arXiv:2602.01248v1 [math.GM] 1 Feb 2026

由原始马尔可夫循环构造黎曼 Ξ-函数 I：一种典范构造

DOUGLAS F. WATSON

Abstract. 从离散环上的有限、局部、可逆马尔可夫动力学出发，我们构造一个缩放极限重整化迹核，它具有精确的 θ 级数表示。该构造完全是阿基米德的，不使用欧拉积、素数或算术谱输入。由此极限，我们定义一个对数核 Φ，并证明它属于 P´olya 频率类 PF_∞，从而依据 Schoenberg–Edrei–Karlin 分类，得到一个典范的 Laguerre–P´olya 函数 Ψ。此外，我们独立引入一个阿基米德完备化算子，并证明在自对偶归一化下，完备核与经典θ核重合，其梅林变换即为黎曼 Ξ-函数。我们指出一个尚待解决的分析问题，它将Ψ与 Ξ(2·)联系起来。

1. Introduction

在数学的若干基础性发展脉络中，一个共同目标是：通过最少的局部原则和普适的对称性要求，而非借助特定表述，重构高层次对象。在当前设定下，我们探讨：通常由算术数据引入的解析结构，能否仅凭局部性、可逆性、对称性和尺度变换来确定。我们在此意义上使用“原始”一词：输入仅为有限的局部动力学，而输出则由在尺度极限中保留下来的不变性决定。更具体地说，本文旨在表明，两个经典解析对象可以由原始输入规范地产生：有限、局部、可逆的离散环上的马尔可夫动力学，其引入不涉及素数、欧拉积或谱／算术数据。

2020 数学主题分类。 60J27,33E05, 42A38, 26C10,15B48.关键词与短语。 可逆马尔可夫链，环上随机游走，热核，迹核，θ函数，梅林变换，黎曼 Xi 函数，全正性，P´olya 频率函数，Laguerre–P´olya 类，Schoenberg–Edrei–Karlin 分类。

第一个输出是一个全正性对象：一个对数核Φ，其双边拉普拉斯变换具有规范的 Schoenberg– Edrei–Karlin 因式分解 [13, 4, 8]。等价地，其倒数变换是一个 Laguerre–P´olya 整函数 Ψ，因此只有实零点。第二个输出是一个阿基米德完备化对象：一个显式的完备化算子 $\mathcal{A}$，它在规范化下恢复梅林自对偶性，产生一个完备核，其梅林变换与经典黎曼 Ξ-函数一致（在自然定义域内）。

这些构造在逻辑上彼此独立，但共享相同的原始来源，并由此引出一个自然的恒等识别问题，而本文对此暂不作解答（见第 9 节）：在固定归一化之后，拉盖尔–P´ólya 数据 Ψ 在多大程度上可以与 Ξ-函数相识别?

若干经典方法着重于将 Ξ 表示为积分变换。可以通过西塔函数的梅林变换、快速衰减核的傅里叶变换，或将零点与谱数据联系起来的迹公式[14, 1]来表达 Ξ。这些表示凸显了一个反复出现的主题：Ξ 的解析性质往往反映了底层核的结构特征。特别是，核层面的正性与对称性往往会传递为对相关变换的强约束。

热核与西塔级数为阐述这些思想提供了自然的语言[2, 15]。实数轴上热方程的基本解是高斯函数，其周期化会产生经典θ函数。泊松求和精确地表达了空间周期化与频率局域化之间的对偶性。这些机制具有稳健性，并不依赖算术输入。只要研究具有离散对称性的空间上的扩散过程，就会出现这些机制。在解析数论中，西塔级数作为生成函数出现，用于编码谱数据或格点数据，并且常常充当局部与整体描述之间的中介。

在本研究中，热核发挥着核心的概念性作用。它们并非作为应用于 $\zeta(s)$ 的解析工具出现，而是源自初等的局部动力学。核心思想是，长时间扩散捕捉普适行为，而有限体积效应则引入离散结构。将这些效应通过精确的提升与周期化恒等式结合起来，便可自然地得到西塔级数。这一观点将θ函数置于更广泛的概率与几何背景中，使其体现一般原理，而非特殊构造。

另一条背景脉络来自全正性理论[11,8, 6]。全正性起源于 Schoenberg 的研究，后由 Karlin 等人加以深入发展。该理论研究所有阶子式均非负的核，这一性质意味着强烈的变差递减现象与刚性现象。在这一理论中，无穷阶 P´olya 频率函数具有特殊地位。按照本文采用的形式（Schoenberg–Edrei–Karlin），PF_∞ 函数的双边拉普拉斯变换可亚纯延拓，其倒数是 Laguerre–P´olya 整函数。Laguerre–P´olya 类[10, 12]中的整函数是仅含实零点的多项式的极限，因此也仅有实零点。

与这一观点密切相关的是整函数的 Hermite–Biehler 理论[9,3] ，以及它在 de Branges 空间[3]中的现代表述。Hermite–Biehler 理论提供了判据，可依据相关核的正性性质或上半平面中的解析不等式，确保整函数的所有零点都位于一条直线上，通常是实轴。de Branges 的研究表明，这些思想可以纳入希尔伯特空间框架，并由此得到强有力的分类定理。尽管本文并未依赖 de Branges 空间[3], 的完整理论体系，但 Hermite–Biehler 视角阐明了为何核层面的正性会自然导出零点为实数的结论。

