阿基米德 Copula 下多维风险价值的显式表达式

Dotamana Y´eo[a]，Saralees Nadarajah[b]，Amadou Sawadogo[a]

[a]费利克斯·乌弗埃-博瓦尼大学，数学与计算机科学系，*22BP582*，阿比让 *22*，科特迪瓦。[b]曼彻斯特大学，英国曼彻斯特 *M13 9PL*。

arXiv:2602.01245v1 [stat.ME] 1 Feb 2026

摘要

本文研究金融投资组合的多元风险价值（VaR），重点关注通过阿基米德 Copula 对依赖结构进行建模。利用阿基米德 Copula 的生成元表示，我们推导出适用于任意维度的边际下尾多元VaR的显式解析表达式。

本文为若干常用 Copula 族推导出闭式公式，包括 Clayton、Frank、Gumbel-Hougaard、Joe 和 Ali–Mikhail–Haq Copula，从而能够直接评估依赖关系对多元风险的影响。这些结果为现有方法提供了补充；现有方法主要依赖数值方法或基于模拟的方法，而本文提供了适用于理论和应用风险分析的便捷替代方案。

通过蒙特卡洛模拟，评估所提出的 VaR 估计量在有限样本下的表现，并说明不同相依结构的作用。所提出的分析框架为多元风险度量和系统性风险评估提供了透明的工具。

关键词： 阿基米德 Copula；多元风险价值；蒙特卡洛模拟。

*2010*年数学主题分类：62E10；60E05；62E99。

1. 引言

要准确衡量现代投资组合的金融风险，必须采用能够考虑多个风险分量之间复杂依赖结构的风险度量指标。尽管诸如风险价值等单变量风险度量指标

电子邮箱： amadou.sawadogo@gmail.com（Amadou Sawadogo）

（VaR）仍是监管和实际风险管理中的核心工具，但它们无法捕捉投资组合成分的联合行为，因此在存在依赖关系时，可能会低估总体风险。这一局限促使研究者开展了大量研究，致力于开发能够以一致且透明的方式纳入依赖效应的多元风险度量指标和向量值风险度量。

在现有方法中，基于Copula的模型已成为一种强大而灵活的方法，可用于描述不受边缘分布影响的多元依赖关系（Hofert 等人，2018）。自 Sklar（1959）的开创性研究以来，相依函数已广泛应用于金融和保险领域，用于对具有异质边际分布和复杂依赖模式的联合分布进行建模。尤其是阿基米德 Copula，凭借其解析上的易处理性、实现简便，以及通过单一生成函数对多种依赖结构进行建模的能力，受到了广泛关注。关于 Copula 理论的全面论述，可参见 Nelsen（2006）和 Joe（1997）等人的著作。

与 Copula 理论的发展并行，过去二十年来，多元风险度量指标相关文献显著增长。研究者提出了多种将单变量风险价值和条件尾部期望（CTE）推广至多元情形的方法，包括向量值风险度量、集值方法和基于聚合的方法。重要的研究成果包括 Hürlimann（2017）及其后续研究；这些研究在 Copula 框架下考察多元风险价值和条件尾部期望，并强调依赖关系在决定联合尾部风险中的作用。尽管取得了这些进展，许多现有结果仍严重依赖数值积分或蒙特卡罗模拟，尤其是在处理高维投资组合或非高斯依赖结构时。

在这一背景下，多元风险度量的解析表达式仍相对少见。闭式或半解析表示通常仅在限制性假设下或针对特定依赖模型才可获得。这种缺乏可处理性的情况，既限制了理论洞见，也妨碍了实际应用，因为基于模拟的方法可能计算量很大，而且无法清晰呈现依赖参数对最终风险度量指标的影响。近年来的相关研究包括 Guégan 和 Hassani（2019）、Hoffmann 等（2018）、Lux 和 Papapantoleon（2019），以及 Qian 等（2019）；他们在各种建模框架下考察了多元风险度量及依赖效应。

本文聚焦于阿基米德 Copula 类中的多元风险价值，以解决这些局限。我们利用阿基米德 Copula 的生成元表示，

并结合 Kendall 分布；Kendall 分布自然刻画其水平集，并在多元分位数的定义中发挥核心作用。我们推导出适用于任意维度的边际下尾多元VaR的显式解析表达式。

针对若干广泛使用的阿基米德 Copula 族，包括 Clayton、Frank、Gumbel-Hougaard、Joe 和 Ali-Mikhail-Haq Copula，本文得到了闭式公式。这些结果清晰、直接地揭示了 Copula依赖参数与相应多元风险度量之间的联系，从而深入说明了依赖关系对投资组合风险的影响。与主要依赖数值方法的做法不同，本文提出的推导给出了易于处理的表达式，可直接用于实现和分析。

为评估理论结果的实际意义，我们通过蒙特卡洛模拟实验补充了分析推导。这些模拟评估了所提出的风险价值估计量在有限样本下的性能，并展示了不同依赖结构如何影响多元风险评估。数值结果验证了解析表达式的准确性，并凸显了在多元风险度量中恰当建模依赖关系的重要性。

