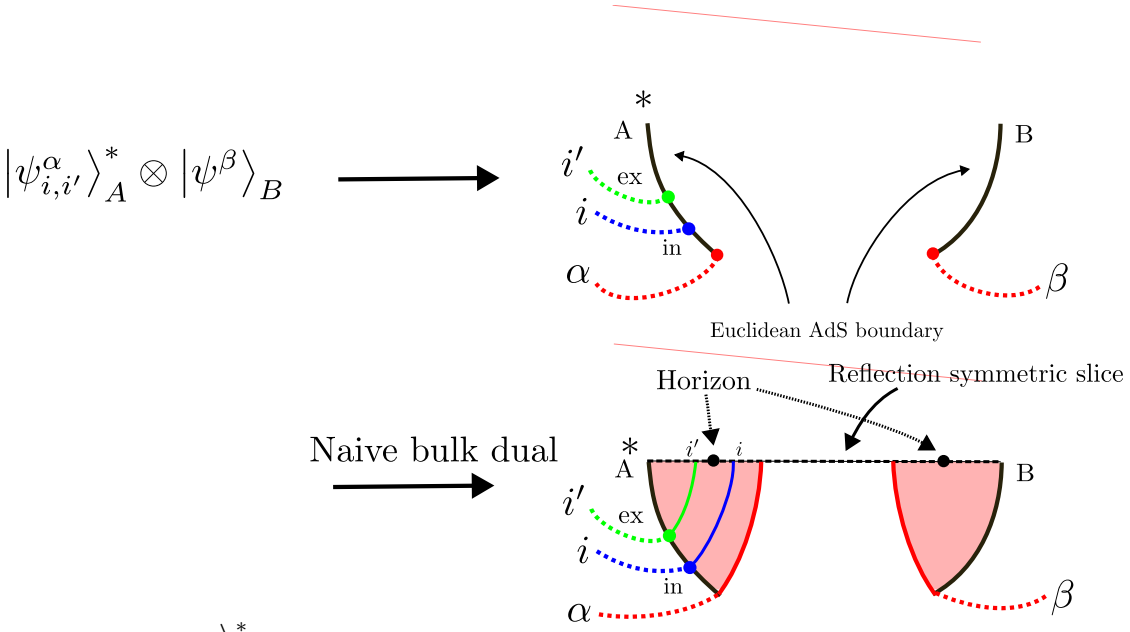
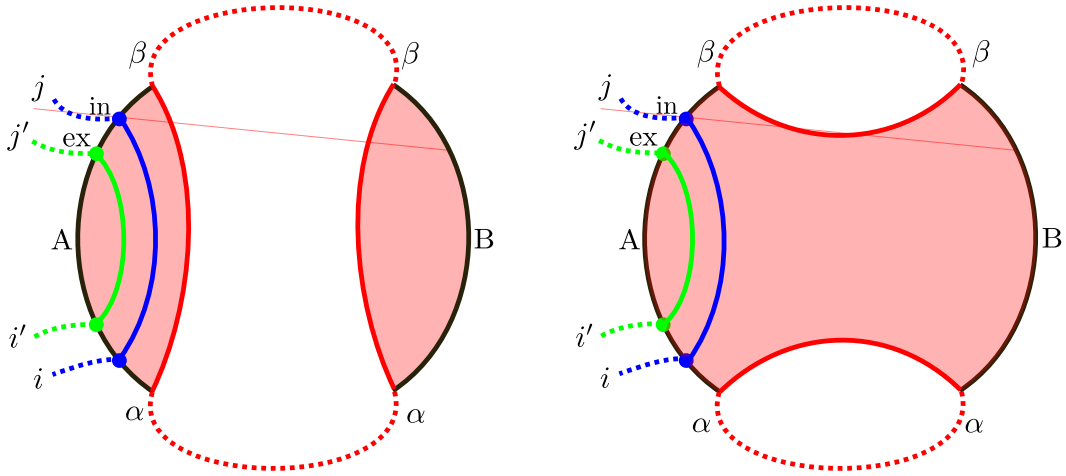


图 1：状态 $\left|\psi^{\alpha}_{i,\ i'}\right\rangle^{*}_{A} \otimes \left|\psi^{\beta}\right\rangle_{B}$ 及其朴素体对偶的示意图。红色实线表示 EoW 膜，绿色和蓝色实线表示分别对应外部和内部编码激发的体膜。红色、蓝色和绿色虚线分别表示 EoW 膜、内部编码激发和外部编码激发的态标签。星号 $*$ 表示作用于宇宙 A 的 CPT共轭，以保持整个系统 AB的方向。我们将其称为朴素体对偶，因为还存在另一种体几何的可能性，其中两张膜是连通的。

拓扑模型中，我们有

$$\begin{aligned}\overline{\langle\Psi_{i,i'}|\Psi_{j,j'}\rangle} &= \frac{1}{N}\sum_{\alpha,\beta=1}^{k}\overline{\langle\psi^{\beta}_{j,j'}|\psi^{\alpha}_{i,i'}\rangle_{A}\langle\psi^{\alpha}|\psi^{\beta}\rangle_{B}} \\ &= \frac{1}{N}\delta_{ij}\delta_{i'j'}\left[k\,e^{2S_0}+k^2\,e^{S_0}\right],\end{aligned} \tag{2.17}$$

其中，上划线表示我们通过适当的引力路径积分来计算该量。式（2.17）第二行的第一项来自不连通霍金鞍点（图2a），其中两个宇宙 A 和 B 彼此不连通；第二项则来自连通鞍点（图2b），其中两个宇宙 A 和 B 由一条



(a) 完全不连通鞍点　　(b) 全连接鞍点

图 2：计算用于求得归一化因子的重叠时出现的引力鞍点 N （见2.17）。红色实线表示黑洞微观态对应的 EoW 膜，绿色和蓝色实线则表示体区编码膜。在拓扑模型中，这些实线会在其端点所关联的指标之间施加克罗内克 δ 函数。例如，左图中的两条红色实线施加 $\delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta}$ ，右图中则施加 $\delta_{\alpha\alpha}\delta_{\beta\beta}$ 。连接实线端点的虚线表示相应的指标被识别并缩并。在这些图示中，左图中的红线构成一个圈，右图中构成两个圈，因此在重叠的引力路径积分中分别贡献因子 k和 k^2。此外，黑色和红色实线围成的粉色区域数量给出了各引力鞍点的欧拉示性数：左图为 2，右图为 1。因此，在重叠的引力路径积分中，左图和右图分别贡献因子e^{2S_0} 和 e^{S_0} 。为简化记号，下文将省略指标的显式写法。

虫洞[5]。因此，归一化因子为

$$\begin{aligned} N &= (k\, d_{BH})^2 \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{d_{BH}}\right] \\ &= (k\, d_{BH})^2\ \gamma^2, \end{aligned} \tag{2.18}$$

其中 $d_{BH} = e^{S_0} = e^{S_{BH}}$，并且我们定义了

$$\gamma^2 = \frac{1}{k} + \frac{1}{d_{BH}}. \tag{2.19}$$

注意，归一化因子 N的阶为 $\max\{k^a (d_{BH})^b | a+b=3,\ \ a,\ \ b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$。

[5]我们注意到，这并不是复制虫洞，因为它连接的是单个副本中的两个不同宇宙，而不是两个不同的副本。

稍后，我们将使用主导鞍点近似来计算纠缠熵。在此近似中，归一化因子取决于 k的值，其表达式为

$$N \approx \begin{cases} k\,(d_{BH})^2 & \text{for } k < d_{BH} \\ k^2\, d_{BH} & \text{for } d_{BH} < k. \end{cases} \tag{2.20}$$

2.6 引力浴上的误差

在上述设定下，我们关注一个完全正迹保持误差 $\mathcal{E}$，其 Kraus表示为 $\{E_m\}_{m=1}^{d_E}$，该误差是完全正（CP）且迹保持（TP）的，它作用于物理态（2.16），尤其是引力浴 B，

$$\sum_{m=1}^{d_E} E_m \left|\Psi_{i,i'}\right\rangle_{phys} \otimes \left|e_m\right\rangle_E = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{m=1}^{d_E} \left|\psi^{\alpha}_{i,i'}\right\rangle^*_A E_m \left|\psi^{\alpha}\right\rangle_B \otimes \left|e_m\right\rangle_E, \tag{2.21}$$

其中， E 表示实现该误差的环境系统，而 $|e_m\rangle_E$ 是环境系统中的一个正交归一态。为简单起见，这里假设环境系统不受引力作用。我们注意到，误差的迹保持性意味着以下关系，

$$\sum_{m=1}^{d_E} E_m^{\dagger} E_m = I_{BH_B}. \tag{2.22}$$

这里，最好澄清一下误差作用于引力浴系统 B （含黑洞）的含义。在上述状态中，Kraus 算符作用于系统B，这意味着 Kraus 算符作用于位于系统 B 中的黑洞；该系统代表储存霍金辐射的引力浴。因此，误差作用于由宇宙 B 中的黑洞微观态张成的希尔伯特空间，其维数为 d_{BH}。

2.7 解耦条件

为了研究引力浴中的误差 $\mathcal{E}$ B 是否会给 A上的半经典态带来严重问题，我们考察解耦条件。如果该条件成立，我们就可以通过对浴 B施加适当的恢复操作来“抵消”误差的影响。

为此，我们为内部与外部编码子

空间，并考虑如下状态

$$
\begin{aligned}
|\Psi'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N_{\Psi'}}} \sum_{i=1}^{d_{in}} \sum_{i'=1}^{d_{ex}} \sum_{m=1}^{d_E} |i\rangle_{ref(in)} \otimes |i'\rangle_{ref(ex)} \otimes E_m |\Psi_{i,i'}\rangle_{phys} \otimes |e_m\rangle_E \\
&= \frac{1}{\sqrt{N\, N_{\Psi'}}} \sum_{i=1}^{d_{in}} \sum_{i'=1}^{d_{ex}} \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{m=1}^{d_E} |i\rangle_{ref(in)} \otimes |i'\rangle_{ref(ex)} \otimes |\psi^{\alpha}_{i,i'}\rangle^*_A \otimes (E_m |\psi^{\alpha}\rangle_B) \otimes |e_m\rangle_E ,
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

其中 $N_{\Psi'}$ 是该状态的归一化因子。注意到重叠（2.17），我们可以利用引力路径积分计算该状态的范数,

$$
\begin{aligned}
\overline{\langle\Psi'|\Psi'\rangle} &= \frac{1}{N N_{\Psi'}} \sum_{i=1}^{d_{in}} \sum_{i'=1}^{d_{ex}} \sum_{m=1}^{d_E} \overline{\langle\Psi_{i,i'}| E_m^\dagger E_m |\Psi_{i,i'}\rangle}_{phys} \\
&= \frac{1}{N N_{\Psi'}} \sum_{i=1}^{d_{in}} \sum_{i'=1}^{d_{ex}} \overline{\langle\Psi_{i,i'}|\Psi_{i,i'}\rangle}_{phys} \\
&= \frac{1}{N_{\Psi'}} \sum_{i=1}^{d_{in}} \sum_{i'=1}^{d_{ex}} \delta_{ij}\delta_{i'j'} \\
&= \frac{d_{in} d_{ex}}{N_{\Psi'}},
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

其中，在第二行中，我们使用了 Kraus 算子的保迹性质，(2.22)。因此，归一化因子为

$$
N_{\Psi'} = d_{in} d_{ex}. \tag{2.25}
$$

利用上述状态，解耦条件可表示为(2.4) [6]。这个解耦条件描述的是内部参考系统 $ref(in)$与子系统$ref(ex) \cup E$之间的解耦，其中子系统充当内部参考系统的误差。对于解耦条件中的子系统选择，也可以考虑其他可能性，但出于本文的目的，我们聚焦于上述解耦条件(2.4)。

接下来，我们通过计算以下 Rényi-二阶互信息来研究解耦条件，(2.6)。在这种情况下，我们需要考虑引力路径

[6]用 Kraus 算子的语言来说，已知解耦条件(2.4)等价于 Knill-Laflamme 条件,

$$
P_{code} E_m^\dagger E_n P_{code} = \lambda_{mn} P_{code} \qquad m, n = 1, \cdots, d_E, \tag{2.26}
$$

其中 $\lambda_{mn} = \lambda_{nm}^* \in \mathbb{C}$，而 P_{code} 是投影到物理希尔伯特空间中某个编码子空间的投影算子。因此，可以通过考察 Knill-Laflamme 条件来研究误差 $\mathcal{E}$ 的可纠正性。

以下量的积分

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left(\rho'_{ref(in)}\right)^2 &= \frac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{d_{in}}\sum_{\boldsymbol{i'}=1}^{d_{ex}}\langle\Psi_{i_2,i'_1}|\Psi_{i_1,i'_1}\rangle\langle\Psi_{i_1,i'_2}|\Psi_{i_2,i'_2}\rangle \\ &= \frac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{d_{in}}\sum_{\boldsymbol{i'}=1}^{d_{ex}}\sum_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}=1}^{k}\langle\psi^{\beta_1}_{i_1,i'_1}|\psi^{\alpha_1}_{i_2,i'_1}\rangle_A\langle\psi^{\beta_2}_{i_2,i'_2}|\psi^{\alpha_2}_{i_1,i'_2}\rangle_A\langle\psi^{\alpha_1}|\psi^{\beta_1}\rangle_B\langle\psi^{\alpha_2}|\psi^{\beta_2}\rangle_B,\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)^2 &= \frac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{d_{in}}\sum_{\boldsymbol{i'}=1}^{d_{ex}}\sum_{\boldsymbol{m}=1}^{d_E}\langle\Psi_{i_2,i'_2}|E^\dagger_{m_2}E_{m_1}|\Psi_{i_1,i'_1}\rangle\langle\Psi_{i_1,i'_1}|E^\dagger_{m_1}E_{m_2}|\Psi_{i_2,i'_2}\rangle \\ &= \frac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{d_{in}}\sum_{\boldsymbol{i'}=1}^{d_{ex}}\sum_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}=1}^{k}\sum_{\boldsymbol{m}=1}^{d_E}\langle\psi^{\beta_1}_{i_1,i'_1}|\psi^{\alpha_1}_{i_2,i'_2}\rangle_A\langle\psi^{\beta_2}_{i_2,i'_2}|\psi^{\alpha_2}_{i_1,i'_1}\rangle_A \\ &\qquad\times\langle\psi^{\alpha_1}|E^\dagger_{m_2}E_{m_1}|\psi^{\beta_1}\rangle_B\langle\psi^{\alpha_2}|E^\dagger_{m_1}E_{m_2}|\psi^{\beta_2}\rangle_B,\end{aligned} \tag{2.28}$$

and

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left(\rho'_{ref(ex),E}\right)^2 &= \frac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{d_{in}}\sum_{\boldsymbol{i'}=1}^{d_{ex}}\sum_{\boldsymbol{m}=1}^{d_E}\langle\Psi_{i_1,i'_2}|E^\dagger_{m_2}E_{m_1}|\Psi_{i_1,i'_1}\rangle\langle\Psi_{i_2,i'_1}|E^\dagger_{m_1}E_{m_2}|\Psi_{i_2,i'_2}\rangle \\ &= \frac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{d_{in}}\sum_{\boldsymbol{i'}=1}^{d_{ex}}\sum_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}=1}^{k}\sum_{\boldsymbol{m}=1}^{d_E}\langle\psi^{\beta_1}_{i_1,i'_1}|\psi^{\alpha_1}_{i_1,i'_2}\rangle_A\langle\psi^{\beta_2}_{i_2,i'_2}|\psi^{\alpha_2}_{i_2,i'_1}\rangle_A \\ &\qquad\times\langle\psi^{\alpha_1}|E^\dagger_{m_2}E_{m_1}|\psi^{\beta_1}\rangle_B\langle\psi^{\alpha_2}|E^\dagger_{m_1}E_{m_2}|\psi^{\beta_2}\rangle_B,\end{aligned} \tag{2.29}$$

粗体字母 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{i'}$、$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{m}$ 表示对指标集合求和，例如 $\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{d_{in}}=\sum_{i_1、i_2=1}^{d_{in}}$。这些量指定了引力路径积分的边界条件（有关这些边界条件的图示表示，请参见图 3和4 ），我们可以通过以类似西海岸模型的方式计算其引力路径积分，来求出它们的 R´ényi 二几何，不过需要进行修改，以处理包含 Kraus 算子的引力重叠。在附录A.1中，我们说明了计算这些量的具体规则。下面给出这类重叠的引力路径积分的一些示例：

$$\overline{\langle\psi^\alpha|E^\dagger_m E_n|\psi^\beta\rangle_B}=\delta_{\alpha\beta}\cdot\mathrm{tr}\left[E^\dagger_m E_n\right], \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}&\overline{\langle\psi^{\alpha_1}|E^\dagger_{m_1}E_{n_1}|\psi^{\beta_1}\rangle_B\langle\psi^{\alpha_2}|E^\dagger_{m_2}E_{n_2}|\psi^{\beta_2}\rangle_B} \\ &\quad=\delta_{\alpha_1\beta_1}\cdot\delta_{\alpha_2\beta_2}\cdot\mathrm{tr}\left[E^\dagger_{m_1}E_{n_1}\right]\cdot\mathrm{tr}\left[E^\dagger_{m_2}E_{n_2}\right]+\delta_{\alpha_1\beta_2}\cdot\delta_{\alpha_2\beta_1}\cdot\mathrm{tr}\left[E^\dagger_{m_1}E_{n_1}E^\dagger_{m_2}E_{n_2}\right],\end{aligned} \tag{2.31}$$

$$
\begin{aligned}
&\overline{\langle\psi^{\alpha_1}_{i,i'}|\psi^{\beta_1}_{j,j'}\rangle_A \langle\psi^{\alpha_2}|E_m^\dagger E_n|\psi^{\beta_2}\rangle_B} \\
&= \delta_{ij}\delta_{i'j'}\cdot\delta_{\alpha_1\beta_1}\delta_{\alpha_2\beta_2}\cdot d_{BH}\cdot \mathrm{tr}\left[E_m^\dagger E_n\right] + \delta_{ij}\delta_{i'j'}\cdot\delta_{\alpha_1\beta_2}\delta_{\alpha_2\beta_1}\cdot \mathrm{tr}\left[E_m^\dagger E_n\right] \\
&= \left[\delta_{ij}\delta_{i'j'}\cdot\delta_{\alpha_1\beta_1}\delta_{\alpha_2\beta_2}\cdot (d_{BH})^2 + \delta_{ij}\delta_{i'j'}\cdot\delta_{\alpha_1\beta_2}\delta_{\alpha_2\beta_1}\cdot d_{BH}\right]\cdot\frac{1}{d_{BH}}\,\mathrm{tr}\left[E_m^\dagger E_n\right] \\
&= \overline{\langle\psi^{\alpha_1}_{i,i'}|\psi^{\beta_1}_{j,j'}\rangle_A \langle\psi^{\alpha_2}|\psi^{\beta_2}\rangle_B}\cdot\frac{1}{d_{BH}}\,\mathrm{tr}\left[E_m^\dagger E_n\right]
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

其中，Kraus 算子的迹定义在由黑洞微观态张成的希尔伯特空间上[7]。

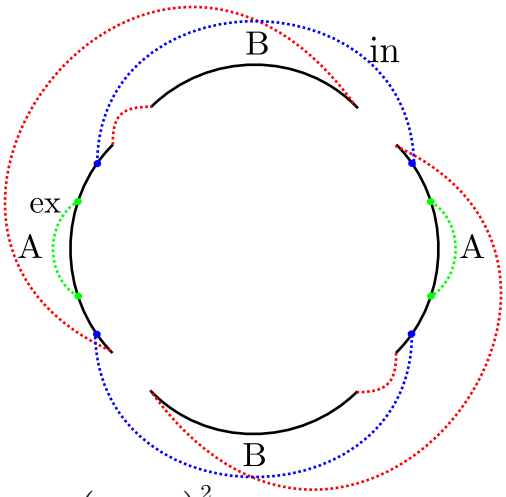


图 3：tr 的边界条件的图示表示 $\left(\rho'_{ref(in)}\right)^2$，（2.27）。

2.8 拓扑模型中的 Rényi 二阶熵与互信息 el

我们可以通过满足适当边界条件的引力路径积分，明确计算重叠的乘积（2.27）、（2.28）和（2.29），但即使在拓扑模型中，它们的完整表达式也没有简单的形式。因此，我们采用主导鞍点近似来简化这些表达式。我们注意到，在主导鞍点

[7]对于熟悉 Knill-Laflamme 条件的读者 [35], 我们对这些重叠的引力路径积分与 Knill-Laflamme 条件（2.26）之间的关系作一些说明。正如脚注 6中所述，我们也可以研究 Knill-Laflamme 条件，而不是解耦条件。在这种情况下，我们可以考察以下等式是否成立:

$$
\langle\Psi_i|\, E_m^\dagger E_n\,|\Psi_j\rangle \stackrel{?}{=} \lambda_{mn}\delta_{ij}, \qquad \text{for } \forall i,j,\ \forall m,n, \tag{2.33}
$$

其中 $\lambda_{mn}=\lambda^*_{nm}$ 是一个常数。为检验该等式，由于背景几何存在较大涨落，我们需要计算上述量及其方差的引力路径积分。我们可以计算此类引力路径积分，但在本文中，我们仅关注R´enyi二阶互信息（2.6）。

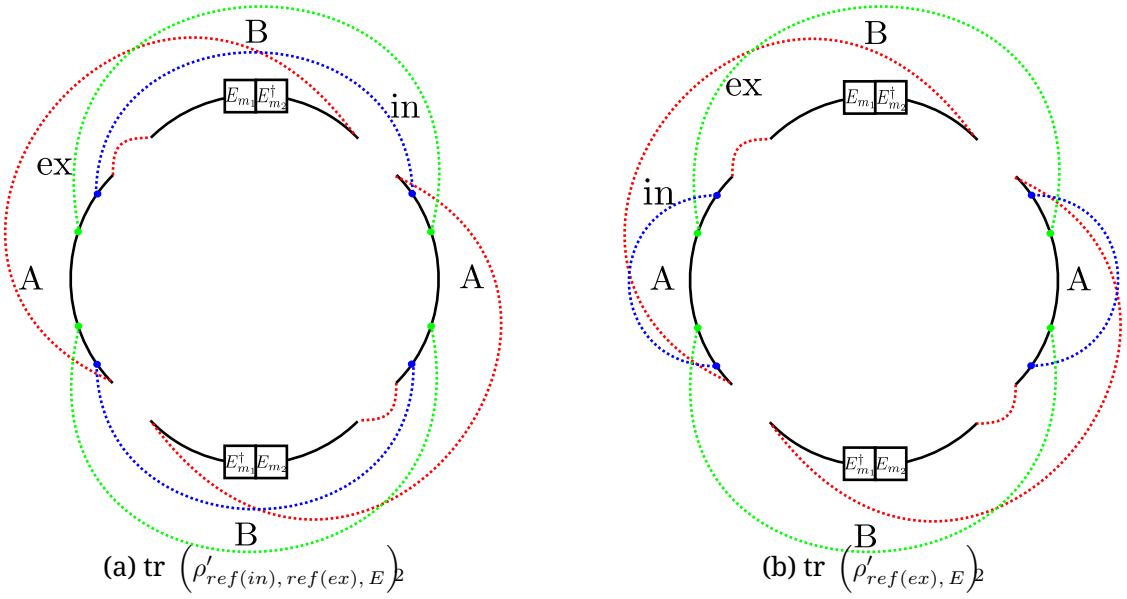


图4：边界条件（2.28）和（2.29）的图示表示，其中包含 Kraus 算子。两者之间唯一的区别在于（a）和（b）中虚线蓝线（内部码子空间的指标）的收缩方式。

发生切换时，候选鞍点的贡献几乎相等，从而使主导鞍点近似的准确性降低。然而，采用主导鞍点近似所得结果的定性行为，仍与对所有鞍点求和所得结果相似。此外，对所有鞍点求和得到的结果可以理解为对主导鞍点近似结果的平滑化版本。还需注意，在下文给出R´enyi二阶熵的结果时，我们使用 $\approx$，它表示基于主导鞍点近似的近似相等。另外请记住，随着相关不等式两边之差增大，这些结果会渐近地变得准确。

在附录 A 中，我们给出了计算 R´ényi-二阶熵（2.27）、（2.29）和（2.28）的详细过程。在本小节中，我们展示引力路径积分后所得的 R´ényi-二阶熵结果，并计算 R´ényi-二阶互信息。

2.8.1 拓扑模型中的 R´ényi-二阶熵

首先，我们给出通过拓扑模型中的引力路径积分计算式（´A.13）、（A.35）和（A.36）右侧所得的 Rényi 二阶熵。

随着我们改变两个参数 k和 $I_c^{(2)}\left(\frac{I_{BH}}{d_{BH}},\mathcal{E}\right)$，每种熵对应的主导鞍点都会发生变化。$k$ 出现在物理态（2.16）中，用以刻画 A 与 B 之间的纠缠。

$I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}}I_{BH},\mathcal{E}\right)$ 是 Rényi-二相干信息[8]

$$I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}}I_{BH},\mathcal{E}\right)=S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}})-S^{(2)}(\sigma_E). \tag{2.34}$$

其中 $\sigma_E,\sigma_{\text{Bath}}$ 定义为

$$\sigma_E=\sum_{m,n=1}^{d_E}\frac{\text{tr}_{BH}\left\{E_mE_n^\dagger\right\}}{d_{BH}}\left|e_m\right\rangle_E\left\langle e_n\right|, \tag{2.35}$$

$$\sigma_{\text{Bath}}=\sum_{m=1}^{d_E}E_m\left(\frac{I_{BH}}{d_{BH}}\right)E_m^\dagger. \tag{2.36}$$

直观而言，密度矩阵 $\sigma_E,\sigma_{\text{Bath}}$ 分别对应于环境 E 和引力浴 B的粗粒化密度矩阵[9]。

粗略地说，相干信息量化了作用于辐射自由度上的误差大小。我们将在后文阐释这一量的量子信息论性质。

我们分别给出早期和晚期的结果，并附上主导鞍点的示意图。

早期时间 $k<d_{BH}$ 对于早期时间，R´enyi 二阶熵为

$$\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in)}\right)}\approx\log d_{in}\quad(\text{figure }5a), \tag{2.37}$$

$$\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)}$$

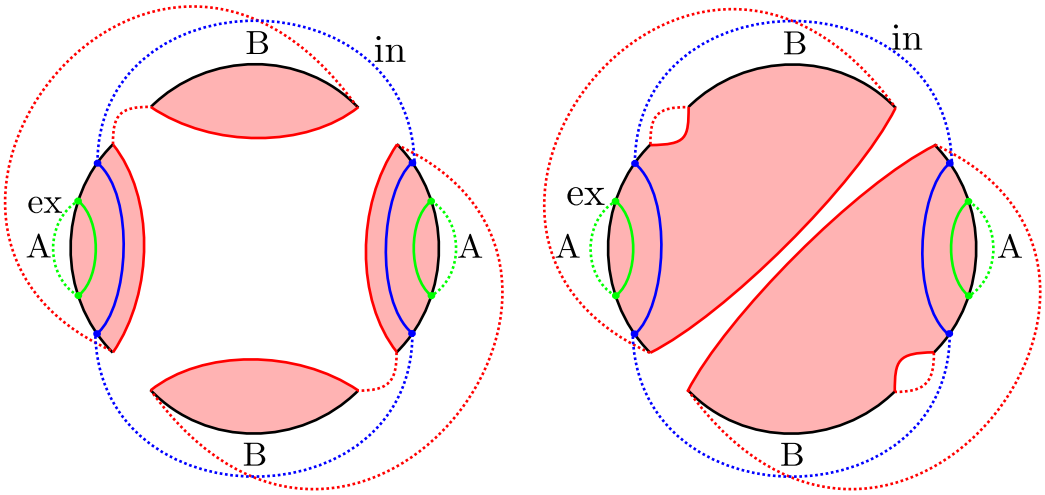
$$\approx\begin{cases}\log d_{in}+\log d_{ex}+S^{(2)}(\sigma_E) & \text{for }\ -\log k<I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}}I_{BH},\mathcal{E}\right)\quad(\text{figure }6a),\\ \log d_{in}+\log d_{ex}+\log k+S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) & \text{for }\ -\log d_{BH}\le I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}}I_{BH},\mathcal{E}\right)<-\log k\quad(\text{figure }6c),\end{cases} \tag{2.38}$$

