arXiv:2602.01242v1 [math.PR] 1 Feb 2026

关于随机张量积模型的经验谱分布

Simona Diaconu[1]

摘要

在统计学中，假设样本相互独立是合理的。然而，特征未必满足这一性质。早期文献中曾假设特征相互独立，后来出现了多条研究路线，旨在去除这一假设，同时保留原有结论。协方差矩阵的经验谱分布对于理解数据至关重要，而其几乎必然收敛往往是人们所期望的。机器学习领域提出的随机张量积模型，$X = (x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_d})_{1 \le i_1 < \cdots < i_d \le n}$对于 x_1，x_2，……，x_n 独立同分布，其特征具有十分复杂的相依结构，近年来受到广泛研究。当 $x_1 \in \mathbb{R}$，$\mathbb{E}[x_1^4] < \infty$，$\frac{d}{n^{1/3}} = o(1)$，在随机矩阵理论的渐近范围内，已证明协方差矩阵的经验谱分布几乎必然收敛于 Marchenko-Pastur 定律。本文将这一结果推广到$\frac{d}{n^{1/2}} = o(1)$的范围，其中 x_1 是对称的，且其次高斯范数随 n 缓慢增长（上述范围自然出现；当 $\frac{d}{n^{1/2}} \to \infty$ 时结果失效，这一说法似乎是合理的），并证明，与特征相互独立的情形类似，即使协方差结构比各向同性情形更一般，几乎必然收敛仍然成立。后一结果为推导随机矩阵经验谱分布的收敛性提供了一种方法；只要其他模型的条目也具有一定程度的集中性，该方法同样适用。

1 引言

对于随机矩阵[2] $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$，$A = A^T$，其经验谱分布是函数 $F_A : \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$F_A(x) = \frac{1}{n} \sum_{1 \le j \le n} \chi_{x \ge \lambda_j(A)},$$

其中 $\lambda_1(A) \ge \lambda_2(A) \ge \ldots \ge \lambda_n(A)$ 是 $A.$ 的特征值。样本协方差矩阵是统计学中应用最广泛的工具之一，其定义为

$$A = \frac{1}{m} X X^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \tag{M}$$

其中 $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 的列是向量 $X_0 \in \mathbb{R}^n$，的独立副本，其条目通常称为特征。函数 F_A 仍然是一个重要研究对象，因为它不仅能够捕捉谱的整体行为，还能概括局部特征，例如主特征值的渐近性质（例如，Bai 和 Yin [4], Bai 和 Silverstein [5], [6], Bai 等人 [2]）。Marchenko 和 Pastur 在其开创性工作中 [13] 给出了关于厄米矩阵结构的充分条件，保证其经验谱分布依概率弱收敛至确定性测度。此后若干论文放宽了对构成条目的随机变量的原始假设：具体而言，对于由 (M) 给出的协方差矩阵，[13] 中关于 X_0 的条目独立同分布、均值为零且具有有限四阶矩的条件已大幅放宽。如今已充分确立，当 X_0 的条目相互独立时，所有方差均有限是 F_A 收敛的充分必要条件（Belinschi等人 [8] 研究了一类具有无限二阶矩的模型，并证明经验谱分布几乎处处弱收敛，但采用的缩放方式不同于 (M)：他们的定理 1.1 展示了这些极限与 Marchenko-Pastur 定律 (MP) 之间显著的差异）。另一方面，只要底层矩阵满足某种渐近行为（同样以经验谱分布来表述），就可以用随机特征是独立同分布随机变量的线性变换这一条件取代同分布假设（参见 Silverstein [15], Silverstein 和 Bai [16], 以及下文的定理 2 ）。此外，放宽独立性假设的尝试也取得了成功，替代条件包括鞅条件、 m-独立性、块模型等（更详细的说明及相关参考文献，参见 Bryson 等人 [9] 的第 1.2 小节）。

本文聚焦于随机张量积模型。近年来，这类模型因机器学习架构而广受欢迎，并在随机矩阵理论文献中得到分析。具体而言，设 $Z = Z(n) \in \mathbb{R}^{N \times p}$ 是一个随机矩阵，其 p 列相互独立同分布，

$$d = d(n), \qquad N = N(n) = \binom{n}{d}, \qquad p = p(n), \qquad \gamma_n = \frac{N}{p} \to \gamma > 0, \tag{RMT}$$

[1]纽约大学库朗数学研究所，simona.diaconu@nyu.edu[2]本文仅讨论对称实值随机矩阵。不过，这些结果也可以轻松推广到复厄米随机矩阵。

并且在双射 $\{(i_1,\ i_2,\ .....,\ i_d): 1 \le i_1 < i_2 < ... < i_d \le n\} \to \{1, 2, ..., N\}$，下，$Z$ 的每一列都与以下随机变量同分布：

$$Z_0 \in \mathbb{R}^{\binom{n}{d}}, \quad Z_{0,i_1,i_2,...,i_d} = x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_d} \quad (1 \le i_1 < i_2 < ... < i_d \le n) \tag{RTP}$$

对于 $(x_j)_{1\le j\le n}$ 独立同分布，$\mathbb{E}[x_1] = 0$，$\mathbb{E}[x_1^2] = 1$. Bryson 等人 [9] 证明，以下矩阵的经验谱分布

$$S = S(n) = \frac{1}{p}ZZ^T \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

几乎必然收敛到参数为 $\gamma \in$ 的 Marchenko-Pastur 分布 $(0,\ \infty)$，即，

$$F_\gamma(x) = (1-\frac{1}{\gamma})\chi_{x\ge 0,\gamma>1} + \int_{-\infty}^{x} p_\gamma(y)dy, \quad p_\gamma(y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{((1+\sqrt{\gamma})^2-y)\cdot(y-(1-\sqrt{\gamma})^2)}}{2\pi\gamma y}, & y \in [(1-\sqrt{\gamma})^2, (1+\sqrt{\gamma})^2] \\ 0, & y \notin [(1-\sqrt{\gamma})^2, (1+\sqrt{\gamma})^2] \end{cases}, \tag{MP}$$

（详见 Bai 和 Silverstein [3] 第 3.1 小节）只要[3]

$$\frac{d}{n^{1/3}} = o(1), \quad \mathbb{E}[x_{11}^4] < \infty,$$

且作者推测，当 $\frac{d}{n^{1/2}} = o(1)$。时，该结果仍然成立。考察 ~~Z~~ 各列的长度后，可以自然地得到后一个条件：可以证明

$$Var(\frac{1}{N}||Z_1||^2) \propto \frac{d^2}{n} \tag{V1}$$

当 $\mathbb{E}[x_1^4] < \infty$，$\frac{d}{n^{1/2}} = o(1)$ 时（完整细节见本文的引理 6 和 (5.5)：这些结果是紧的，因为当 $d = \Omega(n^{1/2})$，方差可能随 $\frac{d^2}{n}$，呈指数增长，这一结论由引理 7 量化），而渐近趋于零的方差常被用作随机矩阵经验谱分布弱收敛的充分条件。特别是，对 Marchenko 和 Pastur [13]开创性工作的早期拓展，例如 Silverstein [15], Bai 和 Silverstein [16], ，以及较新的进展（例如 Bai 和 Zhou [7]），都要求

$$Var(\frac{1}{N}Z_1^TAZ_1) = o(1), \quad \forall A \in \mathbb{R}^{N\times N}, A = A^T, ||A|| \le 1. \tag{V2}$$

然而，众所周知，条件 $(V2)$ 并非必要（例如，Götze 和 Tikhomirov [11], [12]）：该条件使得我们能够较为直接地使用斯蒂尔切斯变换，而若不采用该条件，往往就需要全新的证明技巧。例如，Götze 和 Tikhomirov 在 [11] 和 [12] 中均采用了 Marchenko-Pastur 定律的微分刻画，并结合斯蒂尔切斯变换；而 Adamczak [1]则采用了行列式条件（基于 Tao 和 Vu [17]）和测度集中（见[1]中的定理 3。9）。值得一提的是，由于 $(V2)$ 强于 $(V1)$，目前尚不清楚后者是否也并非必要：若后者是必要的，则意味着对于由 (RTP) 给出的随机张量积模型而言，范围 $\frac{d}{n^{1/2}} = o(1)$ 可能是最优的（引理 7 仅处理范围 $\frac{d}{n^{1/2}} = \Omega(1)$ 的一部分）。 ——

本文在关于 x_1 的分布律的两个附加假设——对称性以及缓慢增长的次高斯范数——下，证实了 Bryson 等人 [9]的上述猜想。主要工具仍是斯蒂尔切斯变换；它与测度集中以及解析延拓的唯一性相结合，使 [9]中所论证的随机张量积模型收敛性的两个推广得以成立。第一个结果基于 S，的斯蒂尔切斯变换的恒等式（ST）；该恒等式此前曾被用于例如 Silverstein [15],Ledoit 和 Péché [14], 以及作者的一项前期工作 [10]。

定理 1. 假设 $Z \in \mathbb{R}^{N\times p}$ 具有独立同分布列，其分布由带有 $d < n^{1/2}$的 *(RTP)* 给出，

$$x_1 = x(n), \quad x_1 \overset{d}{=} -x_1, \quad \mathbb{E}[x_1^2] = 1, \quad \mathbb{E}[x_1^{2k}] \le (Ck)^k \quad (k \in \mathbb{N}), \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log C}{\log \frac{n^{1/2}}{d}} = 0$$

对于某个 $C = C(n) \ge 2$. 若 *(RMT)* 成立，则 $S = \frac{1}{p}ZZ^T$ 的经验谱分布几乎必然弱收敛至 *Marchenko-Pastur* 定律 F_γ，其由 (MP) 给出。

[3]为记号简便起见，本文余下部分略去 d，p，N 对 n 的相依性。

关于上述陈述，有几点需要说明： C 的下界是任意的，意味着对于任意 $\epsilon_0 > 0$，2 都可以替换为 $1+\epsilon_0$； $\frac{d}{n^{1/2}}$. 的上界也是如此。这两个不等式意味着， C 上的极限条件等价于~~1~~ $\frac{d}{n^{1/2}} = o(1)$。此外，下面这个简单的引理说明了后一假设的作用：对于$a_n = C(n)$ $b_n = \frac{n^{1/2}}{d}$，存在如下所述的序列 $q_n \in \mathbb{N}$，这对于定理 1 的证明至关重要。

引理 1. 设 $a_n \geq 2, b_n > 1$. 那么 $\lim_{n\to\infty} \log a_n \log b_n = 0$ 当且仅当存在一个序列 $q_n \in \mathbb{N}$，满足 $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty, \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^{q_n}}{b_n} = 0$. —

证明。 设 $\lim_{n\to\infty} \log a_n \log b_n = 0$. 由此及 $a_n \geq 2, b_n > 1$ 可得 $\lim_{n\to\infty} \log\ b_n = \infty$, 从而 $a_n = b_n^{\epsilon_n}$满足 $\epsilon_n > 0, \lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$. 令 $q_n = 1 + \lfloor \frac{1}{2\epsilon_n} \rfloor$. 那么 $q_n \leq \frac{1}{2\epsilon_n} + 1 \leq \frac{2}{3\epsilon_n}$ 对于 $n \geq n_0$, 从而

$$0 < \frac{a_n^{q_n}}{b_n} = b_n^{\epsilon_n \cdot q_n - 1} \leq b_n^{-1/3}$$

得到 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^{q_n}}{b_n} = 0$, 且 $q_n \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} q_n = \infty$ 直接由该序列的定义可得。

反过来，假设 $q_n \in \mathbb{N}$，$\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$，且 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^{q_n}}{b_n} = 0$. 那么对于 $n \geq n_0$,

$$0 < \frac{\log a_n}{\log b_n} \leq \frac{1}{q_n},$$

因为 $\lim_{n\to\infty} (q_n \log\ a_n - \log\ b_n) = -\infty$，由此 $\lim_{n\to\infty} \log a_n \log b_n = 0$. □

第二个结果是定理 1 的推广（$T = I$ 对应于定理 1）：它依赖于 Marchenko 和 Pastur 开创性工作中的一个关键思想，即极限测度的斯蒂尔切斯变换所满足的积分方程具有唯一解[5]。此外，期望的普适性对这一结果至关重要；还需指出，在满足一定测度集中的条件下，该证明方法也可用于其他模型。

定理 2。假设 n， $d \in \mathbb{N}$， $d < n^{1/2}$,

$$x_1 = x(n), \quad x_1 \overset{d}{=} -x_1, \quad \mathbb{E}[x_1^2] = 1, \quad \mathbb{E}[x_1^{2k}] \leq (Ck)^k \quad (k \in \mathbb{N}), \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log C}{\log \frac{n^{1/2}}{d}} = 0$$

对某个 $C = C(n) \geq 2$. 设 $T = T(n) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ 为确定性的、对称的半正定矩阵，且$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||T(n)|| < \infty$，其经验谱分布弱收敛于确定性概率分布 $H.$。若 ***(RMT)*** 成立，则 $\tilde{S} = \frac{1}{p}\tilde{Z}\tilde{Z}^T$的经验谱分布（其中 $\tilde{Z} \in \mathbb{R}^{N\times p}$ 的列独立同分布，且与 $T^{1/2}Z_0$ 同分布； $Z_0 \in \mathbb{R}^N$ 由 ***(RTP)*** 给定）几乎必然弱收敛到概率测度 μ，且 μ 的斯蒂尔切斯变换满足

$$m(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-t} d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z - t(1-\gamma+\gamma z m(z))} dH(t) \qquad (z \in \mathbb{C}^+). \tag{IE}$$

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍定理 1 证明的主要组成部分（这些部分也是定理 2 的框架），第 3 节论证上述论证中的主要要点，第 4 节包含定理 2 的证明，第 5 节则汇集了过程中需要用到的若干引理。

2 修订的三步法

对于对称矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，其斯蒂尔切斯变换为 m： $\mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ 定义为[6]

$$m(z) = \frac{1}{n} tr((zI - A)^{-1}),$$

[4] $d < n^{1/2}$ $C \geq 2$ 1 $b_n \to 0$ $a_n = 2^n$ $b_n = 2^{-n^2}$. 取决于，: 下文引理中的等价关系在，例如，时不成立。取决于 $m\ z \in \{r \in \mathbb{C} \ -\frac{1-c}{z} - cr \in \mathbb{C}^+\}$ $z \in \mathbb{C}^+$. (): 对于若干作者

[6] 将斯蒂尔切斯变换定义为 $m(z) = \frac{1}{n} tr((A - zI)^{-1})$: 这两种表述显然仅相差一个符号，因而等价。

其中 $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \ Im(z) > 0\}$，众所周知，斯蒂尔切斯变换逐点收敛可推出经验谱分布弱收敛。特别地，当满足以下条件时， A_n 的经验谱分布对应的概率几乎必然弱收敛到测度 μ

$$m_{A_n}(z) = \frac{1}{n} tr((zI - A_n)^{-1}) \to m_\mu(z) = \int \frac{1}{z-x} d\mu(x) \quad (z \in \mathbb{C}^+)$$

几乎必然成立。这引出了三步法，文献中反复运用该方法来论证上述关于随机矩阵经验谱分布的结论：

1. $m_{A_n}(z) - \mathbb{E}[m_{A_n}(z)] \xrightarrow{a.s.} 0$ for all $z \in \mathbb{C}^+$,

2. $\mathbb{E}[m_{A_n}(z)] \to m_\mu(z)$ 对所有 $z \in \mathbb{C}^+$，3. $m_{A_n}(z) - m_\mu(z) \to 0$ 对所有 $z \in \mathbb{C}^+$ 几乎必然成立。

这些是以下证明中的关键思想

$$\lim_{n\to\infty} m_{A_n}(z) = m_\mu(z) \text{ for all } z \in \mathbb{C}^+ \text{ almost surely}$$

正如 Bai 和 Silverstein [3] 所述。这种三步法已用于推广 Marchenko 和 Pastur [13] 的开创性结果（例如，去除有限四阶矩假设，将依概率收敛改进为几乎必然收敛），其中包括 Bai 和 Zhou [7] 最近对原条件的放宽： X 的列具有独立元素。

在当前情形（即定理 1 的设定）下，1. 保持不变，2. 则仅在较小的定义域上得到证明，

$$D(\gamma) = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) \geq \frac{16}{9} + 4\gamma\} \subset \mathbb{C}^+, \tag{2.1}$$

而且3. 因此也需要做一些细微调整。在很大程度上，定理 1 和 2 的论证建立在解析延拓的一个简单而众所周知的性质——唯一性之上。这使得上述对2. 的放宽成为可能，而定义域的缩小 $\mathbb{C}^+ \to D(\gamma)$ 则使我们能够从不同角度处理所关注的期望，即采用幂级数展开的方法。在论证上述三个阶段之前，下面先考察 Silverstein [15], Ledoit 和 Péché [14],Diaconu [10], 中使用的斯蒂尔切斯变换的一种改写形式。

斯蒂尔切斯变换

设 $m_n : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ 为 参数为 p 的 Marchenko-Pastur 定律的斯蒂尔切斯变换 参数 γ_n,即,

$$m_n(z) = \frac{z + \gamma_n - 1 - \sqrt{(z - \gamma_n + 1)^2 - 4z}}{2\gamma_n z} \quad (z \in \mathbb{C}^+),$$