本文其余部分安排如下。第2 节回顾阿基米德 Copula 和多元风险价值的必要背景。第3 节介绍主要理论结果，并推导各种阿基米德 Copula 族下多元风险价值的显式表达式。第4节通过蒙特卡洛模拟说明并验证所提出的方法。第5 节总结全文，并展望未来研究方向。

2. 阿基米德 Copula 与多元风险价值预备知识

本节概述现有文献中已确立的一些定义和定理。

定义 1. *(Nelsen，2006)*

若存在一个函数ϕ：$[0,1] \longrightarrow [0,\infty)$，称为生成元，使得 $\phi(1) = 0$, ϕ 严格递减，则称 *Copula* C： $[0,1]^d \longrightarrow [0,1]$ 为阿基米德 *Copula*，

$$C(u_1,\cdots,u_d) = \phi^{-1}(\phi(u_1)+\cdots+\phi(u_d)),\ \forall (u_1,\cdots,u_d) \in [0,1]^d. \tag{1}$$

此外，为了成为维数 d 上的有效 *Copula*，生成元必须在 $[0,1]$，上完全单调，即：

$$(-1)^k \frac{d^k \phi^{-1}(t)}{dt^k} \geq 0,\ \forall\, t \in [0;\infty)\, and\, k = 0,1,\cdots$$

在下文中，所考虑的随机向量 $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_d)$ 满足所谓的 正则性条件，这意味着 $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_d)$ 是非负的，且关于 R^d 上的勒贝格测度绝对连续，并具有部分递增的多元分布函数 F，前提是 $\mathrm{E}[X_i] < \infty, i = 1, \cdots, d$。

定义 2。 *(Di Bernardino, 2011)*

令 $\alpha \in (0, 1)$，且 $\mathcal{L}_\alpha^F = \{(x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}_+^d : F(x_1, \ldots, x_d) \geq \alpha)\}$为 F 的上 α 水平集。集合 $\mathcal{L}_\alpha^F$ 的边界是 F 的 α 水平集，表示为

$$\partial\mathcal{L}_\alpha^F = \{(x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}_+^d : F(x_1, \ldots, x_d) = \alpha\}.$$

根据 *Sklar* 定理， $\partial\mathcal{L}_\alpha^F$ 可用其对应的 *Copula C* 表示为

$$\partial\mathcal{L}_\alpha^C = \{(u_1, \cdots, u_d) \in [0,1]^d : C(u_1, \cdots, u_d) = \alpha\}. \tag{2}$$

置信水平为 $\alpha \in (0,1)$ 时，多元风险价值泛函定义如下（Cousin 和 Di Bernadino，2013，定义 2.1，下正交象限风险价值；Hürlimann，2017）。

定义 3。 令 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_d)$ 为满足正则性条件的随机向量。对于 $\alpha \in (0, 1)$，置信水平为 α 时的多元风险价值泛函为

$$VaR_\alpha(\boldsymbol{X}) = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}|\boldsymbol{X} \in \partial\mathcal{L}_\alpha^C] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X_1|\boldsymbol{X} \in \partial\mathcal{L}_\alpha^C] \\ \mathbb{E}[X_2|\boldsymbol{X} \in \partial\mathcal{L}_\alpha^C] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_d|\boldsymbol{X} \in \partial\mathcal{L}_\alpha^C] \end{pmatrix}. \tag{3}$$

因此，要在多维框架下求得风险价值，我们只需确定所有 $i = 1$、…、d 的边际风险价值。Hürlimann（2017）给出的以下定理，为阿基米德 Copula 的情形提供了一般性结果。

定理 1. （*Hürlimann，2017*）

设 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_d)$ 为一个随机向量，F 为其联合分布函数，并且该函数与生成元为 ϕ 的绝对连续阿基米德 *Copula C* 相关。则多元风险价值$_\alpha(\boldsymbol{X})$的各个分量风险价值$^i_\alpha(\boldsymbol{X}), i=1,\cdots,d$ 满足以下公式，

$$VaR^i_\alpha(\boldsymbol{X})=\frac{d-1}{\phi(\alpha)^{d-1}}\int_\alpha^1 VaR_u(X_i)\beta_d(u,\alpha)du, \tag{4}$$

其中 $\beta_d(u,\alpha)=-\phi'(u).[\phi(\alpha)-\phi(u)]^{d-2},\ 1\le u\le\alpha, 0<\alpha<1$。

证明 1。 定理*1*的证明见（*Hürlimann，2017*）。

定理 1 的应用使我们能够推导出与若干类阿基米德 Copula 相关的多元风险价值的显式表达式。

3. 某些阿基米德 Copula 的风险价值表达式

本节旨在对若干广泛使用的阿基米德 Copula 族的多元风险价值表达式进行解析推导，得到其闭式表达式，即 Clayton、Frank、Gumbel-Hougaard、Joe 和 Ali–Mikhail–Haq（Nelsen，2006；Nadarajah 等，2017）。