现在我们引入本文的核心对象，并陈述主要结果。

1.1. 原始动力学模型。对于每个整数 $N \geq 1$ ，我们考虑定义在离散环 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$上的连续时间可逆最近邻马尔可夫过程。该动力学由一组严格为正的电导 $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$指定，其中 a_j 与 j 和 $j+1$ 之间的无向边相关联（指标按模 N计算）。生成元 $\mathcal{L}_N$ 作用于函数 $f\colon \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ ，其定义为

$$(\mathcal{L}_N f)(j) = a_j\big(f(j+1)-f(j)\big) + a_{j-1}\big(f(j-1)-f(j)\big). \tag{1}$$

注 1.1（平移不变特例）。 本文仅讨论平移不变情形 $a_j \equiv a > 0$ （与 j 无关），此时 (1) 是在 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 上以跳跃率 a 运行的通常连续时间简单随机游走。在这种情况下，扩散标度极限由扩散常数为 $D = a$ 的一维热方程所支配，而在 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 上进行的傅里叶分析可完全显式地导出 θ 级数形式。对于一致椭圆周期环境或定量均匀化区域的推广，

也可以得到一致局部中心极限定理和相同的缩放极限；本文不探讨这些推广。

我们将 $p_t^{\mathrm{cyc}}(j,\ k)$ 记作相应的热核，将 $p_t^{\mathrm{cyc}}(j,\ k) = (e^{t\mathcal{L}_N}\mathbf{1}_{\{k\}})(j)$，并用 $D > 0$ 表示后来建立的高斯缩放极限中出现的宏观扩散常数。

如上所述，与有限动力学相关的热核的迹包含系统的全局信息，但也包含反映扩散行为的普适奇异项。这个奇异项与动力学的精细结构无关，只取决于宏观缩放。为提取真正具有结构性的内容，我们以规范的方式减去这一项。所得对象称为完备迹核。

定义 1.2（缩放极限完备迹核）。固定一个宏观长度 $L > 0$，并选择一个缩放参数 $s \to \infty$，使得$N = N(s)$，且满足 $N/s \to L$。定义缩放极限迹

$$K_L(t) := \lim_{s\to\infty} N(s)\, p_{s^2t}^{\mathrm{cyc}}(0,0), \qquad t > 0,$$

并定义（缩放极限）完备迹核

$$\widetilde{K}_L(t) := K_L(t) - \frac{L}{\sqrt{4\pi D t}}.$$

~当 L 固定时，我们省略下标，记为 K。

定义 1.3（阿基米德（半密度）完备化）。定义阿基米德归一化的（“半密度”）核为

$$\widetilde{K}_{\mathrm{sym}}(t) := t^{-1/2}\,\widetilde{K}(t), \qquad t > 0.$$

定义 1.2 中缩放极限的存在性，以及证明逐项取极限合理所需的基本控制估计，均可由下文列出的基本假设推出；为方便起见，我们在附录A中汇总相关的解析论证。

注 1.4（基本假设与缩放极限的存在性）.我们始终在如下情形下工作：对每个 $L > 0$ 和 $t > 0$，标度极限迹 $K_L(t)$均存在，且在$(0,\infty)$的紧子集上关于t 局部一致收敛。特别地，在注1.1的平移不变特化下，该极限可通过 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$上的傅里叶分析显式得到。在这些假设下，该极限具有定理 3.1所述的显式θ级数形式。解析交换（极限、求和、微分以及梅林/拉普拉斯积分）由附录A中记录的控制估计所保证。

除全正性输出（产生一个典范的Laguerre– P´olya函数）与阿基米德完备化输出（产生 Ξ的经典theta/梅林表示）之外，我们单独分离出一个仅余的解析识别问题：将Laguerre–P´olya数据 Ψ 与梅林侧函数 $\Xi(2\cdot)$ 联系起来，至多相差乘以一个无零点的整因子。我们将此视为一个未解决的“桥”问题，并在第 9 节中加以讨论。

定理1.5 (本原环的结构性结论)。 假设注记*1.4*中的基本假设成立，因此缩放极限核K_L 存在。则存在一个非负核 $\Phi \in L^1(\mathbb{R})$ ，满足：

(i) $\Phi \in \mathrm{PF}_\infty$；*(ii)* 其双边拉普拉斯变换 $\mathcal{B}\Phi$ 满足反射律$\mathcal{B}\Phi(s) = \mathcal{B}\Phi(\frac{1}{2} - s)$，且该关系在绝对收敛的公共定义域上成立；*(iii)* $\mathcal{B}\Phi$ 具有规范的 *Schoenberg–Edrei–Karlin*表示

$$\mathcal{B}\Phi(s) = \frac{E(s)}{\Psi(s)},$$

其中 Ψ 属于 *Laguerre–P´olya* 类，因此只有实零点。

定理1.6 （阿基米德梅林变换识别）。 在第 *3* 节确定的自对偶~尺度下，阿基米德完备核 $K_{\mathrm{arch}} := \mathcal{A}(K_L - 1)$的梅林变换为

$$F_{\mathrm{arch}}(z) = \Xi(2z)$$

如定理 *6.7* 所示。

本文余下部分将构造核 Φ，证明定理 7.3，并明确梳理每一处逻辑衔接。

本文安排如下。第 3 节确定自对偶阿基米德规范化，并记录由此得到的标度极限迹的 θ 级数形式。第 4 节构造对数核 Φ，并确立其双边拉普拉斯变换的精确反射对称性。第5节证明全正性，并导出Schoenberg–Edrei–Karlin分解 $\mathcal{B}\Phi = E/\Psi$。第 6 节将阿基米德完备化梅林变换识别为 $\Xi(2\cdot)$，并记录阿基米德梅林变换识别为 $\Xi(2\cdot)$，同时指出尚待解决的识别问题（第 9 节）。第 7 节汇总论证并指出尚待处理的衔接问题。第 8 节给出全正性的详细证明。附录A汇集了关于逐项运算和边界项的分析论证。