其中平方根由确保 $Im(m_n(z)) < 0$的复对数分支给出（或者， $m_n(z)$ 是满足 $Im(m_n(z)) < 0$ 的 (2.5) 的唯一解：详见 Bai 和 Silverstein [3] 第 3.3 小节），而 m_{F_n} 是 $S \in \mathbb{R}^{N\times N}$,的经验谱分布的斯蒂尔切斯变换

$$m_{F_n}(z) = \frac{1}{N} tr((zI - S)^{-1}) \quad (z \in \mathbb{C}^+).$$

将 Z的列记为 $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p \in \mathbb{R}^N$. 在 [10], 中证明了当 $z \in \mathbb{R}, z \to \infty$,

$$\sqrt{n} \cdot z(m_n(z) - m_{F_n}(z)) \xrightarrow{p} 0, \tag{2.2}$$

假设 Z 中的条目独立同分布，且次高斯范数有界，即,

$$||Z_{11}||_{\psi_2} = \inf\{t > 0, \mathbb{E}[e^{Z_{11}^2/t^2}] \leq 2\} \leq C.$$

恒等式

$$-1 + zm_{F_n}(z) = -\frac{1}{\gamma_n} + \frac{1}{N} \sum_{1\leq j\leq p} \frac{1}{1 - \frac{1}{p} Z_j^T R_j Z_j}, \tag{ST}$$

其中 $R_j = (zI - S + \frac{1}{p} Z_j Z_j^T)^{-1}$ 对于 $1 \leq j \leq p$, 在（2.2）的证明中至关重要（证明见引理 4） .

$$z(m_{F_n}(z) - m_n(z)) = \frac{1}{\gamma_n} \cdot (\frac{1}{1 - \gamma_n m_{F_n}(z)} - \frac{1}{1 - \gamma_n m_n(z)}) + \Delta_1 + \Delta_2, \tag{2.3}$$

其中

$$\Delta_1 = \frac{1}{N}\sum_{1\le j\le p}(\frac{1}{1-\frac{1}{p}Z_j^T R_j Z_j} - \frac{1}{1-\frac{1}{p}tr(R_j)}),\quad \Delta_2 = \frac{1}{N}\sum_{1\le j\le p}(\frac{1}{1-\frac{1}{p}tr(R_j)} - \frac{1}{1-\frac{1}{p}tr((zI-S)^{-1})})$$

只要 $m_n(z)=\frac{z+\gamma_n-1-\sqrt{(z-\gamma_n+1)^2-4z}}{2\gamma_n z}$ 导致

$$-1+zm_n(z) = -\frac{1}{\gamma_n} + \frac{1}{\gamma_n}\cdot\frac{1}{1-\gamma_n m_n(z)} \tag{2.4}$$

from

$$(z-\gamma_n+1)^2 - 4z = (z+\gamma_n-1)^2 - 4\gamma_n z,$$

提供

$$\gamma_n z m_n^2(z) - m_n(z)(z+\gamma_n-1)+1=0, \tag{2.5}$$

或者等价地

$$(\gamma_n m_n(z)-1)\cdot(zm_n(z)-1) = -m_n(z),$$

因为 $B_1^2 - 2AB_1 + B_2 = 0$ 当 $A - B_1 = \sqrt{A^2 - B_2,}$ 代入后可得到 (2.5) 的恒等式

$$B_1 = 2\gamma_n z m_n(z),\quad A = z+\gamma_n-1,\quad B_2 = 4\gamma_n z.$$

公式 (ST) 在 $z\in\mathbb{C}^+,$ 时成立，可用于证明前文提到的三个修改步骤 e
本节开头。本节接下来将详细介绍这三个阶段。

第一步

仔细考察 Bai 和 Silverstein 的证明

$$m_{F_n}(z) - \mathbb{E}[m_{F_n}(z)] \xrightarrow{a.s.} 0,\quad \forall z\in\mathbb{C}^+ \tag{s1}$$

可知，列 $(Z_j)_{1\le j\le p}$ 相互独立便足以保证这一收敛。为完整起见，下面给出该论证。

固定 $z\in\mathbb{C}^+$：令 $\mathcal{F}_k = \sigma(Z_j, k<j\le p)$ 对于 $0\le k\le p-1,$ 且 $\mathcal{F}_p = \{\emptyset,\Omega\}.$ 那么

$$m_{F_n}(z) - \mathbb{E}[m_{F_n}(z)] = \sum_{1\le k\le p}(\mathbb{E}[m_{F_n}(z)|\mathcal{F}_{k-1}] - \mathbb{E}[m_{F_n}(z)|\mathcal{F}_k]) := \sum_{1\le k\le p} N^{-1}\delta_k, \tag{2.6}$$

并注意到，由于 $\mathcal{F}_k\subset\mathcal{F}_{k-1}$ 对于 $1\le k\le p,$，随机变量 $(\delta_{p+1-k})_{1\le k\le p}$ 关于滤过 $(\mathcal{F}_{p+1-k})_{1\le k\le p}.$ 是鞅差。
由于 $r_k(z) = \frac{1}{N}tr(R_k)$ 与 Z_k 相互独立，因此可得

$$N^{-1}\delta_k = \mathbb{E}[m_{F_n}(z) - r_k(z)|\mathcal{F}_{k-1}] - \mathbb{E}[m_{F_n}(z) - r_k(z)|\mathcal{F}_k],$$

因此 $|\delta_k| \le \frac{2}{Im(z)}$ 当

$$N\cdot[m_{F_n}(z) - r_k(z)] = tr((zI-S)^{-1}) - tr(R_k) = \frac{\frac{1}{p}Z_k^T(zI-S)^{-2}Z_k}{1+\frac{1}{p}Z_k^T(zI-S)^{-1}Z_k} \tag{2.7}$$

from

$$(A+uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u}$$

（引理 5 中确立的一个恒等式），以及

$$|\frac{\frac{1}{p}Z_k^T(zI-S)^{-2}Z_k}{1+\frac{1}{p}Z_k^T(zI-S)^{-1}Z_k}| \le \frac{\frac{1}{p}Z_k^T((Re(z)I-S)^2+(Im(z))^2I)^{-2}Z_k}{Im(\frac{-1}{p}Z_k^T(zI-S)^{-1}Z_k)} = \frac{1}{Im(z)}, \tag{2.8}$$

三角不等式的一个推论，

$$\frac{1}{|z-\lambda|^2} = \frac{1}{(Re(z)-\lambda)^2+(Im(z))^2} = \frac{1}{Im(z)}Im(\frac{-1}{z-\lambda})$$

以及

$$\frac{1}{z-\lambda} = \frac{Re(z)-\lambda-iIm(z)}{(Re(z)-\lambda)^2+(Im(z))^2}\quad(\lambda\in\mathbb{R}).$$

现在回到 (2.6)：由于 $|\delta_k| \leq \frac{2}{Im(z)}$，且它们构成鞅差，复值鞅的 Burkholder 不等式的一个推广（Bai 和 Silverstein [3] 中的引理 2。12）给出

$$\mathbb{E}[|m_{F_n}(z) - \mathbb{E}[m_{F_n}(z)]|^4] \leq \frac{K_4}{N^4} \cdot \mathbb{E}[(\sum_{1\leq k\leq p} |\delta_k|^2)^2] \leq \frac{K_4}{N^4} \cdot \frac{16p^2}{(Im(z))^4} = \frac{C(z,\gamma_n)}{N^2}, \tag{2.9}$$

对某个通用的 $K_4 > 0$，由此根据第一 Borel-Cantelli 引理可得结论 (s1)， $N \geq n$，并由 Markov 不等式得

$$\mathbb{P}(\sup_{r\geq M} |m_{F_r}(z) - \mathbb{E}[m_{F_r}(z)]| \geq \epsilon) \leq \sum_{r\geq M} \frac{1 + C(z,\gamma)}{n^2 \cdot \epsilon^4} \qquad (\epsilon > 0, M \geq M_0).$$

第二步

再次固定 $z \in \mathbb{C}^+$：(*ST*) 成立，即

$$-1 + zm_{F_n}(z) = -\frac{1}{\gamma_n} + \frac{1}{N} \sum_{1\leq j\leq p} \frac{1}{1 - \frac{1}{p} Z_j^T R_j Z_j}$$

并得到

$$-1 + z\mathbb{E}[m_{F_n}(z)] = -\frac{1}{\gamma_n} + \frac{1}{\gamma_n} \mathbb{E}[\frac{1}{1 - \frac{1}{p} Z_1^T R_1 Z_1}] \tag{2.10}$$

（$\mathbb{E}[\frac{1}{|1-\frac{1}{p} Z_1^T R_1 Z_1|}] < \infty$ 由 $|1 - \frac{1}{p} Z_1^T R_1 Z_1| \leq 1 + \frac{1}{Im(z)} \cdot \frac{1}{p} ||Z_1||^2$ 立即可得：见 (3.3)）。当

$$Var(\frac{1}{p} Z_1^T R_1 Z_1) = o(1), \tag{2.11}$$

(2.10) 右侧的随机变量可以证明与.....接近

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p} tr((zI - S))^{-1}} = \frac{1}{1 - \gamma_n m_{F_n}(z)},$$

而这大致是

$$\frac{1}{1 - \mathbb{E}[\frac{1}{p} tr((zI - S))^{-1}]} = \frac{1}{1 - \gamma_n \mathbb{E}[m_{F_n}(z)]}$$

（通过步骤 1）。方差条件 (2.11) 在 Bai 和 Zhou [7] 中至关重要，也是 (2.2) 背后论证的要旨（Bai 和 Zhou [7] 对此的表述有所不同：当 $B = B^T$ 是具有 $||B|| \leq 1$ 的确定性变量时， $Var(\frac{1}{p} Z_1^T B Z_1) = o(1)$；在当前的各向同性情形下，(2.11) 已足够）。然而，对于定理 1 中考虑的模型，(2.11) 似乎并不适用于整个范围 $\frac{d}{n^{1/2}} = o(1)$（Bryson 等人 [9] 证明了当 $\frac{d}{n^{1/3}} = o(1)$ 时 (2.11) 成立）。

为绕过上述问题，我们采用向量截断：只要 $||Z_1||$ 的长度集中在其均值附近，这种方法就有效。特别是，根据引理 6，当 $\mathbb{E}[x_1^4] = o(\frac{n}{d^2})$ 时，这一条件成立；而且必须指出，方差上界是紧的：参见 (5.5) 以及引理 7，了解在定理 1 条件中隐含的范围 $\frac{d}{n^{1/2}} = o(1)$， 之外可能出现的情况（参见定理陈述下方的评论）。关于 2. 的结论（即步骤 2 ）由以下结果得出。

命题 1. 假设定理 *1* 中的条件成立。那么

$$\mathbb{E}[\frac{1}{1 - \frac{1}{p} Z_1^T R_1 Z_1}] = \frac{1}{1 - \gamma_n \mathbb{E}[m_{F_n}(z)]} + o(1) \tag{$s2.0$}$$

当 $Im(z) \geq 1 + 4\gamma$. 特别地，若 $Im(z) \geq \frac{16}{9} + 4\gamma$，那么

$$\mathbb{E}[m_{F_n}(z)] = m_\gamma(z) + o(1). \tag{$s2$}$$

命题 1 的证明见第 3 节，分为若干步骤：首先写出

$$\mathbb{E}[\frac{1}{1 - \frac{1}{p} Z_1^T R_1 Z_1}] = \mathbb{E}[\frac{1}{1 - \frac{1}{p} Z_1^T R_1 Z_1} \cdot \chi_{||Z_1||^2 \leq 2N}] + \mathbb{E}[\frac{1}{1 - \frac{1}{p} Z_1^T R_1 Z_1} \cdot \chi_{||Z_1||^2 > 2N}].$$

第二项可证明为可忽略项（见引理 2），而第一项则通过在 0 处作幂级数展开来处理。对 $||Z_1||$ 和 Im（z）的约束 $> 4\gamma$ 确保了 $\frac{1}{p}|Z_1^T R_1 Z_1| \leq \frac{1}{2}$ 适用于 $n \geq n_0$（见引理 3），再结合对

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k \geq 0} x^k$$

这使得能够计算上述第一个期望的大小：对于某个 $q = q(n) \to \infty$，采用 q^{th} 部分和而非幂级数（回顾引理 1 前的注释），并证明 k^{th} 项接近于 $(\mathbb{E}[\frac{1}{p} tr(R_1)])^k$，后者又接近于 $(\gamma_n \mathbb{E}[m_{F_n}(z)])^k$. 这两个结果将得到 ($s2.0$)，而 ($\bar{s2}$) 将以类似于推导 [10] 中 (2.2) 的方式得到（另见 (2.3)）。

第三步

假设定理 1 的条件成立。命题 1 给出

$$\mathbb{E}[m_{F_n}(z)] = m_\gamma(z) + o(1)$$

当 $z \in D(\gamma)$（回顾 (2.1)）时，并结合 (s1) 得到

$$m_{F_n}(z) - m_\gamma(z) \xrightarrow{a.s.} 0.$$

令 $S(\gamma) = \{q_1 + iq_2 : q_1, q_2 \in \mathbb{Q}, q_2 \geq \frac{16}{9} + 4\gamma\}$， </style}中稠密的点的一个可数集：则

$$m_{F_n}(z) - m_\gamma(z) \to 0$$

对所有 $z \in S(\gamma)$ 几乎必然成立。由此得到

$$m_{F_n}(z) - m_\gamma(z) \to 0 \tag{$s3$}$$

对所有 $z \in D(\gamma)$ 几乎必然成立，因为 m_γ 在 $\mathbb{C}^+$ 中显然连续，并且

$$|m_{F_n}(z_1) - m_{F_n}(z_2)| \leq \frac{|z_1 - z_2|}{(\min(Im(z_1), Im(z_2)))^2}$$

from

$$\frac{1}{z_1 - \lambda} - \frac{1}{z_2 - \lambda} = \frac{z_2 - z_1}{(z_1 - \lambda)(z_2 - \lambda)} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

取任意子序列 n_k，使得 F_{n_k} 弱收敛到某个分布 G（不对 G 作任何假设：特别地，可能出现 $G(\infty) > 0$）。斯蒂尔切斯变换也必然逐点收敛（对于每个 $z \in \mathbb{C}^+$，其实部和虚部都是由 $\frac{1}{Im(z)}$ 控制的实值连续函数），因此 G 与 F_γ，即参数为 γ，的 Marchenko-Pastur 定律，在 $D(\gamma)$ 中具有相同的斯蒂尔切斯变换，该结论来自（$s3$）。由于 G 的斯蒂尔切斯变换在 $\mathbb{C}^+$ 中解析，依据

$$\frac{m(z_1) - m(z_2)}{z_1 - z_2} = -\int \frac{1}{(z_1 - \lambda)(z_2 - \lambda)} dG(\lambda), \qquad \lim_{z \to z_1} \frac{1}{(z_1 - \lambda)(z - \lambda)} = \frac{1}{(z_1 - \lambda)^2} \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C}^+),$$

控制收敛定理，可知 m_G 和 m_γ 在 $D(\gamma) \subset \mathbb{C}^+$，中解析且相等；因此，它们的任何解析延拓都相同，由此 $m_G = m_\gamma$. 。这意味着 $G = F_\gamma$（由（MP）定义），并且由于所有弱收敛子序列的极限都是 F_γ，故定理 1 得证

关于用于论证定理 1 的三个步骤的讨论至此完成。

3 通过截断求期望

本节的目标是证明命题 1：在本节中始终假设命题 1 中陈述的条件成立。下面将反复使用的两个性质是

$$\frac{d}{n^{1/2}} = o(1), \qquad C^q \cdot \frac{d}{n^{1/2}} = o(1), \tag{3.1}$$

对于某些 $q = q(n) \in \mathbb{N}$，$q(n) \to \infty$（后者可由引理 1 应用于 $a_n = C(n)$ $b_n = \binom{n^{1/2}}{d}$，推出，而前者则是后者与 $C \geq 2$ 的直接推论）。

首先证明（$s2$）（以（$s2.0$）为条件）。恒等式 (2.10) 和（$s2.0$）给出

$$-1+z\mathbb{E}[m_{F_n}(z)]=-\frac{1}{\gamma_n}+\frac{1}{\gamma_n}\mathbb{E}[\frac{1}{1-\frac{1}{p}Z_1^TR_1Z_1}]=-\frac{1}{\gamma_n}+\frac{1}{\gamma_n}\cdot\frac{1}{1-\gamma_n\mathbb{E}[m_{F_n}(z)]}+o(1).$$

回顾（2.4），即

$$-1+zm_n(z)=-\frac{1}{\gamma_n}+\frac{1}{\gamma_n}\cdot\frac{1}{1-\gamma_nm_n(z)},$$

由此可得

$$z(\mathbb{E}[m_{F_n}(z)]-m_n(z))=\frac{1}{\gamma_n}\cdot(\frac{1}{1-\gamma_n\mathbb{E}[m_{F_n}(z)]}-\frac{1}{1-\gamma_nm_n(z)})+o(1),$$

或者等价地

$$(\mathbb{E}[m_{F_n}(z)]-m_n(z))\cdot(z-\frac{1}{(1-\gamma_nm_n(z))(1-\gamma_n\mathbb{E}[m_{F_n}(z)])})=o(1). \tag{3.2}$$

当 $n\geq n_0$, z 具有 $Im(z)\geq 4\gamma_n$, </style}由此可得

$$|z-\frac{1}{(1-\gamma_nm_n(z))(1-\gamma_n\mathbb{E}[m_{F_n}(z)])}|\geq|z|-\frac{1}{|1-\gamma_nm_n(z)|\cdot|1-\gamma_n\mathbb{E}[m_{F_n}(z)]|}\geq|z|-\frac{1}{(1-\gamma_n\cdot\frac{1}{Im(z)})^2}\geq 4\gamma$$

通过三角不等式以及

$$|z|-\frac{1}{(1-\gamma_n\cdot\frac{1}{Im(z)})^2}\geq|z|-\frac{1}{(1-\gamma_n\cdot\frac{1}{4\gamma_n})^2}\geq Im(z)-\frac{16}{9}.$$

因此（3.2）意味着

$$\mathbb{E}[m_{F_n}(z)]-m_n(z)=o(1).$$

并且 $\gamma_n\to\gamma$ 给出 $m_n(z)\to m_\gamma(z)$，由此可得 ($s2$)，即，

$$\mathbb{E}[m_{F_n}(z)]-m_\gamma(z)=o(1).$$

完成对 ($s2$) 的论证后，回到 ($s2.0$)，这是本节余下部分的目标 .