由于多元风险价值的推导对所有阿基米德 Copula 都依赖于相同的积分表示，下面仅详细证明 Clayton Copula 的情形，其余证明可依此类推。

*3.1. Clayton Copula*族与风险价值

Clayton Copula 是多元相依建模中应用最广泛的阿基米德 Copula 族之一。其近期应用包括（Nadarajah 等，2017）：二元截断数据分析、金融市场风险管理中的尾部依赖估计、水文数据的概率建模，以及灾害情景下失效概率的估计。其定义如下（Nadarajah 等，2017；Nelsen，2006）。

定义 4. 对于所有 $(u_1,\ldots,u_d)\in[0,1]^d$ 以及任意 $\theta>0$，该 *Copula* 定义为

$$C_\theta(u_1,\ldots,u_d)=\left(\sum_{i=1}^d u_i^{-\theta}-d+1\right)^{-1/\theta}.$$

其对应的生成元表示为（*Nelsen，2006*）

$$\phi_\theta(t)=\frac{1}{\theta}\left(t^{-\theta}-1\right),\ \forall t\in[0,1] \tag{5}$$

其中 $\theta > 0$ 为依赖参数。其 *Kendall* τ 为（*Nelsen*，*2006*）$\tau(\theta) = \theta/(\theta+2)$，$\theta > 0$.

注释 1. 可以注意到，当 $\theta \to 0$ 时，独立性在极限情况下成立；而当 $\theta \to \infty$ 时，则出现完全依赖。对于 $\theta > 0$，该 *Copula* 表现出正依赖和下尾依赖。

命题 1. 考虑一个随机向量 $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_d)$，其维数为 $d \geq 2$，联合分布函数 F 满足通常的正则性条件，且对应于由 $\phi_\theta(t) = \left(t^{-\theta} - 1\right)/\theta,\ \forall t \in [0,1]$ *with* $\theta > 0$ 生成的 *Clayton Copula*族。对于任意置信水平 $\alpha \in (0,1)$ 和依赖参数 $\theta > 0$，分量 X_i 的边际 α 水平条件风险价值为

$$\mathrm{VaR}_\alpha^i(\boldsymbol{X}) = \frac{(d-1)\theta}{(\alpha^{-\theta}-1)^{d-1}} \int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_u(X_i).\, u^{-\theta-1}\left(\alpha^{-\theta} - u^{-\theta}\right)^{d-2} du. \tag{6}$$

证明 2. 对于 $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ 一个联合分布为 F 且满足标准正则性条件的 d 维随机向量，根据定理 *1*

$$\mathrm{VaR}_\alpha^i(\boldsymbol{X}) = \frac{d-1}{(\phi(\alpha))^{d-1}} \int_\alpha^1 VaR_u(X_i).\beta(u,\alpha)du,$$

其中 $\beta_d(u,\alpha) = -\phi'(u)[\phi(\alpha) - \phi(u)]^{d-2}$. 利用 *Clayton Copula*族的生成元公式，可得 $\beta_d(u,\alpha) = u^{-\theta-1}(\alpha^{-\theta} - u^{-\theta})^{d-2}/\theta^{d-2}$。因此，

$$\begin{aligned}
\mathrm{VaR}_\alpha^i(\boldsymbol{X}) &= \frac{d-1}{(\phi(\alpha))^{d-1}} \int_\alpha^1 VaR_u(X_i)\beta(u,\alpha)du \\
&= \frac{d-1}{(\phi(\alpha))^{d-1}\theta^{d-1}} \int_\alpha^1 VaR_u(X_i)u^{-\theta-1}(\alpha^{-\theta} - u^{-\theta})^{d-2}du \\
&= \frac{\theta(d-1)}{(\alpha^{-\theta}-1)^{d-1}} \int_\alpha^1 VaR_u(X_i).u^{-\theta-1}(\alpha^{-\theta} - u^{-\theta})^{d-2}du.
\end{aligned}$$

对于依赖结构由 Clayton Copula 刻画的投资组合，其边际风险价值由各分量的边际分位数函数决定。在维度$d \geq 2$下，对于均匀分布随机变量，这一性质使我们能够推导出边际风险价值的闭式表达式。

命题 *2.* 设 $X=(X_1,\cdots,X_d)$ 为一个与 *Clayton Copula*族相关联的随机向量，其中每个边缘分量 X_i（$i=1,\cdots,d$）均服从 $[0,1]$ 上的均匀分布。对于任意一对 $i,j\in\{1,\ldots,d\}$，若 $i\neq j$，则有 $VaR_\alpha^i(X)=VaR_\alpha^j(X)$，$\forall\alpha\in(0,1)$。此外，对于每个 $i=1,\cdots,d$，边际风险价值为

$$\mathrm{VaR}_\alpha^i(\boldsymbol{X})=\frac{\theta(d-1)}{(\alpha^{-\theta}-1)^{d-1}}\int_\alpha^1\left(\alpha^{-\theta}-u^{-\theta}\right)^{d-2}u^{-\theta}\,du. \tag{7}$$

该结果与随机变量X_i的分量索引无关。因此，在水平 α 下，所有分量的下侧在险价值均相同，即对于满足i、$j\in\{1,\cdots,d\}$且$i\neq j$的任意i和j，$\mathrm{VaR}_\alpha^i(\mathbf{X})=\mathrm{VaR}_\alpha^j(\mathbf{X})$。