[8]相干信息的出现与非引力浴情形 [21], 类似；在该情形下，相干信息是以霍金辐射的最大混合态作为输入态来定义的。[9]这些粗粒化密度矩阵的出现也发生在非引力情形 [21]。

and

$$\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(ex),E}\right)}$$

$$\approx \begin{cases} \log d_{ex} + S^{(2)}(\sigma_E) & \text{for } -\log k < I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right) \quad \text{(figure 6}a\text{)}, \\ \log d_{ex} + \log k + S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) & \text{for } -\log d_{BH} \le I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right) < -\log k \quad \text{(figure 6}c\text{)}. \end{cases} \tag{2.39}$$



(a) 完全不连通鞍点　　(b) 双虫洞鞍点

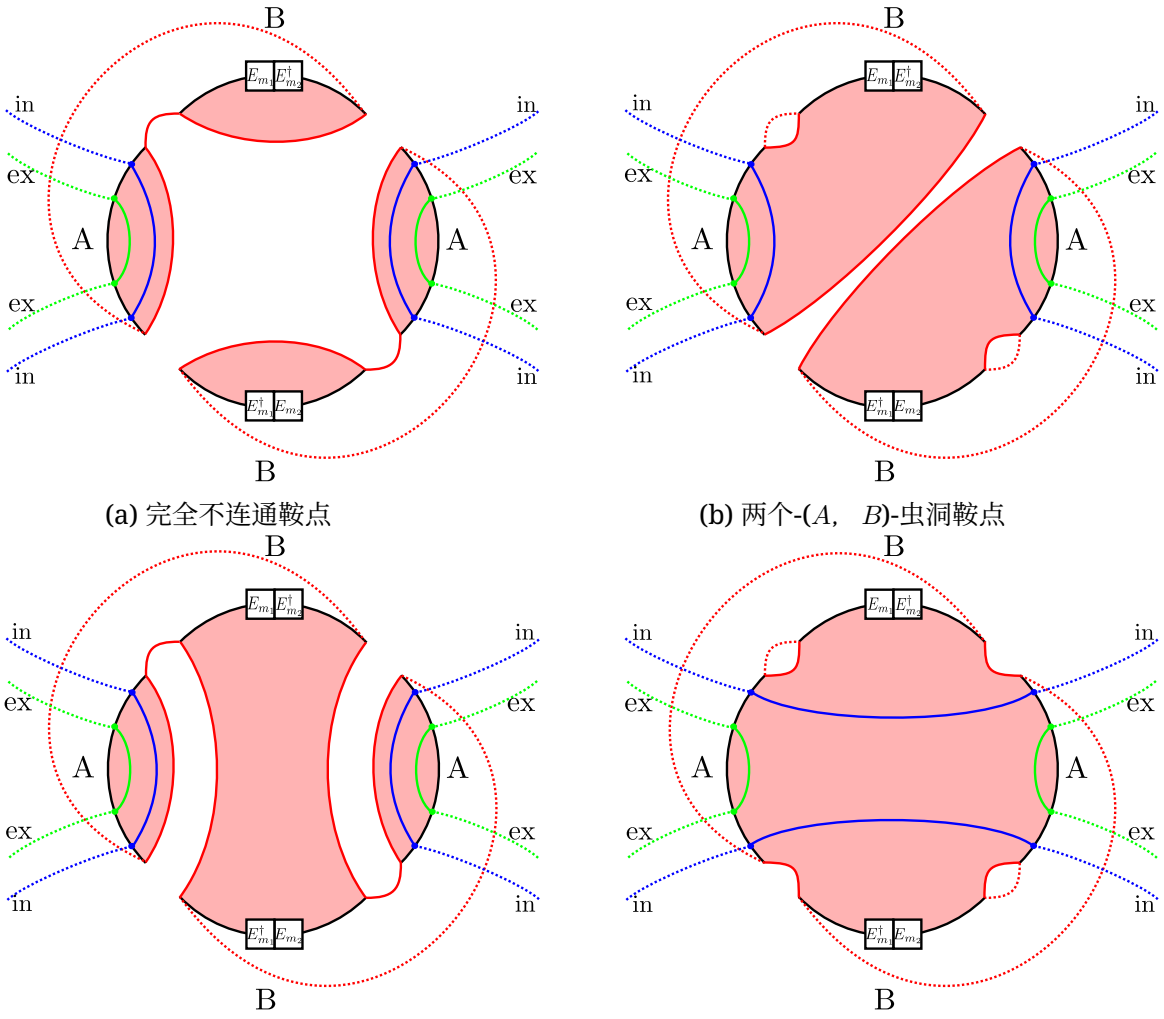
图5：R´enyi 二阶熵的主导鞍点，$S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in)}\right)$。在早期时间，完全不连通鞍点占主导；但随着 A 和 B 之间的纠缠增加，并且当 $k > d_{BH}$，连接 A 和 B 的虫洞便会出现。

晚期 $d_{BH} < k$ 接下来，对于晚期，其 R´enyi 二阶熵为

$$\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in)}\right)} \approx \log d_{in} \quad \text{(figure 5}b\text{)}, \tag{2.40}$$

$$\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)}$$

$$\approx \begin{cases} \log d_{in} + \log d_{ex} + S^{(2)}(\sigma_E) \\ \qquad \text{for } \max\{-\log k + \log d_{in}, -\log d_{BH}\} < I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right) \quad \text{(figure 6}b\text{)}, \\ \log d_{ex} + \log k + S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) \\ \qquad \text{for } -\log d_{BH} \le I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right) < \max\{-\log k + \log d_{in}, -\log d_{BH}\} \quad \text{(图 6}d\text{)}, \end{cases} \tag{2.41}$$



(a) 完全不连通鞍点　(b) 两个-(A, B)-虫洞鞍点

(c) 一个-(B, B)-副本虫洞鞍点　(d) 全连接鞍点

图6：早期和晚期的 R´ényi 二阶熵，$S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)$ 和$S^{(2)}\left(\rho'_{ref(ex),E}\right)$。在这些图示中，我们需要正确缩并蓝色和绿色虚线，它们分别对应内部和外部激发的味指标，并确保所得缩并符合图4a 和4b中的边界条件。然后，所得图示表示用于计算 R´ényi 二阶熵的鞍点。

and

$$\begin{aligned}&\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(ex),E}\right)}\\&\approx \log d_{ex} + S^{(2)}(\sigma_E) \quad \text{for} \quad -\log d_{BH} \le I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right) \quad \text{(figure 6}b\text{)}.\end{aligned} \tag{2.42}$$

利用并插值上述结果，我们可以画出上述 R´ényi 二熵在 log k和 $I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right)$ 平面上的主导鞍点相图[10]。相图如图7所示。我们还在图C所讨论的 Haar随机误差情形也展示在图7中。由于 R´ényi 二熵 $S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in)}\right)$ 不依赖于 $I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right)$，因此我们不展示该图。

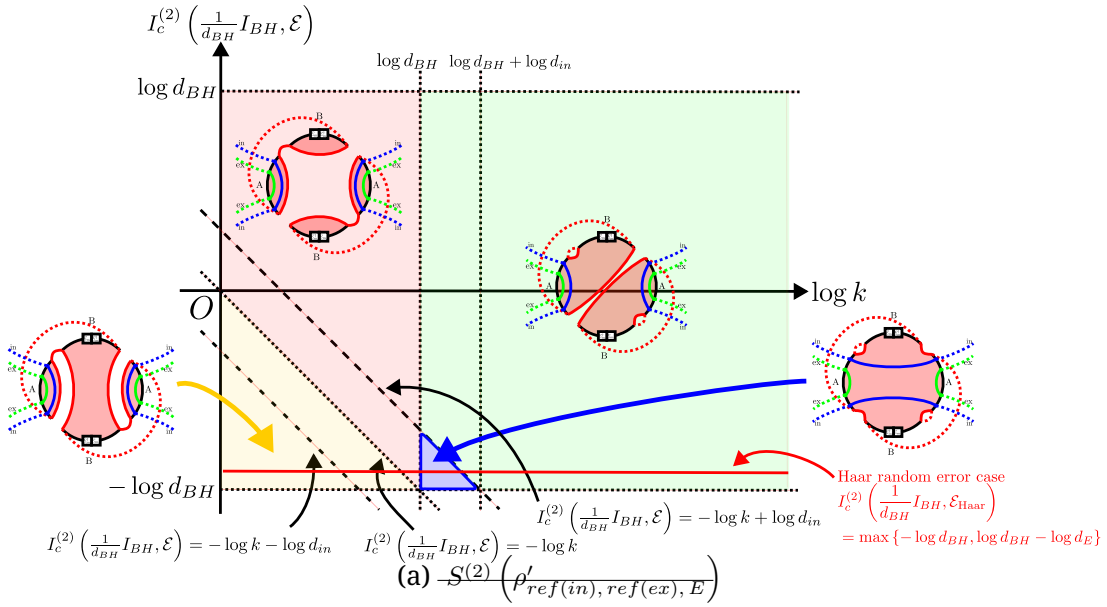
我们来总结这些 R´ényi 二熵 $S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in),ref}(ex)\ E\right)$ 和$S^{(2)}\left(\rho'_{ref(ex),E}\right)$ 的行为。如图7 所示，在 Page 时间 $k < d_{BH}$之前，主导鞍点有两个候选项（完全不连通鞍点 (a) 和图 6 中的 (B, B)-复制虫洞 (c)）。在这一范围内，宇宙 A 和宇宙 B 之间的纠缠不足以形成连接它们的虫洞。然而，当相干信息足够负时，也就是说，误差的影响足够大时，不同副本中的宇宙B之间就会形成虫洞。这是环境系统的大量纠缠所诱发的 ER=EPR [36]的一种实现，$S^{(2)}(\sigma_E) \lesssim \log\ k + S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}})$。在这种情况下，我们注意到，宇宙 A（即黑洞）与宇宙 B（即霍金辐射）之间的纠缠，小于环境 E 与宇宙 B之间的纠缠。

在 Page 时间 $d_{BH} < k$之后，上述情况发生了变化。为说明这一点，我们注意到，误差 $\mathcal{E}$ 作用于宇宙 B中黑洞的希尔伯特空间。这意味着误差的影响不可能无限大，而是受到宇宙 B中黑洞维数的限制。例如，相干信息 $I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right)$ 满足不等式（2.47）。因此，在 Page 时间 $d_{BH} < k$之后，宇宙 A 与 B 之间纠缠的影响，比环境系统 E 与宇宙 B之间纠缠的影响更为显著。在 Page 时间附近，这两种影响彼此相当。因此，在 Page 时间之后足够远处，连接每个副本中宇宙A 和 B 的二-(A, B)-虫洞鞍点占主导；而在 Page 时间附近，全连通虫洞鞍点可以在 $S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in),ref}{}^{(ex)}\ E\right)$中占主导。

2.9 相干信息的性质

现在简要说明相干信息 [25, 37] 的性质。一般而言，相干信息 $I_c(\tau_B,\ \mathcal{N})$，($\tau_B$：量子态，$\mathcal{N}$：具有 Kraus

[10]在主导鞍点发生变化的相界附近，其他未出现在上述结果中的部分连接鞍点，可能与上述结果中出现的鞍点具有相当的贡献。因此，严格来说，我们应考虑这些部分连接鞍点；不过，这里我们简单地忽略它们的贡献，并根据渐近结果绘制相图。



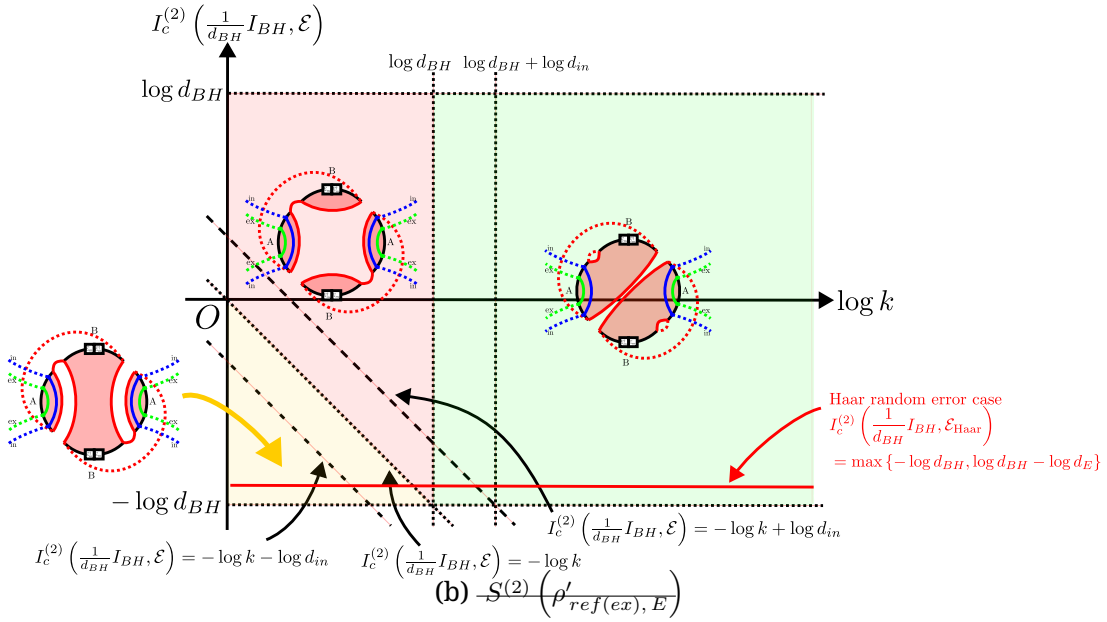


图 7：R 的主导鞍点相图：二阶 Rényi 熵，$S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex)\ E}\right)$ 以及 $S^{(2)}\left(\rho'_{ref(ex),E}\right)$ 在 $\log k$- $I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}}I_{BH},\mathcal{E}\right)$ 平面上。红色实线对应 Haar随机误差的 R二阶 Rényi 相干信息（2.34）。在计算 Haar随机误差的 R 二阶 Rényi 相干信息时，我们假设 $\log d_E \geq 2\log d_{BH}-\log d_{in}$，在这种情况下 $I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}}I_{BH},\mathcal{E}\right)=\log d_{BH}-\log d_E \leq \log d_{BH}+\log d_{in}$。

表示 $\{K_m\}$)，定义为

$$I_c(\tau_B, \mathcal{N}) = S(\mathcal{N}(\tau_B)) - S(\mathcal{N}, \tau_B), \tag{2.43}$$

其中，第二项 $S(\mathcal{N},\ \tau_B)$ 称为熵交换，其值由状态 $\mathcal{N}^c(\tau_B)$ 的 von Neumann熵给出，定义为[11]

$$\mathcal{N}^c(\tau_B) = \sum_{m,n} |e_m\rangle_E \langle e_n| \cdot \mathrm{tr}_B \left[K_m \tau_B K_n^\dagger\right]. \tag{2.46}$$

这里，$|e_m\rangle_E$ 是该量子信道环境系统中的一组标准正交基。一般而言，相干信息可以为正，也可以为负；它小于输入态的 von Neumann熵 $S(\tau_B)$ [25, 37], ，且大于熵交换的相反数。相干信息量化了输入态 τ_B 的信息在量子信道 $\mathcal{N}$作用下得到保留的程度。在附录E中，我们将进一步介绍相干信息。

在我们的情形中，采用相干信息的 R´ényi 二阶版本（2.34）。这个 R´ényi 二阶相干信息满足以下条件，

$$\max\{-\log d_{BH}, -\log d_E\} \le I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right) \le \log d_{BH}, \tag{2.47}$$

其中，上界来自平凡情形，即 $\mathcal{E}(\tau) = \tau$；下界则来自弱次可加性，$-\log\ d_{BH} \le S^{(2)}(\sigma_{\mathrm{Bath}}) - S^{(2)}(\sigma_E)$ 、（A.34）以及不等式 $S^{(2)}(\sigma_E) \le \log d_E$，$0 \le S^{(2)}(\sigma_{\mathrm{Bath}})$。在附录 D 中，我们将推导由弱次可加性得到的下界。

2.9.1 R´ényi 二阶互信息

综合以上结果，我们现在要在主导鞍点近似下计算 R´ényi 二阶互信息（2.6）。计算细节同样在附录 A 中讨论。R´ényi 二阶互信息

[11]量子信道 $\mathcal{N}^c$ 称为量子信道 $\mathcal{N}$的互补信道。我们可以如下理解互补信道：首先，通过引入一个合适的环境系统 E 及其初始状态 $|e_0\rangle_E$，以及一个合适的酉算符 $U_{B,\ E}$，来考虑量子信道$\mathcal{N}$ 的 Stinespring表示，使得

$$\mathcal{N}(\tau_B) = \mathrm{tr}_E \left[U_{B,E} \left(\tau_B \otimes |e_0\rangle \langle e_0|\right) U_{B,E}^\dagger\right]. \tag{2.44}$$

于是，互补信道为

$$\mathcal{N}^c(\tau_B) = \mathrm{tr}_B \left[U_{B,E} \left(\tau_B \otimes |e_0\rangle \langle e_0|\right) U_{B,E}^\dagger\right]. \tag{2.45}$$

可由（A.37）求得。我们绘制了它对两个参数 k和 $I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}}I_{BH},\mathcal{E}\right)$的依赖关系，见图 8。

根据 k的取值，将结果分为三种情况来说明会很有帮助。

早期时间 $k < d_{BH}$ 我们先来看早期时间，此时 R´enyi 二阶熵由（2.37）、（2.38）和（2.39）给出。在这些早期时间里，无论 R´enyi 二阶相干信息 $I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}}I_{BH},\mathcal{E}\right)$取何值，R´enyi 二阶互信息都为零，

$$\overline{I^{(2)}_{|\Psi'\rangle}(ref(in)\,;\,ref(ex)\cup E)} \approx 0. \tag{2.48}$$

这里需要指出，我们通过主导鞍点近似得到了 R´enyi 二阶互信息为零的结果。当然，如果计入次主导鞍点贡献，R´enyi 二阶互信息会取一个很小但非零的值。

在 Page 时间附近 $d_{BH} < k < d_{BH}\, d_{in}$ 刚过 Page 时间后，R´enyi 互信息才可能非零。结合 R´enyi 二阶熵（2.40）、（2.41）和（2.42）的结果，R´enyi 互信息为

$$\begin{aligned}
&\overline{I^{(2)}_{|\Psi'\rangle}(ref(in)\,;\,ref(ex)\cup E)} \\
&\approx \begin{cases} 0 \qquad \text{for} \;\; -\log k + \log d_{in} < I_c^{(2)}\left(\dfrac{1}{d_{BH}}I_{BH},\mathcal{E}\right) \\ (-\log k + \log d_{in}) - I_c^{(2)}\left(\dfrac{1}{d_{BH}}I_{BH},\mathcal{E}\right) \\ \qquad\qquad \text{for} \;\; -\log d_{BH} \le I_c^{(2)}\left(\dfrac{1}{d_{BH}}I_{BH},\mathcal{E}\right) < -\log k + \log d_{in}. \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.49}$$

在对数 k- $I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}}I_{BH},\mathcal{E}\right)$ 平面上，R´enyi 互信息在图 8 的蓝色阴影区域中非零。

晚期 $d_{BH}\, d_{in} < k$ 在此参数区域中，R´enyi-2 互信息同样为零。

上述结果表明，当 Rényi 二阶相干信息 $I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}}I_{BH},\mathcal{E}\right) = S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) - S^{(2)}(\sigma_E)$不够负时，无论 k的取值如何，Rényi 二阶互信息都会消失。另一方面，当 Rényi 二阶相干信息足够负时，Rényi 二阶互信息在参数

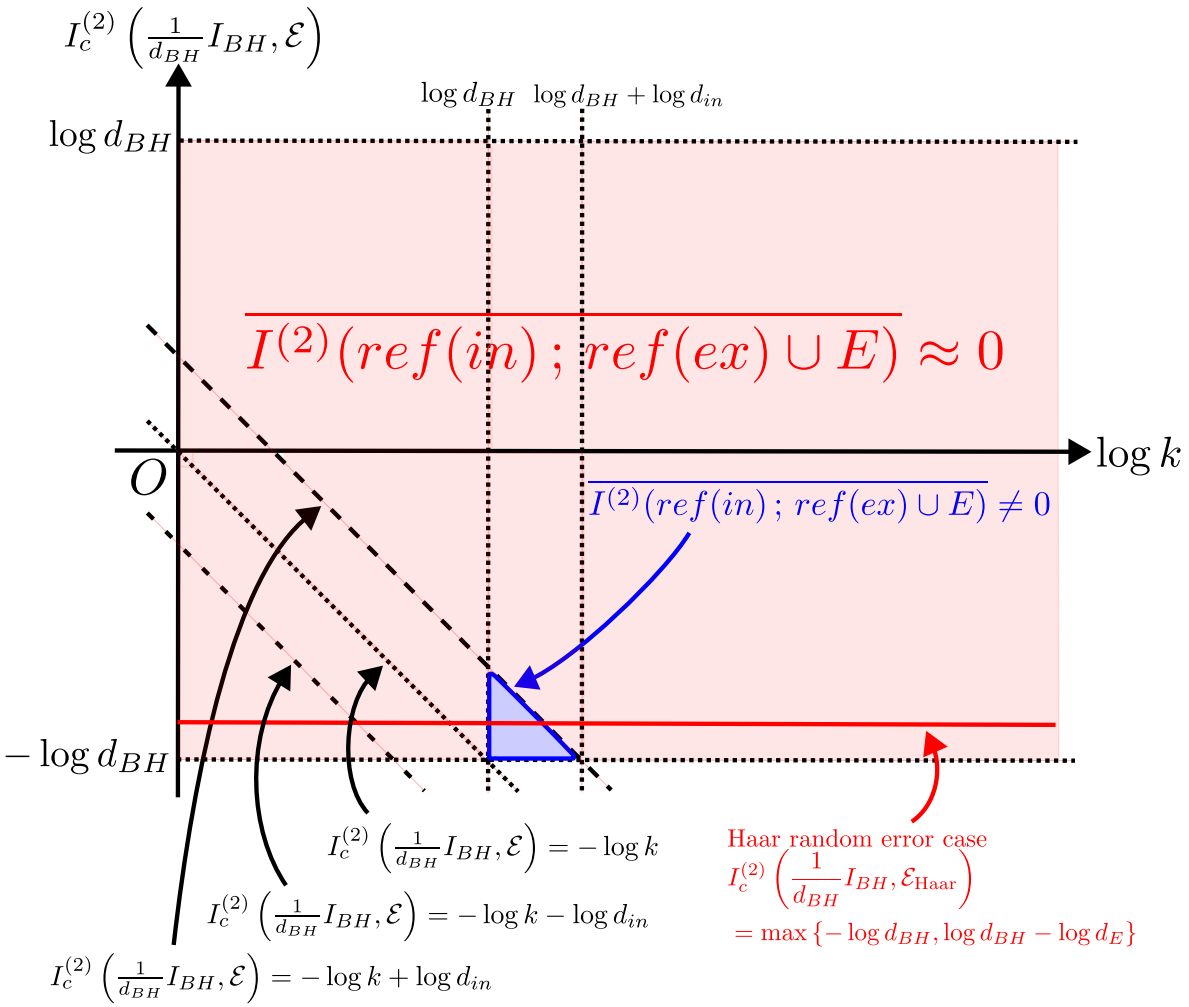


图 8：Rényi ′二阶互信息，$I^{(2)}_{|\Psi'\rangle}(ref(in);\ ref(ex)\cup E)$ 在 log k- $\overline{I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}}I_{BH},\mathcal{E}\right)}$ 平面上的相图。红色实线仍对应 Haar 随机误差下的 Rényi ′二阶相干信息（2.34）。我们选择参数使得 log $d_E \geq 2\log d_{BH}-\log d_{in}$。

窗口 $d_{BH}<k<d_{BH}\,d_{in}$。这源于如下事实：全连接鞍点（见图 7）在 $S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in),ref^{(ex)}E}\right)$ 时成为主导项。

因此，对于使 并非足够负的 R′二阶 Rényi 相干信息，解耦条件（2.4）成立，这意味着该误差可以被完美纠正。然而，对于使 R′二阶 Rényi 相干信息足够负的误差，解耦条件（2.4）不成立，这意味着该误差至多只能被近似纠正[12]。

[12]对于这种近似可纠正的误差，宇宙上几乎所有的编码信息 B 流向

2.10 与非引力情形的比较

现在，让我们将引力浴的结果与 [21]中得到的非引力浴结果进行比较。为此，我们先展示非引力浴情形下相关的 R´二阶 Rényi 量。

在这种情况下，由于宇宙 B 中黑洞微观态的希尔伯特空间被非引力辐射的希尔伯特空间取代 H_R，相关的引力路径积分中便不会出现 B边界。此外，在量化误差大小的相干信息表达式中， I_{BH}/d_{BH} 上的最大混合态被 H_R 上的最大混合态取代（见附录 B），

$$I_c^{(2)}\left(\tfrac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right) \longrightarrow I_c^{(2)}\left(\tfrac{1}{k} I_R, \mathcal{E}'\right). \tag{2.50}$$

我们还应注意到，与（2.47）类似，新的相干信息满足以下界：

$$\max\{-\log k, -\log d_E\} \leq I_c^{(2)}\left(\tfrac{1}{k} I_R, \mathcal{E}'\right) \leq \log k. \tag{2.51}$$

在附录 B中，我们再次利用主导鞍点近似，简要推导了这些结果。

R´ényi 二阶熵由式（B.13）、（B.14）和（B.15）给出，

$$\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{\mathrm{NG};\, ref(in)}\right)} \approx \log d_{in} \qquad \text{(figure 20}a\text{)}, \tag{2.52}$$

$$\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{\mathrm{NG};\, ref(in),\, ref(ex),\, E}\right)}$$

$$\approx \begin{cases} \log d_{in} + \log d_{ex} + S^{(2)}\left(\tau_E\right) & \text{for } -\log d_{BH} + \log d_{in} < I_c^{(2)}\left(\dfrac{1}{k} I_R, \mathcal{E}'\right) \quad \text{(figure 20}a\text{)}, \\ \log d_{ex} + \log d_{BH} + S^{(2)}\left(\tau_{\mathrm{Bath}}\right) & \text{for } I_c^{(2)}\left(\dfrac{1}{k} I_R, \mathcal{E}'\right) < -\log d_{BH} + \log d_{in} \quad \text{(figure 20}b\text{)}, \end{cases} \tag{2.53}$$

由于宇宙 B 与环境系统E之间的相互作用，进入环境系统 E 。因此，如果除了宇宙 B之外，我们还能访问环境系统 E ，那么就能从宇宙 B 和环境系统 E中恢复编码信息。

and

$$\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{\mathrm{NG};\,ref(ex),\,E}\right)}$$
$$\approx \begin{cases} \log d_{ex} + S^{(2)}\left(\tau_E\right) & \text{for } -\log d_{BH} - \log d_{in} < I_c^{(2)}\left(\frac{1}{k} I_R, \mathcal{E}'\right) \quad \text{(figure 20}a\text{)}, \\ \log d_{in} + \log d_{ex} + \log d_{BH} + S^{(2)}\left(\tau_{\mathrm{Bath}}\right) & \\ & \text{for } I_c^{(2)}\left(\frac{1}{k} I_R, \mathcal{E}'\right) < -\log d_{BH} - \log d_{in} \quad \text{(figure 20}b\text{)}, \end{cases} \tag{2.54}$$

其中，下标“NG”表示这些量对应于非引力浴情形，上述表达式中的数字指各自情形下的主导鞍点。图9给出了满足界（B.17）的情况下，R´enyi 二阶熵（2.53）和（2.54）对应的主导鞍点相图。

结合这些结果，我们得到非引力浴的 R´enyi 二阶互信息$I^{(2)}_{|\Psi'\rangle_{\mathrm{NG}}}(ref(in);\ ref(ex) \cup E)$的表达式。同样，将结果分成三种情况分别呈现更为方便。