从以下内容开始

$$\mathbb{E}[\frac{1}{1-\frac{1}{p}Z_1^TR_1Z_1}]=\mathbb{E}[\frac{1}{1-\frac{1}{p}Z_1^TR_1Z_1}\cdot\chi_{||Z_1||^2>2N}]+\mathbb{E}[\frac{1}{1-\frac{1}{p}Z_1^TR_1Z_1}\cdot\chi_{||Z_1||^2\leq 2N}].$$

小节 3.1 分析第一个期望，而小节 3.2–3.4 处理第二个期望。命题 1 的结论由本文证明的 ($E1$) 和 ($E2a$)–($E2b$) 得出。

3.1 尾部期望

本小节论证，在命题 1 的条件下，

$$\mathbb{E}[\frac{1}{1-\frac{1}{p}Z_1^TR_1Z_1}\cdot\chi_{||Z_1||^2>2N}]=o(1). \tag{$E1$}$$

这可通过以下引理实现：由于 $\frac{d}{n^{1/2}}=o(1)$ $\mathbb{E}[x^4]\leq 4C^2\leq\frac{4n^{1/2}}{d}$ （回顾 (3.1) 和$C\geq 2$），当 n 充分大时，下面引理 2 中的条件成立，从而得到 ($E1$)：该结果给出的上界为 $O(\frac{d}{n^{1/2}})=o(1)$。

引理 2。 假设 $d\leq\frac{n}{2}$， 且 $\mathbb{E}[x^4]\leq\frac{n-2d+2}{(d-1)^2}$ · 则

$$|\mathbb{E}[\frac{1}{1-\frac{1}{p}Z_1^TR_1Z_1}\cdot\chi_{||Z_1||^2>2N}]|\leq(1+\frac{2\gamma_n}{Im(z)})\cdot 2\mathbb{E}[x^4]\cdot\frac{d^2}{n}.$$

证明。恒等式（5.2）可重新整理为

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p}Z_j^TR_jZ_j}=1+\frac{1}{p}Z_j^T(zI-S)^{-1}Z_j, \tag{3.3}$$

由此可知，所关注的量至多为

$$\mathbb{E}[(1+\frac{1}{p}|Z_1^T(zI-S)^{-1}Z_1|)\cdot\chi_{||Z_1||^2>2N}]\leq\mathbb{E}[(1+\frac{1}{Im(z)}\cdot\frac{1}{p}||Z_1||^2)\cdot\chi_{||Z_1||^2>2N}] \tag{3.4}$$

利用 $||(zI-S)^{-1}||\leq\frac{1}{Im(z)}$，最后这个上界是

$$\mathbb{E}[(1+\frac{1}{Im(z)}\cdot\frac{1}{p}||Z_1||^2)\cdot\chi_{||Z_1||^2>2N}]\leq(1+\frac{1}{Im(z)}\cdot\frac{N}{p})\cdot\mathbb{P}(||Z_1||^2>2N)+\frac{1}{Im(z)}\cdot\frac{N}{p}\cdot Var(\frac{1}{N}||Z_1||^2)$$

由于 $\mathbb{E}[\frac{1}{N}||Z_1||^2]=1$，可得

$$\mathbb{E}[(\frac{1}{N}||Z_1||^2-1)\cdot\chi_{||Z_1||^2>2N}]\leq\mathbb{E}[(\frac{1}{N}||Z_1||^2-1)^2]=Var(\frac{1}{N}||Z_1||^2).$$

由切比雪夫不等式可得

$$\mathbb{P}(||Z_1||^2>2N)=\mathbb{P}(|\,||Z_1||^2-N|>N)\leq\frac{Var(||Z_1||^2)}{N^2},$$

并结合引理 6，证明即告完成，前提是 只要

$$(1+\frac{1}{Im(z)}\cdot\frac{N}{p})\cdot\mathbb{P}(||Z_1||^2>2N)+\frac{1}{Im(z)}\cdot\frac{N}{p}\cdot Var(\frac{1}{N}||Z_1||^2)\leq(1+\frac{2\gamma_n}{Im(z)})\cdot Var(\frac{1}{N}||Z_1||^2)\leq$$

$$\leq(1+\frac{2\gamma_n}{Im(z)})\cdot 2\mathbb{E}[x^4]\cdot\frac{d^2}{n}. \tag{3.5}$$

□

注： 由 (3.3) 得出的上界可以取为一致的，

$$\frac{1}{|1-\frac{1}{p}Z_j^TR_jZ_j|}\leq\frac{|z|}{Im(z)}$$

（见第 4 节，尤其是（4.5））：然而，为了保证（$E1$），仍然需要 Z_1 的长度具有集中性（由 $\mathbb{P}(||Z_1||^2>2N)$ 捕获）。

3.2 幂级数展开

在本小节和接下来的小节中，我们关注的对象是

$$\mathbb{E}[\frac{1}{1-\frac{1}{p}Z_1^TR_1Z_1}\cdot\chi_{||Z_1||^2\leq 2N}].$$

由于 $1+4\gamma\geq 4\gamma_n$ 对于足够大的 n，以下结果意味着，对于 $n\geq n_0$，

$$\frac{1}{p}|Z_1^TR_1Z_1|\cdot\chi_{||Z_1||^2\leq 2N}\leq\frac{1}{2}. \tag{3.6}$$

引理 3. 若 $Im(z)\geq 4\gamma_n$，则 $\frac{1}{p}|Z_1^TR_1Z_1|\cdot\chi_{||Z_1||^2\leq 2N}\leq\frac{1}{2}$. –

证明。由于

$$\frac{1}{|z-\lambda|}\leq\frac{1}{Im(z)}\qquad(\lambda\in\mathbb{R}),$$

由此可得 $||R_1||=||(zI-\frac{1}{p}\sum_{2\leq j\leq p}Z_jZ_j^T)^{-1}||\leq\frac{1}{Im(z)}$，从而

$$\frac{1}{p}|Z_1^TR_1Z_1|\cdot\chi_{||Z_1||^2\leq 2N}\leq\frac{1}{Im(z)}\cdot\frac{1}{p}||Z_1||^2\cdot\chi_{||Z_1||^2\leq 2N}\leq\frac{2\gamma_n}{Im(z)}\leq\frac{1}{2}.$$

□

对于 $n \in \mathbb{N}$,

$$M = M(n) = \lfloor \min\left(\frac{q(n)}{12}, \frac{\log\left(1+\frac{n^{1/2}}{d}\right)}{(\log\log\left(1+\frac{n^{1/2}}{d}\right))^2}\right)\rfloor,$$

其中 $q = q(n) \in \mathbb{N}$, $q(n) \to \infty$ 满足 (3.1)。该序列的主要性质为

$$M(n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \qquad M(n) \to \infty, \qquad (16CM(n))^{M(n)} \cdot \left(\frac{d}{n^{1/2}}\right)^{1/8} \to 0 : \tag{3.7}$$

前两条可由 $M(n)$ $q(n)$、的定义和 (3.1) 直接得到，而最后一条则由下式推出

$$(16CM(n))^{M(n)} \cdot \left(\frac{d}{n^{1/2}}\right)^{1/8} = C^{M(n)} \cdot \left(\frac{d}{n^{1/2}}\right)^{1/12} \cdot (16M(n))^{M(n)} \cdot \left(\frac{d}{n^{1/2}}\right)^{1/24} \to 0 \cdot 0 = 0$$

再次利用 (3.1) 即可得到。为简化记号，省略对 n 的依赖，即将 $M(n)$ 记为 $M.$ 。由 (3.6)，恒等式

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + ... + x^M + \frac{x^{M+1}}{1-x} \qquad (x \neq 1) \tag{3.8}$$

给出

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{p}Z_1^T R_1 Z_1} \cdot \chi_{||Z_1||^2 \leq 2N}\right] = 1 + \Sigma_1 + \Sigma_2 - \Sigma_3, \tag{$E2a$}$$

$$\Sigma_1 = \sum_{1 \leq m \leq M} \mathbb{E}[\left(\frac{1}{p} Z_1^T R_1 Z_1\right)^m], \quad \Sigma_2 = \mathbb{E}[\left(\frac{1}{p} Z_1^T R_1 Z_1\right)^{M+1} \cdot \chi_{||Z_1||^2 \leq 2N}]}{1-\frac{1}{p}Z_1^T R_1 Z_1}\right), \quad \Sigma_3 = \sum_{0 \leq m \leq M} \mathbb{E}[\left(\frac{1}{p} Z_1^T R_1 Z_1\right)^m \cdot \chi_{||Z_1||^2 > 2N}].$$

这些组成部分分别处理：具体而言，证明

$$\Sigma_1 = -1 + \frac{1}{1-\gamma_n \mathbb{E}[m_{F_n}(z)]} + o(1), \qquad \Sigma_2 = o(1), \qquad \Sigma_3 = o(1). \tag{$E2b$}$$

最后两个结论由下文的 (e_2) 和 (e_3) 得出，因为 $M = M(n) \to \infty$，而第一个结论将在下一小节中处理。

对于 Σ_2，(3.3) 给出

$$\frac{(\frac{1}{p}Z_1^T R_1 Z_1)^{M+1}}{1-\frac{1}{p}Z_1^T R_1 Z_1} = \frac{1}{p} Z_1^T (zI - S)^{-1} Z_1 \cdot \left(\frac{1}{p} Z_1^T R_1 Z_1\right)^M,$$

由此，对于任意厄米矩阵 B，逐点上界 $\frac{1}{p}|Z_1^T B Z_1| \leq \frac{1}{p}||Z_1||^2 \cdot ||B||$ 可推出，当 $n \geq n_0$,

$$|\Sigma_2| \leq \left(\frac{2\gamma_n}{Im(z)}\right)^{M+1} \leq \left(\frac{\frac{1}{2}+2\gamma}{1+4\gamma}\right)^{M+1} = 2^{-M-1}. \tag{e_2}$$

对于 Σ_3，可以将引理 8 应用于

$$d_1 = d_2 = ... = d_m = d, \qquad m \leq 2M, \qquad n \geq n_1$$

因为当 n_1 足够大以确保 $C^2 \cdot \frac{d}{n^{1/2}} \leq \frac{1}{9e^2}$，$M^2 \leq \frac{n^{1/2}}{4d}$ 时（回忆 (3.1) 和 (3.7)），在这些情况下，

$$md \leq \frac{n^{1/4}}{d^{1/2}} \cdot d = n^{1/4} \cdot d^{1/2} \leq \frac{n^{1/2}}{3Ce}.$$

这一结果意味着，在这种情况下

$$\mathbb{E}[(\frac{1}{N}||Z_1||^2)^m] \leq 1 + e^{\frac{2C^2e^2m^2d^2}{n}} \cdot \frac{2C^2e^2m^2d^2}{n}, \tag{3.9}$$

这进而得出，与引理 2 的论证类似，对于 $n \geq n_0 + n_1$,

$$|\Sigma_3| \leq \frac{2(M+1)}{2^M} \tag{e_3}$$

from

$$|\Sigma_3| = |\sum_{0 \leq m \leq M} \mathbb{E}[(\frac{1}{p} Z_1^T R_1 Z_1)^m \cdot \chi_{||Z_1||^2 > 2N}]| \leq \sum_{0 \leq m \leq M} \mathbb{E}[(\frac{1}{p}||Z_1||^2)^m \cdot \frac{1}{(Im(z))^m} \cdot \chi_{||Z_1||^2 > 2N}] \leq$$

$$\leq \sum_{0\leq m\leq M} \frac{\gamma_n^m}{(Im(z))^m}\cdot\frac{2}{2^M} \leq \frac{2(M+1)}{2^M}. \tag{3.10}$$

最后一个不等式可如下加以论证： $n \geq n_0$ 保证 $\gamma_n \leq \frac{1}{4}+\gamma < 1+4\gamma \leq Im(z)$， 这与 (3.9) 一起给出，对于 $0 \leq m \leq M$,

$$\mathbb{E}[(\frac{1}{N}||Z_1||^2)^m \cdot \chi_{\frac{1}{N}||Z_1||^2>2}] \leq \frac{1}{2^M}\cdot\mathbb{E}[(\frac{1}{N}||Z_1||^2)^{m+M}] \leq \frac{1+e^{2/9}\cdot 2/9}{2^M} \leq \frac{2}{2^M}$$

如 $e^{2/9} < e < 3 < \frac{9}{2}$.

3.3 高阶矩

本小节的目标是证明

$$\Sigma_1 = \sum_{1\leq m\leq M} \mathbb{E}[(\frac{1}{p}Z_1^T R_1 Z_1)^m] = -1 + \frac{1}{1-\gamma_n\mathbb{E}[m_{F_n}(z)]} + o(1),$$

这将完成命题 1 的证明。首先注意，只需证明

$$\Sigma_1 = \sum_{1\leq m\leq M} \mathbb{E}[(\frac{1}{p}Z_1^T R_1 Z_1)^m] = -1 + \frac{1}{1-\mathbb{E}[\frac{1}{p}tr(R_1)]} + o(1): \tag{3.11}$$

(2.7) 和 (2.8) 给出

$$|tr((zI-S)^{-1}) - tr(R_1)| = |\frac{\frac{1}{p}Z_1^T(zI-S)^{-2}Z_1}{1+\frac{1}{p}Z_1^T(zI-S)^{-1}Z_1}| \leq \frac{1}{Im(z)},$$

因此，对于 $n \geq n_0$,

$$|\frac{1}{1-\gamma_n\mathbb{E}[m_{F_n}(z)]} - \frac{1}{1-\mathbb{E}[\frac{1}{p}tr(R_1)]}| \leq \frac{\mathbb{E}[|\frac{1}{p}tr((zI-S)^{-1}) - \frac{1}{p}tr(R_1)|]}{(1-\frac{\gamma_n}{Im(z)})^2} \leq \frac{\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{Im(z)}}{(1-\frac{1}{4})^2}$$

通过使用 $\frac{1}{N}|tr(R_1)|$, $\frac{1}{N}|tr((zI-S)^{-1})| \leq \frac{1}{Im(z)}$, 等等

$$\frac{1}{1-\gamma_n\mathbb{E}[m_{F_n}(z)]} = \frac{1}{1-\mathbb{E}[\frac{1}{p}tr(R_1)]} + o(1).$$

固定 $1 \leq m \leq M$，并考虑

$$\mathbb{E}[(\frac{1}{p}Z_1^T R_1 Z_1)^m] = \gamma_n^m \cdot N^{-m} \sum_{1\leq i_1,i_2,\dots,i_{2m}\leq N} \mathbb{E}[R_{i_1i_2}R_{i_3i_4}...R_{i_{2m-1}i_{2m}}]\cdot\mathbb{E}[Z_{1i_1}Z_{1i_2}...Z_{1i_{2m}}], \tag{3.12}$$

其中，为了简化记号， $R_{kl} := (R_1)_{kl}$, $1 \leq k, l \leq N$（该等式由关于 $\sigma(Z_j,\ j>1)$ 条件化得出， σ-代数与 $\sigma(Z_1)$ 独立，并利用塔式性质）。接下来将证明

$$\mathbb{E}[(\frac{1}{N}Z_1^T R_1 Z_1)^m] = \mathbb{E}[(\frac{1}{N}tr(R_1))^m] + (Im(z))^{-m}\cdot[O((16Cm)^m\cdot(\frac{d}{n^{1/2}})^{1/3}) + O(m^2\cdot\frac{d^2}{n})]: \tag{3.13}$$