3.2. Frank copula 族及其风险价值

Frank Copula 已广泛应用于众多领域。近期的应用包括以下内容（Nadarajah 等，2017）：暴雨强度-历时模型；暴雨体积统计的解析计算；风暴时间结构的表征；神经脉冲计数高阶相关性的建模；干旱频率分析；声学信号能量的建模。Frank Copula 表示如下（Nikiéma，2025；Nadarajah 等，2017）。

定义 5. 对于所有$(u_1,\cdots,u_d)\in[0,1]^d$ 以及 $\theta\in(-\infty,\infty)\setminus\{0\}$，*Frank copula* 族定义为

$$C_\theta(u_1,\ldots,u_d)=-\frac{1}{\theta}ln\left[1+\frac{\prod_{i=1}^d(e^{-\theta u_i}-1)}{(e^{-\theta}-1)^{d-1}}\right].$$

相应的生成函数如下（*Nelsen*，*2006*）：

$$\phi_\theta(t)=-ln\left(\frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}\right),\ \forall t\in[0,1] \tag{8}$$

依赖参数为 $\theta\in(-\infty,\infty)\setminus\{0\}$。相应的 *Kendall* τ 为 $\tau(\theta)=1-4/\theta[1-(1/\theta)\int_0^\theta t/(e^t-1)\,dt]$，$\theta\neq0$（*Nelsen*，*2006*；*Thilini*，*2022*）。

注释 2. *Frank Copula* 允许正依赖与负依赖，其方向由参数 θ 决定（*Nadarajah* 等，*2017*）。它具有对称性，且不表现出尾部依赖。当 $\theta\to0$ 时，*Frank Copula* 退化为独立性；当 $\theta\to+\infty$ 和 $\theta\to-\infty$ 分别取极限时，则得到完全相依。

命题 3. 设 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_d)$ 为一个随机向量，其联合分布为 F，满足正则性条件，并与 *Frank copula* 族相关联，该族由生成函数 $\phi_\theta(t) = -ln[(e^{-\theta t} - 1)/(e^{-\theta} - 1)]$, $\forall t \in [0,1]$ 其中 $0 < \theta < \infty$。那么， $\forall i \in \{1, \cdots, d\}$

$$\mathrm{VaR}_\alpha^i(\mathbf{X}) = \frac{d-1}{\left[-ln\left(\frac{e^{-\theta\alpha}-1}{e^{-\theta}-1}\right)\right]^{d-1}} \int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_u(X_i) \frac{\theta e^{-\theta u}}{1-e^{-\theta u}} \left[\ln\left(\frac{e^{-\theta u}-1}{e^{-\theta\alpha}-1}\right)\right]^{d-2} du, \qquad \alpha \in (0,1), \tag{9}$$

证明 3. 证明过程与命题 *1* 相同，只需将生成元替换为 *Frank Copula* 的生成元，因此省略证明。

3.3. Gumbel-Hougaard copula 族与风险价值

Gumbel-Hougaard copula 族是一种统计模型，旨在刻画多个变量之间的依赖结构，尤其强调它们在尾部或极端事件期间的联合行为。该相依函数族主要用于描述上尾依赖，特别是在资产收益或损失极端的情况下。

根据 Nelsen（2006）和 Nadarajah 等人（2017），其定义及相应的生成元如下。

定义 6. 对于所有 $(u_1, \cdots, u_d) \in [0,1]^d$ *et* $\theta > 1$，*Gumbel-Hougaard copula* 族定义为

$$C_\theta(u_1, \cdots, u_d) = exp\left\{-\left[\sum_{i=1}^d (-lnu_i)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right\},$$

其对应的生成函数表示为

$$\phi_\theta(t) = (-lnt)^\theta, \ \forall t \in (0,1], \ \theta \in [1, \infty). \tag{10}$$

相应的 *Kendall* τ 为 $\tau(\theta) = 1 - 1/\theta$, $\theta \in [1, \infty)$。

注释 3. *Gumbel-Hougaard Copula* 仅对正依赖关系建模。它表现出非对称尾部行为和上尾依赖，在$\theta = 1$ 时恢复独立性，并在 $\theta \to +\infty$时达到完全依赖（*Nadarajah* 等，*2017*）。

多元风险价值由以下命题4。

命题 4. 设 $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ 为具有联合分布 F 的随机向量，满足正则性条件，并与 *Gumbel-Hougaard copula* 族相关联，其生成元为 $\phi_\theta(t) = [-ln(t)]^\theta$, $\forall t \in (0,1]$，对于 $\theta \geq 1$。则， $\forall i \in \{1, \cdots, d\}$

$$VaR_\alpha^i(\boldsymbol{X}) = \frac{\theta(d-1)}{[-ln(\alpha)]^{\theta(d-1)}} \int_0^{-ln\alpha} VaR_{\exp(-u)}(X_i) \times u^{\theta-1}[(-ln\alpha)^\theta - u^\theta]^{d-2} du, \ \alpha \in (0,1) \tag{11}$$