1.2. 证明路线图。 论证分为四个步骤，每一步都从前一步的结果构造出一个新对象。为便于快速查阅，我们在表1中概述了这一流程。

Step	输入 $\to$ 输出	主要工具
1	局部动力学 $\to$theta级数核 $\widetilde{K}$	提升/周期化 + ULCLT* + 支配收敛
2	$\widetilde{K}$ $\to$自对偶归一化与阿基米德完备化 $\mathcal{A}$	雅可比反演 + 完备化算子
3	$\widetilde{K} \to \Phi \to (\Psi,\quad \mathcal{B}\Phi = E/\Psi)$	完整单调性 $\Rightarrow$ PF_∞ + Schoenberg–Edrei–Karlin
4	$\mathcal{A}(K_L - 1) \to \Theta \to \Xi$ (锚点)和开放桥接问题	阿基米德完成 + 梅林; 比较问题（展开）

TABLE 1. 证明路线图（步骤 1–4）。 *ULCLT = 一致局部中心极限定理。

证明依赖少量典范核和变换；表 2 对它们作了总结，并给出了精确定义和参考文献。

2. ACKNOWLEDGEMENTS

作者谨向 Krishnaswami Alladi、Tiziano Valentinu-uzzi 和 Kenneth Valpey 致谢，感谢他们提供的有益讨论。

3. SELF-DUAL ARCHIMEDEAN COMPLETION AND FORCED NORMALIZATION

本节确定了唯一的宏观归一化，在该归一化下，标度极限迹具有与经典完备ζ函数中的阿基米德因子相容的雅可比型反演对称性，并记录了步骤 2 中所用中心化核的相应对称性假设。关键在于，这一自对偶尺度是对缩放极限中单位的归一化（而非对底层离散动力学的调节）。

符号	含义
$K_L(t)$	标度极限迹（定义 1.2）。
$\widetilde{K}(t)$	重整化迹核（定理 3.1）。
$\widetilde{K}_{\mathrm{sym}}(t) = t^{-1/2}K(t)$	对称半密度核（定义 1.3）。
$\Phi(x)$	对数核 $\Phi(x) = e^{x/4}\widetilde{K}_{\mathrm{sym}}(e^x)$（方程式（10））。
$\mathcal{B}\Phi(s)$	双边拉普拉斯变换 $\mathcal{B}\Phi(s) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x)e^{-sx}\,dx$（在 $\Re(s) > -\frac{1}{4}$ 上）。
$\Psi(s)$	仅具有实零点的 Laguerre–Pólya 整函数在条带上满足 $\mathcal{B}\Phi(s) = \frac{E(s)}{\Psi(s)}$（定理 5.4）。
$F(z)$	Φ的傅里叶变换，$F(z) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x)e^{izx}\,dx$；边界值 $F(z) = \mathcal{B}\Phi(-iz)$，其中两侧收敛。
$\mathcal{A}$	阿基米德完备化算子（定义 3.5）。
$\widetilde{K}_{\mathrm{arch}}$	完备阿基米德核 $\widetilde{K}_{\mathrm{arch}} := \mathcal{A}(K_L - 1)$（定义 3.7）。
$F_{\mathrm{arch}}(z)$	梅林变换 $F_{\mathrm{arch}}(z) = \int_0^\infty \widetilde{K}_{\mathrm{arch}}(t)\, t^{\frac{1}{4}+iz}\frac{dt}{t}$；在自对偶尺度下，$F_{\mathrm{arch}}(z) = \Xi(2z)$（定理 6.7）。
$\Psi_c(z)$	居中 Laguerre–Pólya函数 $\Psi_c(z) := \Psi(\frac{1}{4} + iz)$。一个核心的未决问题是要将 Ψ_c 与梅林侧函数 $\Xi(2z)$ 进行比较，差异仅在于乘以一个无零整函数因子（第 9 节）。

TABLE 2. 贯穿证明所使用的记号。

3.1. 自对偶尺度由雅可比反演所决定。回顾一下，宏观长度 $L > 0$ 通过定义 1.2 中的缩放关系$N(s)/s \to L$ 引入。在基本假设下，标度极限迹具有如下 θ级数形式：

定理 3.1（标度极限迹的 θ 级数形式）。 对于$L > 0$ 和 $t > 0$,

$$K_L(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\Big(-\frac{4\pi^2 D}{L^2}\, n^2\, t\Big). \tag{2}$$

注 3.2（转换为 Jacobi 标准形式的无害重新参数化）。定义

$$t' := \frac{4\pi D}{L^2}\, t. \tag{3}$$

于是（2）变为

$$K_L(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t'} =: \vartheta(t'), \qquad \vartheta(u) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 u}.$$

因此，改变 L 相当于将连续时间变量按因子 $\frac{4\pi D}{L^2}$ 重新缩放，使指数项呈现 Jacobi 标准形式。

Jacobi θ函数的经典反演对称性为

$$\vartheta(u) = u^{-1/2}\,\vartheta(u^{-1}), \qquad u > 0. \tag{4}$$

我们的梅林变换将在 t变量中进行，因此自对偶性的自然含义是(4)起到 $t \mapsto t^{-1}$ 的作用（而不仅仅是辅助变量 t'的反演）。

引理 3.3（强制自对偶归一化）。 以下各项等价：

(a) 重新参数化(3) 对所有$t > 0$满足 $t'(t^{-1}) = (t'(t))^{-1}$ 。*(b)* 反演恒等式(4) 在 t变量中诱导出关于K_L 的反演对称性：

$$K_L(t) = t^{-1/2} K_L(t^{-1}), \qquad t > 0. \tag{5}$$

(c) 宏观尺度满足自对偶关系

$$L^2 = 4\pi D. \tag{6}$$

证明。 由(3)， $t'(t) = \frac{4\pi D}{L^2} t$，因此

$$t'(t^{-1}) = \frac{4\pi D}{L^2}\, t^{-1}, \qquad (t'(t))^{-1} = \frac{L^2}{4\pi D}\, t^{-1}.$$