这足以推导出 (3.11)，因为这将使

$$\Sigma_1 = \sum_{1\leq m\leq M}\mathbb{E}[(\frac{1}{p}tr(R_1))^m] + \sum_{1\leq m\leq M}(\frac{\gamma_n}{Im(z)})^m\cdot[O((16Cm)^m\cdot(\frac{d}{n^{1/2}})^{1/3}) + O(m^2\cdot\frac{d^2}{n})] =$$

$$= -1 + \mathbb{E}[\frac{1}{1-\frac{1}{p}tr(R_1)}] - \mathbb{E}[\frac{(\frac{1}{p}tr(R_1))^{M+1}}{1-\frac{1}{p}tr(R_1)}] + [O((16CM)^M\cdot(\frac{d}{n^{1/2}})^{1/3}) + O(\frac{d^2}{n})]$$

通过 $\frac{1}{p}|tr(R_1)| \leq \gamma_n\cdot||R_1|| \leq \frac{\gamma_n}{1+4\gamma} \leq \frac{1}{4}$ 对于 $n \geq n_0$, $M \to \infty$，恒等式 (3.8)，以及 $\frac{(m+1)_m}{m^2}^2 \leq \frac{9}{4} < 4$ 对于 $m \geq 2$.最后两项根据 M 的定义为 $o(1)$ 和 $\frac{d}{n^{1/2}} = o(1)$（见 (3.7) 和 (3.1)），从而得到 (3.11),

$$\Sigma_1 = -1 + \mathbb{E}[\frac{1}{1-\frac{1}{p}tr(R_1)}] + o(1) = -1 + \frac{1}{1-\mathbb{E}[\frac{1}{p}tr(R_1)]} + o(1)$$

以至于

$$|\mathbb{E}[\frac{1}{1-\frac{1}{p}tr(R_1)}]-\frac{1}{1-\mathbb{E}[\frac{1}{p}tr(R_1)]}|\leq\mathbb{E}[|\frac{1}{1-\frac{1}{p}tr(R_1)}-\frac{1}{1-\mathbb{E}[\frac{1}{p}tr(R_1)]}|]\leq\frac{\mathbb{E}[|\frac{1}{p}tr(R_1)-\mathbb{E}[\frac{1}{p}tr(R_1)]|]}{(1-\frac{1}{4})^2}=o(1)$$

对于 $n\geq n_0$, 最后这一断言由 (2.9) 与 Hölder不等式 经由 $\frac{1}{p}tr(R_1)\overset{d}{=}\frac{p-1}{p}\cdot m_{F_n^*}(z)$, 得出, 其中 $F_n^*=F_{\frac{1}{p-1}\sum_{1\leq j\leq p-1}Z_jZ_j^T}$ 是对应于 $p-1$ 独立同分布样本的经验谱分布；或者，也可以利用控制收敛定理, $\frac{1}{p}|tr(R_1)|\leq\frac{1}{4}$, 以及 (s1)。

尚需论证 (3.13)。有必要引入一些术语，以刻画其中期望所基于的各因子之间的依赖关系。当 $l\in\mathbb{N}$, 时，称 $2l-1$, $2l$ 对应项；而对于 $1\leq j_1,j_2\leq N$,, 称 j_1,j_2 为 相邻，如果在用于以.....的元素标记 Z_1 的条目的（固定）双射 $b_{d,n}$ 下

$$\{(r_1,r_2,...,r_d):1\leq r_1<r_2<...<r_d\leq n\},$$

j_1 和 j_2 有一些索引相同，即,

$$b_{d,n}(j_1)=(r_1,r_2,...,r_d),\quad b_{d,n}(j_2)=(r_1',r_2',...,r_d'),\quad \{r_1,r_2,...,r_d\}\cap\{r_1',r_2',...,r_d'\}\neq\emptyset.$$

最后，对于元组 $(i_j)_{1\leq j\leq 2m}$ 和 $1\leq v\leq 2m$, 令 $shdeg(i_v)$（ i_v的共享度）为底层元组 i_v 中出现在 i_w 中某处的位置数量，其中 i_w 对应于 $w\neq v$ 而非 w ，即，当 $b_{d,\ n}(i_w)=(r_{wj})_{1\leq j\leq d}$, 共享度由下式给出

$$shdeg(i_v)=|\{r_{v1},r_{v2},...,r_{vd}\}\cap\{r_{y1},r_{y2},...,r_{yd}:1\leq y\leq 2m,y\notin S(v)\}|\quad(1\leq v\leq 2m),$$

其中 $S(t)=\{2\lceil\frac{t+1}{2}\rceil-1,2\lceil\frac{t+1}{2}\rceil\}$（即, $S(t)$是由 $t\in\mathbb{N}$及其对应项组成的集合）。直观地说，(3.13)中的第一项由共享度均为零且对应项相等的元组 $(i_j)_{1\leq j\leq 2m}$ 给出，即,

$$i_{2l-1}=i_{2l}\ (1\leq l\leq m),\quad shdeg(i_v)=0\ (1\leq v\leq 2m).$$

前者产生 R_1的对角元乘积，而后者意味着 $(Z_{1i_{2l-1}})_{1\leq l\leq m}$ ar e 独立，因此

$$\mathbb{E}[Z_{1i_1}Z_{1i_2}...Z_{1i_{2m}}]=\prod_{1\leq l\leq m}\mathbb{E}[Z_{1i_{2l-1}}^2]=1.$$

下面的论证表明，情况确实如此：注意，由于第二个约束，这类构型的贡献并非恰好为 $\mathbb{E}[(\frac{1}{N}tr(R_1))^m]$ $shdeg(i_v)\equiv 0$ 对所有 $1\leq v\leq 2m$.

回到式 (3.13) 中的求和。这里改变了求和方式，关键参数是共享度（$shdeg(i_v))_{1\leq v\leq 2m}$· 对于某个 $1\leq l\leq m$ 满足 $shdeg(i_{2l-1})\neq shdeg(i_{2l})$ 的元组，其贡献趋于零： $Z_{1i_1}Z_{1i_2}...Z_{1i_{2m}}$ 写成 $x_1,x_2,...,x_n$ 中若干个 $2md$ 因子的乘积时，会包含一个来自位置 $s\in\{1,2,...,n\}$ 的一次单项式，其中 s 恰好只出现在由 $b_{d,n}(i_{2l-1})b_{d,n}(i_{2l})$ 的条目构成的集合，分别相对于以 $shdeg(i_{2l-1})$ $shdeg(i_{2l})$ 为基础的集合之补集中。因此，只需考虑满足 $shdeg(i_{2l-1})=shdeg(i_{2l})$ 的元组，对所有 $1\leq l\leq m$. 均如此。这意味着 $k=\frac{1}{2}\sum_{1\leq v\leq 2m}shdeg(i_v)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，此类元组的数量至多为

$$|\{(y_1,y_2,...,y_m)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^m:y_1+...+y_m=k\}|=\binom{k+m-1}{m-1}.$$

具有固定共享度的元组（$shdeg$（i_v）$)_{1\leq v\leq 2m}$ 对所关注的和作出贡献

$$N^{-m}\sum_{1\leq i_1,i_2,...,i_{2m}\leq N}\mathbb{E}[R_{i_1i_2}R_{i_3i_4}...R_{i_{2m-1}i_{2m}}]\cdot\mathbb{E}[Z_{1i_1}Z_{1i_2}...Z_{1i_{2m}}]$$

至多

$$(Im(z))^{-m}\cdot(\frac{d^2\cdot 2^{14m}}{n})^{\frac{1}{12}\sum_{1\leq v\leq 2m}shdeg(i_v)}\cdot(\mathbb{E}[x^{2m}])^{\frac{1}{2}\sum_{1\leq v\leq 2m}shdeg(i_v)}.\qquad(fshdeg)$$

该恒等式将在下一小节中得到论证。在深入其证明之前，先利用它得出所需的上界（3.13）。

首先考虑满足 $\sum_{1\leq w\leq 2m}shdeg(i_w)>0$ 的元组：$(fshdeg)$ 表明它们的贡献至多为

$$\sum_{2|k,k\geq 2}\binom{k/2+m-1}{m-1}\cdot(Im(z))^{-m}\cdot(\frac{d^2\cdot 2^{14m}}{n})^{\frac{k}{12}}\cdot(\mathbb{E}[x^{2m}])^{\frac{k}{2}}\leq$$

$$\leq (Im(z))^{-m} \sum_{2|k,k\geq 2} \binom{k+m-1}{m-1} \cdot (\frac{d^2 \cdot 2^{14m} \cdot (Cm)^{6m}}{n})^{\frac{k}{12}} \leq$$

$$\leq 2^{m-1}(Im(z))^{-m} \sum_{2|k,k\geq 2} (\frac{d^2 \cdot 2^{14m+12} \cdot (Cm)^{6m}}{n})^{\frac{k}{12}} = O(2^m (Im(z))^{-m} \cdot (\frac{d^2 \cdot 2^{14m} \cdot (Cm)^{6m}}{n})^{\frac{1}{6}}) \quad (T1)$$

通过 $\binom{k+m-1}{m-1} \leq 2^{k+m-1}$，并且对于 $n \geq n_2$,

$$\frac{d^2 \cdot 2^{14m+12} \cdot (Cm)^{6m}}{n} < \frac{2^{12} \cdot d^2 \cdot (8CM)^{6M}}{n} \leq 2^{12} \cdot (\frac{d^2}{n})^{1-3/4} \leq \frac{1}{2} \quad (3.14)$$

由 (3.7) 和 (3.1) 得。

现在考虑满足 $\sum_{1\leq w\leq 2m} shdeg(i_w) = 0$，且 $\mathbb{E}[Z_{1i_1} Z_{1i_2} ... Z_{1i_{2m}}] \neq 0$. 的元组。根据上述讨论，这等价于 $i_{2l-1} = i_{2l}$，且 i_{2j}，$i_{2j'}$ 对任意 $1 \leq j < j' \leq m$. 都不相邻。这意味着 $\mathbb{E}[Z_{1i_1} Z_{1i_2} ... Z_{1i_{2m}}] = 1$，剩下的是

$$N^{-m} \sum_{(*),1\leq j_1,j_2,\dots,j_m\leq N} \mathbb{E}[R_{j_1 j_1} R_{j_2 j_2} ... R_{j_{m-1} j_m}],$$

其中 $(*)$ 表示额外的约束，即 j_k，j_l 对任意 $k \neq l$. 都不相邻。取一个不满足这一最后条件的元组：必定存在 $1 \leq k_1 < k_2 \leq m$ 使得 j_{k_1}，j_{k_2} 相邻。这带来的贡献的绝对值至多为

$$\binom{m}{2} \cdot \mathbb{E}[(\frac{1}{N} \sum_{1\leq j\leq N} |R_{jj}|)^{m-2} \cdot N^{-2} \sum_{(**),k_1,k_2} |R_{k_1 k_1} R_{k_2 k_2}|] \leq \binom{m}{2} \cdot (Im(z))^{-(m-2)} \cdot (Im(z))^{-2} \cdot \frac{d^2}{n},$$

其中 $(**)$ 表示 k_1, k_2 相邻这一条件，方式是通过

$$N^{-2} \sum_{(**),k_1,k_2} |R_{k_1 k_1} R_{k_2 k_2}| \leq N^{-1} \cdot (Im(z))^{-1} \max_{1\leq k_1\leq N} \sum_{(**),k_2} |R_{k_2 k_2}| \leq$$

$$\leq N^{-1} \cdot (Im(z))^{-1} \cdot \max_{1\leq k_1\leq N} \sqrt{N \cdot \frac{d^2}{n} \cdot \sum_{(**),k_2} |R_{k_2 k_2}|^2} \leq N^{-1} \cdot (Im(z))^{-1} \cdot \sqrt{(N \cdot \frac{d^2}{n})^2 \cdot (Im(z))^{-2}} = (Im(z))^{-2} \cdot \frac{d^2}{n}$$

（对于任意固定的 k_1, ，与其相邻的 k_2 值至多有 $d \cdot \binom{n-1}{d-1} = N \cdot \frac{d^2}{n}$ 个）。这相当于那些满足 $\sum_{1\leq w\leq 2m} shdeg(i_w) = 0$ 的元组所作出的贡献

$$\mathbb{E}[(\frac{1}{N} tr(R_1))^m] + O(m^2 \cdot (Im(z))^{-m} \cdot \frac{d^2}{n}). \quad (T2)$$

因此，$(T1)$ 连同 $2^{1+14/6} < 2^4 = 16$, 以及 $(T2)$，完成了 (3.13) 的证明；这只需论证 $(fshdeg)$，下一步将对此进行证明。

3.4 固定共享度

本小节的目标是证明 $(fshdeg)$。

首先注意到

$$0 \leq \mathbb{E}[Z_{1i_1} Z_{1i_2} ... Z_{1i_{2m}}] \leq (\mathbb{E}[x^{2m}])^{\frac{1}{2}\sum_{1\leq v\leq 2m} shdeg(i_v)} : \quad (3.15)$$

对称性使得仅有原像满足

$$Z_{1i_1} Z_{1i_2} ... Z_{1i_{2m}} = x_{j_1}^{2g'_1} x_{j_2}^{2g'_2} ... x_{j_l}^{2g'_l} \quad (3.16)$$

对于某些 g'_1，g'_2，..... $g'_l \in \mathbb{N}$，$1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_l \leq n$ 会产生非零贡献。独立性和$g'_s \leq m$ 给出

$$\mathbb{E}[Z_{1i_1} Z_{1i_2} ... Z_{1i_{2m}}] = \mathbb{E}[x_{j_1}^{2g'_1} ... x_{j_l}^{2g'_l}] = \mathbb{E}[x_{j_1}^{2g'_1}] \cdot \mathbb{E}[x_{j_2}^{2g'_2}] \cdot ... \cdot \mathbb{E}[x_{j_l}^{2g'_l}] \leq (\mathbb{E}[x^{2m}])^t,$$

其中 $t=|\{s:\ 1\le s\le l,\ g'_s\ge 2\}|$. 最后，注意到

$$t\le \frac{1}{2}\sum_{1\le v\le 2m} shdeg(i_v),$$

而 Hölder不等式给出 $1=\mathbb{E}[x_1^2]\le(\mathbb{E}[x_1^{2m}])^{\frac{1}{2m}}$，两者合起来即为（3.15）：对于前者，至多有 $\frac{1}{2}\sum_{1\le v\le 2m} shdeg(i_v)$ 个索引 j，使得 x_j 至少出现在一对 Z_{1u}，Z_{1v} 中，且 u，v 并非对应项；每个满足 $g'_s\ge 2$ 的索引 s 都属于这一类（当上述关于 j_s 的条件不成立时，$g'_s=1$ ）。

因此，只要证明下式成立，（$fshdeg$）便可补全

$$N^{-m}\sum_{(*),1\le i_1,i_2,\dots,i_{2m}\le N}\mathbb{E}[|R_{i_1i_2}R_{i_3i_4}...R_{i_{2m-1}i_{2m}}|]\le (Im(z))^{-m}\cdot(\frac{d^2\cdot 2^{14m}}{n})^{\frac{1}{12}\sum_{1\le v\le 2m} shdeg(i_v)} \tag{3.17}$$

其中（$*$）表示对满足（$shdeg(i_v))_{1\le v\le 2m}$ 固定的元组求和 d
以及 $\mathbb{E}[Z_{1i_1}Z_{1i_2}...Z_{1i_{2m}}]\neq 0$.。这一点可通过对 $m\sum_{1\le v\le 2m} shdeg(i_v)\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$. 进行（强）归纳法证明

基例 $\sum_{1\le v\le 2m} shdeg(i_v)=0$ 对应于 $i_{2l-1}=i_{2l}$ 对所有 $1\le l\le m$ 均成立（否则 $\mathbb{E}[Z_{1i_1}Z_{1i_2}...Z_{1i_{2m}}]=\prod_{1\le l\le m}\mathbb{E}[Z_{1i_{2l-1}}Z_{1i_{2l}}]=0$），结论显然成立：

$$N^{-m}\sum_{(*),1\le i_1,i_2,\dots,i_{2m}\le N}\mathbb{E}[|R_{i_1i_2}R_{i_3i_4}...R_{i_{2m-1}i_{2m}}|]\le\mathbb{E}[(\frac{1}{N}\sum_{1\le j\le N}|R_{jj}|)^m]\le(Im(z))^{-m}$$

因为对于任意厄米矩阵 $M\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$|M_{jj}|\le||M||$ 对所有 $1\le j\le n$. 均成立