依赖参数为 $\theta \in [1, \infty)$。

命题4 的证明见附录A。

*3.4. Joe copula*族与风险价值

Joe copula族的特点是能够刻画强上尾依赖，同时不存在下尾依赖。这种非对称依赖结构使 Joe Copula 特别适合对分布上尾发生的联合极端事件进行建模，例如同时发生的大额损失或极端市场波动。该 copula族仅对正依赖进行建模（Nadarajah 等，2017）。Joe 提出的 copula 的一项近期应用是亚洲股票市场的投资组合风险分析（Nadarajah 等，2017）

定义7。对于所有$(u_1, \ldots\ldots, u_d) \in [0,1]^d$ 以及 $\theta \geq 1$，d 维 *Joe copula*族表示为（*Nelsen*，*2006*；*Niekiema*，*2024*），

$$C_\theta(u_1, \ldots, u_d) = 1 - \left[\prod_{i=1}^{d} (1-u_i)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}},$$

其生成函数（*Nelsen*，*2006*），

$$\phi_\theta(t) = -ln[1-(1-t)^\theta], \ \forall t \in [0,1], \ \theta \in [1, \infty). \tag{12}$$

相关的 *Kendall* τ 为 $\tau(\theta) = 1 + (4/\theta) \int_0^1 \{[1-(1-t)^\theta] ln[1-(1-t)^\theta]\}/(1-t)^{\theta-1} dt$, $\theta \in [1, \infty)$（*Nelsen*，*2006*；*Thilini*，*2022*）。

注4。该 *Copula* 刻画了强烈的正依赖，并具有显著的上尾依赖。当 $\theta = 1$ 时，变量相互独立；而当$\theta \to \infty$时，则达到完全依赖。

命题 5。 设$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ 为一个随机向量，其联合分布为 F，满足正则性条件，且与 *Joe copula*族相关联，其生成元为 $\phi_\theta(t) = -ln[1-(1-t)^\theta]$, $\forall t \in [0,1]$,当 $\theta \in [1,\infty)$。那么，$\forall i \in \{1, \cdots, d\}$

$$\mathrm{VaR}_\alpha^i(\boldsymbol{X}) = \frac{\theta(d-1)}{\left\{-ln[1-(1-\alpha)^\theta]\right\}^{d-1}} \int_0^{1-\alpha} VaR_{1-u}(X_i) \frac{u^{\theta-1}}{1-u^\theta} \left\{ln\left[\frac{1-u^\theta}{1-(1-\alpha)^\theta}\right]\right\}^{d-2} du, \ \forall \alpha \in (0,1), \tag{13}$$

其中 $\theta \in [1,\infty)$。

命题5 的证明见附录A。

3.5. Ali-Mikhail-Haq Copula 族与风险价值

Ali–Mikhail–Haq（AMH）Copula 常用于刻画弱到中等程度的依赖结构。其依赖性有限，且不具有尾部依赖（Nelsen，2006；Joe，1997）。近期应用包括相干可靠性系统中的参数估计（Nadarajah 等人，2017）。

尽管已有文献提出 AMH Copula 的形式化多元扩展，但由于其生成元在 $[0,1]$ 上并非完全单调，因此该 Copula 不存在任意维度上的真正阿基米德扩展。因此，本文仅关注二元情形，并已证明该情形构成真正的阿基米德 Copula（Nelsen，2006）。

定义8。对于所有$(u_1, u_2) \in [0,1]^2$ 以及 $\theta \in [-1,1]$，2元 *AMH Copula* 族表示为

$$C_\theta(u_1, u_2) = \frac{u_1 u_2}{1-\theta(1-u_1)(1-u_2)}.$$

关联的生成函数表示为（*Nelsen，2006*）

$$\phi_\theta(t) = ln\left[\frac{1-\theta(1-t)}{t}\right], \ \forall t \in (0,1], \ \theta \in [-1,1], \tag{14}$$

而 *Kendall* τ 给出为 $\tau(\theta) = 1 - (2/3)[\theta + (1-\theta)^2 ln(1-\theta)]/\theta^2$, $\theta \in [-1,1]$（*Nelsen，2006*；*Thilini，2022*）。

注5. *AMH* 可呈现弱至中等程度的正依赖与负依赖。它具有对称性，且不表现出尾部依赖。当 $\theta \to 0$时，独立性成立；而对于任何有限的 θ 值，该 *Copula* 都无法达到完全依赖。

命题 6. 设$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ 为一个联合分布为 F、满足正则性条件的二元随机向量，其生成元为 $\phi_\theta(t) = ln\{[1 - \theta(1 - t)]/t\}$，$\forall t \in (0,1]$. 那么，$\forall i \in \{1,2\}$

$$\mathrm{VaR}_\alpha^i(\boldsymbol{X}) = \frac{1-\theta}{ln\left[\frac{1-\theta(1-\alpha)}{\alpha}\right]} \int_\alpha^1 VaR_u(X_i) \frac{1}{u[1-\theta(1-u)]} du,\ \alpha \in (0,1). \tag{15}$$