因此，对所有 $t > 0$， $t'(t^{-1}) = (t'(t))^{-1}$ 成立当且仅当 $L^2 = 4\pi D$，从而证明(a)⇔(c)。

利用定理 3.1 和 (3)，我们有 $K_L(t) = \vartheta(t'(t))$。应用后得到 (4)

$$K_L(t) = \vartheta(t') = (t')^{-1/2}\vartheta((t')^{-1}) = (t')^{-1/2}\vartheta(t'(t^{-1})) = (t')^{-1/2} K_L(t^{-1}).$$

因此，对所有 $t>0$，$K_L(t)=t^{-1/2}K_L(t^{-1})$ 成立，当且仅当 $t'=t$，也就是说，当 $L^2=4\pi D$ 时成立。这证明了 (b)⇔(c)。□

注 3.4（解释）。 条件 (6) 是唯一的选择，因为在稍后使用的梅林变换中，雅可比反演[7] 对变量 $t\mapsto t^{-1}$ 起作用。等价地，这是唯一与 ζ 在梅林变换下的经典阿基米德完备化相匹配的选择。

3.2. **阿基米德完备化算子**。 现在记录能够消除普遍奇异部分的完备化算子。

定义 3.5（阿基米德完备化算子）。 对于足够光滑的函数 $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$，定义

$$(\mathcal{A}f)(t):=\frac{d}{dt}\Big(t^{3/2}\frac{d}{dt}f(t)\Big),\qquad t>0. \tag{7}$$

引理 3.6（完备化算子消去奇异部分）。 有 $\mathcal{A}(1)=0$ 以及 $\mathcal{A}(t^{-1/2})=0$。

证明。 对于常数函数，$\frac{d}{dt}1=0$。对于 $t^{-1/2}$，

$$\frac{d}{dt}t^{-1/2}=-\tfrac{1}{2}t^{-3/2},\qquad t^{3/2}\frac{d}{dt}t^{-1/2}=-\tfrac{1}{2},$$

其导数也为 0。 □

定义 3.7（阿基米德完备核）。 令 $K_L(t)$ 为标度极限迹。定义阿基米德完备核

$$\widetilde{K}_{\mathrm{arch}}(t):=\big(\mathcal{A}(K_L-1)\big)(t),\qquad t>0.$$

3.3.**在自对偶尺度下与经典Theta函数的对应**。

引理 3.8（阿基米德核与经典 Θ的精确对应）。 假设自对偶尺度 $L^2=4\pi D$。则对所有 $t>0$,

$$\widetilde{K}_{\mathrm{arch}}(t)=\Theta(t),$$

其中

$$\Theta(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(2\pi^2n^4t^{3/2}-3\pi n^2t^{1/2}\Big)e^{-\pi n^2t}.$$

证明。 由定理 3.1 与 (6)，在 $L^2=4\pi D$ 下我们有

$$K_L(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\pi n^2t}=:\vartheta(t).$$

因此 $K_L(t) - 1 = 2\sum_{n\geq 1} e^{-\pi n^2 t}$，并且逐项应用算子 $\mathcal{A} = \frac{d}{dt}\left(t^{3/2}\frac{d}{dt}\right)$（其合理性由对 $t > 0$ 的绝对收敛与局部一致收敛所保证），

$$\widetilde{K}_{\mathrm{arch}}(t) = \mathcal{A}(K_L - 1)(t) = 2\sum_{n\geq 1} \frac{d}{dt}\Big(t^{3/2}\frac{d}{dt}e^{-\pi n^2 t}\Big).$$

对于每个 $n \geq 1$,

$$\frac{d}{dt}\Big(t^{3/2}\frac{d}{dt}e^{-\pi n^2 t}\Big) = \Big(\pi^2 n^4 t^{3/2} - \tfrac{3}{2}\pi n^2 t^{1/2}\Big)e^{-\pi n^2 t},$$

再乘以 2，即得到所声称的 $\Theta(t)$ 级数。 □

注 3.9（在证明中的作用）。 引理 3.3 分离出了与稍后使用的梅林变量中的反演对称性相容的唯一宏观归一化。随后，引理 3.8 给出了精确的阿基米德核，其梅林变换将在第 6 节中被证明与黎曼 Ξ函数一致。

4. Logarithmic kernel and exact reflection symmetry

本节是将完备迹核的“自对偶性”对称性传递为傅里叶/拉普拉斯变换的“精确反射律”的“引擎”。这里的一切都是规范的，并且直接由以下两点证明：(i) 完备核的 θ 级数表示；(ii) 前一节确定的反演对称性。

全文中，我们均采用前文确立的自对偶归一化，因此半密度核满足精确的反演对称性

注4.1（步骤 2 的基本对称性假设）。本节证明自对偶尺度下标度极限迹 K_L 的雅可比反演对称性（见下文命题 3.3）。在步骤 2 中，我们~使用中心化核 K 及其半密度归一化$\widetilde{K}_{\mathrm{sym}}(t) = t^{-1/2}\widetilde{K}(t)$。在第 4 节的论证中，我们将使用以下关于 K_{sym}的精确反演对称性：

$$\widetilde{K}_{\mathrm{sym}}(t) = \widetilde{K}_{\mathrm{sym}}(t^{-1}), \qquad t > 0. \tag{8}$$

备注 4.2。 为清晰起见：命题 3.3 证明了模反演~对称性对 K_L成立。对中心化核 K 验证 (8)，是后续“桥接”分析首次介入之处；在本文中，我们将 (8) 记为步骤 2 的一项既定对称性假设，以使此后的所有推导在逻辑上均以此为前提。

where (Definition 1.3) $\widetilde{K}_{\mathrm{sym}}(t) := t^{-1/2}\widetilde{K}(t)$.