进行归纳步骤。若 $m=1$，结论显然，因为这意味着 $i_1=i_2$，因此 e
上述分析适用。接下来设 $k=\sum_{1\le v\le 2m} shdeg(i_v)>0$，$m\ge 2$. 取 $v\in\{1,2,\dots,2m\}$，使得

$$l=shdeg(i_v)=\min\{shdeg(i_w):1\le w\le 2m, shdeg(i_w)>0\},$$

并考虑 $S(v)=\{v,v'\}$ 对 (3.17) 中总和的贡献。将 v,v' 从共享度所基于的集合中剔除后，乘积 $m\sum_{1\le v\le 2m} shdeg(i_v)$ 至少缩小了 $\sum_{1\le v\le 2m} shdeg(i_v)>0$,这意味着一旦固定新的元组的共享度，归纳假设便适用。由于每个共享度至多减少 $2shdeg(v)$, 因此剩余

$$(2shdeg(v)+1)^{\frac{k}{shdeg(v)}}\le 2^{2k}$$

个 $2m-2$ 顶点的共享度有至多 $2^a\ge a+1$ 种可能性（ $a\in\mathbb{N}$, 对于 $\overset{k}{shdeg}$，且只有正的共享度可能发生变化；根据 v的定义，这些位置的数量至多为 (v) ），而只需证明，在新的共享度固定后，贡献至多为

$$(Im(z))^{-m}\cdot(\frac{d^2\cdot 2^{14m-24}}{n})^{\frac{k}{12}}.$$

对于每个元组 $(i_w)_{1\le w\le 2m,w\notin S(v),}$，选择 i_v 至多有 $\binom{n-l}{d-l}\cdot d^l\cdot(2m)^l$ 种可能：给定其余部分，顶点 i_v 与该元组的 l 个条目 $b_{d,n}(i_v)$ 中至多 l 个共享，因此选择这 l 个索引至多有 $(2m)^l\cdot d^l$ 种可能，而其余 $d-l$ 个位置必然与这些 l不同；最后注意到，$i_{v'}$ 由 $(i_w)_{1\le w\le 2m,w\neq v'}$ 完全确定，因为 $Z_{1i_1}Z_{1i_2}...Z_{1i_{2m}}$ 必须是平方（即满足 (3.16)），才能确保其期望不为零。由于

$$\binom{n-l}{d-l}\cdot(2m)^l\cdot d^l\le N\cdot(\frac{8d^2m}{n})^l$$

from

$$\frac{\binom{n-l}{d-l}}{\binom{n}{d}}\le\frac{\frac{n^{d-l}}{(d-l)!}}{\frac{(n-d)^d}{d!}}=\frac{n^{d-l}\cdot\frac{d!}{(d-l)!}}{(n-d)^d}\le\frac{n^{d-l}\cdot d^l}{(n-d)^d}\le(1+\frac{d}{n-d})^{d-l}\cdot(\frac{2d}{n})^l\le e^{\frac{d^2}{n-d}}\cdot(\frac{2d}{n})^l\le(\frac{4d}{n})^l$$

(利用 $d\le\frac{n}{2}$，$\frac{d^2}{n-d}\le\log 2$ 对于 $n\ge n_3$)，可得对于给定的元组 $(i_w)_{1\le w\le 2m,\ w\notin S(v)}$,

$$\sum_{i_v,i_{v'}}|R_{i_vi_{v'}}|\le\sqrt{N\cdot(\frac{8d^2m}{n})^l\cdot\sum_{i_v}|R_{i_vi_{v'}}|^2}\le\sqrt{N\cdot(\frac{8d^2m}{n})^l\cdot\frac{N}{(Im(z))^2}}=\frac{N}{Im(z)}\cdot(\frac{8d^2m}{n})^{\frac{l}{2}}$$

利用 v' 由元组的其余部分完全确定这一点，以及对所有 $1 \le s,\ t \le N$.都有 $|R_{st}| \le ||R|| \le \frac{1}{Im(z)}$, 由此和归纳假设可得一个整体上界

$$\frac{1}{Im(z)} \cdot (\frac{8d^2m}{n})^{\frac{l}{2}} \cdot (Im(z))^{-(m-1)} \cdot (\frac{d^2 \cdot 2^{14m-24}}{n})^{\frac{1}{12}(k-6l)} \le (Im(z))^{-m} \cdot (\frac{d^2 \cdot 2^{14m-24}}{n})^{\frac{k}{12}}$$

由 $8m \le 2^{14m-24}$ 作 $2^{14m-24} \ge 2^{2m} = 8 \cdot 2^{2m-3} \ge 8 \cdot (2m-3+1) \ge 8m$；根据 $\frac{d^2 \cdot 2^{14m-12}}{n} \le 1$（回顾（3.14））, 对于 $n \ge n_4$, 以及

$$\sum_{1 \le w \le 2m, w \notin S(v)} shdeg'(i_w) \ge \sum_{1 \le w \le 2m} shdeg(i_w) - 3shdeg(i_v) - 3shdeg(i'_v) = k - 6l,$$

其中, $shdeg'(i_w)$ 表示在从共享度所依据的集合中排除 i_w 和 v、v' 后的共享度：对于 $u \notin S(v)$, 丢弃 i_v、$i_{v'}$ 当且仅当存在 $shdeg(i_u)$, 使得某个 $r \in \{1, 2, ..., n\}$ 出现在 b_d、$_n(i_u)b_d$、$_n(i_v)$ 或 b_d、$_n(i_u)\,b_d$、$_n(i_{v'})$ 所依据的集合中，但不出现在其他任何此类集合中，唯一例外是 u 的对应项所在的集合，即 b_d、$_n(i_w)$ $w \notin S(u) \cup S(v)$：因此，每个 $r \in \{r_{vj}, r_{v'j}, 1 \le j \le d\}$ 至多会使新的共享度之和减少 2。这就完成了归纳步骤。

4 超越各向同性情形

本节给出定理 2 的证明。该定理结合了 Bai 和 Zhou [7] 下述主要结果与普适性。

定理 3. *[Bai 和 Zhou [7]]* 假设 $\tilde{Z} \in \mathbb{C}^{N \times p}$ 具有独立同分布列 $(\tilde{Z}_j)_{1 \le j \le p} \subset \mathbb{C}^N$，满足

(a) $T = T(N) = \mathbb{E}[\tilde{Z}_1 \tilde{Z}_1^*]$ 具有 上确界$_{N \in \mathbb{N}} ||T(N)|| < \infty$，且其经验谱分布收敛 ng 弱收敛至确定性概率分布 H,

(b) $\frac{2}{Nq} \mathbb{E}[|\tilde{Z}_1^* B \tilde{Z}_1 - \mathrm{tr}(BT)|^2] = o(1)$ 对于任意确定性对称矩阵 $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $||B|| \le 1$, 以及(c) $\lim_{N \to \infty} \frac{N}{p} = \gamma \in (0, \infty)$。

于是, $\tilde{S} = \frac{1}{p} \tilde{Z}^* \tilde{Z}$ 的经验谱分布几乎必然弱收敛到概率测度 μ t 并且, μ 的斯蒂尔切斯变换满足

$$m(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z - t} d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z - t(1 - \gamma + \gamma z m(z))} dH(t) \qquad (z \in \mathbb{C}^+).$$

注。 本文中的斯蒂尔切斯变换与 *Bai* 和 *Zhou [7]* 中的定义在符号上相反；就维数而言，后者中的$(p,\ n)$对应于本文中的$(N,\ p)$（即，在 *[7]*中有 n 个维数为 p 的样本）。

定理 3 和定理 2 在思想上相似，关键区别在于集中条件。对于前者，这由 (*b*)，涵盖；而对于后者，这是随机张量积模型以及限制 $\frac{d}{n^{1/2}} = o(1)$ 的副产物。下面将更加明显地看到，这些约束用于计算期望，这对于证明极限的斯蒂尔切斯变换满足 (IE) 至关重要。

在本节余下部分，假设定理 2 中的条件成立（包括 (RMT)）。再次采用证明定理 1 时使用的三步策略：由于两个证明有大量重叠，仅指出 其中的差异。记 F_n 为 S 的经验谱分布，令

$$\mathcal{K} = \sup_{n \in \mathbb{N}} ||T(n)|| < \infty, \tag{4.1}$$

对于固定的 $z \in \mathbb{C}^+$，取 $\tilde{R}_j = (zI - \tilde{S} + \frac{1}{p} \tilde{Z}_j \tilde{Z}_j^T)^{-1}$，当 $1 \le j \le p$. 时

1. 由 (s1) 涵盖的第一步仍然成立，因为正如其证明中所讨论的，独立性 of 列已足够:

$$m_{\tilde{F}_n}(z) - \mathbb{E}[m_{\tilde{F}_n}(z)] \xrightarrow{a.s.} 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}^+.$$

2. 第二步（由命题 1 概括）可以通过调整定理 3 的证明加以修改。前一结果的核心是（$s2$），第三步利用这一点来证明所需的收敛。在当前情形下，极限概率测度 μ不像 Marchenko-Pastur 定律那样容易描述，额外复杂性的根源在于协方差矩阵 T 不再是单位矩阵。通过巧妙运用命题 1 中的思路，可以克服这一困难,

$$-1 + z\mathbb{E}[m_{F_n}(z)] = -\frac{1}{\gamma_n} + \frac{1}{\gamma_n} \mathbb{E}[\frac{1}{1 - \frac{1}{p} Z_1^T R_1 Z_1}],$$

推导自

$$-(zI-S)+zI=\frac{1}{p}\sum_{1\le j\le p}Z_jZ_j^T$$

（证明见引理 4）。具体而言，Bai 和 Zhou [7] 中通过两次使用此类恒等式来绕开缺乏各向同性的问题：尽管原论证似乎有误，但可按下文第 4.1 小节所述予以修正，而第 4.2 小节则展示了如何修改命题 1 的证明，以论证其后续类比结论。

命题 2。 假设定理 *2* 中的条件成立。那么

$$\mathbb{E}[m_{\tilde{F}_n}(z)]=m(z)+o(1), \tag{4.2}$$

当 $Im(z)\ge 1+4\mathcal{K}\gamma$ 且其中 m 由（IE）定义时。

3. 第三步仍可原封不动地成立： μ 的唯一性（Bai 和 Zhou [7] 已对此作出论证：参见其中第 3 节的步骤 3）以及解析延拓的唯一性，意味着所有弱极限都等于定理 2 所述的弱极限，由此即可得出所需结论。

本节余下部分中，第 4.1 小节修正 Bai 和 Zhou [7], 中定理 3 的论证，第 4.2 小节则论证命题 2。

4.1 一个关键恒等式

Bai 和 Zhou [7] 在证明其主要结果时遇到的问题，与其步骤 2 中矩阵的定义有关 K（他们的）。 作者令

$$K=T(1-\frac{1}{p}tr(\tilde{R}_jT))^{-1},$$

但该矩阵先验上定义不明确，因为 j 似乎是一个一般的列索引，在此情形下是$\{1,2,\dots,p\}$,中的一个元素；他们却将此矩阵视为对所有 j,都独立于 Z_j，而这一性质是论证某些差异仍可忽略不计所必需的（即 $d_{j,2}$,$d_{j,3}$： 另见下一小节中的 (4.11)）。

为纠正这一点，令

$$K(j)=T(1-\frac{1}{p}tr(\tilde{R}_jT))^{-1}\ \ (1\le j\le p),\qquad \tilde{K}=K(1):$$

˜注意到，$(K(j))_{1\le j\le p}$ 与 Z_j 同分布，且对所有 $1\le j\le p.$， $K(j)$相互独立。下文仅考虑实数情形 ($(Z_j)_{1\le j\le p}\subset\mathbb{R}^N$)，因为本文只关注这一情形；不过，该论证很容易推广到复数情形 ($(Z_j)_{1\le j\le p}\subset\mathbb{C}^N$)。

回顾 Bai 和 Zhou [7] 在讨论步骤 2 的部分中推导主要恒等式的思路 ，
其中的公式 3.3（下文的（BZ））。由于

$$(zI-\tilde{S})-(zI-\tilde{K})=\tilde{K}-\frac{1}{p}\sum_{1\le j\le p}\tilde{Z}_j\tilde{Z}_j^T,$$

预解式恒等式 $A^{-1}-B^{-1}=A^{-1}(B-A)B^{-1}$ 给出

$$(zI-\tilde{K})^{-1}-(zI-\tilde{S})^{-1}=(zI-\tilde{K})^{-1}\tilde{K}(zI-\tilde{S})^{-1}-\frac{1}{p}\sum_{1\le j\le p}(zI-\tilde{K})^{-1}\tilde{Z}_j\tilde{Z}_j^T(zI-\tilde{S})^{-1},$$

结合以下公式可得

$$\tilde{Z}_j^T(zI-\tilde{S})^{-1}=\frac{\tilde{Z}_j^T\tilde{R}_j}{1-\frac{1}{p}\tilde{Z}_j^T\tilde{R}_jZ_j}, \tag{4.3}$$

以下关键恒等式

$$(zI-\tilde{K})^{-1}-(zI-\tilde{S})^{-1}=(zI-\tilde{K})^{-1}\tilde{K}(zI-\tilde{S})^{-1}-\frac{1}{p}\sum_{1\le j\le p}\frac{(zI-\tilde{K})^{-1}\tilde{Z}_j\tilde{Z}_j^T\tilde{R}_j}{1-\frac{1}{p}\tilde{Z}_j^T\tilde{R}_j\tilde{Z}_j}:\qquad (BZ)$$

此处 (4.3) 是.....的推论

$$\tilde{R}_j-(zI-\tilde{S})^{-1}=-\tilde{R}_j\frac{1}{p}\tilde{Z}_j\tilde{Z}_j^T(zI-\tilde{S})^{-1},$$

由此

$$\tilde{Z}_j^T\tilde{R}_j - \tilde{Z}_j^T(zI-\tilde{S})^{-1} = -\frac{1}{p}\tilde{Z}_j^T\tilde{R}_j\tilde{Z}_j\cdot\tilde{Z}_j^T(zI-\tilde{S})^{-1},$$

并注意到 $1-\frac{1}{p}\tilde{Z}_j^T\tilde{R}_j\tilde{Z}_j=0$ 不可能成立，因为这将意味着 $\tilde{Z}_j^T\tilde{R}_j=0$，从而

$$\tilde{Z}_j=0,\qquad 0=1-\frac{1}{p}\tilde{Z}_j^T\tilde{R}_j\tilde{Z}_j=1-0=1.$$

对 (BZ) 左乘 T^l，其中 $l\in\{0,1\}$，再对两边取迹并除以 N，得到

$$\frac{1}{N}tr(T^l(zI-\tilde{K})^{-1})-\frac{1}{N}tr(T^l(zI-\tilde{S})^{-1}) = \frac{1}{N}tr(T^l(zI-\tilde{K})^{-1}\tilde{K}(zI-\tilde{S})^{-1})-\frac{1}{N}\sum_{1\le j\le p}\frac{\frac{1}{p}\tilde{Z}_j^T\tilde{R}_jT^l(zI-\tilde{K})^{-1}\tilde{Z}_j}{1-\frac{1}{p}\tilde{Z}_j^T\tilde{R}_jZ_j}. \tag{BZ_l}$$

Bai 和 Zhou [7] 接着论证，右侧的期望在 $N\to\infty$ 时趋于 0；然而，这依赖于 $\tilde{R}_jT^l(zI-\tilde{K})^{-1}$ 与 $\tilde{Z}_j$ 独立，但这对所有列索引 j. 并无保证。随后由此收敛可得

$$\mathbb{E}[\frac{1}{N}tr(T^l(zI-\tilde{K})^{-1})]-\mathbb{E}[\frac{1}{N}tr(T^l(zI-\tilde{S})^{-1})]=o(1)\qquad(l\in\{0,1\}),$$

由此可推导出所需的等式 (IE)。关于 (BZ_l) 右侧项的期望所存在的问题，源于 K 的定义，可借助集中性解决：由于 $(K(j))_{1\le j\le p}$ 同分布，只需证明

$$\mathbb{E}[\frac{\frac{1}{N}\tilde{Z}_j^T\tilde{R}_jT^l(zI-\tilde{K})^{-1}\tilde{Z}_j}{1-\frac{1}{p}\tilde{Z}_j^T\tilde{R}_jZ_j}-\frac{\frac{1}{N}\tilde{Z}_j^T\tilde{R}_jT^l(zI-\tilde{K}_0)^{-1}\tilde{Z}_j}{1-\frac{1}{p}\tilde{Z}_j^T\tilde{R}_jZ_j}]=o(1) \tag{4.4}$$

对于 $\tilde{K}_0=T(1-\frac{1}{p}\mathbb{E}[tr(\tilde{R}_jT)])^{-1}$（注意，该矩阵与 j 独立），因为这样一来，对 (BZ_l) 两边取期望后，右侧 j^{th} 求和项中的 $\tilde{K}$ 可由 $K(j)$ 替代，这是由于 j^{th} 项是

$$\mathbb{E}[\frac{\frac{1}{N}\tilde{Z}_1^T\tilde{R}_1T^l(zI-\tilde{K}_0)^{-1}\tilde{Z}_1}{1-\frac{1}{p}\tilde{Z}_1^T\tilde{R}_1Z_1}]+o(1).$$

本小节余下部分的目标是证明恒等式 (4.4)。正如 Bai 和 Zhou [7], 所述

$$\frac{1}{|1-\frac{1}{p}\tilde{Z}_j^T\tilde{R}_j\tilde{Z}_j|}\le\frac{|z|}{Im(z)}, \tag{4.5}$$