早期时间 $k < d_{BH}/d_{in}$ 在这种情况下，无论相干信息 $I_c^{(2)}\left(\frac{1}{k} I_R, \mathcal{E}'\right)$ 取何值，RMI 都为零。

晚期 $k > d_{BH}/d_{in}$ 在这种情况下，当相干信息足够负时，RMI 不为零，

$$\overline{I^{(2)}_{|\Psi'\rangle_{\mathrm{NG}}}(ref(in)\,;\, ref(ex) \cup E)}$$
$$\approx \begin{cases} 0 & \text{for } -\log d_{BH} + \log d_{in} < I_c^{(2)}\left(\frac{1}{k} I_R, \mathcal{E}'\right), \\ (-\log d_{BH} + \log d_{in}) - I_c^{(2)}\left(\frac{1}{k} I_R, \mathcal{E}'\right) & \\ & \text{for } -\log d_{BH} - \log d_{in} < I_c^{(2)}\left(\frac{1}{k} I_R, \mathcal{E}'\right) < -\log d_{BH} + \log d_{in}, \\ 2\log d_{in} & \text{for } I_c^{(2)}\left(\frac{1}{k} I_R, \mathcal{E}'\right) < -\log d_{BH} - \log d_{in}. \end{cases} \tag{2.55}$$

R´enyi 二阶互信息的值的相图见图10。

现在我们已经介绍了非引力浴情况下的 Rényi 二阶熵和互信息，接下来将引力浴的结果与之进行比较。对于引力浴和

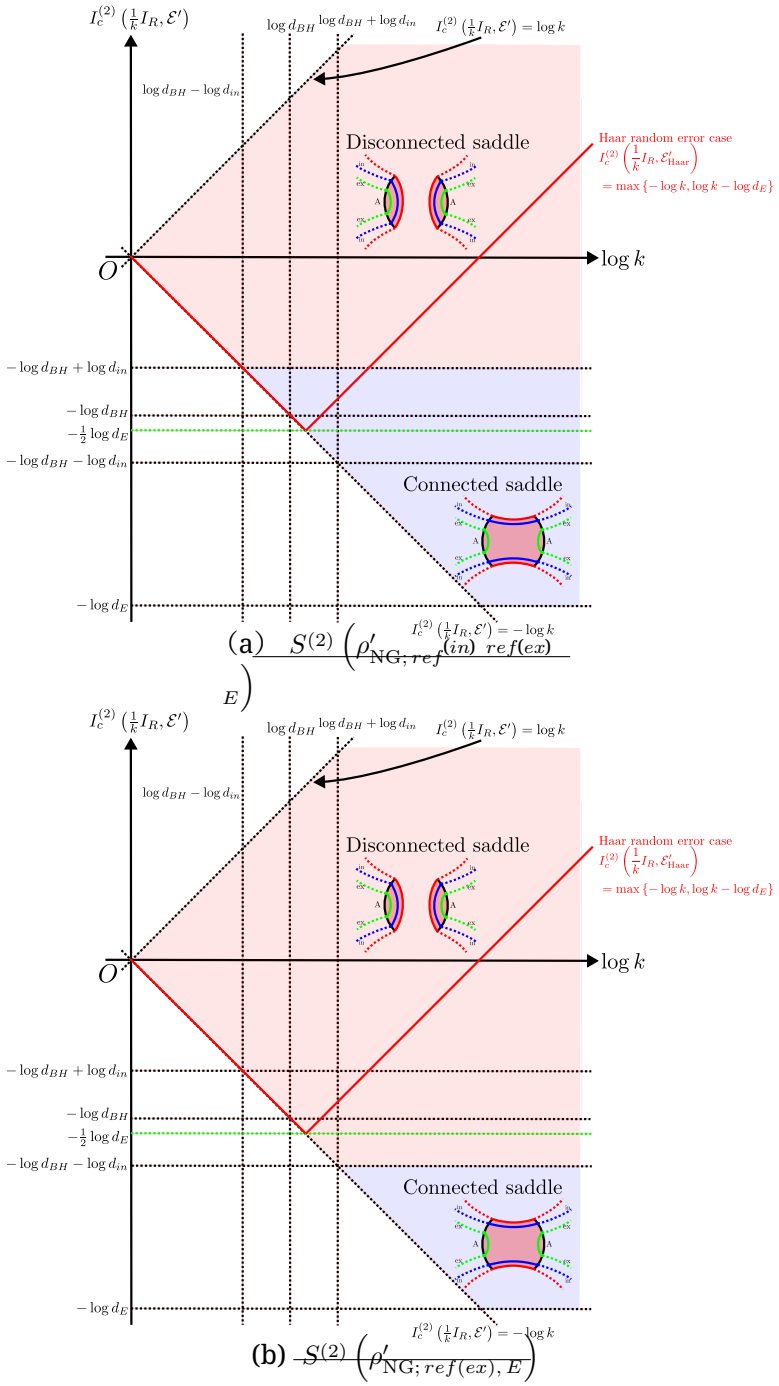


图9：R´enyi 二阶熵（B.14）和（B.15）的主导鞍点相图，位于 $\log k$- $I_c^{(2)}\left(\frac{1}{k}I_R,\ \mathcal{E}'\right)$ 平面上。我们选择参数，使得$\frac{1}{2}\log d_E \geq \log d_{BH}$。红色实线对应 Haar 随机误差下的 R´enyi 二阶相干信息（2.34）。

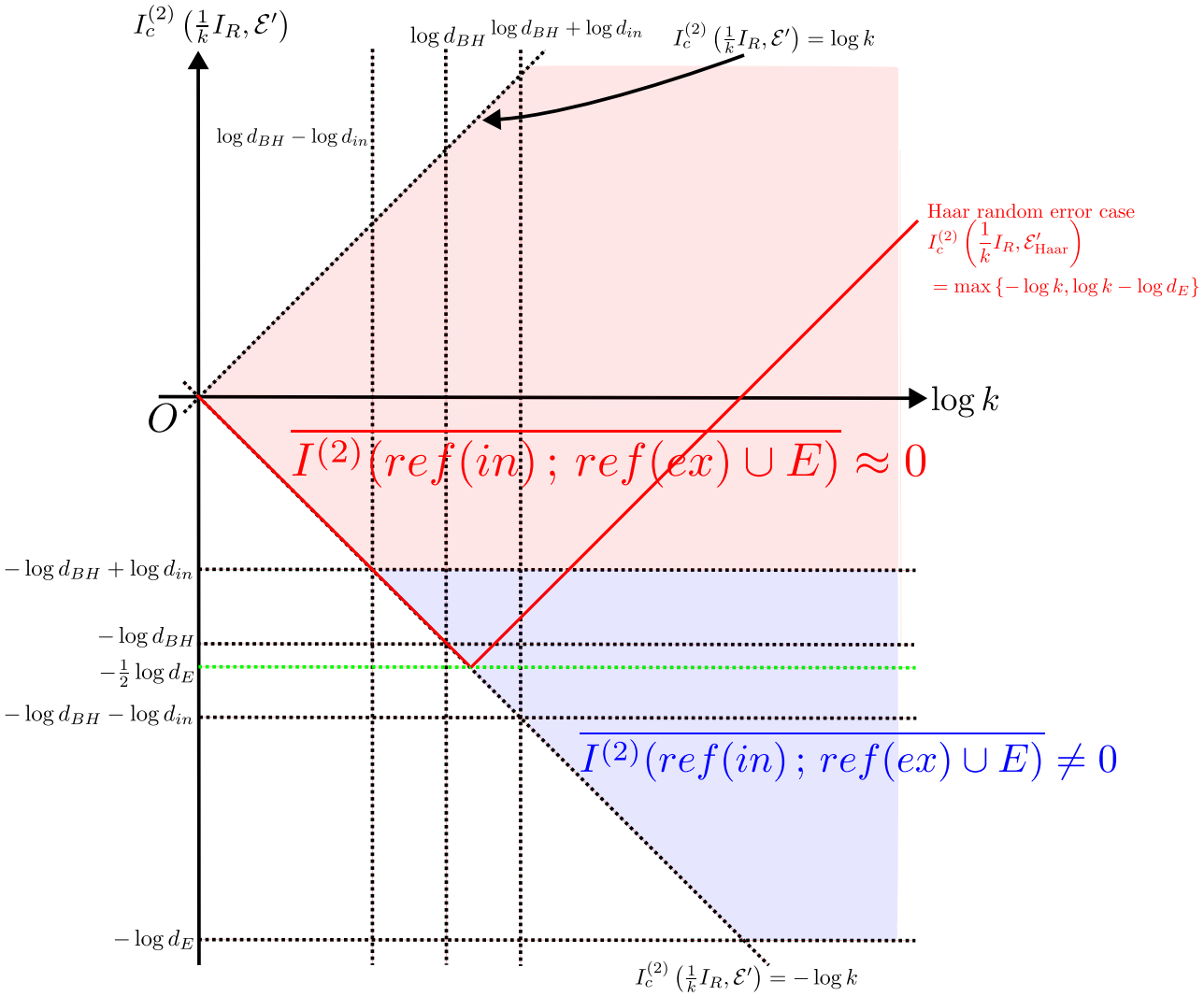


图10：R´ényi-二互信息（B.18）在对数 k-$I_c^{(2)}\left(\frac{1}{k}I_R,\ \mathcal{E}'\right)$ 平面上的相图。参数与图9中的相同。红线再次对应于 Haar随机误差的 R´ényi-二相干信息（2.34）。

与非引力情形不同，但它们之间存在一个重要的相似之处：当相干信息足够负时，R´ényi 二阶互信息不会消失。这意味着，在这些参数区域中，解耦条件不成立，因此，作用于引力热浴和非引力浴 B（即霍金辐射）的错误，能够改变黑洞 A内部半经典激发的信息。换言之，黑洞内部能够抵御相干信息不够负的误差不，但无法抵御相干信息足够负的误差[13]。

[13]这一结果与 [20], 中的结果类似，其中作用于浴上的错误按复杂度分类

根据以上计算，我们得出结论：在非引力浴情形中观察到的解耦条件失效，在热浴具有引力时也会发生。不过，需要指出的是，在目前为止的计算中，我们仅在拓扑理论层面处理了引力的影响。在存在动力学引力时，我们预计误差会对鞍点几何产生引力反作用。在非引力浴情形中，这种情况并不存在。下一节中，我们将在考虑这些引力反作用的同时，重新审视本章提出的论证。

3 引力浴中的量子纠错：包含引力反作用 ns

在上一节中，我们指出，在拓扑模型中计算 $S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in),ref(\overline{ex}),E}\right)$ 时，存在一个参数区域：当误差变大时，全连通虫洞占主导地位（图7）。因此，在此区域内，R´ényi 二阶互信息（2.49）取非零值。在这种情况下，我们得到的结果与动力学由 Haar随机酉算符 [20] 支配的情形几乎相同。

然而，一旦引力变为动力学的，误差就会对时空产生引力反作用。因此，较大的误差应对应显著且不可忽略的反作用。

本节中，我们在最简单的动力学引力框架——即 JT引力——中研究这一效应。在这一理论中，引力的动力学性质由动力学膨胀子作用量（2.9）$I_{\text{Dyn. 膨胀子}}$承载，并通过考虑总作用量中的贡献

$$I = I_{\text{Topo. Dilaton}} + I_{\text{Dyn. Dilaton}} + I_{\text{code}} + I_{\text{error}}, \tag{3.1}$$

我们关注的是，纳入此类反作用效应后，R´enyi-2 熵的完全连通虫洞主导相（图7a中的蓝色区域）与双（A,B）虫洞鞍点主导相（同图中的绿色区域）之间的相边界如何移动。

在量子信息理论设定中，即黑洞内部可抵御浴上的低复杂度误差，但无法抵御高复杂度误差。人们很容易认为，相干信息非常负的误差具有高度复杂度。然而，我们注意到，复杂度论证与相干信息论证之间并不存在精确对应 [21]。事实上，在该论文中，作者给出了一个误差的例子：它具有足够负的相干信息，但并非高复杂度。由此例，人们一般可以论证，高复杂度误差具有足够负的相干信息；作为其逆否命题，不具有足够负相干信息的错误是低复杂度的。

现在简要说明误差产生的引力反作用如何改变相变的性质。从现在起，我们通过在边界插入算符来模拟误差。在体一侧，这相当于引入一种新型膜，我们称之为误差膜，其作用量 I_{error} 定义为

$$I_{\text{error}} = \Delta \int_{\text{Error brane}} ds. \tag{3.2}$$

误差膜会改变膨胀子构型，并且在完全连通相中，它会在 AdS 边界处产生尖点。更准确地说，我们将 Kraus 算子视为局域标度算符 $\mathcal{O}_\Delta$，其标度维数为 Δ，该维数由误差的具体细节决定。随后，来自对偶误差膜的引力反作用可表示为沿着膜 [38, 39]将两个黑洞时空粘合在一起。当误差较大时，这些尖点对引力作用量 [40] 的贡献会变得十分显著。相比之下，(A,B) 虫洞没有这样的尖点贡献，其作用量保持不变。因此，对于较大的错误，完全连通虫洞鞍点的贡献预计会相对于 (A,B) 虫洞鞍点受到抑制。结果是，完全连接虫洞主导相应当缩小，甚至可能完全消失。接下来，我们将证明确实如此。

3.1 Page 时间之后误差作为有质量膜产生的引力反作用

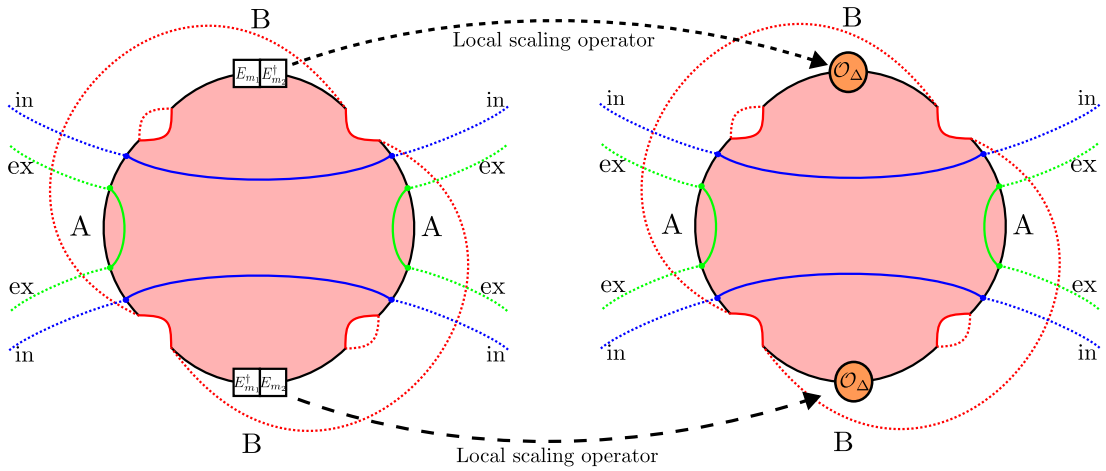
在上述描述中，全连接鞍点（图 6d）在渐近 AdS 边界上产生局部标度算符 $\mathcal{O}_\Delta$ 的二点函数，而双（A,B）虫洞鞍点（图 6b）则为每个副本产生一个单点函数，如图 11所示。

我们通过考虑膜作用量 I_{error} 来计算体区中的二点函数。

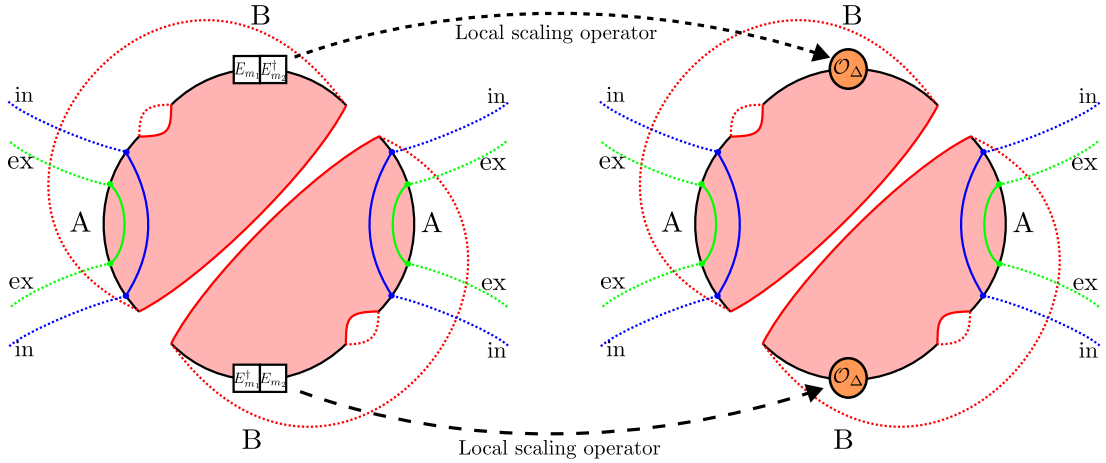
当膜张力较大时，[14], 体区有质量粒子会对几何产生反作用，所得几何如 [39]中所述，是沿着膜将两个黑洞时空粘接在一起形成的。所得几何具有尖点，如图12所示。由于 AdS 边界不再光滑，我们需要在边界 Gibbons-Hawking 作用量（3.1）中引入其贡献，称为 Hayward 项 [41][15]。

我们注意到，对于双-A, B 虫洞鞍点，不存在这样的世界线作用量，因为两个局域标度算符分别位于不同的副本上，而这些副本并未通过

[14]“大”意味着它与 ϕ_r [39] 相当或更大。[15]另请参阅 [42]，了解一般 AdS/CFT 设置中的相关讨论。



(a) 全连接鞍点



(b) 双-A, B-虫洞鞍点

图11</style}：在（动力学）JT引力中的两个鞍点。Kraus 算符被视为局域标度算符。全连接鞍点会产生局域标度算符的二点函数。另一方面，双-, B-虫洞鞍点会为每个副本产生一点函数。

一个（副本）虫洞相连。因此，只需考虑对全连接鞍点的修正。

在这种情况下，我们需要计算带有误差反作用的全连通虫洞的壳上作用量（3.1）（图12）。这里需要指出，拓扑贡献不受反作用影响[16]。因此，我们来关注作用量的动力学部分，也就是

[16]如果误差效应过大，反作用可能会改变拓扑。这里我们不讨论这种情况，将其留待未来研究。

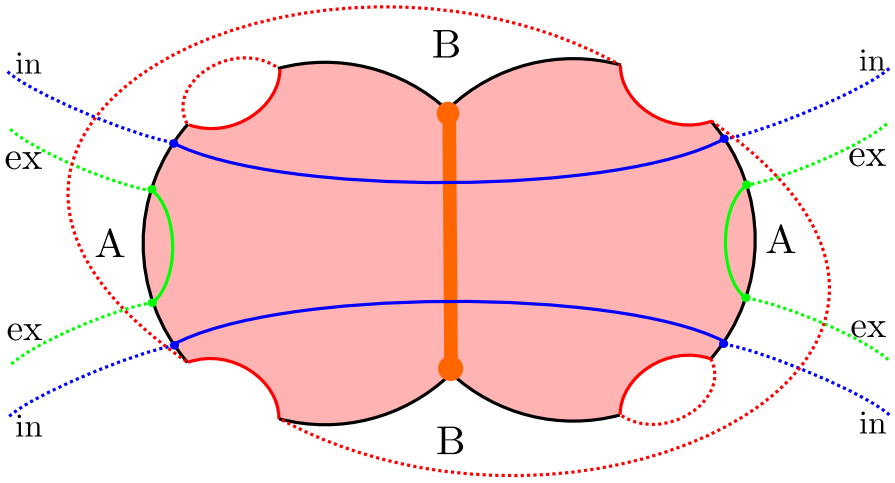


图 12：Kraus 算子导致的回作用全连接鞍点。粗橙线的端点对应 Kraus 算子，而终止于这些端点的橙线对应由膜作用量（3.2）描述的膜。

动力学伸缩子部分，以及由误差产生的膜作用量。正如[39], 中所讨论的，它们的壳上作用量可分为两部分，分别来自 AdS 边界和尖点，

$$I_{\text{Dyn. Dilaton}} + I_{\text{error}}|_{\text{on-shell}} = I_{\text{Dyn. Dilaton, seg}}|_{\text{on-shell}} + I_{\text{Dyn. Dilaton, cusp}}|_{\text{on-shell}}\,, \tag{3.3}$$

其中，右侧第一项 $I_{\text{Dyn. 膨胀子, 线段}}$来自 AdS 边界的正则部分，第二项 $I_{\text{Dyn. 膨胀子, 尖点}}$来自同一边界上的尖点[17]。第一项 $I_{\text{Dyn. 膨胀子, 线段}}$与没有反作用时的情况几乎相同。另一方面，壳上尖点贡献取决于反作用，因为反作用越大，尖点角也越大。下面我们按照 [39] 简要计算壳上尖点贡献。首先，要计算尖点贡献，我们需要求出尖点角 θ。根据我们的约定，该角与体区有质量粒子的质量 Δ 之间满足关系式[18]

$$\sin\theta = \frac{\Delta}{2\phi_b}, \tag{3.4}$$

其中 ϕ_b 是边界膨胀子值，（2.10）。这一关系源于这样一个事实：由反作用引起的视界位移与质量 Δ相关，而这一位移也可以用尖点角来刻画。

[17]我们注意到，膜作用量 I_{error} 并未显式出现在右端，因为膜的贡献已作为两个黑洞时空的粘合操作纳入其中。[18]在附录H中，我们讨论由关系式（ Δ 3.4）得出的上界。

由于通常可以假设边界伸缩子很大 $\phi_b \gg 1$， Δ 这意味着 θ很小，因此上述关系可化简为

$$\theta \approx \frac{\Delta}{2\phi_b}. \tag{3.5}$$

我们现在通过用半径为无穷小 r 、张角为尖点角两倍的圆弧来正则化尖点，从而计算壳上尖点贡献， 2θ,

$$\begin{aligned} I_{\text{Dyn. Dilaton, cusp}}\big|_{\text{on-shell}} &= -\phi_b \int_{\text{cusps}} \sqrt{h}K \\ &= -\phi_b \lim_{r\to+0} \int_{\text{arcs with radius } r \text{ and angle } 2\theta} \sqrt{h}K \\ &= 2\cdot\phi_b\cdot 2\theta \\ &\approx 2\Delta, \end{aligned} \tag{3.6}$$

其中，在第三行，额外的因子2来自存在两个尖点（图12）这一事实；在最后一行，我们使用了尖点角（3.5）。因此，这一新贡献意味着R´enyi二阶熵（2.41）在晚期应加以修正，以包含因子 2Δ。

在评估了来自尖点的贡献之后，现在让我们回到R´enyi二阶熵（2.41）的引力路径积分计算。我们所关注的全连接鞍点在相干信息变得足够负且 $k \sim d_{BH}$时，有可能成为主导鞍点。在这种情况下，（A.28）在晚期 $d_{BH} < k$ 应修改如下

$$\overline{\text{tr}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)^2}\Big|_{\text{Connected}} \approx \frac{1}{d_{ex}}\cdot\frac{1}{k}\cdot\text{tr}\left[(\sigma_{\text{Bath}})^2\right]\cdot e^{2\Delta} \quad \text{for } d_{BH} < k, \tag{3.7}$$

从而导致R´enyi二阶熵（A.30）的候选贡献发生修正，该贡献来自全连接鞍点（图6d），

$$\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)}\Big|_{\text{Connected}} \approx \log d_{ex} + \log k + S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) + 2\Delta \quad \text{for } d_{BH} < k. \tag{3.8}$$

另一方面，来自两个（A， B）虫洞鞍点 $S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)\Big|_{\text{Disconnected}}$，~~（A.19）~~的贡献不受误差反作用的影响。

因此，比较 R´ényi-二阶熵（A.19）和（3.8）的候选贡献，

我们得到 R´ényi 二阶熵,

$$\begin{aligned}
&\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)} \\
&= \min\left\{\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)}\Big|_{\text{Disconnected}}, \overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)}\Big|_{\text{Connected}}\right\} \\
&\approx \min\left\{\log d_{in}+\log d_{ex}+S^{(2)}(\sigma_E), \log d_{ex}+\log k+S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}})+2\Delta\right\} \\
&= \log d_{ex}+\log d_{in}+S^{(2)}(\sigma_E)+\min\left\{0, \log k+I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}}I_{BH},\mathcal{E}\right)-\log d_{in}+2\Delta\right\} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{for } d_{BH}<k.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

其中，在第二个等式中，第一个参数来自二体（A，B）虫洞鞍点（图6b），第二个参数来自反作用后的完全连通鞍点（图12）；在第二个等式中，我们使用了相干信息的定义（2.34）。

根据这一结果（3.9），R´ényi-2 熵（见图7）的全连通虫洞主导相与双（A,B）虫洞鞍点主导相之间的相边界发生如下偏移。首先，如果 2Δ 不太大，那么我们得到与（2.41）类似的结果，只需将 $S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}})$替换为 $S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}})+2\Delta$。因此，在相图（图8）中，互信息不为零的三角区域会变小，因为三角区域顶点的位置在

$$\left(\log k,\ I_c^{(2)}\left(\tfrac{1}{d_{BH}}I_{BH},\mathcal{E}\right)\right) = \left(\log d_{BH},\ -\log d_{BH}+\log d_{in}-2\Delta\right)$$

，下界（纵轴）位于 $I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}}I_{BH},\mathcal{E}\right)$ =— 对数 d_{BH}，这由弱次可加性（2.47）确定。然而，如果 $\Delta>\Delta_{\text{Criti.}}=\frac{1}{2}$对数-$d_{in}$在 $d_{BH}<k$[19]中，那么三角区域不再出现在相图中，互信息恒为零。

我们来总结一下结果。

[19]更确切地说，如果

$$2\Delta > \log d_{in}+\log d_{BH}-\log k \quad \text{for } \log d_{BH}\le\log k\le\log d_{BH}+\log d_{in}, \tag{3.10}$$

那么三角区域就不会再出现在相图中。为简单起见，我们关注右侧的上限，

$$\log d_{in} \ge \log d_{in}+\log d_{BH}-\log k \quad \text{for } \log d_{BH}\le\log k\le\log d_{BH}+\log d_{in}. \tag{3.11}$$

情况 1： $\Delta \leq \Delta_{\text{Criti.}} = \frac{1}{2}$对数 d_{in}。 Rényi´晚期的二阶熵 $d_{BH} < k$，(2.41)，变为

$$\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)}$$
$$\approx \begin{cases} \log d_{in} + \log d_{ex} + S^{(2)}(\sigma_E) \\ \qquad \text{for } \max\{-\log k + \log d_{in} - 2\Delta, -\log d_{BH}\} < I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right), \\ \log d_{ex} + \log k + S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) + 2\Delta \\ \qquad \text{for } -\log d_{BH} \leq I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right) < \max\{-\log k + \log d_{in} - 2\Delta, -\log d_{BH}\}. \end{cases} \tag{3.12}$$

这里需要指出，在这种情况下，根据参数区域的不同，双（A,B）虫洞鞍点（图6b）或完全连通鞍点（图6d）可能占主导地位。

根据上述结果，晚期的 Ré´nyi-二阶互信息（2.49）变为

$$\overline{I^{(2)}_{|\Psi'\rangle}(ref(in)\,;\, ref(ex)\cup E)}$$
$$\approx \begin{cases} 0 \qquad \text{for } \max\{-\log k + \log d_{in} - \Delta, -\log d_{BH}\} < I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right) \\ (-\log k + \log d_{in} - 2\Delta) - I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right) \\ \qquad \text{for } -\log d_{BH} \leq I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right) < \max\{-\log k + \log d_{in} - 2\Delta, -\log d_{BH}\}. \end{cases} \tag{3.13}$$

因此，Rényi-二阶互信息仍存在一个非零的参数区域。

情况 2： $\Delta >\Delta_{\text{Criti.}} = \frac{1}{2}$ 对数 d_{in}。 在晚期，Ré´nyi-二阶熵（2.41）变为

$$\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)} \approx \log d_{in} + \log d_{ex} + S^{(2)}(\sigma_E). \tag{3.14}$$