4.1. 对数核的定义与精确混合公式。 我们从（缩放极限）完备迹核的 θ 级数表示开始，现将其列于此处以便参考：

$$\widetilde{K}(t) = \frac{L}{\sqrt{4\pi D\,t}} \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \exp\!\left(-\frac{m^2L^2}{4D\,t}\right), \qquad t>0. \tag{9}$$

（其中， $D>0$ 是有效扩散常数， $L>0$ 是宏观循环长度。）

定义 4.3（对数核）。 通过对数变量替换定义 $\Phi:\ \mathbb{R}\to[0,\infty)$

$$\Phi(x) := e^{x/4}\,\widetilde{K}_{\mathrm{sym}}(e^x) = e^{-x/4}\,\widetilde{K}(e^x), \qquad x\in\mathbb{R}. \tag{10}$$

注 4.4（为什么采用对数坐标？为什么指数为 $1/4$？）。写作 $t = e^x$。于是， t 中的乘法缩放变为 x中的平移，而自对偶对合 $t\mapsto t^{-1}$ 变为反射$x\mapsto -x$。额外因子 $e^{x/4}$ 并非装饰性选择：它恰好使拉普拉斯反射的中心位于 $\Re(s)=\frac{1}{4}$ （见 §4.5）。~更一般地，若定义 $\Phi_\sigma(x)$:= $e^{\sigma x}K_{\mathrm{sym}}(e^x)$，则同样的计算表明，在公共收敛域上有 $\mathcal{B}\Phi_\sigma(s)$ = $\mathcal{B}\Phi_\sigma(2\sigma-s)$。因此，“对称中心”恰好是 σ；选择$\sigma=\frac{1}{4}$ 与后文所使用的梅林直线相容。

引理 4.5（精确指数混合形式）。 设

$$\alpha := \frac{L^2}{4D} > 0.$$

那么，对每个 $x\in\mathbb{R}$，都有如下精确恒等式

$$\Phi(x) = \frac{L}{\sqrt{4\pi D}}\,e^{-3x/4} \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \exp\!\big(-\alpha m^2 e^{-x}\big). \tag{11}$$

特别地， Φ 在 $\mathbb{R}$ 上非负且光滑。

证明。 将 $t=e^x$ 代入 (9)，并利用 (10)：

$$\Phi(x) = e^{-x/4}\widetilde{K}(e^x) = e^{-x/4}\frac{L}{\sqrt{4\pi D\,e^x}} \sum_{m\neq 0} \exp\!\left(-\frac{m^2L^2}{4D}\,e^{-x}\right),$$

这化简为式 (11)。式 (11) 中的级数在 x 中绝对且局部一致收敛（例如，可由首项 $m=\pm1$以及 $|m|\to\infty$ 的几何衰减控制），因此定义了一个光滑函数。□

4.2. 定量尾部与可积性。下一个引理给出了后文所需的最低限度解析性输入：它精确确定了控制拉普拉斯收敛域的单侧衰减。

引理 4.6 (对数核的可积性)。 存在一个常数 $C > 0$ （仅取决于 L 和 D），使得

$$\Phi(x) \le C\, e^{-x/4} \qquad \textit{for all } x \ge 0, \tag{12}$$

并且存在 $c > 0$，使得

$$\Phi(x) \le C\, e^{-3x/4} \exp\bigl(-c\, e^{-x}\bigr) \qquad \textit{for all } x \le 0. \tag{13}$$

特别地， $\Phi \in L^1(\mathbb{R})$。

证明。 从 (11) 出发。

(i) $x \ge 0$ **尾部。** 令 $x \ge 0$ 并设 $\beta := \alpha e^{-x} \in (0, \alpha]$。利用初等界

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\beta m^2} \le 1 + \int_{\mathbb{R}} e^{-\beta t^2}\, dt = 1 + \sqrt{\frac{\pi}{\beta}},$$

我们得到

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} e^{-\alpha m^2 e^{-x}} \le \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\beta m^2} \le 1 + \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{x/2}.$$

代入 (11) 得

$$\Phi(x) \le \frac{L}{\sqrt{4\pi D}}\, e^{-3x/4}\Bigl(1 + \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{x/2}\Bigr) \le C\,(e^{-3x/4} + e^{-x/4}) \le C\, e^{-x/4},$$

这就证明了 (12)。

(ii) $x \le 0$ **尾部。** 令 $x \le 0$，则 $u := e^{-x} \ge 1$。由于 $m^2 \ge m$ 对所有整数 $m \ge 1$，

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} e^{-\alpha m^2 u} = 2\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha m^2 u} \le 2\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha m u} = \frac{2e^{-\alpha u}}{1 - e^{-\alpha u}} \le \frac{2e^{-\alpha u}}{1 - e^{-\alpha}}.$$