由此可知，只需证明

$$\mathbb{E}[\frac{1}{N}|\tilde{Z}_j^T\tilde{R}_jT^l((zI-\tilde{K})^{-1}-(zI-\tilde{K}_0)^{-1})\tilde{Z}_j|]=o(1)$$

即可得出 (4.4)：(4.5) 是以下不等式的推论，上界 3。4 在 [7]，中，这意味着

$$Im(-z\cdot v^*\tilde{R}_jv)\ge 0 \tag{4.6}$$

˜对于所有与 R_j 独立的随机向量 $v\in\mathbb{C}^n$，因为 (4.6) 随即给出

$$Im(z)\le Im(z(1-v^*\tilde{R}_jv))\le|z|\cdot|1-v^*\tilde{R}_jv|.$$

从 w 开始 ith

$$\frac{1}{N}|\tilde{Z}_j^T\tilde{R}_jT^l((zI-\tilde{K})^{-1}-(zI-\tilde{K}_0)^{-1})\tilde{Z}_j|\le$$

$$\le\frac{1}{N}||\tilde{Z}_j||^2\cdot\frac{1}{Im(z)\cdot c^2(\mathcal{K},z)}\cdot||T||^{l+1}\cdot|(1-\frac{1}{p}tr(\tilde{R}_jT))^{-1}-(1-\frac{1}{p}\mathbb{E}[tr(\tilde{R}_jT)])^{-1}|, \tag{4.7}$$

其中

$$c(\alpha,z)=\min_{(r,\lambda):Im(z/r)\ge Im(z),\lambda\in[0,\alpha]}|z-r\lambda|\in(0,\infty)\qquad(\alpha>0):$$

注意，连续性和紧致性（$Im(z/r) \leq \frac{|z|}{|r|}$ 意味着 $|r| \leq \frac{|z|}{Im\ z()}$，且所关注的绝对值可视为定义在 $\mathbb{R}^3$ 上的函数）保证最小值存在，并在某个 (r_0, λ_0) 处取得；而$|z - r_0\lambda_0| > 0$ （否则， $z = r_0\lambda_0$, 由此可得 $r_0 \neq 0$ 根据 $z \neq 0$, 因此 $Im(z/r_0) = Im(\lambda_0) = 0$, 这与$Im(z/r_0) \geq Im(z)$矛盾）。为证明 (4.7)，注意左侧项至多为

$$\frac{1}{N}||\tilde{Z}_j||^2 \cdot ||\tilde{R}_j T^l((zI - \tilde{K})^{-1} - (zI - \tilde{K}_0)^{-1})|| \leq \frac{1}{N}||\tilde{Z}_j||^2 \cdot ||\tilde{R}_j|| \cdot ||T||^l \cdot ||(zI - \tilde{K})^{-1} - (zI - \tilde{K}_0)^{-1}||$$

并且只需证明

$$||(zI - \tilde{K})^{-1} - (zI - \tilde{K}_0)^{-1}|| \leq \frac{||T||}{c^2(\mathcal{K}, z)} \cdot |(1 - \frac{1}{p}tr(\tilde{R}_1 T))^{-1} - (1 - \frac{1}{p}\mathbb{E}[tr(\tilde{R}_1 T)])^{-1}|.$$

最后这一断言可如下论证：对于 $a, b \in \mathbb{C}$,

$$(zI - aT)^{-1} - (zI - bT)^{-1} = U^T diag((\frac{\lambda_s(a-b)}{(z - a\lambda_s)(z - b\lambda_s)})_{1 \leq s \leq N})U$$

对于谱分解 $T = U^T diag((\lambda_s)_{1 \leq s \leq N})U$, 以及

$$|\frac{\lambda_s(a-b)}{(z - a\lambda_s)(z - b\lambda_s)}| \leq ||T|| \cdot |a - b| \cdot \frac{1}{\min_{1 \leq r \leq N} |z - a\lambda_r| \cdot \min_{1 \leq r \leq N} |z - b\lambda_r|} \leq \frac{||T|| \cdot |a - b|}{c^2(\mathcal{K}, z)}$$

当 $a = (1 - \frac{1}{p}tr(\tilde{R}_j T))^{-1}, b = (1 - \frac{1}{p}\mathbb{E}[tr(\tilde{R}_j T)])^{-1}$时，利用 $Im(z/a) = Im(z(1 - \frac{1}{p}tr(\tilde{R}_j T))) \geq Im(z)$（该上界由 T 为半正定以及 (4.6) 得出），并由期望的线性性可得$Im(z/b) \geq Im(z)$。

接下来，如上所述,

$$\frac{1}{|1 - \frac{1}{p}tr(\tilde{R}_1 T)|} \leq \frac{|z|}{Im(z)}, \tag{4.8}$$

由此可将 (4.7) 改写为

$$\frac{1}{N}|\tilde{Z}_j^T \tilde{R}_j T^l((zI - \tilde{K})^{-1} - (zI - \tilde{K}_0)^{-1})\tilde{Z}_j| \leq \frac{||T||^{l+1} \cdot |z|^2}{(Im(z))^3 \cdot c^2(\mathcal{K}, z)} \cdot \frac{1}{N}||\tilde{Z}_j||^2 \cdot |\frac{1}{p}tr(\tilde{R}_1 T) - \frac{1}{p}\mathbb{E}[tr(\tilde{R}_1 T)]|.$$

为得出 (4.4)，根据 (4.1)，只需证明对于 $1 \leq j \leq p$,

$$\mathbb{E}[\frac{1}{N}||\tilde{Z}_j||^2 \cdot |\frac{1}{p}tr(\tilde{R}_1 T) - \frac{1}{p}\mathbb{E}[tr(\tilde{R}_1 T)]|] = o(1). \tag{4.9}$$

若 $j = 1$，则由独立性和 Hölder不等式可得 (4.9),

$$\mathbb{E}[\frac{1}{N}||\tilde{Z}_1||^2 \cdot |\frac{1}{p}tr(\tilde{R}_1 T) - \frac{1}{p}\mathbb{E}[tr(\tilde{R}_1 T)]|] = \mathbb{E}[\frac{1}{N}||\tilde{Z}_1||^2] \cdot \mathbb{E}[|\frac{1}{p}tr(\tilde{R}_1 T) - \frac{1}{p}\mathbb{E}[tr(\tilde{R}_1 T)]|] \leq$$

$$\leq ||T|| \cdot (\frac{16||T||^4}{(Im(z))^4 \cdot p^2})^{1/4} = O(p^{-1/2}) = o(1)$$

因为采用与步骤 1 中（即 (s1) 的证明）类似的推理，并结合 Bai 和 Silverstein [16],中的引理 2.6[7]

$$|tr((zI - B)^{-1}A - (zI - B + vv^*)^{-1}A)| \leq \frac{||A||}{Im(z)} \tag{4.10}$$

give

$$\mathbb{E}[|\frac{1}{p}tr(\tilde{R}_j T) - \frac{1}{p}\mathbb{E}[tr(\tilde{R}_j T)]|^4] \leq \frac{16p^2 \cdot ||T||^4}{(Im(z))^4 \cdot p^4}.$$

否则 $j \neq 1$，并定义 $\tilde{R}_{j1} = (zI - \tilde{S} + \frac{1}{p}\tilde{Z}_1\tilde{Z}_1^T + \frac{1}{p}\tilde{Z}_j\tilde{Z}_j^T)^{-1}$： 则

$$\mathbb{E}[\frac{1}{N}||\tilde{Z}_j||^2 \cdot |\frac{1}{p}tr(\tilde{R}_1 T) - \frac{1}{p}\mathbb{E}[tr(\tilde{R}_1 T)]|] \leq \mathbb{E}[\frac{1}{N}||\tilde{Z}_j||^2 \cdot |\frac{1}{p}tr(\tilde{R}_{j1} T) - \frac{1}{p}\mathbb{E}[tr(\tilde{R}_{j1} T)]|] +$$

$$+\mathbb{E}[\frac{1}{N}||\tilde{Z}_j||^2 \cdot |\frac{1}{p}tr(\tilde{R}_1 T) - \frac{1}{p}tr(\tilde{R}_{j1} T)|] + \mathbb{E}[\frac{1}{N}||\tilde{Z}_j||^2 \cdot |\frac{1}{p}\mathbb{E}[tr(\tilde{R}_1 T)] - \frac{1}{p}\mathbb{E}[tr(\tilde{R}_{j1} T)]|] := I_e + II_e + III_e,$$

由此可得 (4.9)，因为采用与 $j = 1$， $I_e = O(p^{-1/2})$，相同的推理，并两次应用 (4.10)，可得

$$II_e + III_e \leq 2 \cdot \frac{||T||}{Im(z)} \cdot \mathbb{E}[\frac{1}{Np}||\tilde{Z}_j||^2] \leq \frac{2||T||^2}{Im(z)} \cdot \frac{1}{p}.$$

[7]对于 $v \in \mathbb{C}^N$， A， $B \in \mathbb{C}^{N \times N}$.

4.2 交换随机变量

现在回到定理 2 中的模型。在证明下式时会用到定理 3 中的条件 (b):

$$\mathbb{E}[|\frac{1}{p}\tilde{Z}_j^T\tilde{R}_jT^l(zI-\tilde{K}(j))^{-1}\tilde{Z}_j-(1-\frac{1}{p}\tilde{Z}_j^T\tilde{R}_jZ_j)\cdot\frac{1}{p}tr(T^l(zI-\tilde{K}(j))^{-1}\tilde{K}(j)(zI-\tilde{S})^{-1})|]=o(1)$$

对于 $1\le j\le p, l\in\{0,1\}$, 由此可对 $z\in\mathbb{C}^+$. 推出命题 2 中的结论。即,

$$\frac{1}{p}\tilde{Z}_j^T\tilde{R}_jT^l(zI-\tilde{K}(j))^{-1}\tilde{Z}_j-(1-\frac{1}{p}\tilde{Z}_j^T\tilde{R}_jZ_j)\cdot\frac{1}{p}tr(T^l(zI-\tilde{K}(j))^{-1}\tilde{K}(j)(zI-\tilde{S})^{-1}):=d_{j,1}+d_{j,2}+d_{j,3}\quad(4.11)$$

for

$$d_{j,1}=\frac{1}{p}tr(\tilde{R}_j(zI-\tilde{K}(j))^{-1}T^{l+1})-\frac{1}{p}tr((zI-\tilde{S})^{-1}(zI-\tilde{K}(j))^{-1}T^{l+1}),$$

$$d_{j,2}=\frac{1}{p}\tilde{Z}_j^T\tilde{R}_jT^l(zI-\tilde{K}(j))^{-1}\tilde{Z}_j-\frac{1}{p}tr(\tilde{R}_j(zI-\tilde{K}(j))^{-1}T^{l+1}),$$

$$d_{j,3}=\frac{1}{p}tr((zI-\tilde{S})^{-1}(zI-\tilde{K}(j))^{-1}T^{l+1})\cdot(1-\frac{1-\frac{1}{p}\tilde{Z}_j^T\tilde{R}_jZ_j}{1-\frac{1}{p}tr(\tilde{R}_jT)})$$

˜通过利用 $K(j)$与 T 可交换，并将条件(b)用于证明 $\mathbb{E}[|d_{j,2}|]=o(1)$ $\mathbb{E}[|d_{j,3}|]=o(1)$.在当前情形下，定理 3 中的条件$(a)$仍然成立（且条件$(c)$是显然的），因为

$$\mathbb{E}[\tilde{Z}_1\tilde{Z}_1^T]=\mathbb{E}[T^{1/2}Z_0Z_0^TT^{1/2}]=T^{1/2}\mathbb{E}[Z_0Z_0^T]T^{1/2}=T^{1/2}T^{1/2}=T,$$

并证明，在定理 2 的条件以及 $Im(z)\ge 1+4\mathcal{K}\gamma,$下，

$$\mathbb{E}[\frac{\frac{1}{p}\tilde{Z}_1^T\tilde{R}_1T^l(zI-\tilde{K})^{-1}\tilde{Z}_1}{1-\frac{1}{p}\tilde{Z}_1^T\tilde{R}_1\tilde{Z}_1}]=\mathbb{E}[\frac{\frac{1}{p}y^T\tilde{R}_1T^l(zI-\tilde{K})^{-1}y}{1-\frac{1}{p}y^T\tilde{R}_1y}]+o(1)\qquad(U)$$

对于 $y\in\mathbb{R}^N, y=T^{1/2}y_0, y_0\overset{d}{=}N(0,I)$ y_0与$(Z_j)_{1\le j\le p},$独立，只要条件(b)对 y成立，便已足够:

$$\frac{1}{N^2}\mathbb{E}[|y^TBy-tr(TB)|^2]=\frac{1}{N^2}\mathbb{E}[|y_0^TT^{1/2}BT^{1/2}y_0-tr(T^{1/2}BT^{1/2})|^2]=$$

$$=\frac{1}{N^2}\sum_{1\le j\le N}(3-2\cdot1+1)\cdot(T^{1/2}BT^{1/2})_{jj}^2\le\frac{2N\cdot||T^{1/2}BT^{1/2}||^2}{N^2}\le\frac{2||T||^2}{N}$$

对于任意具有 $||B||\le 1.$ 的确定性对称矩阵 $B\in\mathbb{R}^{N\times N}$ 。因此，可利用定理 3 中论证的其余部分来完成命题 2：本小节的剩余部分推导出(U)。

恒等式 (U) 的论证方式与命题 1 类似。设 $Im(z)\ge 1+4\mathcal{K}\gamma$，并采用相同的截断，即

$$1=\chi_{||Z_j||^2>2N}+\chi_{||Z_j||^2\le 2N}.$$

(i) 首先考虑尾部，并按照引理 2 的方法推理：恒等式 (3.3) 在此情形下同样成立，从而得到

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p}\tilde{Z}_j^T\tilde{R}_j\tilde{Z}_j}=1+\frac{1}{p}\tilde{Z}_j^T(zI-\tilde{S})^{-1}\tilde{Z}_j,$$

由此可得

$$|\frac{\frac{1}{p}\tilde{Z}_1^T\tilde{R}_1T^l(zI-\tilde{K})^{-1}\tilde{Z}_1}{1-\frac{1}{p}\tilde{Z}_1^T\tilde{R}_1\tilde{Z}_1}|\le(1+\frac{1}{p}||\tilde{Z}_1||^2\cdot\frac{1}{Im(z)})\cdot\frac{1}{p}||\tilde{Z}_1||^2\cdot||\tilde{R}_1T^l(zI-\tilde{K})^{-1}||\le$$

$$\le(1+\frac{||T||}{p}\cdot||Z_1||^2\cdot\frac{1}{Im(z)})\cdot\frac{||T||}{p}\cdot||Z_1||^2\cdot\frac{1}{Im(z)}\cdot||T||^l\cdot\frac{Im(z)+||T||}{(Im(z))^2}$$

利用 Bai 和 Zhou [7], 中的上界 3。4

$$||(zI-\tilde{K})^{-1}||\le\frac{Im(z)+||T||}{(Im(z))^2}.$$

接着由 Markov 不等式可得

$$|\mathbb{E}[\frac{\frac{1}{p}\tilde{Z}_1^T\tilde{R}_1T^l(zI-\tilde{K})^{-1}\tilde{Z}_1}{1-\frac{1}{p}\tilde{Z}_1^T\tilde{R}_1\tilde{Z}_1}\cdot\chi_{||Z_1||^2>2N}]|\leq\frac{||T||^{l+1}\cdot(||T||+Im(z))}{(Im(z))^3}\cdot\mathbb{E}[\frac{1}{p}||Z_1||^2\cdot\chi_{||Z_1||^2>2N}]+$$

$$+\frac{||T||^{l+2}\cdot(||T||+Im(z))}{(Im(z))^4}\cdot\mathbb{E}[(\frac{1}{p}||Z_1||^2)^2\cdot\chi_{||Z_1||^2>2N}],$$

and

$$\mathbb{E}[\frac{1}{N}||Z_1||^2\cdot\chi_{||Z_1||^2>2N}]\leq\frac{1}{2}\mathbb{E}[(\frac{1}{N}||Z_1||^2)^2\cdot\chi_{||Z_1||^2>2N}],$$

$$\mathbb{E}[(\frac{1}{N}||Z_1||^2)^2\cdot\chi_{||Z_1||^2>2N}]=\mathbb{P}(||Z_1||^2>2N)+\mathbb{E}[((\frac{1}{N}||Z_1||^2)^2-1)\cdot\chi_{||Z_1||^2>2N}]\leq$$

$$\leq Var(\frac{1}{N}||Z_1||^2)+2\mathbb{E}[\frac{1}{N}||Z_1||^2\cdot|\frac{1}{N}||Z_1||^2-1|]\leq Var(\frac{1}{N}||Z_1||^2)+2\sqrt{\mathbb{E}[\frac{1}{N}||Z_1||^2)^2\cdot(\frac{1}{N}||Z_1||^2-1)^2]}$$