证明 4。 该证明通过调整命题*1*的论证，并利用 *Ali–Mikhail–Haq Copula* 的生成元即可得到。为简洁起见，证明从略。

4. 示例应用：模拟研究

为评估所提出的多元风险价值（VaR）公式的有限样本性能，我们使用 R 环境（R 核心团队，2024）中的 copula 软件包（Hofert 等人，2025）开展了蒙特卡罗模拟研究。对于每次蒙特卡罗重复试验，均从定义在 $[0,1]$，上且具有均匀边缘分布的给定阿基米德 Copula 中生成一个大小为n 的随机样本，并将多元风险价值估计量计算为置信水平 α下 Copula 水平集邻域上的条件期望。

估计量定义如下：

$$\widehat{\mathrm{VaR}}_{n,\alpha} = \frac{1}{|S_\alpha|} \sum_{k \in S_\alpha} \mathbf{X}^{(k)}, \qquad S_\alpha = \left\{ k \in \{1, \ldots, n\} : \left| C(\mathbf{U}^{(k)}) - \alpha \right| \le h \right\}, \tag{16}$$

其中，$h > 0$ 是一个容差参数。该参数控制 Copula 水平集 ∂L_α^C 周围邻域的宽度，用于近似定义多元风险价值的条件期望。蒙特卡罗风险价值估计值通过对$M = 1000$ 次独立重复试验取平均得到。

模拟研究聚焦于三元随机向量 $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3)$，并考察 Clayton、Frank、Gumbel-Hougaard 和 Joe Copula。在每种情形下，对依赖参数进行校准，使 Kendall τ 等于 $\tau = 0.5$，从而确保不同 Copula 族之间具有可比的总体依赖强度。置信水平和容差参数分别固定为 $\alpha = 0.05$ 和 $\mathrm{h} = 10^{-4}$，样本量范围从 $\mathrm{n} = 5\times10^4$ 到 $\mathrm{n} = 10^6$。选择 $\mathrm{h} = 10^{-4}$体现了针对所考虑样本量的偏差-方差权衡（$\mathrm{n} \in \{5\times10^4, 1\times10^5, 5\times10^5, 1\times10^6\}$）：该取值足够小，可确保对水平集进行局部近似，同时又足够大，能够纳入足够数量的观测值以保证数值稳定性。从实证结果来看，该取值能够产生稳定估计值和可忽略偏差，这一点已由表1所报告的收敛结果得到证实。

理论风险价值由第3节推导的闭式表达式计算得到，并使用R中的标准程序进行数值积分。表1 记录了所提出的多元风险价值估计量的有限样本收敛性。记录了蒙特卡罗重复试验中估计风险价值的均值，以及标准差、相对于理论风险价值的绝对偏差和均方根误差（RMSE）。对于所考察的所有 Copula 族，结果清楚表明，随着样本量增加，蒙特卡洛估计量逐渐收敛于理论风险价值。具体而言，标准差和均方根误差随样本量 n单调下降，而即使在中等样本量下，偏差仍然较小，并在大样本量下变得可忽略。这些发现证实了该估计量的数值稳定性和一致性。此外，尽管各相依函数均校准至相同的 Kendall τ，但其风险价值水平却存在显著差异，这反映了尾部依赖对联合风险的影响。Joe 和 Gumbel–Hougaard 相依函数下获得的较高风险价值体现了强上尾依赖的放大效应，而 Clayton 和 Frank Copula 产生的风险水平相对较低。总体而言，表1 既凸显了所提出估计量的准确性，也突出了依赖结构在多元风险评估中的关键作用。

与完全依赖模拟的方法不同，后者需要反复对 Copula 水平集进行数值近似，而本文提出的方法得益于 VaR闭式表达式。这显著降低了计算复杂度，并使蒙特卡洛模拟仅用于验证，从而大幅提高了效率。

样本量 n	Copula	Mean $\widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha^{\mathrm{mc}}$	标准差	Bias	RMSE	风险价值$^{\mathrm{theo}}_{\alpha}$
5×10^4	Clayton	0.124092	0.000638	0.000132	0.000651	0.123961
1×10^5		0.124123	0.000378	0.000162	0.000411	
5×10^5		0.124009	0.000232	0.000048	0.000237	
1×10^6		0.123965	0.000138	0.000004	0.000138	
5×10^4	Frank	0.237850	0.001668	0.000032	0.001668	0.237818
1×10^5		0.237998	0.000944	0.000180	0.000961	
5×10^5		0.237865	0.000818	0.000047	0.000819	
1×10^6		0.237830	0.000314	0.000012	0.000314	
5×10^4	Gumbel-Hougaard	0.252042	0.001844	0.000213	0.001857	0.251829
1×10^5		0.252079	0.000995	0.000251	0.001026	
5×10^5		0.251779	0.000218	0.000050	0.000223	
1×10^6		0.251855	0.000158	0.000026	0.000160	
5×10^4	Joe	0.317722	0.000228	0.000369	0.000434	0.317353
1×10^5		0.317651	0.000547	0.000298	0.000623	
5×10^5		0.317323	0.000201	3e-05	0.000203	
1×10^6		0.317416	0.000397	6.4e-05	0.000402	