与情况 1 不同， $2\Delta <$ 对数 d_{in}，双（A,B）虫洞鞍点（图 6b）是唯一占主导地位的鞍点。

那么，´晚期的二阶 Rényi 互信息（2.49）变为

$$\overline{I^{(2)}_{|\Psi'\rangle}(ref(in)\,;\, ref(ex)\cup E)} \approx 0 \qquad \text{for } d_{BH} < k. \tag{3.15}$$

因此，无论´的取值如何，二阶 Rényi 互信息始终为零$I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right)$。见图13。

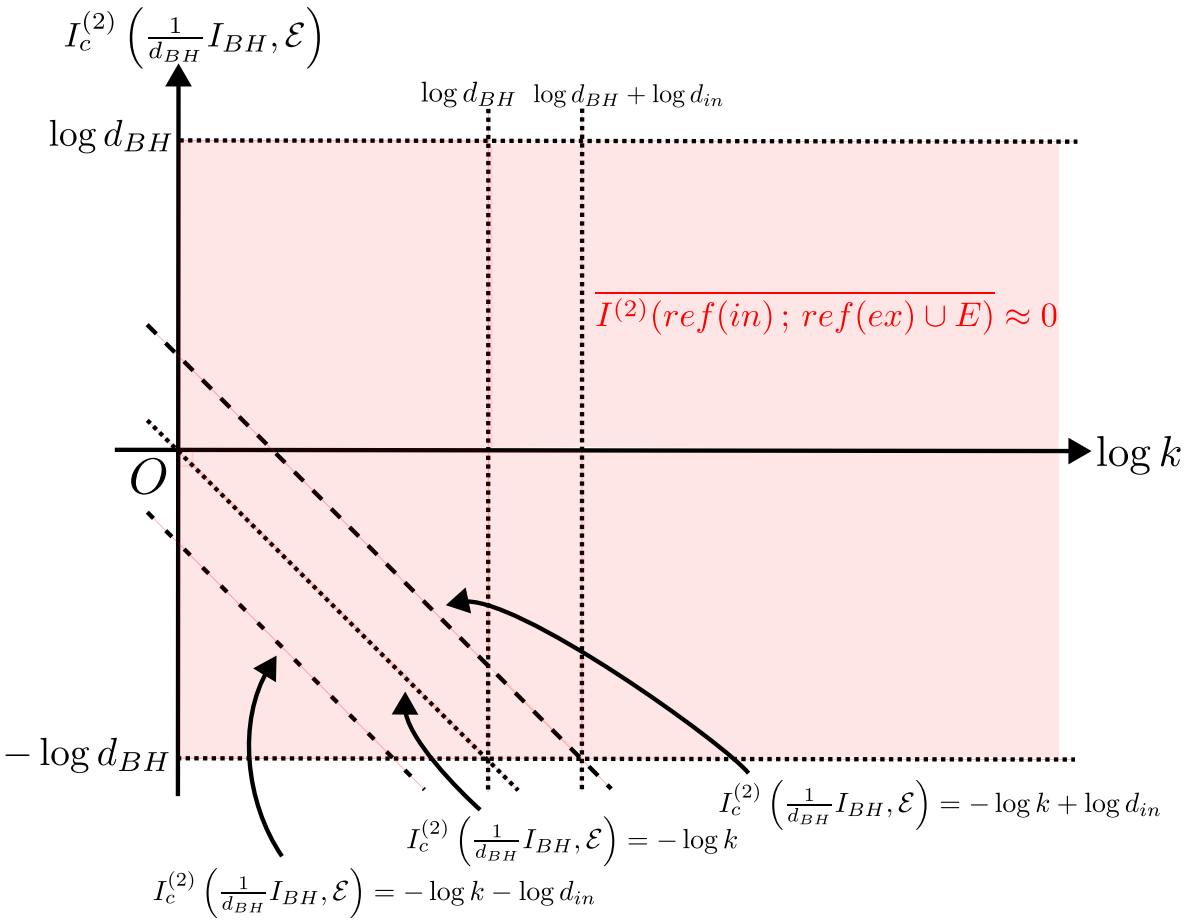


图13：R´enyi 二阶互信息，$I^{(2)}_{|\Psi'\rangle}(ref(in)\,;\ ref(ex)\cup E)$，包括较大的反作用，在 $\log k$-$I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}}I_{BH},\mathcal{E}\right)$ 平面上。正如稍后在第3.3节中讨论的那样，即使纳入引力反作用，R´enyi 二阶互信息也不会改变。

3.2 误差与局域标度算符关系的示例

到目前为止，我们还没有给出 Δ 与 Kraus 算符参数（例如环境系统的维数 d_E）之间的关系。两个参数 d_E，Δ 彼此独立，在逻辑上是有可能的；然而，基于一般考虑，我们认为这两个参数存在关联，因为当误差较大时（误差的秩 d_E 较大），标度维数 Δ 自然也会较大。作为这种关联的一个例子，我们来介绍一种可能的关系，并讨论其结果。

对此　　最后，我们假设环境系统由一个二维　　1

中心荷为 c[20]的全息共形场论构成，且系统处于热平衡态。我们进一步假设，在微正则描述中，系统的热态由 d_E 个位于能量窗口 $[\mathcal{E}, \mathcal{E}+\delta\mathcal{E}]$内的微观态描述。在这种情况下，环境系统的热熵为

$$S_{\text{Env}}^{\text{Thermal}}(\mathcal{E}) = \log d_E. \tag{3.16}$$

另一方面，根据 Cardy 的讨论（该讨论同样适用于有限温度下的全息共形场论） [43], ，可以推导出以下表达式：

$$S_{\text{Env}}^{\text{Thermal}}(\mathcal{E}) \sim 2\pi\sqrt{\frac{c}{3}\mathcal{E}} \qquad \left(\mathcal{E} > \frac{c}{12}\right). \tag{3.17}$$

因此，通过比较这两个表达式，我们得到如下关系：

$$\mathcal{E} \sim \frac{3}{c}\left(\frac{1}{2\pi}\log d_E\right)^2. \tag{3.18}$$

接下来，我们将能量 $\mathcal{E}$ 与膜张力 Δ对应起来，

$$\Delta = \mathcal{E}. \tag{3.19}$$

结合这两个表达式，我们得到

$$\Delta \sim \frac{3}{c}\left(\frac{1}{2\pi}\log d_E\right)^2. \tag{3.20}$$

这是一个　误差 Δ与 Kraus 算符参数之间关系的例子　　.

如果关系（3.20）成立，就很容易满足条件

$$\Delta = \frac{6}{c}\left(\frac{1}{2\pi}\log d_E\right)^2 > \log d_{in}, \tag{3.21}$$

当误差很大时。在这种情况下，R´enyi-二阶互信息恒为零，而当 d_E 足够大时就会出现这种情况。这意味着，当误差足够大 $d_E \gg 1$ 时，引力反作用的影响始终不可忽略。

3.3 引力 Page 时间之前，有质量膜中的误差引发的反作用

在上一小节3.1中，我们看到，当考虑引力反作用时，Page 时间之后的 R´ényi 二阶互信息会根据标度维数 Δ恒等于零。本小节中，我们将考察

[20]这一假设意味着环境系统的动力学具有足够强的混沌性。

引力反作用对 Page 时间之前的 R´ényi 二阶熵和互信息的影响。

与上一小节3.1一样，引力反作用改变了鞍点的几何，其中一个副本虫洞连接着宇宙的各个副本 B，我们将其称为（B，B）副本虫洞鞍点（图6c），它出现在计算 R´enyi- 二熵 $S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)$ 和 $S^{(2)}\left(\rho'_{ref(ex),E}\right)$时。再次通过引入一张张力为 Δ 的有质量膜来产生引力反作用，该膜如图14所示，连接两个 Kraus 算符；几何在膜的端点处开始出现尖点。

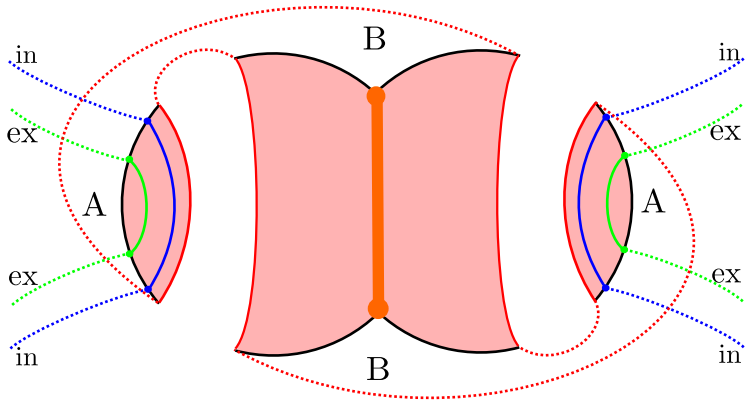


图 14：由 Kraus 算符产生反作用后的单个（B，B）副本虫洞鞍点。蓝点表示 Kraus 算符。粗橙线的端点对应 Kraus 算符，而终止于这些点的橙线表示由膜作用量（3.2）描述的膜。

对修正后的引力作用量在R´ényi二阶熵（2.38）、（2.39）上的计算，与上一小节3.1完全平行。例如，只需将尖点贡献 2Δ 加入与R´ényi二阶熵（2.38）、（2.39）中的单-(B,B)-副本虫洞鞍点相对应的表达式。因此，我们得到修正后的

Page 时间之前的R´ényi二阶熵， $k < d_{BH}$,

$$\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)}$$
$$\approx \begin{cases} \log d_{in} + \log d_{ex} + S^{(2)}(\sigma_E) \\ \qquad\qquad \text{for } \max\{-\log k - 2\Delta, -\log d_{BH}\} < I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right), \\ \log d_{in} + \log d_{ex} + \log k + S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) + 2\Delta \\ \qquad\qquad \text{for } -\log d_{BH} \le I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right) < \max\{-\log k - 2\Delta, -\log d_{BH}\}, \end{cases} \tag{3.22}$$

and

$$\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(ex),E}\right)}$$
$$\approx \begin{cases} \log d_{ex} + S^{(2)}(\sigma_E) \\ \qquad\qquad \text{for } \max\{-\log k - 2\Delta, -\log d_{BH}\} < I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right), \\ \log d_{ex} + \log k + S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) + 2\Delta \\ \qquad\qquad \text{for } -\log d_{BH} \le I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right) < \max\{-\log k - 2\Delta, -\log d_{BH}\}, \end{cases} \tag{3.23}$$

其中（3.22）和（3.23）中的第一种情况来自完全不连通鞍点（图 6a），第二种情况来自反作用的单个（B, B）副本虫洞鞍点（图 14）。

正如我们在附录 H 中所讨论的， Δ 的上界为 $\Delta_{\max} = 2\phi_b$。由于这一界限，一般而言，我们无法像在晚期情形（3.9）中那样排除（3.22）中的两种情况之一。这对（3.23）也同样成立。因此，在 Page 时间之前，单个（B, B）副本虫洞鞍点（图 14）总会出现在相图中，即使 Δ取最大值 $\Delta = \Delta_{\max} = 2\phi_b \ge \frac{1}{2}\log d_{in}$。

尽管反作用的单个（B, B）副本虫洞鞍点可以对 R´ényi-二阶熵 $S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)$ 和 $S^{(2)}\left(\rho'_{ref(ex),E}\right)$作出贡献，但在 Page 时间之前，它们的 R´ényi- 二阶熵之差不会改变，

$$\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)} - \overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(ex),E}\right)} \approx \log d_{in} \qquad \text{for } k < d_{BH}. \tag{3.24}$$

这意味着，对于 Page 时间之前的时刻，R´enyi-二阶互信息 $k < d_{BH}$ 仍会消失，而与数值 $\Delta(\le \Delta_{\max})$ 无关；

$$\overline{I^{(2)}_{|\Psi'\rangle}(ref(in)\,;\, ref(ex)\cup E)} \approx 0 \qquad \text{for } k < d_{BH}. \tag{3.25}$$

3.4 消失的 Rényi-二阶互信息的诠释

在前面的几个小节中，我们观察到，R´enyi-二阶互信息总是可以因标度维数 Δ 而消失。这意味着，与上一节2不同，无论误差有多大，只要其相干信息足够负且标度维数相对较大 $2\Delta > \log d_{\text{in}}$，黑洞内部就能免受这些错误的影响。

让我们从系统中的纠缠与可能存在的副本虫洞之间的关系出发，对上述结果作出物理诠释。为方便起见，我们聚焦于晚时间区间，$d_{BH} < k$。正如我们在上一节2所见，非零的 Rényi-二阶互信息源于全连接鞍点（图6d）的存在，其中包含连接两个副本的复制虫洞。如果不考虑引力反作用，全连接鞍点相较于两个（A，B）虫洞鞍点（图6b）占主导地位。本质上，全连接鞍点中复制虫洞的存在，对应于环境系统与由宇宙 A 和 B 组成的系统之间存在强纠缠；该系统由物理希尔伯特空间描述。

然而，如果将引力反作用纳入考虑，全连接鞍点上的连接两个副本的复制虫洞就会变得“更长”。这意味着，误差所导致的引力反作用会削弱环境与其他系统之间的纠缠。从几何上看，纠缠减弱表现为复制虫洞变长[21]。最终，引力反作用变得足够强，使得全连接鞍点不再比两个（A，B）虫洞鞍点占主导地位。从这个意义上说，引力浴中的误差所产生的引力反作用，实际上“切断”了复制虫洞。这一情形令人联想到 AMPS 火墙论证 [44]及其通过激波给出的解决方案，例如 [45]。我们或许能找到我们的论述与这类方案之间更精确的联系。

在早期时间，$k < d_{BH}$，纠缠结构与 Page 时间之后略有不同。从纠缠单配性的角度来看，Page 时间之后，宇宙B 几乎与宇宙 A处于最大纠缠态，几乎没有余地再与环境 E纠缠。因此，B 与 E 之间的纠缠很弱且脆弱。对应于这种纠缠结构的鞍点包含一个复制虫洞，而引力反作用很容易将其切断 。

相比之下，在 Page 时间之前，宇宙 B 与两个环境都只有微弱的纠缠

[21]例如，参见 [38] 中关于插入重局域算符如何产生纠缠程度较低的纠缠态的讨论。

A 并且 E，尤其是当相干信息并非足够负时。然而，当相干信息变得足够负时，这表明 B 几乎与环境 E达到最大纠缠，从而几乎没有与 A发生纠缠的余地。在这种情况下， B 与 E 之间的纠缠比Page 时间之后的更强、也更稳健。相应的鞍点包含一个复制虫洞（一个（B， B）-复制虫洞），它不容易被引力反作用切断。事实上，正如小节3.3中所讨论的，即使计入引力反作用之后，副本虫洞鞍点在Page 时间之前仍继续出现在相图中，而在Page 时间之后则消失。

接下来，直观来看，足够负的相干信息与相对较大的标度维数 $2\Delta > \log d_{in}$ 之间存在联系。下面解释为何我们认为二者有关。首先，要实现相干信息较不负的误差，只需组合少量（简单的）基本操作。在我们的模型中，这类误差会在体中产生轻膜，因为它不会造成显著的引力反作用。然而，要实现相干信息足够负的大误差，就需要组合许多这样的简单基本操作。由于这会导致显著的引力反作用，因此它对应于一个标度维数较大的算符 Δ，该算符与体中的重膜对偶，并能改变背景几何。

4 讨论

本文研究了一个与引力浴纠缠的蒸发黑洞，该引力浴由另一个黑洞描述。我们引入了一种由作用于引力浴系统的一般量子信道表示的误差，并研究了黑洞内部针对这种误差的量子纠错性质。为此，我们计算了适当的 Rényi 二阶互信息。

在第 2节中，我们重点研究了双重 PSSY（西海岸）模型 [32]。我们发现，在该模型中，R´ényi 二阶互信息呈现出与浴为非引力时定性相似的行为 [21]。也就是说，R´ényi 二阶互信息在某个参数区域内取非零值，而在该区域中，误差效应很大。这意味着，黑洞内部无法抵御较大的误差；此时，相干信息几乎小于原始黑洞熵的负值。

然而，一旦将误差引起的引力反作用纳入考虑，情况就会完全改变。为此，我们将误差信道的 Kraus 算符建模为具有某个标度维数的局域标度算符，那么它的引力对偶就是一张有质量膜

其张力由标度维数给定。有质量膜的引力反作用会在体几何中引入一个尖点，而该尖点是我们关注的引力路径积分的一个鞍点。当标度维数大于由编码子空间大小决定的临界值时，由此得到的 R´ényi 二阶互信息为零。

这些结果表明，若误差具有足够负的相干信息且标度维数低于临界值，黑洞内部可能会受到扰动。然而，这两个条件很难同时满足。这是因为，通常认为，实现一个具有足够负相干信息的误差需要大量简单的基本操作，而由此产生的引力反作用很容易超过标度维数的临界值。因此，我们预计在实践中，黑洞内部通常能免受大多数会产生引力反作用的错误的影响。

未来方向

最后，我们讨论本文未来可能的几个研究方向。

- 我们的半经典计算表明，引力反作用确保 R´ényi-二互信息消失，当 $\Delta > \Delta_{\text{Criti.}} = \frac{1}{2}\log d_{\text{in}}$ 时。然而，这一物理机制至少可以有两种解释：

  解释一（纠缠楔转变）： 引力反作用可能会在操作意义上有效地使岛回到黑洞的纠缠楔中。在这种情况下，内部信息不属于浴系统的纠缠楔，因此，任何仅作用于该系统的物理操作都无法改变内部信息，从而恢复半经典因果性。

  要检验这一解释，理想情况下需要在反作用几何上显式计算岛公式（或量子极值面），以确定纠缠楔的归属。不过，在我们的设定中，这类计算在技术上颇具挑战。作为替代，可以采用一种更简单的判据：考察内部参考系统与由浴、外部参考系统和环境组成的联合系统之间的解耦条件。具体而言，可以计算 R´enyi 二阶互信息 $I^{(2)}(ref(in); B \cup ref(ex) \cup E)$，其中 B 表示浴系统。

  如果该互信息为零（表明发生了解耦），这将意味着内部参考系统与组合系统 $B \cup ref(ex) \cup E$ 解耦，而该组合系统

可以解释为内部属于黑洞的纠缠楔，而非浴的纠缠楔。反之，如果互信息仍不为零，则内部仍与浴系统纠缠，这与内部仍位于辐射的纠缠楔中相一致。[22] 探究这一方向将为解释一提供一项具体检验。

解释 2（信息编码稀释）： 另一种可能是，岛在几何上仍位于霍金辐射（浴系统）的纠缠楔内，但引力反作用有效地增大了误差扰动内部信息所需的负相干信息，因而使其超出相干信息阈值（2.47），如第 3.1 节所述。

在这种情况下，误差引起的引力反作用会在半经典意义上增大浴系统的有效维数。事实上，由（3.9）可知，引力反作用会使浴的半经典熵增加，

$$S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) \quad \Longrightarrow \quad S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) + 2\Delta. \tag{4.1}$$

另一方面，环境系统的维数不受反作用影响，保持不变。结合这些观察和相干信息的定义（2.34），我们可以看到，与没有引力反作用的情况相比，要达到 R´ényi 二阶互信息取非零值的参数区域会更加困难。要达到这样的参数区域，必须考虑比无反作用情形更强的误差，但更强的误差会引起更大的引力反作用。更大的反作用又会进一步增大浴系统的有效维数。如此反复推演，R´ényi 二阶互信息取非零值的参数区域便会超出相干信息阈值（2.47），因此永远无法达到，如第 3.1 节所述。这一现象的重要之处在于，误差引起的引力反作用有效地增大了浴系统的维数。

可以将这种情况理解为：引力反作用“稀释”了内部信息在引力浴中的编码，因为编码内部信息的浴系统的有效维数变大了。尽管内部码子空间的编码自由度总数保持不变，但每个浴自由度所携带的关于内部码子空间的信息都减少了。因此，误差信道 $\mathcal{E}$ 提取的信息不足以扰乱

[22]现阶段，由于缺乏底层微观模型的详细说明，这项计算难以开展。不过，对于本文正文重点关注的解耦条件，并不需要如此详尽的细节。

内部信息，从而使其受到保护。若要进一步探究这一解释，就需要更深入地从微观层面理解引力反作用及其对信息编码结构的影响。

厘清哪种解释是正确的，仍是未来研究的一个重要方向。无论采用哪种解释，我们的核心发现都稳健成立：引力反作用确保互信息消失 $I^{(2)}_{|\Psi'\rangle}(ref(in);\, ref(ex)\cup E) = 0 \mathrm{f}$ or$\Delta > \Delta_{\mathrm{Criti.}}$，以一种在定性上不同于非引力系统的方式保护内部信息 [21]。

• 尽管我们将量子信道视为一种错误，但从霍金辐射中提取内部信息的恢复操作本身也由量子信道实现。要从霍金辐射中提取内部信息，所需的恢复操作非常复杂，并会导致巨大的引力反作用。因此，直观来看，我们的发现意味着恢复操作本身无法获取内部信息。然而，这一论证需要仔细审视。本文关注的错误是不依赖于黑洞微观态的错误。如果错误依赖于黑洞微观态（恢复操作通常如此），我们就不能直接应用本文的发现，而需要仔细重新计算相关量。我们将这一重要问题留待未来研究。

• 我们研究双重 PSSY（西海岸）模型中浴系统存在引力效应时的量子纠错性质。该构型对应于蒸发黑洞的二维引力模型，其足够简单，因而可以对许多量进行解析计算。然而，为确立我们论证的普遍性，有必要在其他构型中研究量子纠错性质。例如，一个自然的推广是考虑双全息构型，这将使我们能够探索更高维情形，并进一步揭示引力与量子纠错之间的相互作用。

致谢

本研究部分得到了文部科学省科研费变革性研究领域 A“极端宇宙”资助项目（编号：21H05184）的支持。T.U 也部分得到了文部科学省科研费（项目编号：JP25K00997 和 25K07289）的支持。

A 引力浴中的 R´enyi 二阶熵的计算

在本附录中，我们使用主导鞍点近似计算第 ´2 节中出现的 Rényi 二熵。 正如我们在第2.8小节开头所述，在给出 Rényi 二相关量的结果时，我们使用´，它表示基于主导鞍点近似的近似等式。 ≈

我们主要采用西海岸模型[12, 32]中使用的方法进行这些计算。由于出现了 Kraus 算子，我们首先需要确定如何计算包含 Kraus 算子的重叠。

A.1 包含 Kraus 算子的西海岸模型

在本小节中，我们将说明如何在西海岸模型中纳入作用于黑洞微观态的算符，例如 Kraus 算子。我们首先在没有引力反作用的探针极限下，考察这些 Kraus 算子的影响。这样我们便可以从不含 EoW 膜的几何开始，随后再在这个带有算符插入的固定几何中确定这些 EoW 膜的构型。

在这种情况下，我们可以按照附录 E 的 [15] 和 [46, 47]中的讨论，将引力态 $|\psi^\alpha\rangle$ 展开为边界哈密顿量特征值的形式。对于微正则情形，该展开可表示为

$$|\psi^\alpha\rangle = \sum_{a=1}^{d_{BH}} C_{\alpha a} |a\rangle \,, \tag{A.1}$$

其中， $C_{\alpha a}$ 是复高斯随机变量，在记作上横线的高斯随机平均下满足归一化条件 $\overline{C_{\alpha a} C^*_{\beta a}} = \delta_{ab}\delta_\alpha$； $|a\rangle$ 是边界哈密顿量的一个正交归一特征态。这里，高斯随机平均对应于引力路径积分。利用这一展开，我们可以计算期望值乘积 $\langle\psi^\alpha|\mathcal{O}|\psi^\beta\rangle$的引力路径积分。例如，考虑以下期望值乘积

$$\langle\psi^{\alpha_1}|\mathcal{O}_1|\psi^{\beta_1}\rangle \langle\psi^{\alpha_2}|\mathcal{O}_2|\psi^{\beta_2}\rangle = \sum_{a_1,a_2,b_1,b_2=1}^{d_{BH}} C^*_{\alpha_1 a_1} C_{\beta_1 b_1} C^*_{\alpha_2 a_2} C_{\beta_2 b_2} \cdot \langle a_1|\mathcal{O}_1|b_1\rangle \langle a_2|\mathcal{O}_2|b_2\rangle \,. \tag{A.2}$$

对该量取高斯随机平均，可得

$$
\begin{aligned}
&\overline{\langle\psi^{\alpha_1}|\mathcal{O}_1|\psi^{\beta_1}\rangle\langle\psi^{\alpha_2}|\mathcal{O}_2|\psi^{\beta_2}\rangle} \\
&= \sum_{a_1,a_2,b_1,b_2=1}^{d_{BH}} \overline{C^*_{\alpha_1 a_1} C_{\beta_1 b_1} C^*_{\alpha_2 a_2} C_{\beta_2 b_2}} \cdot \langle a_1|\mathcal{O}_1|b_1\rangle\langle a_2|\mathcal{O}_2|b_2\rangle \\
&= \sum_{a_1,a_2,b_1,b_2=1}^{d_{BH}} \left[\delta_{\alpha_1\beta_1}\delta_{a_1 b_1}\delta_{\alpha_2\beta_2}\delta_{a_2 b_2} + \delta_{\alpha_1\beta_2}\delta_{a_1 b_2}\delta_{\alpha_2\beta_1}\delta_{a_2 b_1}\right] \cdot \langle a_1|\mathcal{O}_1|b_1\rangle\langle a_2|\mathcal{O}_2|b_2\rangle \\
&= \delta_{\alpha_1\beta_1}\cdot\delta_{\alpha_2\beta_2}\cdot \mathrm{tr}_{BH}\left[\mathcal{O}_1\right]\cdot\mathrm{tr}_{BH}\left[\mathcal{O}_2\right] + \delta_{\alpha_1\beta_2}\delta_{\alpha_2\beta_1}\cdot\mathrm{tr}_{BH}\left[\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\right] \\
&= (d_{BH})^2\cdot\delta_{\alpha_1\beta_1}\cdot\delta_{\alpha_2\beta_2}\cdot\frac{1}{d_{BH}}\mathrm{tr}_{BH}\left[\mathcal{O}_1\right]\cdot\frac{1}{d_{BH}}\mathrm{tr}_{BH}\left[\mathcal{O}_2\right] + d_{BH}\cdot\delta_{\alpha_1\beta_2}\delta_{\alpha_2\beta_1}\cdot\frac{1}{d_{BH}}\mathrm{tr}_{BH}\left[\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\right].
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

若令 $\mathcal{O}_2$ 为恒等算符，则上式可简化为

$$
\begin{aligned}
&\overline{\langle\psi^{\alpha_1}|\psi^{\beta_1}\rangle\langle\psi^{\alpha_2}|\mathcal{O}_2|\psi^{\beta_2}\rangle} \\
&= (d_{BH})^2\cdot\delta_{\alpha_1\beta_1}\cdot\delta_{\alpha_2\beta_2}\cdot\frac{1}{d_{BH}}\mathrm{tr}_{BH}\left[\mathcal{O}_2\right] + d_{BH}\cdot\delta_{\alpha_1\beta_2}\delta_{\alpha_2\beta_1}\cdot\frac{1}{d_{BH}}\mathrm{tr}_{BH}\left[\mathcal{O}_2\right] \\
&= \overline{\langle\psi^{\alpha_1}|\psi^{\beta_1}\rangle\langle\psi^{\alpha_2}|\psi^{\beta_2}\rangle}\cdot\frac{1}{d_{BH}}\mathrm{tr}_{BH}\left[\mathcal{O}_2\right].
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

通过推广这些计算，我们可以得到西海岸模型中的以下规则，其中算符作用于状态 $|\psi^\alpha\rangle$。

1. 若在引力重叠中插入算符（例如，见图4），则在与括号对应的 AdS 边界中间添加一个表示该算符的方框。

2. 与通常的西海岸模型一样，我们考虑用 EoW 膜封闭给定 AdS 边界（有无算符均可）的各种可能构型。

3. 若由 AdS 边界和 EoW 膜封闭的时空中没有插入算符，则为该时空赋值 d_{BH}。若有多个时空未插入算符，则分别为它们赋值 d_{BH}。反之，若在由 AdS 边界和 EoW 膜封闭的时空中插入了算符，则沿时空边界的取向排列这些算符，并在算符作用的黑洞希尔伯特空间中取迹。若还有其他含算符的时空，则对每个时空执行上述操作。