代入 (11) 得到

$$\Phi(x) \le C\, e^{-3x/4} e^{-\alpha e^{-x}},$$

这就是 (13)（取 $c = \alpha$）。

（iii）可积性。由界（12）可得 $\int_0^\infty \Phi(x)\, dx < \infty$。对于负尾部，（13）给出

$$\int_{-\infty}^{0} \Phi(x)\, dx \le C \int_{-\infty}^{0} e^{-3x/4} e^{-c e^{-x}}\, dx.$$

代入 $y = e^{-x}$ （因此 $y \in [1, \infty)$ 和 $dx = -dy/y$ 后，得到

$$C \int_1^\infty y^{3/4} e^{-cy} \frac{dy}{y} = C \int_1^\infty y^{-1/4} e^{-cy}\, dy < \infty.$$

因此 $\Phi \in L^1(\mathbb{R})$。 □

4.3. **双边拉普拉斯变换：收敛性与解析性**。

定义 4.7 （双边拉普拉斯变换）。 对于积分收敛区域内的 $s \in \mathbb{C}$ ，定义

$$\mathcal{B}\Phi(s) := \int_{\mathbb{R}} \Phi(x) e^{-sx}\, dx.$$

引理 4.8 （绝对收敛半平面）。 定义 $\mathcal{B}\Phi(s)$ 的积分对所有 $s \in \mathbb{C}$ 绝对收敛，其中

$$\Re(s) > -\tfrac{1}{4}.$$

在该半平面上， $\mathcal{B}\Phi$是解析的。

证明。 取 s，使得 $\Re(s) > -\frac{1}{4}$。将积分在 0 处分开。

对于 $x \geq 0$，由引理 4.6 可得 $\Phi(x) \leq Ce^{-x/4}$，因此

$$\int_0^\infty |\Phi(x) e^{-sx}|\, dx \leq C \int_0^\infty e^{-(\Re(s)+1/4)x}\, dx < \infty.$$

对于 $x \leq 0$，引理 4.6 给出超指数衰减 $\Phi(x) \leq Ce^{-3x/4} e^{-ce^{-x}}$，这对任意固定的 s 都占优于 $e^{-\Re(s)x}$；因此 $\int_{-\infty}^0 |\Phi(x) e^{-sx}|\, dx < \infty$也成立。

为证明解析性，设 K 是 $\{s$ 的紧子集： $\Re(s) > -\frac{1}{4}\}$，并选取 $\delta > 0$，使得对所有 $s \in K$， $\Re(s) \geq -\frac{1}{4} + \delta$。于是，被积函数$\Phi(x)$ e^{-sx} 在 $x \geq 0$上由 $Ce^{-\delta x}$ 控制，在 $x \leq 0$ 上则由一个与 $s \in K$ 无关的可积函数控制。标准的控制收敛论证可保证在积分号下逐项求导，从而得出该半平面上的全纯性。□

4.4. 自对偶传递：Phi 的扭曲对称性。 取对数坐标后，反演对称性 (8) 变为扭曲偶性。

引理 4.9 (扭曲对称性)。 假设(8)成立。那么对所有 $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(-x) = e^{-x/2}\, \Phi(x). \tag{14}$$

证明。 根据定义（10）和对称性（8），

$$\Phi(-x) = e^{-x/4}\, \widetilde{K}_{\mathrm{sym}}(e^{-x}) = e^{-x/4}\, \widetilde{K}_{\mathrm{sym}}(e^{x}) = e^{-x/2} \left(e^{x/4} \widetilde{K}_{\mathrm{sym}}(e^{x}) \right) = e^{-x/2} \Phi(x).$$

□

4.5. **精确拉普拉斯反射对称性**。现在我们将（14）转化为关于 $\mathcal{B}\Phi$ 的刚性函数方程。

命题 4.10（第二步变换的反射律）。假设(8)。则对每一个 $s \in \mathbb{C}$，且

$$-\tfrac{1}{4} < \Re(s) < \tfrac{3}{4}$$

（确切而言，两边均需绝对收敛），便有如下精确恒等式

$$\mathcal{B}\Phi(s) = \mathcal{B}\Phi\left(\tfrac{1}{2} - s\right). \tag{15}$$

因此，对所有 $t \in \mathbb{R}$，有

$$\mathcal{B}\Phi\left(\tfrac{1}{4} + it\right) \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

证明。设 s 满足 $-\frac{1}{4} < \Re(s) < \frac{3}{4}$。则由引理 4.8，$\Re(s) > -\frac{1}{4}$ 保证 $\mathcal{B}\Phi(s)$ 绝对收敛，且 $\Re(\frac{1}{2} - s) > -\frac{1}{4}$（等价地 $\Re(s) < \frac{3}{4}$）对 $\mathcal{B}\Phi(\frac{1}{2} - s)$ 保证同样的结论。

利用变量替换 $x \mapsto -x$（其合理性由绝对收敛保证）及引理 4.9，我们计算得

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}\Phi(s) &= \int_{\mathbb{R}} \Phi(x) e^{-sx}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Phi(-x) e^{sx}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-x/2} \Phi(x) e^{sx}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Phi(x) e^{-(1/2 - s)x}\, dx \\
&= \mathcal{B}\Phi\left(\tfrac{1}{2} - s\right),
\end{aligned}$$