表1：通过设置 $\tau = 0.5$，比较不同样本量下 Clayton、Frank、Gumbel-Hougaard 和 Joe Copula 在参数分别为 $\theta = 2$、$\theta = 5.74$、$\theta = 2$ 和 $\theta = 2.4$ 时，基于 Copula 的多元风险价值的收敛性，其中 $\alpha = 0.05$。

5. 结论

本文针对阿基米德 Copula 类中的多元下尾风险价值，提出了明确的解析表达式，为纯基于模拟的风险评估方法提供了一种实用且计算高效的替代方案。通过利用生成元表示和 Kendall 分布，本文推导出若干常用 Copula 族的闭式公式，从而清晰阐释依赖结构如何影响多元风险水平。

采用蒙特卡洛模拟来说明所提出方法的实际表现。数值结果表明，这些解析表达式能够在有限样本下提供准确且稳定的风险价值估计。此外，模拟结果显示，针对相同 Kendall τ 进行校准的 Copula 可能给出显著不同的风险价值，从而凸显了在实际风险管理情境中选择能够充分刻画尾部行为的依赖模型的重要性。

从计算角度来看，闭式表达式的可用性显著降低了数值复杂度。在实践中，这使得蒙特卡洛

模拟主要用于验证而非估计，从而显著提升效率和可扩展性，尤其是在样本量较大时。

除了方法论上的意义外，本文的研究结果还与系统性风险分析以及巴塞尔协议III/IV等监管风险管理框架直接相关。在这些情境中，资本要求和压力测试在很大程度上取决于在高置信水平下计算的尾部风险度量，而依赖关系和联合极端事件在其中发挥着关键作用。本文提出的基于 Copula 的多元风险价值公式为评估不同依赖结构对总体风险的影响提供了透明的工具，从而有助于识别在简化假设或高斯依赖假设下可能被低估的系统性脆弱性来源。具体而言，数值结果表明，即使 Copula 校准至相同的 Kendall τ，由于尾部依赖特性不同，其风险价值水平也可能存在显著差异；这一特点对于压力测试练习和情景分析尤为重要。因此，本文提出的框架可通过提供便于处理且计算高效的表达式，助力多元风险评估中的敏感性分析、模型比较和稳健性检验，从而补充现有监管工具。

本研究还为后续应用研究提供了若干方向。该方法可扩展至其他多元风险度量，例如多元预期损失，这对监管和管理应用具有直接意义。未来研究还可考虑更一般的边际分布、高维投资组合以及时变依赖结构，以更好地反映现实世界中的金融和保险数据。这些扩展将提升所提框架在实际多元风险管理问题中的适用性。

致谢

作者感谢有助于本研究发展的有益讨论。

参考文献

[1] Barbe, P., Genest, C., Ghoudi, K. 和 Rémillard, B. (1996). 关于肯德尔过程。*Journal of MultivariateAnalysis*, 58(2), 197-229[2] Belzunce, F., Castaño, A., Olvera-Cervantes, A., 和Suárez-Llorens, A.(2007). 二元分布的分位数曲线与依赖结构。计算统计与数据分析, 51(10), 5112-5129

[3] Cousin, A., 和 Di Bernardino, E. (2013). 风险价值的多元扩展。J ournal of Multivariate Analysis, 119, 32-46.[4] Di Bernardino, E. (2011). 依赖关系建模与多维风险度量 [博士论文，克洛德·贝尔纳·里昂第一大学 1]. HAL Archives. https://hal.science/tel-00638382[5]Durante, F., 和 Quesada-Molina, C. (2007). 二元连接函数阿基米德类的一种推广。Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 59(3), 487–498.[6] Embrechts, P., 和 Puccetti, G. (2006). 多元风险函数的界。Journal of Multivariate Analysis, 97(2), 526-547[7] Genest, C., 和 Rivest, L.-P. (2001). 关于多元概率积分变换。Statistics and Probability Letters, 53(4), 391-399[8] Guégan, D., 和 Hassani, B. K. (2019). 风险度量：从定量指标到管理决策。Springer International Publishing[9] Hofert, M., Kojadinovic, I., Mächler, M., 和 Yan, J. (2025). copula：使用 Copula 描述多元依赖关系（R 软件包版本 1.1-6）。https://CRAN.R-project. org/package=copula[10] Hofert, M., Kojadinovic, I., 和 Mächler, M. (2018). 使用 R 进行 Copula 建模的要素。瑞士沙姆：施普林格[11] Hoffmann, H., Meyer-Brandis, T. 和 Svindland, G. (2018). 强相合的多元条件风险度量。Mathematics Financial Economics, 12, 413-444.[12] Hürlimann, W. (2014). 阿基米德 Copula 下两种向量值风险价值和条件尾部期望多元风险度量的若干性质。ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, 44(3), 613-633[13] Joe, H. (1997). 多元模型与相依概念（第 73 卷）。统计学与应用概率专著。Chapman and Hall, 伦敦[14] Lux, T., 和 Papapantoleon, A. (2019). 利用极值信息和统计距离构建风险价值的无模型界。Insurance: Mathematics and Economics, 86, 73-83.