通过 $0\leq x^2-1=(x+1)(x-1)\leq 2x(x-1)$，对于 $x\geq 1$，以及柯西-施瓦茨不等式。这两个上界 s 以及 (4.1) 可推出

$$\mathbb{E}[\frac{\frac{1}{p}\tilde{Z}_1^T\tilde{R}_1T^l(zI-\tilde{K})^{-1}\tilde{Z}_1}{1-\frac{1}{p}\tilde{Z}_1^T\tilde{R}_1\tilde{Z}_1}\cdot\chi_{||Z_1||^2>2N}]=o(1)\qquad(E1e)$$

因为引理6、8分别推出 $Var(\frac{1}{N}||Z_1||^2)=o(1)$ $\mathbb{E}[(\frac{1}{N}||Z_1||^2)^2\cdot(\frac{1}{N}||Z_1||^2-1)^2]=o(1)$，后者由下式得出

$$\mathbb{E}[(\frac{1}{N}||Z_1||^2)^2\cdot(\frac{1}{N}||Z_1||^2-1)^2]=\mathbb{E}[(\frac{1}{N}||Z_1||^2)^4]-2\mathbb{E}[(\frac{1}{N}||Z_1||^2)^3]+\mathbb{E}[(\frac{1}{N}||Z_1||^2)^2]=$$

$$=1+o(1)-2(1+o(1))+1+o(1)=o(1).$$

(*ii*) 现在继续考察所关注期望的剩余部分，

$$\mathbb{E}[\frac{\frac{1}{p}\tilde{Z}_1^T\tilde{R}_1T^l(zI-\tilde{K})^{-1}\tilde{Z}_1}{1-\frac{1}{p}\tilde{Z}_1^T\tilde{R}_1\tilde{Z}_1}\cdot\chi_{||Z_1||^2\leq 2N}].$$

与引理 3 的证明类似，不等式

$$\frac{1}{p}|\tilde{Z}_1^T\tilde{R}_1\tilde{Z}_1|\leq\frac{1}{p}||Z_1||^2\cdot||T||\cdot||\tilde{R}_1||\leq\frac{1}{p}||Z_1||^2\cdot\frac{\mathcal{K}}{Im(z)}$$

可推出，当 $Im(z)\geq 4\mathcal{K}\gamma_n$，

$$\frac{1}{p}|\tilde{Z}_1^T\tilde{R}_1\tilde{Z}_1|\cdot\chi_{||Z_1||^2\leq 2N}\leq\frac{1}{p}\cdot 2N\cdot\frac{\mathcal{K}}{Im(z)}\leq\frac{1}{2}.$$

上述关于 z 的条件对 $n\geq n_0$，成立，因此几乎可以直接运用第 3.2 小节中的论证 st 原封不动地。也就是说，

$$\mathbb{E}[\frac{\frac{1}{p}\tilde{Z}_1^T\tilde{R}_1T^l(zI-\tilde{K})^{-1}\tilde{Z}_1}{1-\frac{1}{p}\tilde{Z}_1^T\tilde{R}_1\tilde{Z}_1}\cdot\chi_{||Z_1||^2\leq 2N}]=\Sigma_{1e}+\Sigma_{2e}-\Sigma_{3e},\qquad(E2ae)$$

$$\Sigma_{1e}=\sum_{0\leq m\leq M}\mathbb{E}[Y(\frac{1}{p}\tilde{Z}_1^T\tilde{R}_1\tilde{Z}_1)^m],\qquad\Sigma_{2e}=\mathbb{E}[\frac{Y(\frac{1}{p}\tilde{Z}_1^T\tilde{R}_1\tilde{Z}_1)^{M+1}}{1-\frac{1}{p}\tilde{Z}_1^T\tilde{R}_1\tilde{Z}_1}\cdot\chi_{||Z_1||^2\leq 2N}],$$

$$\Sigma_{3e}=\sum_{0\leq m\leq M}\mathbb{E}[Y(\frac{1}{p}\tilde{Z}_1^T\tilde{R}_1\tilde{Z}_1)^m\cdot\chi_{||Z_1||^2>2N}]$$

对于 $Y=\frac{1}{p}\tilde{Z}_1^T\tilde{R}_1T^l(zI-\tilde{K})^{-1}\tilde{Z}_1\cdot$，通过类似于针对 (*E*2*b*) 所采用的论证，

$$\Sigma_{2e}=o(1),\qquad\Sigma_{3e}=o(1):\qquad(E2be)$$

对于 Σ_{2e}，论证完全相同；而对于 Σ_{3e}，$\gamma_n\cdot|\tilde{Z}_1^T\tilde{R}_1\tilde{Z}_1|\leq||Z_1||^2$ 即已足够（这是由于上界 ˜(3.10) 中的求和所致）。后者由 $\gamma_n\cdot||R_1||\cdot||T||\leq 1$，保证；对于足够大的 n，这一点由

$$\gamma_n\cdot||\tilde{R}_1||\cdot||T||\leq\gamma_n\cdot\frac{1}{Im(z)}\cdot\mathcal{K}\leq\frac{\gamma_n\cdot\mathcal{K}}{1+4\gamma\cdot\mathcal{K}}.$$

剩余分量 Σ_{1e}，在以下意义下是普适的：

$$\Sigma_{1e} = \sum_{0\le m\le M} \mathbb{E}[Y(\frac{1}{p}\tilde{Z}_1^T\tilde{R}_1\tilde{Z}_1)^m] = \sum_{0\le m\le M} \mathbb{E}[Y_G(\frac{1}{p}y^T\tilde{R}_1 y)^m] + o(1) \tag{4.12}$$

对于 $Y_G = \frac{1}{p}y^T\tilde{R}_1T^l(zI-\tilde{K})^{-1}y.$，这是 (3.13) 背后的矩计算的一个推论，即，

$$\mathbb{E}[(\frac{1}{N}Z_1^TR_1Z_1)^m] = \mathbb{E}[(\frac{1}{N}tr(R_1))^m] + (Im(z))^{-m}\cdot[O((16Cm)^m\cdot(\frac{d}{n^{1/2}})^{1/3}) + O(m^2\cdot\frac{d^2}{n})].$$

恒等式 (3.12) 是下述结果的一个特例，

$$\mathbb{E}[\prod_{1\le j\le q} Z_1^TW_jZ_1] = \sum_{1\le i_1,i_2,\dots,i_{2q}\le N} \mathbb{E}[(W_1)_{i_1i_2}(W_2)_{i_3i_4}...(W_q)_{i_{2m-1}i_{2m}}]\cdot\mathbb{E}[Z_{1i_1}Z_{1i_2}...Z_{1i_{2q}}] \tag{4.13}$$

对于任意随机矩阵 $W_1, W_2, ..., W_q \in \mathbb{R}^{n\times n}$，它们与 Z_1 独立（通过对 $\sigma(W_1, W_2, \dots, W_q)$,一个 σ-代数进行条件化，该代数与 $\sigma(Z_1)$,独立，并利用塔式性质）：即，(3.12) 是 (4.13) 对于

$$W_1 = W_2 = ... = W_m = \frac{1}{p}R_1.$$

在当前情形中，(4.12) 左端对应于 m 的项对应于

$$W_1 = \frac{1}{p}T^{1/2}\tilde{R}_1T^l(zI-\tilde{K})^{-1}T^{1/2}, \quad W_2 = ... = W_{m+1} = \frac{1}{p}T^{1/2}\tilde{R}_1T^{1/2} \tag{4.14}$$

(3.13) 的证明，即，

$$\mathbb{E}[(\frac{1}{N}Z_1^TR_1Z_1)^m] = \mathbb{E}[(\frac{1}{N}tr(R_1))^m] + (Im(z))^{-m}\cdot[O((16Cm)^m\cdot(\frac{d}{n^{1/2}})^{1/3}) + O(m^2\cdot\frac{d^2}{n})],$$

表明一阶贡献项是所有共享度均为零的元组。该论证依赖于 es
关于 x_1，矩的增长，以及

$$p||W_1|| \le \frac{1}{Im(z)}.$$

鉴于

$$p||W_1|| \le ||T||^{l+1}\cdot||\tilde{R}_1||\cdot||(zI-\tilde{K})^{-1}|| \le ||T||^{l+1}\cdot\frac{1}{Im(z)}\cdot\frac{Im(z)+||T||}{(Im(z))^2},$$

$$p||W_2|| \le ||T||\cdot||\tilde{R}_1|| \le \frac{||T||}{Im(z)},$$

对于（4.14），可以采用几乎一字不差的论证，因为 $\gamma_n\cdot p||W_2|| \le \frac{1}{4}$ 对于 $n \ge n_0$ （请回忆，$l\in\{0,1\}$ 是唯一需要关注的取值）。由此可得

$$\mathbb{E}[Y(\frac{1}{p}\tilde{Z}_1^T\tilde{R}_1\tilde{Z}_1)^m] = \mathbb{E}[Y_G(\frac{1}{p}y^T\tilde{R}_1y_1)^m] + o(1)$$

这是因为，由于（y_0）$_1$ 是次高斯且对称的，双方的一阶贡献相同，且 $\mathbb{E}[($（y_0）$_1)^{2k}] =$（$2k-1$）！！$\le$（$2k$）^{k} 对所有 $k\in\mathbb{N}.$ 均成立。此外，对 m的求和后，误差仍可忽略不计，从而得到关于 Σ_{1e}的所需结论，即（*4.12*）。最后，由于当以替换时，（）和（）的证明仍然成立，因此命题（U）得到了充分证明，这就完成了命题 2 的证明。

5 辅助结果

本节包含若干贯穿全文的引理。

引理 4. 设 $Z_1, Z_2, \dots, Z_p \in \mathbb{R}^N$，令 $S = \frac{1}{p}\sum_{1\le j\le p} Z_jZ_j^T$，并假设 $z\in\mathbb{C}$ *with* $zI-S$,$(zI-S+\frac{1}{p}Z_jZ_j^T)_{1\le j\le p}$ 可逆。则

$$-1 + z\cdot\frac{1}{N}tr((zI-S)^{-1}) = -\frac{p}{N} + \frac{1}{N}\sum_{1\le j\le p}\frac{1}{1-\frac{1}{p}Z_j^TR_jZ_j},$$

其中 $R_j = (zI-S+\frac{1}{p}Z_jZ_j^T)^{-1}$, $1\le j\le p.$

证明。从.....开始

$$-1+z\cdot\frac{1}{N}tr((zI-S)^{-1})=\frac{1}{pN}\sum_{1\le j\le p}Z_j^T(zI-S)^{-1}Z_j, \tag{5.1}$$

通过相乘得到

$$-(zI-S)+zI=\frac{1}{p}\sum_{1\le j\le p}Z_jZ_j^T$$

在右侧乘以 $(zI-S)^{-1}$，对两边分别取迹（利用 $tr(AB)=tr(BA)$ 对于 $A\in\mathbb{C}^{n\times m},\ B\in\mathbb{C}^{m\times n}$），并除以 N. 预解式恒等式 $A^{-1}-B^{-1}=A^{-1}(B-A)B^{-1}$ 随后给出

$$R_j-(zI-S)^{-1}=-R_j\frac{1}{p}Z_jZ_j^T(zI-S)^{-1},$$

随后在左侧乘以 Z_j^T，在右侧乘以 Z_j，得到

$$Z_j^TR_jZ_j-Z_j^T(zI-S)^{-1}Z_j=-\frac{1}{p}Z_j^TR_jZ_j\cdot Z_j^T(zI-S)^{-1}Z_j,$$

由此

$$Z_j^T(zI-S)^{-1}Z_j=\frac{Z_j^TR_jZ_j}{1-\frac{1}{p}Z_j^TR_jZ_j}=-p+\frac{p}{1-\frac{1}{p}Z_j^TR_jZ_j} \tag{5.2}$$

在.....程度上

$$Z_j^T(zI-S)^{-1}Z_j\cdot(1-\frac{1}{p}Z_j^TR_jZ_j)=Z_j^TR_jZ_j,$$

这意味着 $1-\frac{1}{p}Z_j^TR_jZ_j\neq 0$（否则，$Z_j^TR_jZ_j=0$，但 $Z_j^TR_jZ_j=p$，荒谬）。最后，将 (5.2) 代入 (5.1)，即可得到所需结论，

$$-1+z\cdot\frac{1}{N}tr((zI-S)^{-1})=-\frac{p}{N}+\frac{1}{N}\sum_{1\le j\le p}\frac{1}{1-\frac{1}{p}Z_j^TR_jZ_j}.$$

□

引理 5。设 $u,v\in\mathbb{C}^n, A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，并假设 $A, A+uv^T$ 可逆。则

$$(A+uv^T)^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u}.$$

证明。左乘 A，右乘 $A+uv^T$，将待证恒等式转化为

$$uv^T=\frac{uv^TA^{-1}(A+uv^T)}{1+v^TA^{-1}u}.$$

这是由以下结果推得的

$$v^TA^{-1}u\cdot uv^T=uv^TA^{-1}uv^T \tag{5.3}$$

因为这样便会得到

$$(1+v^TA^{-1}u)\cdot uv^T=uv^TA^{-1}(A+uv^T),$$

以及 $1+v^TA^{-1}u\neq 0$：否则，$uv^TA^{-1}(A+uv^T)=0$，由此[8] $uv^T=0$，从而导致矛盾，

$$-1=v^TA^{-1}u=tr(A^{-1}uv^T)=0.$$

恒等式（5.3）由 $f:\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathbb{C}^{n\times n}$ 定义

$$f(M)=v^TMu\cdot uv^T-uv^TMuv^T$$

处处为零（即 $f=0$），因为它是线性的，且 $f(E_{\alpha\beta})=0$ 对于 $E_{\alpha\beta}=(\chi_{i=\alpha,\ j=\beta})_{1\le i,\ j\le n},\ 1\le\alpha,\ \beta\le n$.后者成立，是因为对于 $1\le i,\ j\le n$,

$$(f(E_{\alpha\beta}))_{ij}=v_\alpha u_\beta\cdot u_iv_j-(uv^T)_{i\alpha}\cdot(uv^T)_{\beta j}=v_\alpha u_\beta\cdot u_iv_j-u_iv_\alpha\cdot u_\beta v_j=0.$$

□

[8]稍微滥用一下记号，用 0 表示零向量和矩阵。

引理 6. 假设 Z_0 由 ***(RTP)*** 给出，并令 $N = \binom{n}{d}$. 。若 $d \le \frac{n}{2}$ 且 $\mathbb{E}[x_1^4] \le \frac{n-2d+2}{(d-1)^2}$，则

$$Var(||Z_0||^2) \le 2N^2 \cdot \mathbb{E}[x_1^4] \cdot \frac{d^2}{n} \cdot e^{-\frac{(d-1)^2}{n-1}}.$$

注： 由于 $\mathbb{E}[x_1^4] \ge (\mathbb{E}[x_1^2])^2 = 1$，四阶矩条件意味着 $d^2 \le n+1$，只要 $n \ge 5$，它就比 $d \le \frac{n}{2}$ 更强，其中 $\frac{n^2}{4} - (n+1) = \frac{(n-2)^2}{4} - 2$.