即为（15）。

对于（16），首先注意到 Φ 是实值函数，因此 $\overline{\mathcal{B}\Phi(\frac{1}{4} + it)} = \mathcal{B}\Phi(\frac{1}{4} - it)$。在 $s = \frac{1}{4} + it$ 处的反射恒等式给出 $\mathcal{B}\Phi(\frac{1}{4} + it) = \mathcal{B}\Phi(\frac{1}{4} - it)$，所以 $\mathcal{B}\Phi(\frac{1}{4} + it)$ 等于其复共轭，因此是实数。□

注记 4.11（得到了什么，以及没有声称什么）。命题 4.10 的要点在于实现了精确居中：对合 $s \mapsto \frac{1}{2} - s$ 固定垂直直线 $\Re(s) = \frac{1}{4}$。我们只在两边均由绝对收敛积分定义的共同区域内断言 (15)。在此阶段，我们不使用也不需要超出该区域的解析延拓。

5. Total positivity and canonical Laguerre–Pólya factorization

本节将第 4 节中得到的解析性质和对称性转化为双侧拉普拉斯变换 $\mathcal{B}\Phi$ 的刚性结构描述。其机制古典而完全基于表示论：对数核的全正性通过 Schoenberg–Edrei–Karlin 理论迫使其具有典范的 Laguerre–P´olya 因式分解。

这里不会出现梅林变换或 Ξ-函数。所得结果是一个结构性标准形式，它将在第 6 节中被识别为阿基米德完备化梅林变换。

5.1. 对数核的全正性。我们首先记录与 $\mathbb{R}$ 上的核相关的全正性概念。

定义 5.1（全正核）。若可测函数 $\Phi{:}\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 属于 PF_∞，则称其具有此性质；如果对每个 $n\geq 1$ 以及任意严格递增的实数序列，

$$x_1<\cdots<x_n,\qquad y_1<\cdots<y_n,$$

则有

$$\det\bigl(\Phi(x_i-y_j)\bigr)_{1\leq i,j\leq n}\geq 0.$$

备注 5.2. 等价地，$\Phi\in\mathrm{PF}_\infty$ 当且仅当与Φ 卷积会保持所有有限子式的正性；背景介绍见 [8]。我们只会使用通向 Schoenberg–Edrei–Karlin 分类的正向蕴含。

定理 5.3 (对数核的全正性**).** 定义 *4.3* 中的对数核 Φ 属于PF_∞（详情见第 *8* 节）。

证明。证明具有结构性，依赖于两个已确立的事实：

(i) 完全单调混合。由引理 4.5 可知，Φ具有如下精确表示：

$$\Phi(x)=e^{-3x/4}\sum_{m\geq 1}c_m e^{-\alpha m^2 e^{-x}},\qquad c_m>0,$$

即，Φ 是形如$x\mapsto e^{-ae^{-x}}$ 的函数与指数权重相乘后所构成的正混合。

(ii) 闭包性质。PF_∞ 类在以下运算下封闭：(a) 正线性组合，(b) 平移，(c) 乘以指数函数，以及 (d) 单调极限 [8, 第 I–III 章]。

每个函数 $x \mapsto e^{-ae^{-x}}$ 都是经典的 PF$_\infty$ 核（它是正测度的拉普拉斯变换与指数映射的复合）。乘以 $e^{-3x/4}$ 会保持PF$_\infty$性质，并且该级数绝对收敛且局部一致收敛，因此可视为单调极限。

因此 $\Phi \in$PF$_\infty$。 □

5.2. **Schoenberg–Edrei–Karlin表示。** 现在我们调用 PF$_\infty$ 核的双边拉普拉斯变换分类定理。

定理 5.4 (Schoenberg–Edrei–Karlin)。 设 $\Phi \in L^1(\mathbb{R}) \cap$PF$_\infty$ 为非负函数。那么其双边拉普拉斯变换可表示为

$$\mathcal{B}\Phi(s) = \frac{E(s)}{\Psi(s)}, \tag{17}$$

其中：

(i) $E(s)$ 是一个没有零点的整函数，*(ii)* $\Psi(s)$ 是一个 *Laguerre–P´olya* 型整函数，*(iii)* Ψ的所有零点都是实数，*(iv)* 除了将 E 和 Ψ 同时乘以同一个非零常数外，该表示是唯一的。

证明。 这是经典结果；参见 [8, 定理 VII.1.3 和 VII.3.2]。 L^1条件确保双边拉普拉斯变换存在，而 PF$_\infty$ 则保证分母属于 Laguerre–P´olya 类。□

推论 5.5 （ $\mathcal{B}\Phi$的典范分解）。 变换 $\mathcal{B}\Phi$可分解为

$$\mathcal{B}\Phi(s) = \frac{E(s)}{\Psi(s)}$$

其中 Ψ 是整函数，属于 *Laguerre–P´olya* 类，且仅有实零点。

5.3. **与反射对称性的相容性。** 命题 4.10 中得到的反射对称性对 Laguerre–P´olya 因子施加了严格约束。

命题 5.6 （零点集的对称性）。 *Laguerre–P´olya* 函数 Ψ 的零点集（计入重数）关于对合 $s \mapsto \frac{1}{2} - s$对称。特别地， Ψ 的零点集关于垂直直线 $\Re(s) = \frac{1}{4}$ 对称。

证明。 由命题 4.10 和因式分解 (17)，可得

$$\frac{E(s)}{\Psi(s)} = \frac{E(\frac{1}{2}-s)}{\Psi(\frac{1}{2}-s)}, \qquad \text{hence} \qquad \frac{\Psi(\frac{1}{2}-s)}{\Psi(s)} = \frac{E(\frac{1}{2}-s)}{E(s)}.$$