4. 最后，霍金辐射的贡献可按照通常的西海岸模型计算，同时适当考虑由 EoW 膜产生的克罗内克δ。

A.2 R´enyi 二阶熵

既然我们已经给出了评估包含 Kraus 算符的引力重叠的方法，接下来就来计算 R´ényi 二阶熵（2.27）、（2.28）和（2.29）。

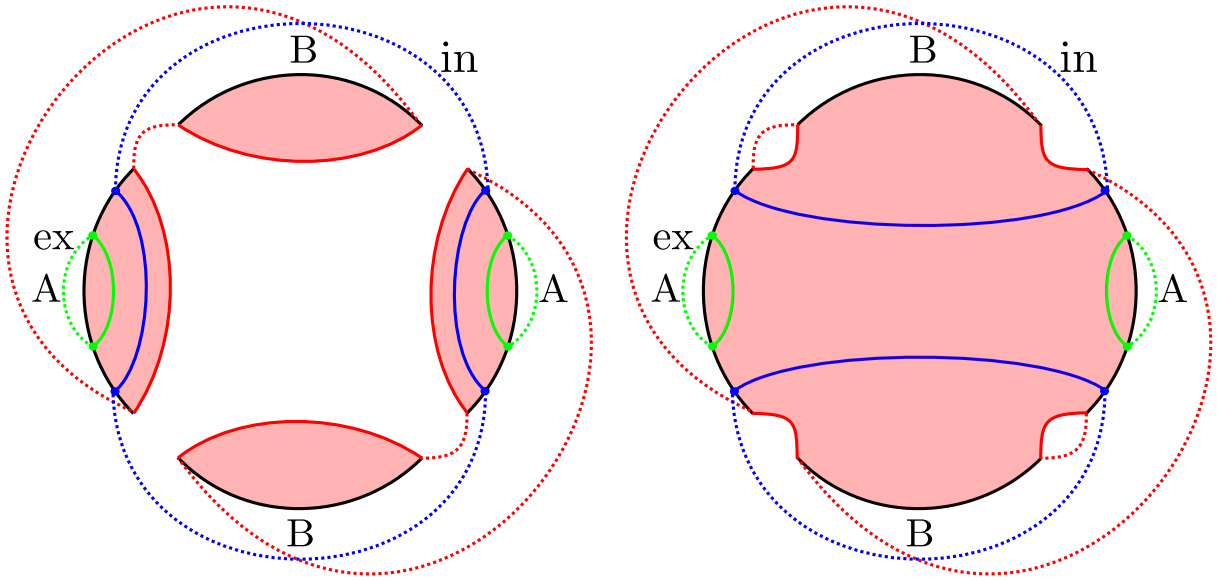
在计算这些 R´enyi 二阶熵时，将鞍点分为两类会比较方便：非连通族（例如图 15a），其中不包含连接两个不同副本的（复制虫洞）鞍点；以及连通族（例如图 15b），其中包含这类鞍点。非连通族有四个鞍点，连通族有十个鞍点。

可以明确验证，属于非连通族的鞍点对应的纯度 (2.27)、(2.28) 和 (2.29)，其贡献至多为 $\max\{k^a(d_{BH})^b|a+b=6,a,b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ 阶。另一方面，连通族对应的纯度至多为 $\max\{k^a(d_{BH})^b|a+b=4,a,b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ 阶。我们还注意到，归一化因子 N 的阶为 $\max\{k^a(d_{BH})^b|a+b=3,a,b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$。因此，若没有来自 Kraus 算子的贡献，那么只要考虑平面极限 $k,e^{S_{BH}}\gg 1$，与非连通族相关的 R´enyi 二阶熵就会占主导。不过，情况并非如此：对于 (2.28) 和 (2.29)，我们还会得到来自 Kraus 算子的贡献。在这种情况下，Kraus 算子会带来额外贡献，这意味着连通族对应的纯度 (2.28) 和 (2.29) 大致为 $\max\{k^a(d_{BH})^b(d_E)^2|a+b=4,a,b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ 阶。由于纯度的内在结构，Kraus 算子的贡献无法改变非连通族对应的纯度，因此它们仍为 $\max\{k^a(d_{BH})^b|a+b=6,a,b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ 阶。因此，如果 Kraus 算子的贡献与霍金辐射或黑洞的维数处于相当的量级，即 $d_E\sim k,d_{BH}$，连通族就可能给出主导贡献。

A.2.1 内部参考系的 R´ényi-二熵

首先，我们从计算 R´ényi-二熵 (2.27) 开始，其中不包括 Kraus 算子 E_m。在这种情况下，不连通族与连通族之间的竞争仅由霍金辐射和黑洞的维数决定。

既然我们已经给出了图示 3中的引力路径积分边界条件，就可以在该边界条件下以路径积分图示法进行计算。量（2.27）的两个引力路径积分可用图15图示。仍有十二个部分连接图。



(a) 完全不连通鞍点　　(b) 全连接鞍点

图 15：在图 ′所示的边界条件下，对 Rényi 二阶熵（2.27）的引力路径积分有两个候选鞍点。此外，还有九个部分连接鞍点。

非连通族 注意到，根据定义，非连通族不包括具有连接不同副本的复制虫洞的鞍点，因此它们对 $\mathrm{tr}\left(\rho'_{ref(in)}\right)^2$ 的贡献可以写成密度矩阵的引力路径积分纯度，

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{tr}\left(\rho'_{ref(in)}\right)^2}\Big|_{\text{Disconnected}} &= \mathrm{tr}\left(\overline{\rho'_{ref(in)}}\right)^2 \\
&= \frac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\sum_{i=1}^{d_{in}}\sum_{i'=1}^{d_{ex}} \overline{\langle\Psi_{i_2,i'_1}|\Psi_{i_1,i'_1}\rangle}\cdot\overline{\langle\Psi_{i_1,i'_2}|\Psi_{i_2,i'_2}\rangle} \\
&= \frac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\sum_{i=1}^{d_{in}}\sum_{i'=1}^{d_{ex}} N^2\delta_{i_2i_1}\delta_{i_1i_2}\cdot\delta_{i_1i_1}\delta_{i_2i_2} \\
&= \frac{1}{d_{in}},
\end{aligned} \tag{A.5}$$

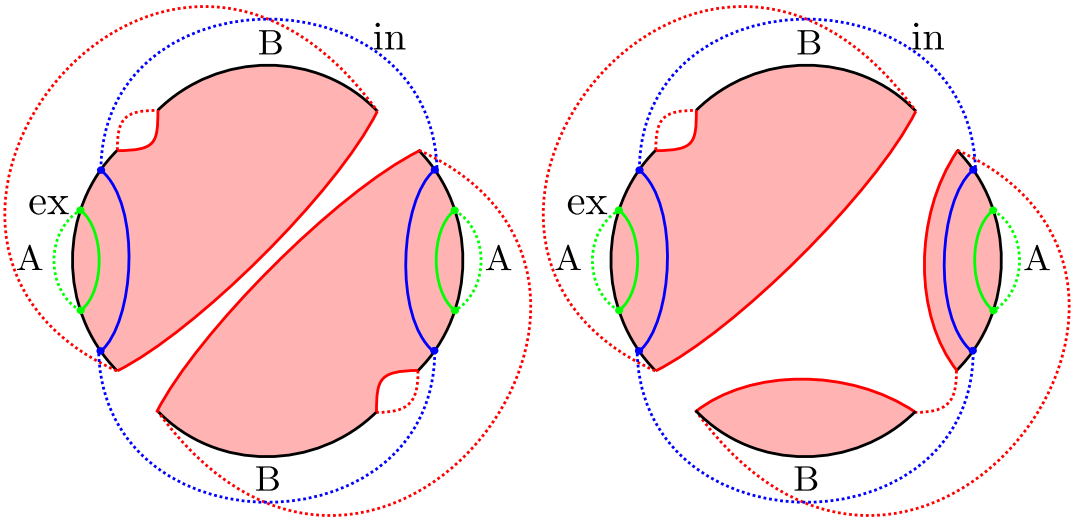
其中在第三行中，我们使用了结果（2.17）、（2.18）。我们注意到，这个纯度为一阶量，即 $k^0e^{0\cdot S_{BH}}$，这与我们在本小节开头给出的估计一致

所作的估计，

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{tr}\left(\rho'_{ref(in)}\right)^2}\Big|_{\text{Disconnected}} &\sim \frac{\max\{k^a(d_{BH})^b|a+b=6,a,b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}}{\left(\max\{k^a(d_{BH})^b|a+b=3,a,b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}\right)^2}\\ &\sim \frac{\max\{k^a(d_{BH})^b|a+b=6,a,b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}}{\max\{k^a(d_{BH})^b|a+b=6,a,b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}}\\ &\sim 1.\end{aligned} \tag{A.6}$$

因此，该表达式给出了非连通族的 R´ényi-二阶熵，

$$\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in)}\right)}\Big|_{\text{Disconnected}} = \log d_{in}. \tag{A.7}$$



(a) 双-A，B-虫洞鞍点　　(b) 单个-A，B-虫洞

图 16：属于非连通族的其他候选鞍点，用于计算引力路径积分的 R´ényi-二阶熵（2.27），其边界条件如图3所示。

在讨论连通族之前，我们先澄清非连通族的组成部分，该族由四个鞍点构成。尽管在推导上述非连通族的熵时，我们没有明确考虑这四个鞍点，但可以明确计算每个贡献。对它们进行明确计算可得

$$\begin{aligned}&\overline{\mathrm{tr}\left(\rho'_{ref(in)}\right)^2}\Big|_{\text{Disconnected}}\\ &= \frac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\left[d_{in}d_{ex}\cdot k^2(d_{BH})^4 + d_{in}d_{ex}\cdot k^4(d_{BH})^2 + 2d_{in}d_{ex}\cdot k^3(d_{BH})^3\right].\end{aligned} \tag{A.8}$$

第一项源自完全不连通鞍点（图 15a），而第二项来自双（A, B）虫洞鞍点（图 16a），其中包含连接每个副本中宇宙 A 与 B 的两个虫洞。第三项源自单（A, B）虫洞鞍点（图 16b），其中包含一个连接两个副本之一中的宇宙 A与B的单一虫洞。因此，根据 k和 d_{BH} 的幂次，在早期时间 $k < d_{BH}$，对应于全连接鞍点的第一项占主导地位；而在晚期$d_{BH} < k$，对应于双（A, B）虫洞鞍点的第二项占主导地位；

$$\begin{aligned}\overline{\operatorname{tr}\left(\rho'^{\,}_{ref(in)}\right)^2}\Big|_{\text{Disconnected}} &\approx \begin{cases} \dfrac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\cdot d_{in}d_{ex}\cdot k^2(d_{BH})^4 & \text{for } k < d_{BH} \\ \dfrac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2} d_{in}d_{ex}\cdot k^4(d_{BH})^2 & \text{for } d_{BH} < k \end{cases} \\ &\approx \frac{1}{d_{in}},\end{aligned} \tag{A.9}$$

最后一行中，我们使用了归一化因子的近似式（2.20）。这复现了早期和晚期的先前结果（A.5）。

连通族 接下来，我们关注连通族，其中包括连接不同副本的复制虫洞鞍点。在这种情况下，与断连情形（A.5）不同，我们不能简单地计算纯度，而需要直接对连通族中的所有可能鞍点进行计算。我们可以通过图示的方式计算这些鞍点：列出可能的十种图示，其中包括复制虫洞；同时注意，与内部激发相对应的膜必须具有穿过切口的构型。由此得到以下纯度，

$$\begin{aligned}&\overline{\operatorname{tr}\left(\rho'^{\,}_{ref(in)}\right)^2}\Big|_{\text{Connected}} \\ &= \frac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\big[(d_{in})^2(d_{ex})^2\cdot k^3 d_{BH} + (d_{in})^2(d_{ex})^2\cdot k(d_{BH})^3 \\ &\qquad + 3d_{in}(d_{ex})^2\cdot k^2(d_{BH})^2 + 2(d_{in})^2(d_{ex})^2\cdot k^2(d_{BH})^2 + 3d_{in}(d_{ex})^2\cdot k(d_{BH})^3\big],\end{aligned} \tag{A.10}$$

其中第一项来自全连接鞍点（图 15b），第二项来自（A, A）虫洞鞍点（图 17），其中包括连接两个复制宇宙的副本虫洞 A，其余各项则来自其他部分连通的副本虫洞鞍点，这些项对于我们的讨论并非必要。正如我们在本小节开头所指出的，这些未包含归一化因子的项的量级为$\{k^a(d_{BH})^b | a+b=4,\ a,\ b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$。

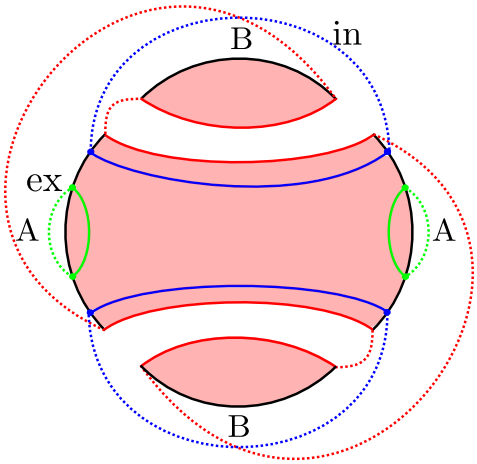


图 17：(A, A)-虫洞鞍点示意图。此鞍点包含连接两个复制宇宙 A 的副本虫洞。

在耳 时间 $k < d_{BH}$ 以及晚期 $d_{BH} < k$，该纯度可近似写为

$$\begin{aligned}
&\overline{\operatorname{tr}\left(\rho'_{ref(in)}\right)^2}\Big|_{\text{Connected}} \\
&\approx \begin{cases} \dfrac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\cdot(d_{in})^2(d_{ex})^2\cdot k(d_{BH})^3 & \text{for } k < d_{BH} \\ \dfrac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\cdot(d_{in})^2(d_{ex})^2\cdot k^3 d_{BH} & \text{for } d_{BH} < k \end{cases} \\
&\approx \frac{1}{kd_{BH}},
\end{aligned} \tag{A.11}$$

其中，在第一次近似中，我们使用了 $d_{in} \gg 1$，而在第二次近似中，我们使用了（2.20）。因此，我们得到连通族的 R´二阶 Rényi 熵，

$$\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in)}\right)}\Big|_{\text{Connected}} = \log k + \log d_{BH}. \tag{A.12}$$

非连通族与连通族 将非连通族与连通族的R´enyi-二熵结合起来，我们得到早期时间 $k < d_{BH}$ 与晚期 $d_{BH} < k$的R´enyi-二熵，

$$\begin{aligned}
&\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in)}\right)} \\
&= \min\left[\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in)}\right)}\Big|_{\text{Disconnected}}, \overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in)}\right)}\Big|_{\text{Connected}}\right] \\
&\approx \min\left[\log d_{in}, \log k + \log d_{BH}\right] \\
&= \log d_{in},
\end{aligned} \tag{A.13}$$

其中，在最后一行，我们使用了 $d_{in} \ll d_{BH}$。因此，在该R´enyi-二熵中，非连通族在早期时间 $k < d_{BH}$ 与晚期 $d_{BH} < k$始终占主导。

A.2.2 参考系统与环境系统的 R´enyi-二熵

接下来，我们关注 R´enyi-二熵，（2.28）和（2.29），并对不连通族与连通族进行计算。与内部参考系统的 R´enyi-二熵不同，Kraus 算子的贡献会进入（2.28）和（2.29）的引力路径积分的计算。

由于我们已经如图 4a 和 4b 所示给出了引力路径积分的边界条件，因此我们可以再次在这些边界条件下以图解方式进行路径积分。

非连通族 与前一种情况一样，我们可以直接计算 Rényi 二阶熵（2.28）和（2.29），得到非连通族如下：

$$
\begin{aligned}
&\overline{\operatorname{tr}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)^2}\Big|_{\text{Disconnected}} \\
&= \operatorname{tr}\left(\overline{\rho'_{ref(in),ref(ex),E}}\right)^2 \\
&= \frac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{d_{in}}\sum_{\boldsymbol{i'}=1}^{d_{ex}}\sum_{\boldsymbol{m}=1}^{d_E}\overline{\langle\Psi_{i_2,i'_2}|E^\dagger_{m_2}E_{m_1}|\Psi_{i_1,i'_1}\rangle}\cdot\overline{\langle\Psi_{i_1,i'_1}|E^\dagger_{m_1}E_{m_2}|\Psi_{i_2,i'_2}\rangle} \\
&= \frac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{d_{in}}\sum_{\boldsymbol{i'}=1}^{d_{ex}}\sum_{\boldsymbol{m}=1}^{d_E}\delta_{i_2i_1}\delta_{i'_2i'_1}N\cdot\frac{1}{d_{BH}}\operatorname{tr}\left[E^\dagger_{m_2}E_{m_1}\right]\cdot\delta_{i_1i_2}\delta_{i'_1i'_2}N\cdot\frac{1}{d_{BH}}\operatorname{tr}\left[E^\dagger_{m_1}E_{m_2}\right] \\
&= \frac{1}{d_{in}d_{ex}}\cdot\frac{1}{(d_{BH})^2}\sum_{\boldsymbol{m}=1}^{d_E}\operatorname{tr}\left[E^\dagger_{m_2}E_{m_1}\right]\operatorname{tr}\left[E^\dagger_{m_1}E_{m_2}\right],
\end{aligned}
\tag{A.14}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\overline{\operatorname{tr}\left(\rho'_{ref(ex),E}\right)^2}\Big|_{\text{Disconnected}} \\
&= \operatorname{tr}\left(\overline{\rho'_{ref(ex),E}}\right)^2 \\
&= \frac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{d_{in}}\sum_{\boldsymbol{i'}=1}^{d_{ex}}\sum_{\boldsymbol{m}=1}^{d_E}\overline{\langle\Psi_{i_1,i'_2}|E^\dagger_{m_2}E_{m_1}|\Psi_{i_1,i'_1}\rangle}\cdot\overline{\langle\Psi_{i_2,i'_1}|E^\dagger_{m_1}E_{m_2}|\Psi_{i_2,i'_2}\rangle} \\
&= \frac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{d_{in}}\sum_{\boldsymbol{i'}=1}^{d_{ex}}\sum_{\boldsymbol{m}=1}^{d_E}\delta_{i_1i_1}\delta_{i'_2i'_1}N\cdot\frac{1}{d_{BH}}\operatorname{tr}\left[E^\dagger_{m_2}E_{m_1}\right]\cdot\delta_{i_2i_2}\delta_{i'_1i'_2}N\cdot\frac{1}{d_{BH}}\operatorname{tr}\left[E^\dagger_{m_1}E_{m_2}\right] \\
&= \frac{1}{d_{ex}}\cdot\frac{1}{(d_{BH})^2}\sum_{\boldsymbol{m}=1}^{d_E}\operatorname{tr}\left[E^\dagger_{m_2}E_{m_1}\right]\operatorname{tr}\left[E^\dagger_{m_1}E_{m_2}\right].
\end{aligned}
\tag{A.15}
$$

这里我们用到了以下性质，它可由式（2.32）推出：

$$
\overline{\langle\Psi_{i_1,i'_1}|\mathcal{O}|\Psi_{i_2,i'_2}\rangle} = \overline{\langle\Psi_{i_1,i'_1}|\Psi_{i_2,i'_2}\rangle}\cdot\frac{1}{d_{BH}}\operatorname{tr}\left[\mathcal{O}\right]. \tag{A.16}
$$

定义 σ_E 为（2.35），

$$
\sigma_E = \sum_{m,n=1}^{d_E}\frac{\operatorname{tr}\left\{E_mE_n^\dagger\right\}}{d_{BH}}\left|e_m\right\rangle_E\left\langle e_n\right|,
$$

上述表达式可简洁地写为

$$
\overline{\operatorname{tr}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)^2}\Big|_{\text{Disconnected}} = \frac{1}{d_{in}d_{ex}}\cdot\operatorname{tr}\left[(\sigma_E)^2\right], \tag{A.17}
$$

and

$$
\overline{\operatorname{tr}\left(\rho'_{ref(ex),E}\right)^2}\Big|_{\text{Disconnected}} = \frac{1}{d_{ex}}\cdot\operatorname{tr}\left[(\sigma_E)^2\right], \tag{A.18}
$$

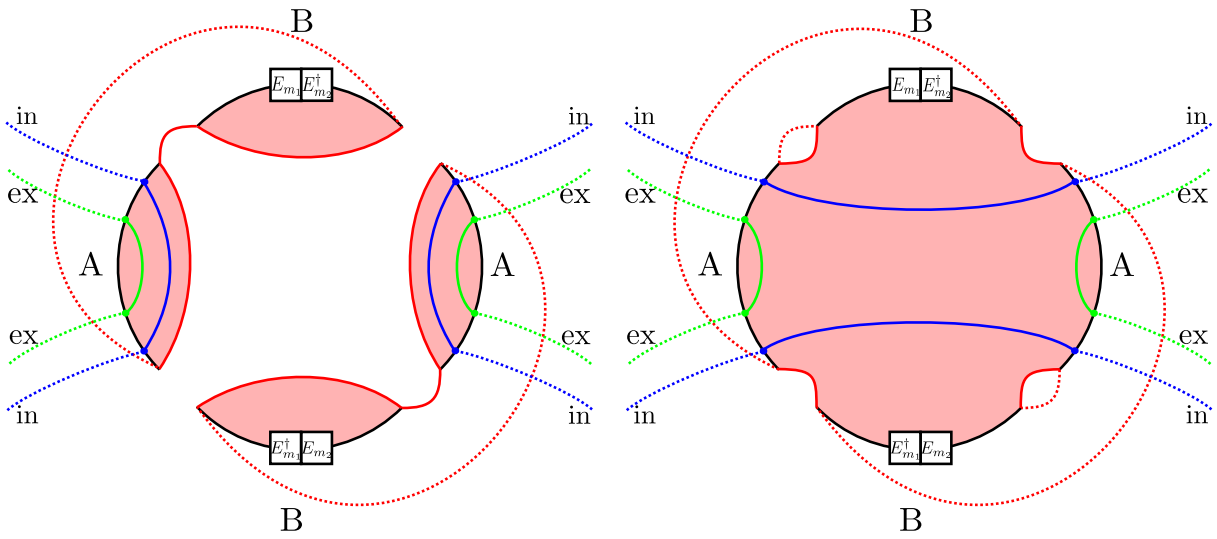
因此，非连通族的 Rényi 二阶熵，

$$
\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)}\Big|_{\text{Disconnected}} \approx \log d_{in} + \log d_{ex} + S^{(2)}(\sigma_E), \tag{A.19}
$$

and

$$
\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(ex),E}\right)}\Big|_{\text{Disconnected}} \approx \log d_{ex} + S^{(2)}(\sigma_E). \tag{A.20}
$$

这一结果展现了纠缠结构：两个参考系统和环境系统分别与其他系统纠缠，而彼此之间并不纠缠；换言之，它们子系统的纠缠楔彼此不连通。



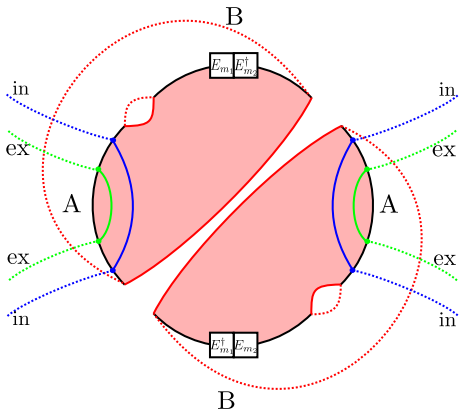
(a) 完全不连通鞍点　　(b) 全连接鞍点

图 18：引力路径积分的完全不连通图示和连通图示，适用于边界条件下的 R´enyi-二熵，式（2.28）和式（2.29），其中边界条件如图 4a和 4b所示。在这些图示中，我们需要正确缩并代码指标（蓝色和绿色虚线），使所得缩并与图4a和 4b中的边界条件一致。

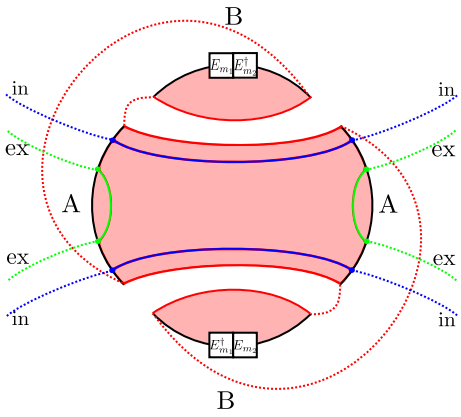
我们注意到，早期时间 $k < d_{BH}$和晚期 $k > d_{BH}$，非连通族中的主导几何仍分别由完全不连通鞍点（图 18a）和双（A、 B）虫洞鞍点（图 19a）给出。此外还要注意，与之前不含 Kraus 算符的情形不同，当前的鞍点包含位于宇宙 B的 AdS 边界上的 Kraus 算符。

连通族 接下来，我们考虑连通族的 Rényi-二熵。同样，在这种情况下，我们无法直接计算它们，但可以逐一计算。这些蛮力计算得出以下结果

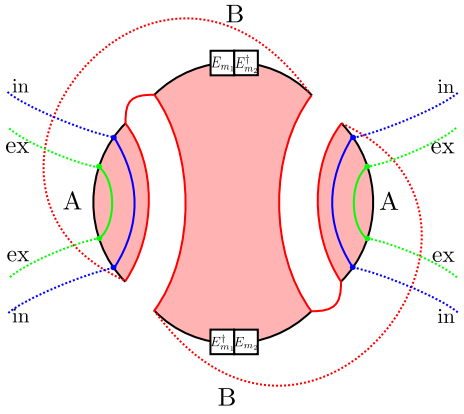
$$\begin{aligned}
&\overline{\operatorname{tr}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)^2}\Big|_{\text{Connected}} \\
&= \frac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\cdot d_{ex}\cdot \operatorname{tr}[(\sigma_{\text{Bath}})^2]\cdot\left\{(d_{in})^2\cdot k^3(d_{BH})^2 + d_{in}\cdot k(d_{BH})^4 + 2d_{in}\cdot k^2(d_{BH})^3\right\} \\
&\quad + \frac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\cdot d_{ex}\cdot \operatorname{tr}\left[(\sigma_E)^2\right]\cdot\left\{2(d_{in})^2\cdot k^2(d_{BH})^2 + (d_{in})^2\cdot k(d_{BH})^3\right. \\
&\qquad\qquad \left. + d_{in}\cdot k^2(d_{BH})^2 + 2d_{in}\cdot k(d_{BH})^3\right\}
\end{aligned} \tag{A.21}$$



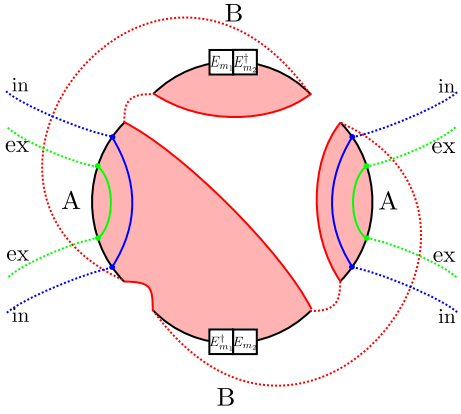
(a) 两个（A，B）虫洞



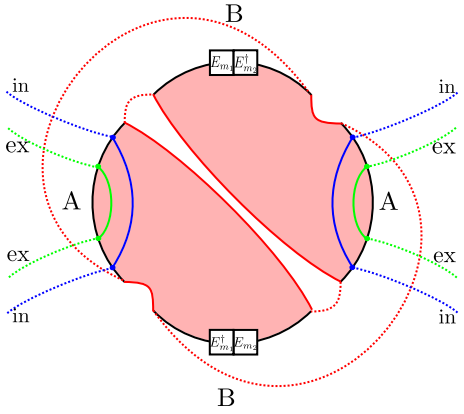
(b) 一个（A，A）副本虫洞



(c) 一个（B，B）副本虫洞



(d) 一个（A，B）副本虫洞



(e) 两个（A，B）副本虫洞

图19：部分连接图。在这些图示中，我们再次需要正确缩并代码指标，使所得缩并与图4a和4b中的边界条件一致。

and

$$\begin{aligned}
&\overline{\operatorname{tr}\left(\rho'_{ref(ex),E}\right)^2}\Big|_{\text{Connected}} \\
&= \frac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\cdot d_{ex}\cdot \operatorname{tr}[(\sigma_{\text{Bath}})^2]\cdot\left\{d_{in}\cdot k^3(d_{BH})^2+(d_{in})^2\cdot k(d_{BH})^4+2(d_{in})^2\cdot k^2(d_{BH})^3\right\} \\
&\quad+\frac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\cdot d_{ex}\cdot \operatorname{tr}\left[(\sigma_E)^2\right]\cdot\left\{2d_{in}\cdot k^2(d_{BH})^2+d_{in}\cdot k(d_{BH})^3\right. \\
&\qquad\qquad\left.+(d_{in})^2\cdot k^2(d_{BH})^2+2(d_{in})^2\cdot k(d_{BH})^3\right\}.
\end{aligned} \tag{A.22}$$