证明。 由期望的线性性以及 x_1，x_2、.....、x_n 独立同分布可得

$$\mathbb{E}[||Z_0||^2] = N \cdot \mathbb{E}[x_1^2 x_2^2 ... x_d^2] = N,$$

由此

$$Var(||Z_0||^2) = \mathbb{E}[(||Z_0||^2 - N)^2] = \mathbb{E}[(\sum_{i_1 < i_2 < ... < i_d} (x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 ... x_{i_d}^2 - 1))^2].$$

有非零贡献的数对，其底层两个元组在某些位置上共享 k 个条目，其中 $1 \le k \le d$ ，
由此

$$Var(||Z_0||^2) = \binom{n}{d} \sum_{1 \le k \le d} ((\mathbb{E}[x_1^4])^k - 1) \cdot \binom{d}{k} \binom{n-d}{d-k} \le \binom{n}{d} \sum_{1 \le k \le d} (\mathbb{E}[x_1^4])^k \cdot \binom{d}{k} \binom{n-d}{d-k} \tag{5.4}$$

（固定第一个元组，从其条目组成的集合中选取一个大小为 k 的子集，再从大小为 $n-d$ 的集合中为第二个元组的其余位置选取一个大小为$d-k$ 的子集）。由于 $d-1 < n-d$，对应于 $k+1$ 和 k 的项之比为

$$\mathbb{E}[x_1^4] \cdot \frac{\binom{d}{k+1}\binom{n-d}{d-k-1}}{\binom{d}{k}\binom{n-d}{d-k}} = \mathbb{E}[x_1^4] \cdot \frac{d-k}{k+1} \cdot \frac{d-k}{n-2d+k+1},$$

对于 $1 \le k \le d-1.$，该乘积随 k 增大而减小（分子减小，分母随k 增大），因此最大值在 $k = 1,$ 处取得，此时它为

$$\mathbb{E}[x^4] \cdot \frac{(d-1)^2}{2(n-2d+2)} \le \frac{1}{2}.$$

所需的上界由 $\sum_{k \ge 1} 2^{-(k-1)} = 2,$ 得出，并且

$$\frac{\binom{n}{d} \cdot d\binom{n-d}{d-1}}{N^2} = \frac{d\binom{n-d}{d-1}}{\binom{n}{d}} = \frac{d^2(n-d)!(n-d)!}{n!(n-2d+1)!} = \frac{d^2(n-d)...(n-2d+2)}{n(n-1)...(n-d+1)} =$$

$$= \frac{d^2}{n} \cdot \prod_{1 \le k \le d-1} \frac{n-2d+1+k}{n-d+k} = \frac{d^2}{n} \cdot \prod_{1 \le k \le d-1} (1 - \frac{d-1}{n-d+k}) \le \frac{d^2}{n} \cdot e^{-\sum_{1 \le k \le d-1} \frac{d-1}{n-d+k}} \le \frac{d^2}{n} \cdot e^{-\frac{(d-1)^2}{n-1}}$$

通过 $1 - x \le e^{-x}$，对于 $x \in \mathbb{R}.$

顺便指出，当 $\mathbb{E}[x^4] - 1$ 远离 0 且$d \le \frac{n}{5}$ 时，最后一个不等式在比值意义下是紧的，因为上述论证以及 $\mathbb{E}[x_1^4] \ge (\mathbb{E}[x_1^2])^2 = 1$ 可直接推出

$$Var(||Z_0||^2) \ge \binom{n}{d} \cdot d\binom{n-d}{d-1} \cdot (\mathbb{E}[x^4] - 1) = N^2 \cdot (\mathbb{E}[x^4] - 1) \cdot \frac{d^2}{n} \cdot \prod_{1 \le k \le d-1} (1 - \frac{d-1}{n-d+k}) \ge$$

$$\ge N^2 \cdot (\mathbb{E}[x^4] - 1) \cdot \frac{d^2}{n} \cdot e^{-2\sum_{1 \le k \le d-1} \frac{d-1}{n-d+k}} \ge N^2 \cdot (\mathbb{E}[x^4] - 1) \cdot \frac{d^2}{n} \cdot e^{-\frac{2(d-1)^2}{n-d+1}} \tag{5.5}$$

利用 $1 - x \ge e^{-2x}$ 对于 $x \le \log 2$ 由 $(1 - x - e^{-2x})' = 2e^{-2x} - 1 \ge 0,$ 以及

$$\frac{d-1}{n-d+k} \le \frac{d-1}{n-d+1} \le \frac{n/5-1}{n-n/5+1} < \frac{1}{4} < \frac{\log 2}{2} \quad (1 \le k \le d-1).$$

□

以下结果表明，当 $\frac{d}{n^{1/2}}$ 远离零时， $Var(||Z_0||^2)$ 的行为可能会与引理 6 中描述的情况显著不同。

引理 7. 设 Z_0 由 *(RTP)* 给出，并令 $N=\binom{n}{d}, B=\mathbb{E}[x_1^4]$. 若 $(2n)^{1/2}\le d\le \frac{n}{8}$，则

$$Var(||Z_0||^2)\ge N^2\cdot\frac{1-B^{-\frac{d^2}{n}}}{8}\cdot(\frac{B}{8e^4})^{\frac{d^2}{n}}.$$

证明。令 $k=\lceil\frac{d^2}{n}\rceil$. 则

$$2\le k\le\frac{d^2}{n}+1\le\frac{2d^2}{n}\le\frac{d}{2},$$

结合 (5.4) 以及 $B=\mathbb{E}[x^4]\ge(\mathbb{E}[x^2])^2=1$ 可得

$$Var(||Z_0||^2)\ge N^2\cdot(B^k-1)\cdot\frac{\binom{d}{k}\binom{n-d}{d-k}}{\binom{n}{d}}.$$

由 $1-B^{-k}\ge 1-B^{-\frac{d^2}{n}}$，只需证明

$$\frac{\binom{d}{k}\binom{n-d}{d-k}}{\binom{n}{d}}\ge 8^{-1}\cdot(8e^4)^{-\frac{d^2}{n}}:$$

这由下式即可推出

$$\frac{\binom{d}{k}\binom{n-d}{d-k}}{\binom{n}{d}}\ge\frac{\frac{(d-k)^k}{k!}\cdot\frac{(n-2d)^{d-k}}{(d-k)!}}{\frac{n^d}{d!}}=(1-\frac{2d}{n})^{d-k}\cdot\binom{d}{k}\cdot(\frac{d-k}{n})^k\ge e^{-\frac{4d(d-k)}{n}}\cdot(\frac{(d-k)^2}{kn})^k\ge$$

$$\ge e^{-\frac{4d^2}{n}}\cdot(\frac{d^2/4}{\frac{2d^2}{n}\cdot n})^k=e^{-\frac{4d^2}{n}}\cdot 8^{-k}\ge 8^{-1}\cdot(8e^4)^{-\frac{d^2}{n}}$$

通过 $1-x\ge e^{-2x}$，当 $x\le\log 2.2$，且 $\frac{2d}{n}\le\frac{1}{4}\le\log 2.2$。 □

引理 8. 假设对于所有 $q\in\mathbb{N}$， $\mathbb{E}[x^2]=1,\mathbb{E}[x^{2q}]\le(Cq)^q$，并令

$$c(m,n,(d_j)_{1\le j\le m})=\frac{1}{\binom{n}{d_1}\cdot\binom{n}{d_2}\cdot\ldots\cdot\binom{n}{d_m}}\sum_{1\le i_j\le\binom{n}{d_j}}\mathbb{E}[Z_{d_1,p_1}^2Z_{d_2,p_2}^2\ldots Z_{d_m,p_m}^2]$$

对于 $m\in\mathbb{N}, d_1,d_2,\ldots,d_m\in\{1,2,\ldots,n\}$, $x_1,x_2,\ldots,x_n$，它们是独立同分布的， $x_1\overset{d}{=}x$，且 $(Z_{l,\ k})_{1\le k\le\binom{n}{l}}$ 是 $(x_{r_1}x_{r_2}\ldots x_{r_l})_{1\le r_1<r_2<\ldots<r_l\le n}$. 的一个固定标记。于是

$$c(m,n,(d_j)_{1\le j\le m})\le 1+e^{\frac{2C^2e^2(\sum_{1\le j\le m}d_j)^2}{n}}\cdot\frac{2C^2e^2(\sum_{1\le j\le m}d_j)^2}{n}\tag{5.6}$$

当 $\sum_{1\le j\le m}d_j\le\frac{n^{1/2}}{3Ce}$. 时

证明。如果 $p_1,p_2,\ldots,p_m,$ 所对应的位置之间没有重叠，那么由独立性可知，期望至多贡献 1，且对于 $1\le j\le m.$，$\mathbb{E}[Z_{d_j,p_j}^2]=1$。否则，存在一个指标 $r\in\{1,2,\ldots,n\}$，它恰好出现在支撑位置 $p_{i_1},p_{i_2},\ldots,p_{i_k}$ 的集合中，$1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le m$，以及某个 $2\le k\le m.$。根据独立性， x_r 对期望的贡献为 $\mathbb{E}[x^{2k}]$, 并且

$$\binom{n}{d}=\binom{n-1}{d-1}\cdot\frac{n}{d}\quad(1\le d\le n),\qquad\binom{n}{d}=\binom{n-1}{d}\cdot\frac{n}{n-d}\quad(1\le d\le n-1)$$

意味着

$$c(m,n,(d_j)_{1\le j\le m})\le 1+\sum_{2\le k\le m}n\cdot\mathbb{E}[x^{2k}]\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le m}\frac{1}{\frac{n}{d_{i_1}}\cdot\frac{n}{d_{i_2}}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{d_{i_k}}}\cdot c(m,n-1,(d_j-\chi_{j\in\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}})_{1\le j\le m}).\tag{5.7}$$

由多项式定理可得

$$\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le m}\frac{1}{\frac{n}{d_{i_1}}\cdot\frac{n}{d_{i_2}}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{d_{i_k}}}\le(\sum_{1\le j\le m}\frac{1}{\frac{n}{d_j}})^k\cdot\frac{1}{k!}=(\frac{\sum_{1\le j\le m}d_j}{n})^k\cdot\frac{1}{k!},$$

由此可将 (5.7) 改写为

$$c(m,n,(d_j)_{1\le j\le m}) \le 1+\sum_{2\le k\le m} n\cdot \mathbb{E}[x^{2k}]\cdot (\frac{\sum_{1\le j\le m} d_j}{n})^k \cdot \frac{1}{k!}\cdot \max_{1\le i_1<\ldots<i_k\le m} c(m,n-1,(d_j-\chi_{j\in\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}})_{1\le j\le m}).$$

对 $s=\sum_{1\le j\le m} d_j \le \frac{n^{1/2}}{3Ce}$. 进行归纳法。注意，由 $s\ge 1, 3Ce\ge 3e>1$ 可知 $n\ge 2$，因为

$$C \ge \mathbb{E}[x^2] = 1. \tag{5.8}$$

基例 $s=1$ 具有 $m=1$，且结论显然（该和至多为 1）。接下来假设该上界对 $s-1\ge 1.$ 成立。凭借 $k!\ge (\frac{k}{e})^k$，只需证明[9]

$$1+\sum_{2\le k\le m} n\cdot (Ck)^k\cdot (\frac{es}{nk})^k \cdot (1+e^{\frac{2C^2e^2(s-k)^2}{n-1}}\cdot \frac{2C^2e^2(s-k)^2}{n-1}) := 1+I+II \tag{5.9}$$

以 (5.6) 的右端项为上界（同时利用 $x\to xe^x$ 在 $[0,\infty$ 上递增）），
其中 I，II 是通过展开各求和项最后因子中的括号得到的，因为

$$s-k \le \frac{n^{1/2}}{3Ce} - 2 \le \frac{(n-1)^{1/2}}{3Ce}$$

from

$$\frac{n^{1/2}-(n-1)^{1/2}}{3Ce} = \frac{1}{3Ce\cdot (n^{1/2}+(n-1)^{1/2})} \le \frac{1}{3Ce} \le \frac{1}{3e} < 1$$

经由 (5.8)。

将 (5.9) 中的因子改写为

$$n\cdot (Ck)^k\cdot (\frac{es}{nk})^k = n\cdot (\frac{Ces}{n})^k = \frac{C^2e^2s^2}{n}\cdot (\frac{Ces}{n})^{k-2},$$

因此，只需证明

$$I = \frac{C^2e^2s^2}{n}\sum_{2\le k\le m} (\frac{Ces}{n})^{k-2} \le e^{\frac{2C^2e^2s^2}{n}}\cdot \frac{C^2e^2s^2}{n},$$

$$II = \frac{C^2e^2s^2}{n}\sum_{2\le k\le m} (\frac{Ces}{n})^{k-2}\cdot e^{\frac{2C^2e^2(s-k)^2}{n-1}}\cdot \frac{2C^2e^2(s-k)^2}{n-1} \le e^{\frac{2C^2e^2s^2}{n}}\cdot \frac{C^2e^2s^2}{n}$$

当 $m\le s\le \frac{n^1}{3Ce^2}$ 时以完成归纳步骤。

从 I 开始：所需结论等价于

$$\sum_{0\le k\le m-2} (\frac{Ces}{n})^k \le e^{\frac{2C^2e^2s^2}{n}},$$

并由此得出

$$\sum_{0\le k\le M} x^k \le e^{Mx} \qquad (x\ge 0, M\ge 0), \tag{5.10}$$

这是.....的推论

$$e^{Mx} = \sum_{k\ge 0}\frac{(Mx)^k}{k!} \ge \sum_{k\ge 0}\frac{(Mx)^k}{k^k} \ge \sum_{0\le k\le M} x^k,$$

根据约定 $0^0 := 1.$ 也就是说，(5.10) 给出

$$\sum_{0\le k\le m-2} (\frac{Ces}{n})^k \le e^{\max(m-2,0)\cdot\frac{Ces}{n}} < e^{s\cdot\frac{Ces}{n}} < e^{\frac{2C^2e^2s^2}{n}}$$

通过使用 $s\ge m$ 和 (5.8)。

[9](5.6) 中的上界不直接依赖于 m，因此，当 $d_{i_j}=1$ 对某个 $1\le j\le k$ 成立时，不会造成问题
（这样的位置可以从对应于 $n-1$ 的元组中删除。）

现在考虑 II，只需证明

$$\frac{C^2e^2s^2}{n}\sum_{2\le k\le m}(\frac{Ces}{n})^{k-2}\cdot e^{\frac{2C^2e^2(s-k)^2}{n-1}}\le e^{\frac{2C^2e^2s^2}{n}}\cdot\frac{n-1}{2n}$$

由 $(s-k)^2\le s^2$ 对 $k\le m\le s$. 由于 $(s-k)^2\le s(s-k)$，以及相应的项，在将指数中的平方替换为 k，中的这些线性上界之后，满足

$$\frac{t(k+1)}{t(k)}=\frac{Ces}{n}\cdot e^{-\frac{2C^2e^2s}{n-1}}<\frac{n^{1/2}}{3n}\le\frac{1}{3}.$$

这表明该和至多为 $\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\cdot t(2)\le 2t(2)$，从而相当于总体的上界至多

$$\frac{C^2e^2s^2}{n}\cdot 2\cdot e^{\frac{2C^2e^2s(s-2)}{n-1}}\le e^{\frac{2C^2e^2s^2}{n}}\cdot\frac{n-1}{2n}:$$

为推导这最后一个不等式，使用

$$e^{\frac{2C^2e^2s(s-2)}{n-1}}<e^{\frac{2C^2e^2s^2}{n}}$$

from

$$\frac{s-2}{n-1}-\frac{s}{n}=\frac{n(s-2)-s(n-1)}{n(n-1)}=\frac{s-2n}{n(n-1)}\le\frac{-n}{n(n-1)}<0$$

由于 $s\le\frac{n^{1/2}}{3Ce}\le\frac{n^{1/2}}{3e}<n$，而

$$\frac{C^2e^2s^2}{n}\cdot 2\cdot\frac{2n}{n-1}\le C^2e^2\cdot\frac{1}{9C^2e^2}\cdot 2\cdot 4=\frac{8}{9}<1,$$

从而完成归纳步骤（回顾 $n\ge 2$）。

□

参考文献

[1] R.Adamczak. 关于某些具有相关条目的随机矩阵类的 *Marchenko-Pastur* 定律与圆律，《电子概率学杂志》，第 16卷（*2011*），论文编号 37， $1068-1095$.

[2]Z. Bai、J. Hu、J. Silverstein 和 H. Zhou. 大维非中心样本协方差矩阵特征值的精确分离，《中国科学：数学》，2025，https://doi.org/10.1007/s11425-024-2399-3。

[3] Z. Bai 和 J. Silverstein. 大维随机矩阵的谱分析，施普林格数学丛书，第二版，2010。

[4] Z. Bai 和 Y. Yin. 大维样本协方差矩阵最小特征值的极限，《概率学年刊》，第 21卷，第 3期， $1275-1294$, 1993。

[5] Z. Bai 和 J. Silverstein。极限谱分布支撑集之外没有特征值 *o* *f* 大维样本协方差矩阵，《概率年刊》，26(1)： $316-345$，1998。

[6] Z. Bai 和 J. Silverstein。大维样本协方差矩阵特征值的精确分离 , 《概率年刊》，27(3)： $1536-1555$，1999。

[7] Z. Bai 和 W. Zhou。列间不存在独立结构的大样本协方差矩阵 , 《中华统计学志》18（2008） $425-442$.

[8]S. Belinschi、A. Dembo 和 A. Guionnet。重尾带状矩阵与协方差矩阵的谱测度 *e* 矩阵，《数学物理通讯》，第289卷， $1023-1055$，2009年。

[9] J. Bryson、R. Vershynin 和 H. Zhao。相依性条件放宽时的 *Marchenko-Pastur* 定律 , 《随机矩阵：理论与应用》第10卷，第04期（2021年）。

[10] S. Diaconu。具有发散尖峰的协方差矩阵的特征结构，Bernoulli，第29 , 第2期, $1275-1296$, 2023年.

[11] *F. Götze* 和 *A. Tikhomirov.* 相依条件下正随机矩阵谱的极限定理，《数学科学杂志》，第*133*卷，第*3*期，*2006*年。[12] *F. Götze* 和 *A. Tikhomirov.* 具有鞅结构的随机矩阵谱的极限定理，《概率论及其应用》，第*51*卷，第*1*期（*2007*年）。[13] *V. Marchenko* 和 *L. Pastur.* 若干类随机矩阵的特征值分布，《苏联数学汇刊》，第*1*卷，第*94*期，*1967*年。[14] *O. Ledoit* 和 *S. Péché.* 若干大样本协方差矩阵系综的特征向量，《概率论及相关领域》，*151*：$233-264$，*2011*年。[15] *J. W. Silverstein.* 高维随机矩阵特征值经验分布的强收敛，《多元分析杂志》*55*，$331-339$，*1995*年。[16]*J. W. Silverstein* 和 白志东. 关于一类高维随机矩阵特征值的经验分布，《多元分析杂志》*54*，$175-192$，*1995*年。[17] 陶哲轩 和 *V. Vu.* 随机矩阵：经验谱分布的普适性与圆律，《概率年刊》*38(5)*：$2023-2065$，*2010*年。