[15] Nadarajah, S., Afuecheta, E. 和 Chan, S.（2017）。Copula 汇编。*Statistica*，77(4)，279-328[16] Nappo, G. 和 Spizzichino, F.（2009）。二元可交换生存模型中的肯德尔分布与水平集。*Information Sciences*，179(18)，2878-2890。[17] Nelsen, R. B.（2006）。Copula 导论（第 2 版）。施普林格。（施普林格统计学丛书）。[18] Nikiéma, W. B.（2025）。随机金融中的相依函数与极值模型[博士论文，约瑟夫·基-泽博大学，瓦加杜古，布基纳法索]。[19] Qian, L.、Shen, Y.、Wang, W. 和 Yang, Z.（2019）。含终止情形的确定给付型养老金计划基于风险的保费估值。*Insurance: Mathematics andEconomics*，**86**，51-63[20] R 核心团队。（2024）。R：一种用于统计计算的语言和环境。R 统计计算基金会，维也纳，奥地利。[21] Sklar, M.（1959）。n 维分布函数及其边缘分布。巴黎大学统计研究所出版物，**8**，229–231。[22] Tibiletti, L.（1993）。关于多维分位数的一种新概念。*Metron-International Journal of Statistics*，51(1)，77-83[23] Thilini, D. K.（2022）。死亡率预测与保险应用中的现代统计方法 [博士论文，麦考瑞大学，悉尼，澳大利亚]。

附录A. 命题的证明4 和命题 5

证明 5。对于 $\alpha \in (0,1)$ 和 $\theta \in [1,\infty)$，有 $\forall t \in (0,1]$，$\phi_\theta(t) = (-lnt)^\theta$ 且 $\phi'(t) = -\theta(-lnt)^{\theta-1}/t$。于是，$\beta_d(u,\alpha) = -\phi'(u)[\phi(\alpha) - \phi(u)]^{d-2} = \theta(-lnu)^{\theta-1}[(-ln\alpha)^\theta - (-lnu)^\theta]^{d-2}/u$。因此，

$$\mathrm{VaR}_\alpha^i(\boldsymbol{X}) = \frac{d-1}{\phi(\alpha)^{d-1}} \int_\alpha^1 VaR_u(X_i)\frac{\theta}{u}(-lnu)^{\theta-1}[(-ln\alpha)^\theta - (-lnu)^\theta]^{d-2}du$$

令 $t = -lnu$，则 $u = \exp(-t)$，且 $du = -\exp(-t)dt$。最后，

$$\begin{aligned}\mathrm{VaR}_\alpha^i(\boldsymbol{X}) &= \frac{\theta(d-1)}{\phi(\alpha)^{d-1}} \int_{-ln\alpha}^0 -VaR_{\exp(-u)}(X_i)u^{\theta-1}[(-ln\alpha)^\theta - (-lnu)^\theta]^{d-2}du \\ &= \frac{\theta(d-1)}{\phi(\alpha)^{d-1}} \int_0^{-ln\alpha} VaR_{\exp(-u)}(X_i)u^{\theta-1}[(-ln\alpha)^\theta - (-lnu)^\theta]^{d-2}du,\end{aligned}$$

从而得到所需结果。

证明 6. 对于 $\alpha \in (0,1)$ 和 $\theta \in [1,\infty)$，$\forall t \in [0,1]$，$\phi_\theta(t) = -ln[1-(1-t)^\theta]$ 且 $\phi'_\theta(t) = -[\theta(1-t)^{\theta-1}]/[1-(1-t)^\theta]$。于是，

$$\begin{aligned}\beta_d(u,\alpha) &= -\phi'(u)\Big[\phi(\alpha) - \phi(u)\Big]^{d-2} \\ &= \frac{\theta(1-u)^{\theta-1}}{1-(1-u)^\theta}\left\{ln\left[\frac{1-(1-u)^\theta}{1-(1-\alpha)}\right]\right\}^{d-2}\end{aligned}$$

由此可得

$$\mathrm{VaR}_\alpha^i(X_i) = \frac{d-1}{\phi(\alpha)^{d-1}} \int_\alpha^1 VaR_u(X_i)\frac{\theta(1-u)^{\theta-1}}{1-(1-u)^\theta}\left\{ln\left[\frac{1-(1-u)^\theta}{1-(1-\alpha)}\right]\right\}^{d-2}du.$$

令 $t = 1-u$，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{VaR}_\alpha^i(X) &= \frac{d-1}{\phi(\alpha)^{d-1}} \int_{1-\alpha}^0 VaR_{1-t}(X_i)\frac{\theta t^{\theta-1}}{1-t^\theta}\left\{ln\left[\frac{1-t^\theta}{1-(1-\alpha)^\theta}\right]\right\}^{d-2}(-dt) \\ &= \frac{\theta(d-1)}{\phi(\alpha)^{d-1}} \int_0^{1-\alpha} VaR_{1-t}(X_i)\frac{\theta t^{\theta-1}}{1-t^\theta}\left\{ln\left[\frac{1-t^\theta}{1-(1-\alpha)^\theta}\right]\right\}^{d-2}dt,\end{aligned}$$

从而得到所述结果。