此处， σ_{Bath} 由（2.36）给出，

$$\sigma_{\text{Bath}}=\sum_{m=1}^{d_E}E_m\left(\frac{I_{BH}}{d_{BH}}\right)E_m^\dagger.$$

为了选取主导鞍点贡献，我们再次关注早期时间 $k<d_{BH}$ 和晚期 $d_{BH}<k$。在这些时间段内，$\overline{\operatorname{tr}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)^2}\Big|_{\text{Connected}}$ 可近似为

$$\begin{aligned}
&\overline{\operatorname{tr}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)^2}\Big|_{\text{Connected}} \\
&\approx\begin{cases}
\dfrac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\cdot d_{ex}\left\{\operatorname{tr}[(\sigma_{\text{Bath}})^2]\cdot d_{in}\cdot k(d_{BH})^4+\operatorname{tr}\left[(\sigma_E)^2\right]\cdot(d_{in})^2\cdot k(d_{BH})^3\right\} & \text{for } k<d_{BH} \\
\dfrac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\cdot d_{ex}\cdot\operatorname{tr}[(\sigma_{\text{Bath}})^2]\cdot(d_{in})^2\cdot k^3(d_{BH})^2 & \text{for } d_{BH}<k
\end{cases} \\
&\approx\begin{cases}
\dfrac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\cdot d_{ex}\cdot\operatorname{tr}\left[(\sigma_E)^2\right]\cdot(d_{in})^2\cdot k(d_{BH})^3 & \text{for } k<d_{BH} \\
\qquad\qquad\text{with } S^{(2)}(\sigma_E)+\log d_{BH}-S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}})<\log d_{in} & \\
\dfrac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\cdot d_{ex}\cdot\operatorname{tr}[(\sigma_{\text{Bath}})^2]\cdot d_{in}\cdot k(d_{BH})^4 & \text{for } k<d_{BH} \\
\qquad\qquad\text{with } S^{(2)}(\sigma_E)+\log d_{BH}-S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}})>\log d_{in} & \\
\dfrac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\cdot d_{ex}\cdot\operatorname{tr}[(\sigma_{\text{Bath}})^2]\cdot(d_{in})^2\cdot k^3(d_{BH})^2 & \text{for } d_{BH}<k,
\end{cases}
\end{aligned} \tag{A.23}$$

其中，在获 得第一个近似等式的第二种情况时，我们使用了关系[23]

$$d_{BH}\cdot\operatorname{tr}[(\sigma_{\text{Bath}})^2]\geq\operatorname{tr}[(\sigma_E)^2]. \tag{A.24}$$

这里，第一种情况来自（A、 A）虫洞鞍点（图 19b），其中包含连接两个复制宇宙的复制虫洞 A；第二种情况来自

[23]可由弱次可加性（D.1）推导出该关系。

（B、 B）虫洞鞍点（图 19c），其中包含连接两个复制宇宙的复制虫洞 B；第三种情况来自全连接鞍点（图 18b）。接下来，$\mathrm{tr}\left(\rho'_{ref(ex),E}\right)^2\Big|_{\text{Connected}}$ 可以近似写成以下形式

$$
\begin{aligned}
&\overline{\mathrm{tr}\left(\rho'_{ref(ex),E}\right)^2}\Big|_{\text{Connected}} \\
&\approx \begin{cases}
\dfrac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\cdot d_{ex}\left\{\mathrm{tr}[(\sigma_{\text{Bath}})^2]\cdot(d_{in})^2\cdot k(d_{BH})^4+2\,\mathrm{tr}\left[(\sigma_E)^2\right]\cdot(d_{in})^2\cdot k(d_{BH})^3\right\} & \text{for } k<d_{BH} \\
\dfrac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\cdot d_{ex}\{\mathrm{tr}[(\sigma_{\text{Bath}})^2]\cdot d_{in}\cdot k^3(d_{BH})^2+\mathrm{tr}[(\sigma_E)^2]\cdot(d_{in})^2\cdot k^2(d_{BH})^2\} & \text{for } d_{BH}<k
\end{cases} \\
&\approx \begin{cases}
\dfrac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\cdot d_{ex}\cdot 2\,\mathrm{tr}\left[(\sigma_E)^2\right]\cdot(d_{in})^2\cdot k(d_{BH})^3 & \text{for } k<d_{BH} \\
\qquad\qquad \text{with } S^{(2)}(\sigma_E)+\log d_{BH}-S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}})<\log 2 & \\
\dfrac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\cdot d_{ex}\cdot\mathrm{tr}[(\sigma_{\text{Bath}})^2]\cdot(d_{in})^2\cdot k(d_{BH})^4 & \text{for } k<d_{BH} \\
\qquad\qquad \text{with } S^{(2)}(\sigma_E)+\log d_{BH}-S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}})>\log 2 & \\
\dfrac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\cdot d_{ex}\cdot\mathrm{tr}[(\sigma_E)^2]\cdot(d_{in})^2\cdot k^2(d_{BH})^2 & \text{for } d_{BH}<k \\
\qquad\qquad \text{with } S^{(2)}(\sigma_E)+\log k-S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}})<\log d_{in} & \\
\dfrac{1}{(d_{in}d_{ex}N)^2}\cdot d_{ex}\cdot\mathrm{tr}[(\sigma_{\text{Bath}})^2]\cdot d_{in}\cdot k^3(d_{BH})^2 & \text{for } d_{BH}<k \\
\qquad\qquad \text{with } S^{(2)}(\sigma_E)+\log k-S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}})>\log d_{in}. &
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{A.25}
$$

第一种情况来自单个（A， B）副本虫洞鞍点（图19d），其中一个副本的宇宙 A 与另一个副本的宇宙 B 之间由一个副本虫洞连接；第二种情况来自（B， B）副本虫洞鞍点（图19c），其中一个副本虫洞连接两个复制宇宙 B；第三种情况来自两个（A， B）副本虫洞（图19e），其中两个副本虫洞连接两个不同的副本；第四种情况来自全连接鞍点（图18b）。为简化上述表达式，我们注意到，由于有不等式 $\log d_{BH}\geq S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}})$，条件

$$
S^{(2)}(\sigma_E)+\log d_{BH}-S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}})<\log 2 \tag{A.26}
$$

推出以下等式，

$$
S^{(2)}(\sigma_E)\approx 0,\quad S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}})\approx\log d_{BH}, \tag{A.27}
$$

意味着平凡错误情况。基于这一观察，将这些结果与（2.20）相结合，

我们得到以下纯度,

$$\overline{\operatorname{tr}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)^2}\Big|_{\text{Connected}}$$
$$\approx \begin{cases} \dfrac{1}{d_{ex}}\cdot\dfrac{1}{k\,d_{BH}}\cdot\operatorname{tr}\left[(\sigma_E)^2\right] & \text{for } k<d_{BH} \\ & \quad \text{with } S^{(2)}(\sigma_E)+\log d_{BH}-S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}})<\log d_{in} \\ \dfrac{1}{d_{in}\,d_{ex}}\cdot\dfrac{1}{k}\cdot\operatorname{tr}\left[(\sigma_{\text{Bath}})^2\right] & \text{for } k<d_{BH} \\ & \quad \text{with } S^{(2)}(\sigma_E)+\log d_{BH}-S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}})>\log d_{in} \\ \dfrac{1}{d_{ex}}\cdot\dfrac{1}{k}\cdot\operatorname{tr}\left[(\sigma_{\text{Bath}})^2\right] & \text{for } d_{BH}<k, \end{cases} \tag{A.28}$$

and

$$\overline{\operatorname{tr}\left(\rho'_{ref(ex),E}\right)^2}\Big|_{\text{Connected}}$$
$$\approx \begin{cases} \dfrac{1}{d_{ex}}\cdot\dfrac{1}{k}\cdot\operatorname{tr}\left[(\sigma_{\text{Bath}})^2\right] & \text{for } k<d_{BH} \\ & \quad \text{with } \log 2<S^{(2)}(\sigma_E)+\log d_{BH}-S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) \\ \dfrac{1}{d_{ex}}\cdot\dfrac{1}{k^2}\cdot\operatorname{tr}\left[(\sigma_E)^2\right] & \text{for } d_{BH}<k \\ & \quad \text{with } S^{(2)}(\sigma_E)+\log k-S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}})<\log d_{in} \\ \dfrac{1}{d_{in}\,d_{ex}}\cdot\dfrac{1}{k}\cdot\operatorname{tr}\left[(\sigma_{\text{Bath}})^2\right] & \text{for } d_{BH}<k \\ & \quad \text{with } S^{(2)}(\sigma_E)+\log k-S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}})>\log d_{in}, \end{cases} \tag{A.29}$$

其中我们忽略了平凡错误情况， $S^{(2)}(\sigma_E)+\log d_{BH}-S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}})<\log 2$。

因此，我们得到了连通族的 Rényi 二熵,

$$\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)}\Big|_{\text{Connected}}$$
$$\approx \begin{cases} \log d_{ex}+\log k+\log d_{BH}+S^{(2)}(\sigma_E) & \text{for } k<d_{BH} \\ & \quad \text{with } S^{(2)}(\sigma_E)+\log d_{BH}-S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}})<\log d_{in} \\ \log d_{in}+\log d_{ex}+\log k+S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) & \text{for } k<d_{BH} \\ & \quad \text{with } S^{(2)}(\sigma_E)+\log d_{BH}-S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}})>\log d_{in} \\ \log d_{ex}+\log k+S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) & \text{for } d_{BH}<k, \end{cases} \tag{A.30}$$

and

$$\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(ex),E}\right)}\Big|_{\text{Connected}}$$
$$\approx \begin{cases} \log d_{ex} + \log k + S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) & \text{for } k < d_{BH} \\ & \quad \text{with } \log 2 < S^{(2)}(\sigma_E) + \log d_{BH} - S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) \\ \log d_{ex} + 2\log k + S^{(2)}(\sigma_E) & \text{for } d_{BH} < k \\ & \quad \text{with } S^{(2)}(\sigma_E) + \log k - S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) < \log d_{in} \\ \log d_{in} + \log d_{ex} + \log k + S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) & \text{for } d_{BH} < k \\ & \quad \text{with } S^{(2)}(\sigma_E) + \log k - S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) > \log d_{in}. \end{cases} \tag{A.31}$$

回顾一下，式（A.30）中的第一、第二和第三种情况分别来自对应于图 19b、19c 和 18b 的鞍点，而式（A.31）中的第一、第二和第三种情况则分别来自对应于图 19c、19e 和18b的鞍点。

不连通族与连通族结果之间的竞争 现在，我们已经计算了´不连通族和连通族在早期与晚期的 Rényi 二阶熵，接下来通过从不连通族和连通族的贡献中选取较小者，计算 Rényi 二阶熵（´Rényi 二阶熵（2.28）和（2.29）。因此，Rényi 二阶熵为´

$$
\begin{aligned}
&\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)} \\
&\approx \min\left\{ \overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)}\Big|_{\text{Disconnected}}, \overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)}\Big|_{\text{Connected}} \right\} \\
&\approx \begin{cases}
\min\left\{\log d_{in}+\log d_{ex}+S^{(2)}(\sigma_E), \log d_{ex}+\log k+\log d_{BH}+S^{(2)}(\sigma_E)\right\} \\
\qquad\qquad \text{for } k<d_{BH} \text{ with } S^{(2)}(\sigma_E)+\log d_{BH}-S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}})<\log d_{in} \\
\min\left\{\log d_{in}+\log d_{ex}+S^{(2)}(\sigma_E), \log d_{in}+\log d_{ex}+\log k+S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}})\right\} \\
\qquad\qquad \text{for } k<d_{BH} \text{ with } S^{(2)}(\sigma_E)+\log d_{BH}-S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}})>\log d_{in} \\
\min\left\{\log d_{in}+\log d_{ex}+S^{(2)}(\sigma_E), \log d_{ex}+\log k+S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}})\right\} \\
\qquad\qquad \text{for } d_{BH}<k,
\end{cases} \\
&= \begin{cases}
\log d_{in}+\log d_{ex}+S^{(2)}(\sigma_E) \\
\qquad\qquad \text{for } k<d_{BH} \text{ with } \log d_{BH}-\log d_{in}<I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}}I_{BH},\mathcal{E}\right) \\
\log d_{in}+\log d_{ex}+S^{(2)}(\sigma_E) \\
\qquad\qquad \text{for } k<d_{BH} \text{ with } -\log k<I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}}I_{BH},\mathcal{E}\right)<\log d_{BH}-\log d_{in} \\
\log d_{in}+\log d_{ex}+\log k+S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) \\
\qquad\qquad \text{for } k<d_{BH} \text{ with } I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}}I_{BH},\mathcal{E}\right)<-\log k \\
\log d_{in}+\log d_{ex}+S^{(2)}(\sigma_E) \\
\qquad\qquad \text{for } d_{BH}<k \text{ with } -\log k+\log d_{in}<I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}}I_{BH},\mathcal{E}\right) \\
\log d_{ex}+\log k+S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) \\
\qquad\qquad \text{for } d_{BH}<k \text{ with } I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}}I_{BH},\mathcal{E}\right)<-\log k+\log d_{in},
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{A.32}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(ex),E}\right)} \\
&\approx \min\left\{ \overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(ex),E}\right)}\Big|_{\text{Disconnected}}, \overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(ex),E}\right)}\Big|_{\text{Connected}} \right\} \\
&\approx \begin{cases}
\min\left\{\log d_{ex} + S^{(2)}(\sigma_E),\ \log d_{ex} + \log k + S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}})\right\} \\
\qquad\qquad \text{for } k < d_{BH} \text{ with } \log 2 < S^{(2)}(\sigma_E) + \log d_{BH} - S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) \\
\min\left\{\log d_{ex} + S^{(2)}(\sigma_E),\ \log d_{ex} + 2\log k + S^{(2)}(\sigma_E)\right\} \\
\qquad\qquad \text{for } d_{BH} < k \text{ with } S^{(2)}(\sigma_E) + \log k - S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) < \log d_{in} \\
\min\left\{\log d_{ex} + S^{(2)}(\sigma_E),\ \log d_{in} + \log d_{ex} + \log k + S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}})\right\} \\
\qquad\qquad \text{for } d_{BH} < k \text{ with } S^{(2)}(\sigma_E) + \log k - S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) > \log d_{in}
\end{cases} \\
&= \begin{cases}
\log d_{ex} + S^{(2)}(\sigma_E) \\
\qquad\qquad \text{for } k < d_{BH} \text{ with } -\log k < I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right) < \log d_{BH} - \log 2 \\
\log d_{ex} + \log k + S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) \\
\qquad\qquad \text{for } k < d_{BH} \text{ with } I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right) < -\log k \\
\log d_{ex} + S^{(2)}(\sigma_E) \\
\qquad\qquad \text{for } d_{BH} < k \text{ with } \log k - \log d_{in} < I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right) \\
\log d_{ex} + S^{(2)}(\sigma_E) \\
\qquad\qquad \text{for } d_{BH} < k \text{ with } -\log k - \log d_{in} < I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right) < \log k - \log d_{in} \\
\log d_{in} + \log d_{ex} + \log k + S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) \\
\qquad\qquad \text{for } d_{BH} < k \text{ with } I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right) < -\log k - \log d_{in},
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{A.33}
$$

其中 $I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right)$ 是 Rényi 二阶相干信息（Rényi 二阶相干信息（2.34））。

仔细考察上述表达式在各种条件下的情形，我们可以发现，当 Rényi-二阶相干信息 $I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right)$ 被负数 $-\log k$ 或 $-\log k + \log d_{in}$ 所界定时，最小贡献来自非连通族中的那些项。反之，当 Rényi-二阶相干信息 $I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right)$ 不被负数 $-\log k$ 或 $-\log k + \log d_{in}$ 所界定时，最小贡献来自连通族中的那些项。这里需要指出的是，考虑弱次可加性（见 [48]的引理 4.3）后，差值

通常有一个下界[24]，

$$-\log d_{BH} \leq I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right). \tag{A.34}$$

在附录D中，我们给出由弱次可加性推导出这一下界的过程。

然后，我们可以将上述表达式简单地改写为以下形式，

$$\begin{aligned}
&\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)} \\
&\approx \min\left\{ \overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)}\Big|_{\text{Disconnected}}, \overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in),ref(ex),E}\right)}\Big|_{\text{Connected}} \right\} \\
&= \begin{cases}
\log d_{in} + \log d_{ex} + S^{(2)}(\sigma_E) \\
\qquad \text{for } k < d_{BH} \text{ with } -\log k < I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right) \\
\qquad\quad \text{and for } d_{BH} < k \text{ with } \max\{-\log k + \log d_{in}, -\log d_{BH}\} < I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right) \\
\log d_{in} + \log d_{ex} + \log k + S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) \\
\qquad \text{for } k < d_{BH} \text{ with } -\log d_{BH} < I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right) < -\log k \\
\log d_{ex} + \log k + S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) \\
\qquad \text{for } d_{BH} < k \text{ with } -\log d_{BH} < I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right) < \max\{-\log k + \log d_{in}, -\log d_{BH}\},
\end{cases}
\end{aligned} \tag{A.35}$$

and

$$\begin{aligned}
&\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(ex),E}\right)} \\
&\approx \min\left\{ \overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(ex),E}\right)}\Big|_{\text{Disconnected}}, \overline{S^{(2)}\left(\rho'_{ref(ex),E}\right)}\Big|_{\text{Connected}} \right\} \\
&= \begin{cases}
\log d_{ex} + S^{(2)}(\sigma_E) \\
\qquad \text{for } k < d_{BH} \text{ with } -\log k < I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right) \\
\qquad\quad \text{and for } d_{BH} < k \text{ with } -\log d_{BH} < I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right) \\
\log d_{ex} + \log k + S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) \\
\qquad \text{for } k < d_{BH} \text{ with } -\log d_{BH} < I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right) < -\log k.
\end{cases}
\end{aligned} \tag{A.36}$$

[24]还有另一个下界，$I_c^{(2)}\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right) = S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) - S^{(2)}(\sigma_E) \geq -S^{(2)}(\sigma_E)$。这里，由于环境系统的希尔伯特空间维数 E 为 d_E，Rényi 二阶熵满足以下界限$S^{(2)}(\sigma_E) \leq \log d_E$。因此，我们还得到了由环境系统维数给出的下界 E。

让我们回顾一下，(A.35) 和 (A.36) 中的各个情况分别对应哪些鞍点；(A.35) 和 (A.36) 中的第一种情况分别对应图18a 和19a 所示的鞍点，分别对应早期和晚期；第二种情况对应图19c所示的鞍点，而 (A.35) 中的第三种情况则对应图18b所示的鞍点。

因此，结合这些结果和（A.13），我们得到 R´enyi 二阶互信息

$$\overline{I^{(2)}_{|\Psi'\rangle}(ref(in)\,;\,ref(ex)\cup E)}$$
$$\approx \begin{cases} 0 \qquad \text{for } k < d_{BH}, \\ \qquad\qquad \text{and for } d_{BH} < k \text{ with } \max\{-\log k + \log d_{in}, -\log d_{BH}\} < I^{(2)}_c\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right) \\ (-\log k + \log d_{in}) - I^{(2)}_c\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right) \\ \qquad \text{for } d_{BH} < k \text{ with } -\log d_{BH} \le I^{(2)}_c\left(\frac{1}{d_{BH}} I_{BH}, \mathcal{E}\right) < \max\{-\log k + \log d_{in}, -\log d_{BH}\}. \end{cases} \tag{A.37}$$

这一结果类似于 [2 中的非引力结果（3.25）和（3.31） 1].

B 非引力浴中的 R´enyi 二阶量

在本附录中，我们考虑标准的西海岸模型，该模型是拓扑的，并且误差作用于非引力浴 [21] 上。

B.1 解耦条件下的 R´enyi 二阶熵和互信息

首先，与标准西海岸模型一样，我们考虑以下物理态 ，

$$|\Psi_{i,i'}\rangle_{\mathrm{NG},phys} = \frac{1}{\sqrt{N_{\mathrm{NG}}}} \sum_{\alpha=1}^{k} |\psi^{\alpha}_{i,i'}\rangle_A \, |\alpha\rangle_B \qquad (i = 1, \cdots, d_{in}, i' = 1, \cdots, d_{ex}), \tag{B.1}$$

其中，宇宙 B 上对应非引力浴的状态 $|\alpha\rangle_B$ 是一个非引力状态，这意味着该状态是严格正交归一的，不同于引力态$|\psi^{\alpha}\rangle_B$；而 N_{NG} 是一个归一化因子。归一化因子 N_{NG} 为

$$N_{\mathrm{NG}} = k\, d_{BH}, \tag{B.2}$$

其中 $d_{BH} = e^{S_0}$。

对于该物理态，一个 CPTP 误差 $\mathcal{E}'$ 具有 Kraus表示 $\{K_m\}$[25] 作用于宇宙 B,

$$K_m \left|\Psi_{i,i'}\right\rangle_{\mathrm{NG},phys} = \frac{1}{\sqrt{N_{\mathrm{NG}}}} \sum_{\alpha=1}^{k} \left|\psi^{\alpha}_{i,i'}\right\rangle_A \otimes K_m \left|\alpha\right\rangle_B . \tag{B.3}$$

我们注意到，这个误差作用于宇宙 B ，对应于霍金辐射，其希尔伯特空间维数等于 k。这种情况不同于引力浴的情形：在引力浴中，具有 Kraus 表示 $\{E_m\}$ 的误差作用于宇宙 B上的希尔伯特空间，但其维数等于 d_{BH}。

我们再次计算以下状态的 Rényi-2 互信息,

$$\left|\Psi'\right\rangle_{\mathrm{NG}} = \frac{1}{\sqrt{N_{\mathrm{NG}}\, N_{\mathrm{NG},\Psi'}}} \sum_{i=1}^{d_{in}} \sum_{i'=1}^{d_{ex}} \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{m=1}^{d_E} \left|i\right\rangle_{ref(in)} \otimes \left|i'\right\rangle_{ref(ex)} \otimes \left|\psi^{\alpha}_{i,i'}\right\rangle^*_A \otimes \left(K_m \left|\alpha\right\rangle_B\right) \otimes \left|e_m\right\rangle_E . \tag{B.4}$$

这里，归一化因子$N_{\mathrm{NG},\ \Psi'}$ 由$N_{\mathrm{NG},\ \Psi'} = d_{in}d_{ex}$给出。

为计算 Rényi-2 互信息，我们需要考虑以下纯度的引力路径积分,

$$\mathrm{tr}\left(\rho'_{\mathrm{NG};ref(in)}\right)^2 = \frac{1}{(d_{in}d_{ex}\, k\, d_{BH})^2} \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{d_{in}} \sum_{\boldsymbol{i'}=1}^{d_{ex}} \sum_{\boldsymbol{\alpha}=1}^{k} \left\langle\psi^{\alpha_1}_{i_1,i'_1}\right|\left.\psi^{\alpha_1}_{i_2,i'_1}\right\rangle_A \left\langle\psi^{\alpha 2}_{i_2,i'_2}\right|\left.\psi^{\alpha_2}_{i_1,i'_2}\right\rangle_A , \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left(\rho'_{\mathrm{NG};ref(in),ref(ex),E}\right)^2 = \frac{1}{(d_{in}d_{ex}\, k\, d_{BH})^2} &\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{d_{in}} \sum_{\boldsymbol{i'}=1}^{d_{ex}} \sum_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}=1}^{k} \sum_{\boldsymbol{m}=1}^{d_E} \left\langle\psi^{\beta_1}_{i_1,i'_1}\right|\left.\psi^{\alpha_1}_{i_2,i'_2}\right\rangle_A \left\langle\psi^{\beta_2}_{i_2,i'_2}\right|\left.\psi^{\alpha_2}_{i_1,i'_1}\right\rangle_A \\ &\times \left\langle\alpha_1\right|K^{\dagger}_{m_2}K_{m_1}\left|\beta_1\right\rangle_B \left\langle\alpha_2\right|K^{\dagger}_{m_1}K_{m_2}\left|\beta_2\right\rangle_B ,\end{aligned} \tag{B.6}$$

and

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left(\rho'_{\mathrm{NG};ref(ex),E}\right)^2 = \frac{1}{(d_{in}d_{ex}\, k\, d_{BH})^2} &\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{d_{in}} \sum_{\boldsymbol{i'}=1}^{d_{ex}} \sum_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}=1}^{k} \sum_{\boldsymbol{m}=1}^{d_E} \left\langle\psi^{\beta_1}_{i_1,i'_1}\right|\left.\psi^{\alpha_1}_{i_1,i'_2}\right\rangle_A \left\langle\psi^{\beta_2}_{i_2,i'_2}\right|\left.\psi^{\alpha_2}_{i_2,i'_1}\right\rangle_A \\ &\times \left\langle\alpha_1\right|K^{\dagger}_{m_2}K_{m_1}\left|\beta_1\right\rangle_B \left\langle\alpha_2\right|K^{\dagger}_{m_1}K_{m_2}\left|\beta_2\right\rangle_B ,\end{aligned} \tag{B.7}$$

其中，粗体字母仍表示对指标集合求和。

这些纯度的引力路径积分通过标准的西海岸模型计算 [21], 完成，结果为

$$\overline{\mathrm{tr}\left(\rho'_{\mathrm{NG};ref(in)}\right)^2} = \frac{1}{d_{in}} + \frac{1}{k\, d_{BH}} \approx \frac{1}{d_{in}}, \tag{B.8}$$

[25]由于迹保持（TP）性质，Kraus 算子满足关系 $\sum_{m=1}^{d_E} K^{\dagger}_m K_m$=I。

$$\overline{\operatorname{tr}\left(\rho'_{\mathrm{NG};\,ref(in),\,ref(ex),\,E}\right)^2} = \frac{1}{d_{in}\,d_{ex}}\operatorname{tr}\left[(\tau_E)^2\right] + \frac{1}{d_{ex}}\cdot\frac{1}{d_{BH}}\cdot\operatorname{tr}\left[(\tau_{\mathrm{Bath}})^2\right], \tag{B.9}$$

and

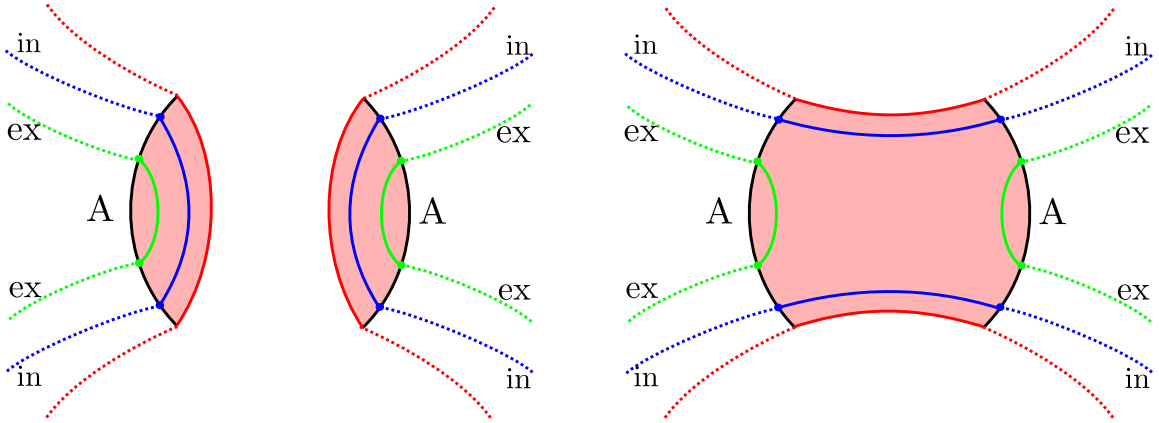
$$\overline{\operatorname{tr}\left(\rho'_{\mathrm{NG};\,ref(ex),\,E}\right)^2} = \frac{1}{d_{ex}}\operatorname{tr}\left[(\tau_E)^2\right] + \frac{1}{d_{in}\,d_{ex}}\cdot\frac{1}{d_{BH}}\cdot\operatorname{tr}\left[(\tau_{\mathrm{Bath}})^2\right], \tag{B.10}$$

其中，在（B.8）中我们使用了 $d_{in} \ll k\,d_{BH}$，且 τ_E 和 τ_{Bath} 定义为

$$\tau_E = \sum_{m,n=1}^{d_E} \frac{\operatorname{tr}_R\left\{K_m K_n^\dagger\right\}}{k}\,|e_m\rangle_E\,\langle e_n|\,, \tag{B.11}$$

$$\tau_{\mathrm{Bath}} = \sum_{m=1}^{d_E} K_m\left(\frac{I_R}{k}\right)K_m^\dagger. \tag{B.12}$$

这里，式（B.8）、（B.9）和（B.10）中的第一项来自非连通鞍点（见图 20a），第二项则来自连通鞍点（见图 20b）。



（a）非连通鞍点　　（b）连通鞍点

图 20：引力路径积分中的非连通鞍点和复制虫洞鞍点，涉及非引力情形下出现的 R´ényi-2 熵。在这些图示中，我们需要正确缩并代码指标，使所得缩并与式（B.5）、（B.6）和（B.7）给出的边界条件一致。

因此，我们得到 R´enyi-二阶熵

$$\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{\mathrm{NG};\,ref(in)}\right)} \approx \log d_{in} \qquad (\text{figure } 20a), \tag{B.13}$$

$$\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{\mathrm{NG};\,ref(in),ref(ex),E}\right)}$$

$$\approx \begin{cases} \log d_{in} + \log d_{ex} + S^{(2)}\left(\tau_E\right) & \text{for } -\log d_{BH} + \log d_{in} < I_c^{(2)}\left(\frac{1}{k} I_R, \mathcal{E}'\right) \quad \text{(figure 20}a\text{)} \\ \log d_{ex} + \log d_{BH} + S^{(2)}\left(\tau_{\mathrm{Bath}}\right) & \text{for } I_c^{(2)}\left(\frac{1}{k} I_R, \mathcal{E}'\right) < -\log d_{BH} + \log d_{in} \quad \text{(figure 20}b\text{)}, \end{cases} \tag{B.14}$$

and

$$\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{\mathrm{NG};\,ref(ex),E}\right)}$$

$$\approx \begin{cases} \log d_{ex} + S^{(2)}\left(\tau_E\right) & \text{for } -\log d_{BH} - \log d_{in} < I_c^{(2)}\left(\frac{1}{k} I_R, \mathcal{E}'\right) \quad \text{(figure 20}a\text{)} \\ \log d_{in} + \log d_{ex} + \log d_{BH} + S^{(2)}\left(\tau_{\mathrm{Bath}}\right) & \\ & \text{for } I_c^{(2)}\left(\frac{1}{k} I_R, \mathcal{E}'\right) < -\log d_{BH} - \log d_{in} \quad \text{(figure 20}b\text{)}, \end{cases} \tag{B.15}$$

其中 $I_c^{(2)}\left(\frac{1}{k} I_R,\ \mathcal{E}'\right)$ 是 R´enyi-二阶相干信息，其定义为

$$I_c^{(2)}\left(\frac{1}{k} I_R, \mathcal{E}'\right) = S^{(2)}\left(\tau_{\mathrm{Bath}}\right) - S^{(2)}\left(\tau_E\right). \tag{B.16}$$

这里，上述 R´énYi-二熵所对应的是主导鞍点。我们注意到，与条件（2.47）一样，R´ényi-二相干信息满足该条件，

$$\max\{-\log k, -\log d_E\} \leq I_c^{(2)}\left(\frac{1}{k} I_R, \mathcal{E}'\right) \leq \log k. \tag{B.17}$$

在图9中，我们给出了 R´enyi 二阶熵在 $\log k$-$\left(S^{(2)}\left(\tau_{\mathrm{Bath}}\right) - S^{(2)}\left(\tau_E\right)\right)$ 平面上的主导鞍点相图。需要指出的是，由于我们考虑的是参考系统和环境系统的 R´enyi 二阶熵，而不是霍金辐射或黑洞的熵，因此在某些参数区域中，主导鞍点与霍金辐射或黑洞对应的主导鞍点不同。例如，在晚期 $k > d_{BH}$，R´enyi 二阶熵的主导鞍点 $S^{(2)}\left(\rho'_{ref(in),ref^{(ex)}\ E}\right)$ 和 $S^{(2)}\left(\rho'_{ref(ex),E}\right)$有可能是非连通鞍点，而霍金辐射的 R´enyi 二阶熵的主导鞍点 $S^{(2)}(\rho_B)$ 则由连通鞍点给出。

因此，非引力系统的 R´enyi 二阶互信息为

$$\overline{I^{(2)}_{|\Psi'\rangle_{\rm NG}}(ref(in)\,;\,ref(ex)\cup E)}$$
$$\approx\begin{cases}0 & \text{for } -\log d_{BH}+\log d_{in}<I_c^{(2)}\left(\frac{1}{k}I_R,\mathcal{E}'\right)\\ (-\log d_{BH}+\log d_{in})-I_c^{(2)}\left(\frac{1}{k}I_R,\mathcal{E}'\right) & \\ & \text{for } -\log d_{BH}-\log d_{in}<I_c^{(2)}\left(\frac{1}{k}I_R,\mathcal{E}'\right)<-\log d_{BH}+\log d_{in}\\ 2\log d_{in} & \text{for } I_c^{(2)}\left(\frac{1}{k}I_R,\mathcal{E}'\right)<-\log d_{BH}-\log d_{in}.\end{cases} \tag{B.18}$$

类似的结果在 [21] 的 $n=1$ 情形中得到了，而非 R´ényi 二熵的情形。

图9中给出了 log´ 上 R k-$\left(S^{(2)}\left(\tau_{\rm Bath}\right)-S^{(2)}\left(\tau_E\right)\right)$ 平面上 R ényi 二互信息的相图。

B.2 霍金辐射的 R´ényi 二熵

接下来，我们考虑存储在宇宙´中的霍金辐射的 R B，其状态为（B.4）。在这种情况下，我们对以下量计算引力路径积分，

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left(\rho'_{\mathrm{NG};\,B}\right)^2=\frac{1}{(d_{in}d_{ex}\,k\,d_{BH})^2}\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{d_{in}}\sum_{\boldsymbol{i'}=1}^{d_{ex}}\sum_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}=1}^{k}\sum_{\boldsymbol{m}=1}^{d_E}\langle\psi^{\beta_1}_{i_1,i'_1}|\psi^{\alpha_1}_{i_1,i'_1}\rangle_A\langle\psi^{\beta_2}_{i_2,i'_2}|\psi^{\alpha_2}_{i_2,i'_2}\rangle_A\\ \times\langle\beta_2|K^\dagger_{m_2}K_{m_1}|\alpha_1\rangle_B\langle\beta_1|K^\dagger_{m_1}K_{m_2}|\alpha_2\rangle_B\,,\end{aligned} \tag{B.19}$$

并得到

$$\overline{\mathrm{tr}\left(\rho'_{\mathrm{NG};\,B}\right)^2}=\mathrm{tr}\left[(\tau_{\rm Bath})^2\right]+\frac{1}{d_{in}}\cdot\frac{1}{d_{BH}}\cdot\mathrm{tr}\left[(\tau_E)^2\right], \tag{B.20}$$

其中第一项来自非连通鞍点（见图 20a），第二项来自连通鞍点（见图 20b）。因此，状态（´B.4）中的霍金辐射的 Rényi 二阶熵为

$$\overline{S^{(2)}\left(\rho'_{\mathrm{NG};\,B}\right)}$$
$$\approx\begin{cases}S^{(2)}\left(\tau_{\rm Bath}\right) & \text{for } I_c^{(2)}\left(\frac{1}{k}I_R,\mathcal{E}'\right)<\log d_{in}+\log d_{BH}\quad(\text{figure }20a)\\ \log d_{in}+\log d_{BH}+S^{(2)}\left(\tau_E\right) & \\ & \text{for } \log d_{in}+\log d_{BH}<I_c^{(2)}\left(\frac{1}{k}I_R,\mathcal{E}'\right)\quad(\text{figure }20b).\end{cases} \tag{B.21}$$

这是储存在宇宙 B 中的霍金辐射的 Page曲线，误差$\mathcal{E}'$ 作用于其上。

C Haar随机误差的相干信息

在本附录中，我们展示（完全正迹保持）Haar随机误差的相干信息（2.43），其输入态为 $\mathcal{E}_{\text{Haar}}$[26]，作用于希尔伯特空间 η 上，该空间的维数为 $\mathcal{H}$。 d在本文正文中，我们关注最大混合态的情形，即 $\eta = I/d$。这里，Haar随机误差 $\mathcal{E}_{\text{Haar}}$ 是指误差的 Stinespring 表示 [37] 包含一个 Haar随机矩阵 U_{Haar}，

$$\mathcal{E}_{\text{Haar}}(\eta) = \text{tr}_E \left[U_{\text{Haar}} \left(\eta \otimes \kappa_E \right) U_{\text{Haar}}^\dagger \right], \tag{C.1}$$

其中 E 表示用于实现误差的环境系统，其希尔伯特空间维数为 d_E，而 κ_E 是环境系统上的一个参考态。为简单起见，我们假设 κ_E 由环境系统上的一个纯态给出，并且希尔伯特空间维数足够大， d， $d_E \gg 1$。

为方便记号，我们定义以下状态以计算熵交换，

$$\mathcal{E}^c_{\text{Haar}}(\eta) = \text{tr}_{\mathcal{H}} \left[U_{\text{Haar}} \left(\eta \otimes \kappa_E \right) U_{\text{Haar}}^\dagger \right] \tag{C.2}$$

对于此 Haar随机误差 $\mathcal{E}_{\text{Haar}}$ 和输入态 η，与相干信息（2.43）对应的 R´enyi-n 熵为[27]

$$\overline{S^{(n)}\left(\mathcal{E}_{\text{Haar}}(\eta)\right)} \approx \frac{1}{1-n} \log \overline{\text{tr}\left[\left(\mathcal{E}_{\text{Haar}}(\eta)\right)^n\right]} \approx \begin{cases} \log d & \text{for } \log d - \log d_E \ll S^{(n)}(\eta) \\ \log d_E + S^{(n)}(\eta) & \text{for } S^{(n)}(\eta) \ll \log d - \log d_E \end{cases} \tag{C.3}$$

and

$$\overline{S^{(n)}(\mathcal{E}_{\text{Haar}}, \eta)} \approx \frac{1}{1-n} \log \overline{\text{tr}\left[\left(\mathcal{E}^c_{\text{Haar}}(\eta)\right)^n\right]} \approx \begin{cases} \log d_E & \text{for } -S^{(n)}(\eta) \ll \log d - \log d_E \\ \log d + S^{(n)}(\eta) & \text{for } \log d - \log d_E \ll -S^{(n)}(\eta), \end{cases} \tag{C.4}$$

其中，上划线表示Haar随机平均，而 $S^{(n)}(\eta)$ 是状态 η 的 R´enyi-n熵， $S^{(n)}(\eta) = \frac{1}{1-n} \log \text{tr}[\eta^n]$。取 von Neumann极限 $n \to 1$ 后，上述关系化简为

$$\overline{S\left(\mathcal{E}_{\text{Haar}}(\eta)\right)} \approx \begin{cases} \log d & \text{for } \log d - \log d_E \ll S(\eta) \\ \log d_E + S(\eta) & \text{for } S(\eta) \ll \log d - \log d_E \end{cases} \tag{C.5}$$

[26]参见 [21]相关讨论。[27]可以利用 Stinespring表示推导这些结果（C.1）。

and

$$\overline{S(\mathcal{E}_{\text{Haar}},\eta)} \approx \begin{cases} \log d_E & \text{for } -S(\eta) \ll \log d - \log d_E \\ \log d + S(\eta) & \text{for } \log d - \log d_E \ll -S(\eta), \end{cases} \tag{C.6}$$

从而得到相干信息,

$$\overline{I_c\left(\eta,\mathcal{E}_{\text{Haar}}\right)} \approx \begin{cases} S(\eta) & \text{for } S(\eta) \ll \log d - \log d_E \\ \log d - \log d_E & \text{for } -S(\eta) \ll \log d - \log d_E \ll S(\eta) \\ -S(\eta) & \text{for } \log d - \log d_E \ll -S(\eta). \end{cases} \tag{C.7}$$

从 Rényi-n 熵（C.5）和（C.6）可以看出，只需将 $S(\eta)$ 替换为 $S^{(2)}(\eta)$，上述相干信息便可应用于我们主要感兴趣的 $n=2$ 情形。

若输入态 η 为最大混合态 $\eta = \frac{1}{d} I_d$，则这些量可简化为

$$\overline{S\left(\mathcal{E}_{\text{Haar}}\left(\frac{1}{d} I_d\right)\right)} \approx \log d, \tag{C.8}$$

$$\overline{S\left(\mathcal{E}_{\text{Haar}}, \frac{1}{d} I_d\right)} \approx \begin{cases} \log d_E & \text{for } \log d_E \ll 2\log d \\ 2\log d & \text{for } 2\log d \ll \log d_E, \end{cases} \tag{C.9}$$

and

$$\overline{I_c\left(\frac{1}{d} I_d, \mathcal{E}_{\text{Haar}}\right)} \approx \begin{cases} -\log d & \text{for } 2\log d \ll \log d_E \\ \log d - \log d_E & \text{for } \log d_E \ll 2\log d. \end{cases} \tag{C.10}$$

D 弱次可加性推出的界

在本附录中，我们将说明，弱次可加性（参见 [48] 中的引理 4.3）给出了以下界:

$$-\log d_{BH} \leq S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) - S^{(2)}(\sigma_E) \leq \log d_{BH}, \tag{D.1}$$

其中 σ_{Bath}，σ_E 分别由（2.36）和（2.35）定义。不过，为了保持一般性，我们证明一个更一般的不等式：对于具有 Kraus表示 $\mathcal{N}$ 的完全正迹保持误差 $\{F_m\}$ 及其环境系统 H_E，它作用于希尔伯特空间 H_B，其希尔伯特空间维数为d_B；对于希尔伯特空间 H_B上的任意状态 ρ_B，

$$-S^{(0)}(\rho_B) \leq S^{(n)}\left(\mathcal{N}(\rho_B)\right) - S^{(n)}\left(\mathcal{N}^c(\rho_B)\right) \leq S^{(0)}(\rho_B) \qquad \text{for } n \in (0,1) \cup (1,\infty), \tag{D.2}$$

其中 $\mathcal{N}^c$ 由（2.46）定义。这里，$S^{(n)}(\rho)$ 表示通常的 Rényi-n 熵,

$$S^{(n)}(\rho) = \frac{1}{1-n} \log\left(\text{tr}[\rho^n]\right), \tag{D.3}$$

而 $S^{(0)}(\rho_B)$表示最大熵，

$$S^{(0)}(\rho) = \log\left(\operatorname{rank}\left[\rho\right]\right). \tag{D.4}$$

当 $\rho_B = \frac{1}{d_B} I_B$ 和 $n = 2$ 时，上述一般不等式就化为我们的情形。

首先，一般而言，弱次可加性（见 [48]中的引理 4.3）表明，对于希尔伯特空间 ρ_{AB} 上的任意二分密度矩阵 $H_A \otimes H_B$，R´enyi 熵满足以下不等式，

$$S^{(n)}(\rho_B) - S^{(0)}(\rho_A) \leq S^{(n)}(\rho_{AB}) \leq S^{(n)}(\rho_B) + S^{(0)}(\rho_A) \qquad \text{for } n \in (0,1) \cup (1,\infty), \tag{D.5}$$

为了使用这一弱次可加性，我们引入一个辅助系统 A并考虑一个状态

$$|\varphi\rangle_{ABE} = \sum_{a=1}^{\operatorname{rank}[\rho]} \sum_{n=1}^{d_E} \sqrt{\rho_A}\,|a\rangle_A \otimes F_n\,|a\rangle_B \otimes |e_n\rangle_E\,, \tag{D.6}$$

其中，$|e_n\rangle_E$是环境系统上的一个标准正交基，而 $|a\rangle_A$，$|a\rangle_B$是密度矩阵 ρ 在希尔伯特空间 H_A，H_B 上分别对应的正交归一特征向量，即 $\sqrt{\rho_A}\,|a\rangle_A = \lambda_a^{1/2}\,|a\rangle_A$、$\sqrt{\rho_B}\,|a\rangle_B = \lambda_a^{1/2}\,|a\rangle_B$（$\lambda_a$：密度矩阵的特征值）。由此状态，我们可以构造密度矩阵，

$$\varphi_A = \operatorname{tr}_{BE}\left[|\varphi\rangle_{ABE}\,\langle\varphi|\right] = \rho_A, \tag{D.7}$$

$$\varphi_B = \operatorname{tr}_{AE}\left[|\varphi\rangle_{ABE}\,\langle\varphi|\right] = \sum_{m=1}^{d_E} F_m \rho_B F_m^\dagger = \mathcal{N}\left(\rho_B\right), \tag{D.8}$$

$$\varphi_E = \operatorname{tr}_{AB}\left[|\varphi\rangle_{ABE}\,\langle\varphi|\right] = \sum_{m,n=1}^{d_E} |e_m\rangle_E\,\langle e_n| \cdot \operatorname{tr}\left[F_m \rho_B F_n^\dagger\right] = \mathcal{N}^c\left(\rho_B\right), \tag{D.9}$$

and

$$\varphi_{AB} = \operatorname{tr}_E\left[|\varphi\rangle_{ABE}\,\langle\varphi|\right] = \sum_{a,b=1}^{d_A} \sum_{m,n=1}^{d_E} \sqrt{\rho_A}\,|a\rangle\,\langle a'|_A\,\sqrt{\rho_A} \otimes F_n\,|a\rangle_B\,\langle a'|_B\,F_n^\dagger \tag{D.10}$$

这里，我们注意到，由于总状态 $|\varphi\rangle_{ABE}$ 是纯态，因此有 $S^{(n)}(\varphi_E) = S^{(n)}(\varphi_{AB})$.

于是，根据弱次可加性（D.5），我们得到

$$S^{(0)}\left(\rho_A\right) - S^{(n)}\left(\mathcal{N}\left(\rho_B\right)\right) \leq S^{(n)}\left(\mathcal{N}^c\left(\rho_B\right)\right) \leq S^{(0)}\left(\rho_A\right) + S^{(n)}\left(\mathcal{N}\left(\rho_B\right)\right). \tag{D.11}$$

这里，由于密度矩阵 ρ_A 与 ρ_B具有相同的纠缠谱，因此有$S^{(0)}(\rho_A) = S^{(0)}(\rho_B)$。由此，我们得到不等式：

$$S^{(n)}\left(\mathcal{N}(\rho_B)\right) - S^{(0)}(\rho_B) \leq S^{(n)}\left(\mathcal{N}^c(\rho_B)\right) \leq S^{(n)}\left(\mathcal{N}(\rho_B)\right) + S^{(0)}(\rho_B). \tag{D.12}$$

重新排列各项后，我们得到所需的不等式（D.2）。

E 相干信息的解释

在本附录中，我们简要解释相干信息的细节 $I_c(\tau_B, \mathcal{N})$，（τ_B：量子态，$\mathcal{N}$：量子信道），（2.43），并用互信息来阐释，以便更好地理解相干信息。

为此，正如我们在脚注中简要说明的那样，使用量子信道的 Stinespring表示会很方便[11]，即对于量子信道，

$$\mathcal{N}(\tau_B) = \mathrm{tr}_E \left[U_{B,E} \left(\tau_B \otimes |e_0\rangle \langle e_0| \right) U_{B,E}^\dagger \right]. \tag{E.1}$$

对于互补信道，

$$\mathcal{N}^c(\tau_B) = \mathrm{tr}_B \left[U_{B,E} \left(\tau_B \otimes |e_0\rangle \langle e_0| \right) U_{B,E}^\dagger \right]. \tag{E.2}$$

通过引入纯化子~系统 B，我们可以从以下纯态得到这些量子信道，

$$|\Phi\rangle_{\widetilde{B}BE} = \left(I_{\widetilde{B}} \otimes U_{B,E} \right) |\sqrt{\tau}\rangle_{\widetilde{B}B} \otimes |e_0\rangle_E , \tag{E.3}$$

其中，$|\sqrt{\tau}\rangle_{\widetilde{B}B}$是输入态 τ的纯化纯态，

$$|\sqrt{\tau}\rangle_{\widetilde{B}B} = \sum_{b=1}^{d_B} \sqrt{\tau}\, |b\rangle_{\widetilde{B}} \otimes |b\rangle_B . \tag{E.4}$$

~这里，$|b\rangle_{\widetilde{B}}$，$|b\rangle_B$分别是系统 B，B的标准正交基。其电路图如图 21所示。

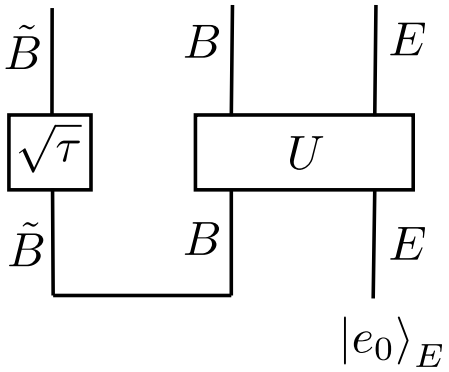


图 21：状态的电路图 $|\Phi\rangle_{\widetilde{B}BE}$，(E.3)。

这个状态确实给出了它们的量子信道，

$$\mathcal{N}(\tau_B) = \mathrm{tr}_{\widetilde{B}E} \left[|\Phi\rangle_{\widetilde{B}BE} \langle\Phi| \right], \quad \mathcal{N}^c(\tau_B) = \mathrm{tr}_{\widetilde{B}B} \left[|\Phi\rangle_{\widetilde{B}BE} \langle\Phi| \right]. \tag{E.5}$$

利用状态（E.3），我们可以用互信息（参见例如，[49–51]）来改写相干信息

$$\begin{aligned} I_c(\tau_B, \mathcal{N}) &= S\left(\mathcal{N}(\tau_B)\right) - S\left(\mathcal{N}^c(\tau_B)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{ I_{|\Phi\rangle}\left(\widetilde{B}; B\right) - I_{|\Phi\rangle}\left(\widetilde{B}; E\right)\right\}, \end{aligned} \tag{E.6}$$

其中 $I_{|\Phi\rangle}\left(\widetilde{B}; B(E)\right)$ 表示 $\widetilde{B}$ 与 $B(E)$ 在状态 $|\Phi\rangle$(E.3) 上的互信息。人们可以很容易地验证上述关系。

因此，根据上述表达式，相干信息衡量的是~净化系统 B （其中包含纯化后的输入信息 τ）与原系统 B 相关联的有效程度，并与 B 和环境系统 E 之间的关联相比较。

F 因果性违背与可恢复性条件

在本附录中，我们将半经典因果性与纠错条件[28], 联系起来，并证明当（R´enyi-2）互信息消失时，此类问题不会出现。

为使这一联系更加明确，让我们考虑算子代数量子纠错（OAQEC）框架下的纠错条件 [52, 53], ，它等价于解耦条件[29], (2.4)，并由（R´enyi-2）互信息的消失加以量化。具体而言，这一等价关系可表示为

$$\begin{aligned} &\rho'_{ref,\,ref(ex),\,E} = \rho'_{ref(in)} \otimes \rho'_{ref(ex),\,E} \qquad ((2.4):\ \text{Decoupling condition}) \\ &\qquad\Longleftrightarrow \\ &[P_{code} E_m^\dagger E_n P_{code}, \mathcal{O}_{code(in)}] = 0 \qquad \forall m, n, \quad \forall \mathcal{O}_{code(in)} \in \mathcal{B}_{code(in)} \subset \mathcal{B}_{code}. \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{error correcting condition in OAQEC}) \end{aligned} \tag{F.1}$$

注意，等价地，当且仅当解耦条件不成立时，对易子才非零。这里，P_{code} 是编码子空间上的投影算子 $H_{code} \subset H_{phys}$，其中编码子空间通过等距映射 V 嵌入于（2.16）中，并且其表示为 $P_{code} = VV^\dagger$。$\mathcal{B}_{code}$ 是作用于编码子空间上的可观测量代数，其表示为 $\mathcal{B}_{code} = V\mathcal{B}V^\dagger$ 其中 $\mathcal{B}$ 是在 V[30]定义域中的对应代数，

[28]对于非引力情形，[21]中讨论了其对半经典因果性的影响。[29]结合解耦条件与 Knill-Laflamme 条件之间的等价关系 [54] ，以及 OAQEC 中纠错条件与 Knill-Laflamme 条件之间的等价关系 [52, 53], 即可证明这种等价性。[30]设 $\phi \in \mathcal{B}$ 是 V 定义域中的一个算符，其明确表达式为

$$\phi = \sum_{i,j=1}^{d_{in}} \sum_{i',j'=1}^{d_{ex}} \phi_{i,j;i',j'} \left|i, i'\right\rangle \left\langle j, j'\right|, \tag{F.2}$$

以及 $\mathcal{B}_{code(in)}$ 是与内部部分对应的子代数， $\mathcal{B}_{code(in)} = V\mathcal{B}_{(in)}V^\dagger$ 其中$\mathcal{B}_{(in)} \subset \mathcal{B}$[31]。注意，对于 $\mathcal{O}_{code} \in \mathcal{B}_{code}$ （对于 $\mathcal{O}_{code(in)} \in \mathcal{B}_{code(in)}$同样），我们有关系 $\mathcal{O}_{code} = P_{code}\mathcal{O}_{code} = \mathcal{O}_{code}P_{code}$[32]。

利用关系式 $\mathcal{O}_{code(in)} = P_{code}\mathcal{O}_{code(in)} = \mathcal{O}_{code(in)}P_{code}$，OAQEC 中上述误差纠正条件可等价地写为

$$P_{code}[E_m^\dagger E_n, \mathcal{O}_{code(in)}]P_{code} = 0 \qquad \forall m,n, \quad \forall \mathcal{O}_{code(in)} \in \mathcal{B}_{code(in)}. \tag{F.6}$$

我们再次指出，当且仅当解耦条件成立时，这个对易子才为零；而这等价于互信息为零。

这一对易关系意味着，当（R´enyi-2）互信息不为零时，对易子也不为零，从而导致黑洞内部与浴系统之间的半经典因果性（更准确地说，是微观因果性）遭到违背；也就是说，宇宙 A 上的半经典内部算符与宇宙 B 上的半经典浴算符（即 Kraus 算符）之间的对易子不为零；

$$\rho'_{ref,ref(ex),E} \neq \rho'_{ref(in)} \otimes \rho'_{ref(ex),E} \quad \Longleftrightarrow \quad [\phi_B, \phi_{in}] \neq 0 \text{ in semi-classical Hilbert space,} \tag{F.7}$$

其中， ϕ_{in} 是宇宙 A 上的半经典内部算符，对应于编码子空间 $\mathcal{O}_{code(in)}$ 上的算符； ϕ_B 是宇宙 B 上的热浴算子，对应于 Kraus 算子 $E_m^\dagger E_n$。另一方面，当（R´enyi-2）互信息为零时，对易子也为零，此时不会发生这种因果性违背；

$$\rho'_{ref,ref(ex),E} = \rho'_{ref(in)} \otimes \rho'_{ref(ex),E} \quad \Longleftrightarrow \quad [\phi_B, \phi_{in}] = 0 \text{ in semi-classical Hilbert space.} \tag{F.8}$$

那么，相应的编码算符 $\mathcal{O}_{code}$ 为

$$\mathcal{O}_{code} = V\phi V^\dagger = \sum_{i,j=1}^{d_{in}} \sum_{i',j'=1}^{d_{ex}} \phi_{i,j;i',j'} \left|\Psi_{i,i'}\right\rangle_{phys} \left\langle\Psi_{j,j'}\right| . \tag{F.3}$$

[31]对于内部算子 $\phi_{(in)}$，我们有

$$\phi_{(in)} = \sum_{i,j=1}^{d_{in}} \sum_{i'=1}^{d_{ex}} \phi_{i,j} \left|i,i'\right\rangle \left\langle j,i'\right| \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{O}_{code(in)} = V\phi_{(in)}V^\dagger = \sum_{i,j=1}^{d_{in}} \sum_{i'=1}^{d_{ex}} \phi_{i,j} \left|\Psi_{i,i'}\right\rangle_{phys} \left\langle\Psi_{j,i'}\right| . \tag{F.4}$$

[32]我们可以很容易地证明如下关系：

$$\begin{aligned} P_{code}\mathcal{O}_{code} = (VV^\dagger)(V\mathcal{O}V^\dagger) &= V(V^\dagger V)\mathcal{O}V^\dagger \\ &= V\mathcal{O}V^\dagger = \mathcal{O}_{code}, \end{aligned} \tag{F.5}$$

其中，在第一行的第二个等号处，我们用到了等距嵌入映射的性质， $V^\dagger V = I$。类似地，我们可以证明 $\mathcal{O}_{code}P_{code} = \mathcal{O}_{code}$。

正如我们所见，如果不考虑误差所产生的引力反作用，且误差具有足够负的相干信息，就会遇到这种因果性违背。然而，一旦将误差所产生的引力反作用纳入考虑，当标度维数超过临界值时，(R´enyi-2) 互信息便会消失，从而满足解耦条件，因此不会发生因果性违背。这种现象只会出现在引力浴的情形中，因为非引力浴系统中不存在这类引力自由度[33]。因此，引力自由度对于维护半经典因果性至关重要，它能有效抑制误差效应，避免这些效应扰乱内部信息。

G 反作用后的膨胀子剖面的详细信息

在本附录中，我们给出膜插入所产生的反作用后膨胀子剖面，它对应于 Kraus 算符对时空的反作用。

G.1 膨胀子剖面

我们从度规和膨胀子剖面的通常边界条件（2.10）开始，

$$ds^2|_{\partial\mathcal{M}} = \frac{du^2}{\epsilon^2}, \qquad \phi|_{\partial\mathcal{M}} = \frac{\phi_r}{\epsilon},$$

其中 ϵ 是无穷小截断，u 是具有周期性 $u \sim u + \beta$ 的物理时间，而 ϕ_r 是边界处的重整化膨胀子值。

在 JT引力中，我们可以利用（欧几里得）AdS_2 时空的嵌入坐标来处理膨胀子剖面，

$$ds^2 = -(dX_{-1})^2 + (dX_0)^2 + (dX_1)^2 \tag{G.1}$$

其中嵌入坐标 X^a 满足条件

$$X.X := -(X_{-1})^2 + (X_0)^2 + (X_1)^2 = -1, \tag{G.2}$$

例如，我们可以选择欧几里得林德勒坐标

$$X^a = (\cosh\rho, \sinh\rho\sin\tau, \sinh\rho\cos\tau), \qquad (\rho \geq 0,\ 0 \leq \tau \leq 2\pi)\,, \tag{G.3}$$

[33]尽管我们预期这一机制对于引力浴情形是独特的，但从纯量子信息理论的视角寻找类似机制或许会很有意思。

此时，度规为

$$ds^2 = d\rho^2 + \sinh^2\rho\, d\tau^2. \tag{G.4}$$

此外，膨胀子剖面可以取为

$$\phi_C = Q_C.X = \frac{2\pi}{\beta}\phi_r\, \cosh\rho, \tag{G.5}$$

其中 Q_C 是该膨胀子剖面的一个 SL(2，$\mathbb{R}$) 荷

$$Q_C^a = \frac{2\pi}{\beta}\phi_r\,(1,0,0), \tag{G.6}$$

确定视界位置为

$$Y_C^a = (1,0,0). \tag{G.7}$$

在欧几里得林德勒坐标中，上述向量对应于点 $\rho = 0$。此外，该膨胀子剖面确定边界轨迹（$\rho_\infty(\tau)$ τ）为

$$\rho_\infty(\tau) \approx \log\left[\frac{\beta}{\pi\epsilon}\right] = \rho_\infty, \tag{G.8}$$

以及物理边界时间 u,

$$u = \frac{\beta}{2\pi}\tau. \tag{G.9}$$

G.2 沿有质量膜拼接两个膨胀子剖面

上述膨胀子剖面不包含一个参数，而该参数可与膜插入所引起的反作用相关联，这些插入与 Kraus 算符有关。为了引入这样的参数，我们可以利用 NAdS_2 的 SL(2,$\mathbb{R}$) 对称性。首先，我们考虑两个嵌入坐标 $\tilde{X}_{(L)}^a$ 和 $X_{(R)}^a$，它们与上述坐标 X^a 通过以下 SL(2,$\mathbb{R}$) 旋转相关联,

$$\begin{cases} \tilde{X}_{(L)}^a \coloneqq (U_L^{-1})_b^a X^b & \left(\dfrac{\pi}{2} \le \tau \le \dfrac{3\pi}{2}\right) \iff \left(X^3 \ge 0\right), \\ \tilde{X}_{(R)}^a \coloneqq (U_R^{-1})_b^a X^b & \left(0 \le \tau \le \dfrac{\pi}{2},\quad \dfrac{3\pi}{2} \le \tau \le 2\pi\right) \iff \left(X^3 \le 0\right), \end{cases} \tag{G.10}$$

其中 U_L 和 U_R 由下式给出

$$U_L = \begin{pmatrix} \cosh\rho_0 & 0 & -\sinh\rho_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\rho_0 & 0 & \cosh\rho_0 \end{pmatrix}, \qquad U_R = \begin{pmatrix} \cosh\rho_0 & 0 & \sinh\rho_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh\rho_0 & 0 & \cosh\rho_0 \end{pmatrix}. \tag{G.11}$$

注意，对于这些矩阵，我们有关系式 $U_R^{-1} = U_L$，这些 SL(2, $\mathbb{R}$) 矩阵保持度规 $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1)$ 不变，

$$U_{L(R)}^T \, \eta \, U_{L(R)} = \eta, \tag{G.12}$$

这是 SL(2, $\mathbb{R}$) 不变性的结果。使用这些波浪号坐标 $X^a_{(L)}$ 和 $X^a_{(R)}$，规范膨胀子剖面（G.6）对应于如下两个膨胀子剖面；

- for $\left(\frac{\pi}{2} \le \tau \le \frac{3\pi}{2}\right) \iff \left(X^3 \ge 0\right)$,

$$\phi_C = Q_C.X = Q_C.\left(U_L \tilde{X}_{(L)}\right) = \left(U_L^{-1} Q_C\right).\tilde{X}_{(L)} = -Q_L.\tilde{X}_{(L)} =: \phi_L, \tag{G.13}$$

- 对于 $\left(0 \le \tau \le \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \le \tau \le 2\pi\right) \iff \left(X^3 \le 0\right)$,

$$\phi_C = Q_C.X = Q_C.\left(U_R \tilde{X}_{(R)}\right) = \left(U_R^{-1} Q_C\right).\tilde{X}_{(R)} = Q_R.\tilde{X}_{(R)} =: \phi_R. \tag{G.14}$$

这里我们将 Q_L 和 Q_R 定义为

$$\begin{aligned} Q_L^a &= -\left(U_L^{-1}\right)^a_{\ b} Q_C^b = \frac{2\pi}{\beta}\phi_r \left(\cosh\rho_0, 0, -\sinh\rho_0\right), \\ Q_R^a &= \left(U_R^{-1}\right)^a_{\ b} Q_C^b = \frac{2\pi}{\beta}\phi_r \left(\cosh\rho_0, 0, \sinh\rho_0\right). \end{aligned} \tag{G.15}$$

这些旋转后的 SL(2, $\mathbb{R}$) 荷在波浪号坐标中将视界指定为

$$\begin{cases} \tilde{Y}_L^a = (U_L^{-1})^a_b Y_C^b = (\cosh\rho_0, 0, -\sinh\rho_0) & \text{for } \phi_L, \\ \tilde{Y}_R^a = (U_R^{-1})^a_b Y_C^b = (\cosh\rho_0, 0, \sinh\rho_0) & \text{for } \phi_R. \end{cases} \tag{G.16}$$

在欧几里得林德勒坐标中，这些坐标分别对应于点 $(\tilde{\rho}_{(L)}, \tilde{\tau}_{(L)}) = (\rho_0, \pi)$ 和 $(\tilde{\rho}_{(R)}, \tilde{\tau}_{(R)}) = (\rho_0, 0)$。我们注意到，在这些波浪号嵌入坐标中，膨胀子剖面变为

$$\phi_L = \frac{2\pi}{\beta}\phi_r \left(\cosh\rho_0 \cosh\tilde{\rho} + \sinh\rho_0 \sinh\tilde{\rho}\cos\tilde{\tau}\right) \qquad \left(\frac{\pi}{2} \le \tilde{\tau} \le \frac{3\pi}{2}\right) \tag{G.17}$$

and

$$\phi_R = \frac{2\pi}{\beta}\phi_r \left(\cosh\rho_0 \cosh\tilde{\rho} - \sinh\rho_0 \sinh\tilde{\rho}\cos\tilde{\tau}\right) \qquad \left(0 \le \tilde{\tau} \le \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \le \tilde{\tau} \le 2\pi\right). \tag{G.18}$$

注意，ϕ_L，ϕ_R 在 $\tilde{\tau} = \frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$ 处是连续的，但它们的导数并不连续。这种不连续性与膜质量有关。这个膨胀子剖面相当于沿着膜将两个时空粘合起来后得到的结果，而这两个时空分别由两个膨胀子剖面描述。

在上述讨论中，参数 ρ_0 只是一个自由参数，尚未与 Kraus 算符引起的反作用联系起来，而这种反作用对应于膜插入所产生的反作用。下面来考察它们之间的关系。利用这些 SL(2，$\mathbb{R}$) 荷以及 SL(2，$\mathbb{R}$) 荷守恒关系 $Q_L^a+Q_R^a+Q_B^a=0$ (Q_B^a：膜的 SL(2，$\mathbb{R}$) 荷)，我们可以将膜的 SL(2，$\mathbb{R}$) 荷确定为

$$Q_B^a = 2\frac{2\pi}{\beta}\phi_r\,(0,0,\sinh\rho_0). \tag{G.19}$$

该膜荷的范数与标度维数或膜质量相关 Δ，[38, 39, 55]，

$$2\frac{2\pi}{\beta}\phi_r\sinh\rho_0=\Delta. \tag{G.20}$$

该方程将参数 ρ_0 与膜质量 Δ 联系起来。给定膜荷后，˜我们还可以通过以下方式指定膜轨迹 Y_B

$$Q_B.\tilde{Y}_B=0 \qquad \to \tilde{Y}_B^a=(\cosh\tilde{\rho},\pm\sinh\tilde{\rho},0) \quad 0\le\tilde{\rho}. \tag{G.21}$$

˜通过收缩该向量 Y 与定义膨胀子剖面的荷（G.15），我们可以得到膜上的膨胀子剖面，

$$\begin{aligned}\phi_C|_{\text{Brane}}=\phi_L|_{\text{Brane}}=\phi_R|_{\text{Brane}}&=\frac{2\pi}{\beta}\phi_r\cosh\rho_0\cosh\tilde{\rho}\\&=\sqrt{\left(\frac{2\pi}{\beta}\phi_r\right)^2+\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2}\cosh\tilde{\rho},\end{aligned} \tag{G.22}$$

其中，在第二行中，我们使用了关系式（G.20）。根据该表达式，我们可以求得膜上膨胀子的最小值，

$$\phi_C|_{\text{Brane,Min}}=\min_{x\in\text{Brane trajectory}}\{\phi_C|_{\text{Brane}}\}=\sqrt{\left(\frac{2\pi}{\beta}\phi_r\right)^2+\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2}. \tag{G.23}$$

H 误差标度维数的上界

根据关系式（3.4），Δ 不能大于 $\Delta_{\max}=2\phi_b$，因为 $\sin\theta\le 1$。本附录讨论该上界的含义。请注意，这一讨论与相图的结构没有直接关系，而是涉及计算相图时所用半经典近似的有效性。

首先，我们简要说明 $\sin\theta\lesssim 1$ 的情形。在这种情况下，我们有 $\theta\lesssim\pi/2$。这意味着尖点角趋近其最大值，两个尖点彼此非常接近，导致两个黑洞时空几乎

被挤出[34]。更准确地说，相应的膜轨迹几乎完全延伸到了截断面之外。见图 22。因此，由于截断，膜作用量（3.2）的贡献变得非常小，甚至消失。因此，当 Δ 超过特定值时，误差膜的引力反作用便失去意义，因为无论标度维数 Δ （它在膜作用量中充当系数）变得多大，膜作用量都不会产生贡献。

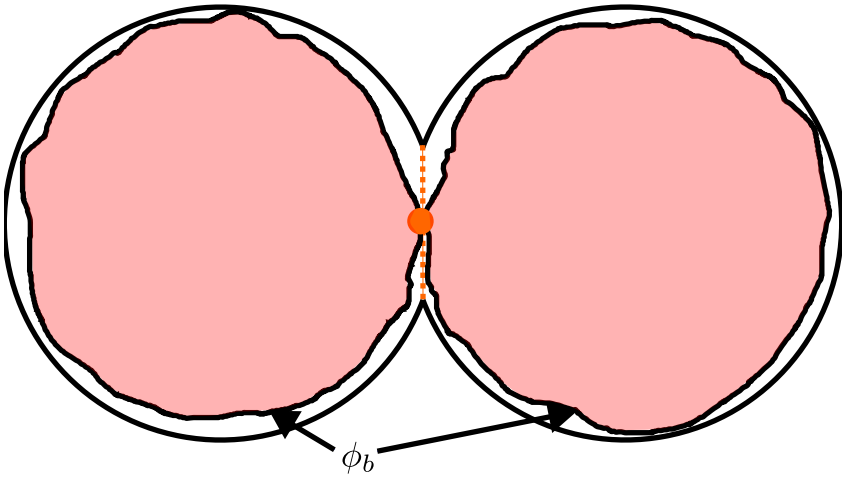


图 22：阈值膜质量下膜轨迹的示意图。在这种情况下，膜长度趋近于零。此图经过简化，以说明极限膜构型。

接下来，我们来验证上述考量确实给出了上界。为了使膜轨迹具有意义，我们需要要求膜轨迹位于截断面内。否则，我们无法看到两个时空粘合处的轨迹，这意味着它们实际上彼此断开。该条件要求膜上的膨胀子最小值小于边界膨胀子值。正如附录 G 中推导的，膜上的膨胀子最小值为（G.23），

$$\phi_C|_{\text{Brane,Min}} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\beta}\phi_r\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2}. \tag{H.1}$$

这个最小值必须小于边界膨胀子值；

$$\phi_b \geq \phi_C|_{\text{Brane,Min}} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\beta}\phi_r\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2}. \tag{H.2}$$

[34]类似讨论见 [55] 的 §6.1。

我们也可以将这个关系改写为

$$0 \leq \left(\frac{\phi_{\text{Horizon}}}{\phi_b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{2\phi_b}\right)^2 \leq 1, \tag{H.3}$$

其中 ϕ_{Horizon} 是视界处的膨胀子值，

$$\phi_{\text{Horizon}} = \frac{2\pi}{\beta}\phi_r. \tag{H.4}$$

由于在物理上合理的情况下，视界处的膨胀子值 ϕ_{Horizon} 小于边界膨胀子值 ϕ_b，

$$0 \leq \frac{\phi_{\text{Horizon}}}{\phi_b} \leq 1, \tag{H.5}$$

关系式 (H.3) 意味着以下不等式

$$0 \leq \frac{\Delta}{2\phi_b} \leq 1, \tag{H.6}$$

一致 于关系式 (3.4)。这确实给出了上界， $\Delta \leq \Delta_{\max} = 2\phi$ $_b$.

根据上述分析，我们还可以得出：若标度维数 Δ 大于 $2\phi_b$，半经典引力描述将不再成立，因为膜位于截断面 $\phi_b \leq \phi_C|_{\text{Brane, Min}}$之外。

H.1 参数之间的层级关系

除了（H.6）之外，还需满足其他条件，以确保半经典近似有效。由于JT引力是通过对描述四维极端黑洞微弱激发的有效作用量进行维数约化得到的，因此主导贡献来自拓扑部分，而非动力学部分，

$$S_0 \gg \phi_b \gg \phi_r. \tag{H.7}$$

这里需要指出，边界伸缩子值 ϕ_b 起到动力学伸缩子部分的截断作用。我们注意到，黑洞熵的主导贡献来自JT作用量的拓扑部分，而动力学部分则对拓扑贡献作出修正，

$$S_{BH} = S_0 + \frac{2\pi}{\beta}\phi_r \approx S_0. \tag{H.8}$$

与第 2 节开头一样，体半经典激发的熵 log d_{in}、log d_{ex}均假设小于黑洞熵 log $d_{BH} = S_{BH}$;

$$\log d_{in}, \log d_{ex} \ll \log d_{BH} = S_{BH}. \tag{H.9}$$

此外，由于半经典激发不应产生很大的反作用，其熵也应小于 JT 引力的动力学贡献，

$$\log d_{in}, \log d_{ex} \lesssim \phi_b. \tag{H.10}$$

接下来，霍金辐射的半经典熵 $\log k$ 可以与黑洞熵相当，或超过黑洞熵；

$$\log k \leqslant \log d_{BH} = S_{BH}. \tag{H.11}$$

与误差相关的两个（Rényi-二）熵 $S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}})$ $S^{(2)}(\sigma_E)$ 至多与黑洞熵同量级，

$$S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) \lesssim \log d_{BH} = S_{BH}, \tag{H.12}$$

$$S^{(2)}(\sigma_E) \lesssim 2 \log d_{BH} = 2S_{BH}, \tag{H.13}$$

and

$$\left| S^{(2)}(\sigma_{\text{Bath}}) - S^{(2)}(\sigma_E) \right| \leq \log d_{BH} = S_{BH}. \tag{H.14}$$

最后，如上一小节所讨论的，来自误差的引力反作用贡献远小于上述贡献，

$$\Delta \lesssim 2\phi_b \ll S_0 \approx S_{BH}. \tag{H.15}$$

在上述参数层级下，我们可以考虑这样一个参数区域，其中用于解耦条件的（Rényi-二）互信息消失。

参考文献

[1] *J. M. Maldacena*，《超共形场论与超引力的 N 大极限》，*Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998)* 231 [*hep-th/*9711200],[2] *A. Almheiri*、*X. Dong* 和 *D. Harlow*，《*AdS/CFT*中的体局域性与量子纠错》，*JHEP 04 (2015)* 163 [1411.7041],[3] *D. Harlow*，《从量子纠错推导*Ryu–Takayanagi* 公式》，*Commun. Math. Phys. 354 (2017)* 865 [1607.03901],[4] *S. Ryu* 和 *T. Takayanagi*，《从*AdS/CFT*全息推导纠缠熵》，*Phys. Rev. Lett. 96 (2006)* 181602 [*hep-th/*0603001]。

[5] *S. Ryu* 和 *T. Takayanagi*，《全息纠缠熵的若干方面》，*JHEP 08 (2006) 045*[*hep-th/0605073*].[6] *P. Hayden* 和 *J. Preskill*，《黑洞如镜：随机子系统中的量子信息》，*JHEP 09 (2007) 120* [0708.4025].[7] *E. Verlinde* 和 *H. Verlinde*，《黑洞纠缠与量子纠错》，*JHEP 10 (2013) 107* [1211.6913].[8] *B. Yoshida*，《*Clifford Hayden-Preskill*问题的恢复算法》，*2106.15628*.[9] *Y. Nakayama*、*A. Miyata* 和 *T. Ugajin*，《置乱信道的*Petz*（*lite*）恢复映射》，*PTEP 2023 (2023) 123B04* [2310.18991].[10] *D. N. Page*，《黑洞辐射中的信息》，*Phys. Rev. Lett. 71 (1993) 3743*[*hep-th/9306083*].[11] *D. N. Page*，《霍金辐射熵的时间依赖性》，宇宙学与天体粒子物理杂志 *09 (2013) 028*[1301.4995].[12] *G. Penington*，《纠缠楔重构与信息悖论》，*JHEP 09 (2020) 002* [1905.08255].[13] *A. Almheiri*、*N. Engelhardt*、*D. Marolf* 和 *H. Maxfield*，《体量子场的熵与蒸发黑洞的纠缠楔》，*JHEP 12 (2019) 063* [1905.08762].[14] *A. Almheiri*、*R. Mahajan*、*J. Maldacena* 和 *Y. Zhao*，《从半经典几何得到的霍金辐射*Page*曲线》，*JHEP 03 (2020) 149* [1908.10996].[15] *G. Penington*、*S. H. Shenker*、*D. Stanford* 和 *Z. Yang*，《副本虫洞与黑洞内部》，*JHEP 03 (2022) 205* [1911.11977].[16] *A. Almheiri*、*T. Hartman*、*J. Maldacena*、*E. Shaghoulian* 和 *A. Tajdini*，《副本虫洞与霍金辐射的熵》，*JHEP 05 (2020) 013* [1911.12333].[17] *V. E. Hubeny*、*M. Rangamani* 和 *T. Takayanagi*，《协变全息纠缠熵方案》，*JHEP 07 (2007) 062* [0705.0016].[18] *T. Faulkner*、*A. Lewkowycz* 和 *J. Maldacena*，《全息纠缠熵的量子修正》，*JHEP 11 (2013) 074* [1307.2892].[19] *N. Engelhardt* 和 *A. C. Wall*，《量子极值面：经典范畴之外的全息纠缠熵》，*JHEP 01 (2015) 073* [1408.3203].[20] *I. H. Kim*、*E. Tang* 和 *J. Preskill*，《辐射中的幽灵：黑洞内部的鲁棒编码（特邀论文）》，*JHEP 06 (2020) 031* [2003.05451].[21] *V. Balasubramanian*、*A. Kar*、*C. Li* 和 *O. Parrikar*，《黑洞内部的量子纠错》，*JHEP 07 (2023) 189* [2203.01961].[22] *R. Jackiw*，《低维引力》，核物理学*B 252 (1985) 343*.[23] *C. Teitelboim*，《二维时空中的引力与哈密顿结构》，物理学快报*B 126 (1983) 41*。

[24] *J. Maldacena*、*D. Stanford* 与 *Z. Yang*，二维近反德西特空间中的共形对称性及其破缺，*PTEP 2016*（*2016*）*12C*104 [1606。01857]。[25] *B. Schumacher* 与 *M. A. Nielsen*，量子数据处理与纠错，物理评论 *A 54*（*1996*） 2629 [*quant-ph*/9604022]。[26] *M. A. Nielsen*、*C. M. Caves*、*B. Schumacher* 与 *H. Barnum*，量子纠错与可逆测量的信息论方法，伦敦皇家学会会刊 *A 454*（*1998*）*277*[*quant-ph*/9706064]。[27] *P. Hayden*、*M. Horodecki*、*A. Winter* 与 *J. Yard*，量子容量的解耦方法，*quant-ph/0702005*。[28] *F. Dupuis*，量子信息论的解耦方法，其他学位论文，*4*，*2010*年。[29] *F. Dupuis*、*M. Berta*、*J. Wullschleger* 与 *R. Renner*，单次解耦，数学物理通讯 *328*（*2014*） 251 [1012。6044]。[30] *V. Balasubramanian*、*A. Kar* 与 *T. Ugajin*，两个引力宇宙之间的纠缠，经典与量子引力 *39*（*2022*） 174001 [2104。13383]。[31] *A. Miyata* 与 *T. Ugajin*，与辅助宇宙纠缠的平直时空中黑洞的蒸发，*PTEP 2022*（*2022*）*013B*13 [2104。00183]。[32] *L. Anderson*、*O. Parrikar* 与 *R. M. Soni*，带引力热浴的岛：通向 *ER* = *EPR*，*JHEP 21*（*2020*） 226 [2103。14746]。[33] *D. Marolf*、*O. Parrikar*、*C. Rabideau*、*A. Izadi Rad* 与 *M. Van Raamsdonk*，全息共形场论中从欧几里得源到洛伦兹时空，*JHEP 06*（*2018*）077 [1709。10101]。[34] *C. Akers*、*N. Engelhardt*、*D. Harlow*、*G. Penington* 与 *S. Vardhan*，由非等距编码与复杂度得到的黑洞内部，*JHEP 06*（*2024*） 155 [2207。06536]。[35] *E. Knill* 与 *R. Laflamme*，量子纠错码理论，物理评论快报 *84*（*2000*） 2525 [*quant-ph*/9604034]。[36] *J. Maldacena* 与 *L. Susskind*，纠缠黑洞的冷视界，物理学进展 *61*（*2013*

）

781 [1306。0533]。[37] M. A. Nielsen 和 I. L. Chuang，《量子计算与量子信息：十周年纪念版》。剑桥大学出版社，2010年。[38] A. Goel、H. T. Lam、G. J. Turiaci 和 H. Verlinde，拓展黑洞内部：*SYK* 中的部分纠缠热态，*JHEP* **02**(2019) 156 [1807。03916]。[39] K. Bulycheva，*Jackiw-Teitelboim* 引力中的半经典关联函数，*JHEP* **11** (2019)023[1905。05692]。[40] G. Hayward，具有非光滑边界的时空的引力作用量，物理评论*D* **47**(1993) 3275。

[41] *R. Arias*、*M. Botta-Cantcheff* 和 *P. J. Martinez*，*JT*引力中的 *Pacman*几何与 *Hayward* 项，*JHEP 04 (2022)* 130 [2112.10799].[42] *T. Takayanagi* 和 *K. Tamaoka*，引力边缘模与 *Hayward* 项，*JHEP 02 (2020)*167 [1912.01636].[43] *T. Hartman*、*C. A. Keller* 和 *B. Stoica*，大 *c* 极限下二维共形场论的普适谱，*JHEP 09 (2014)* 118 [1405.5137].[44] *A. Almheiri*、*D. Marolf*、*J. Polchinski* 和 *J. Sully*，黑洞：互补性还是防火墙？，*JHEP 02 (2013)* 062 [1207.3123].[45] *B. Yoshida*，防火墙与搅乱之争，*JHEP 10 (2019)* 132 [1902.09763].[46] *A. Kar*，引力中的非等距量子纠错，*JHEP 02 (2023)* 195 [2210.13476].[47] *A. Blommaert* 和 *M. Usatyuk*，矩阵元中的微观结构，*JHEP 09 (2022) 070*[2108.02210].[48] *W. van Dam* 和 *P. Hayden*，量子通信的 *Rényi*熵界，*quant-ph/0204093*.[49] *M. M. Wilde*，《量子信息论》。剑桥大学出版社，*2013*.[50] *M. M. Wilde*，从经典香农理论到量子香农理论，*1106.1445*.[51] *N. Bao*、*A. Chatwin-Davies*、*J. Pollack* 和 *G. N. Remmen*，可穿越虫洞作为量子信道：探索全息中的共形场论纠缠结构与信道容量，*JHEP 11 (2018)* 071 [1808.05963].[52] *C. B´eny*、*A. Kempf* 和 *D. W. Kribs*，通过海森堡绘景推广量子纠错，《物理评论快报》*98 (2007) 100502*.[53] *C. B´eny*、*A. Kempf* 和 *D. W. Kribs*，可观测量的量子纠错，《物理评论*A*》—原子、分子与光学物理 *76 (2007) 042303*.[54] *M. A. Nielsen* 和 *D. Poulin*，算子量子纠错的代数与信息论条件，《物理评论*A*》*75 (2007) 064304*.[55] *I. Kourkoulou* 和 *J. Maldacena*，*SYK*模型中的纯态与近似-AdS_2 引力，*1707.02325*。