右端是一个没有零点的整函数，因此左端也是如此。若 ρ 是 Ψ 的一个重数为 m的零点，则左端在 $s = \frac{1}{2} - \rho$ 处有一个阶数为 m 的零点，除非 $\frac{1}{2} - \rho$ 也是 Ψ的一个重数为 $\bar{m}$的零点。由于该商没有零点，每个零点 ρ 都与 $\frac{1}{2} - \rho$ 配对，且重数相同。 □

注 5.7（关于对称归一化）。 上述论证得到零点集的对称性。我们并不声称 Ψ 本身可以归一化为满足 $\Psi(s) = \Psi(\frac{1}{2} - s)$，同时保持 Edrei–Karlin 因子$E(s) = \exp(as^2 + bs + c)$ 的典范二次指数形式。如有需要，可以构造对称的 Laguerre–P´olya 函数

$$\Psi_{\mathrm{sym}}(s) := \Psi(s)\,\Psi(\tfrac{1}{2} - s),$$

其满足 $\Psi_{\mathrm{sym}}(s) = \Psi_{\mathrm{sym}}(\frac{1}{2} - s)$；-这种对称化在后文中不使用。

注 5.8（已取得的成果）。 到目前为止，我们已经证明， $\mathcal{B}\Phi$ 是一个无零点整函数与 Laguerre–P´olya 函数之商的反射对称商，该 Laguerre–P´olya 函数的零点位于实轴上，并关于 $\Re(s) = \frac{1}{4}$ 对称。尚未将其与 ζ 函数或 Ξ 建立任何对应关系，也未使用任何非零假设。

6. Archimedean Mellin identification

范围说明。 本节将阿基米德完备核的梅林变换识别为 Ξ；但不 证明第 6 节中的 Laguerre–P´olya 函数 Ψ与 $\Xi(2\cdot)$ 之间存在任何识别。本节执行两项逻辑上彼此独立的任务。

(A) 梅林变换识别（无条件）。 在第 3 节固定的自对偶尺度下，阿基米德完备核 K_{arch} 成为经典的快速衰减 θ 核 Θ，其梅林变换恰好是经典的完备 ζ 函数 [16, 5] (ξ)（等价地说，是偶整黎曼 Ξ 函数）。

(B) 尚待解决的识别问题（开放问题）。 随后，我们指出一个额外的关键环节——一项边界值／识别条件——在该条件下，第 5 节中的 Laguerre–P´olya 分母可被识别为与 $\Xi(2\cdot)$ 相差一个无零整函数因子。本文不尝试进行这一比较；参见第 9 节。

6.1. 阿基米德完备化与经典θ 核。

我们回顾阿基米德完备化算子（其典范来源参见第 3 节）。

回顾。阿基米德完备化算子 $\mathcal{A}$ 在定义 3.5 中引入；具体而言，

$$(\mathcal{A}f)(t) = \frac{d}{dt}\Big(t^{3/2}\frac{d}{dt}f(t)\Big).$$

引理 6.1（完备化算子消去奇异部分）。有 $\mathcal{A}(1) = 0$ 以及 $\mathcal{A}(t^{-1/2}) = 0$ 在 $(0, \infty)$上。

证明。由 (7) 直接微分即得。 □

定义 6.2（阿基米德完备核）。令 $K_L(t)$表示缩放极限迹核（第 3 节）。定义

$$\widetilde{K}_{\mathrm{arch}}(t) := \big(\mathcal{A}(K_L - 1)\big)(t), \qquad t > 0. \tag{18}$$

我们现在专门考虑自对偶尺度，它此前已经固定。

引理 6.3（与经典的 Θ的精确等同）。假设自对偶归一化 $L^2 = 4\pi D$，从而

$$K_L(t) = \vartheta(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}.$$

那么对所有 $t > 0$,

$$\widetilde{K}_{\mathrm{arch}}(t) = \Theta(t), \tag{19}$$

其中

$$\Theta(t) := \sum_{n=1}^{\infty}\Big(2\pi^2 n^4 t^{3/2} - 3\pi n^2 t^{1/2}\Big)e^{-\pi n^2 t}. \tag{20}$$

证明。在自对偶尺度下，$K_L(t) = \vartheta(t)$，因此 $K_L(t) - 1 = 2\sum_{n\geq 1} e^{-\pi n^2 t}$。逐项求导（对每个 $t > 0$，由绝对一致收敛/局部一致收敛可知其合理性）：

$$\frac{d}{dt}\big(e^{-\pi n^2 t}\big) = -\pi n^2 e^{-\pi n^2 t}.$$

将（7）应用于 $K_L - 1$ 可得

$$\widetilde{K}_{\mathrm{arch}}(t) = \frac{d}{dt}\Big(t^{3/2}\frac{d}{dt}(K_L(t) - 1)\Big) = 2\sum_{n\geq 1}\frac{d}{dt}\Big(-\pi n^2 t^{3/2} e^{-\pi n^2 t}\Big),$$

而导数计算结果为

$$2\sum_{n\geq 1}\Big(\pi^2 n^4 t^{3/2} - \tfrac{3}{2}\pi n^2 t^{1/2}\Big)e^{-\pi n^2 t} = \sum_{n\geq 1}\Big(2\pi^2 n^4 t^{3/2} - 3\pi n^2 t^{1/2}\Big)e^{-\pi n^2 t}.$$

这正是式 (20)。 □

6.2. **梅林变换及其与 xi 和 Xi 的等同。**

定义 6.4（完备ζ函数）。 定义经典的完备 ζ 函数

$$\xi(w) := \frac{1}{2}\, w(w-1)\, \pi^{-w/2}\Gamma\Big(\frac{w}{2}\Big)\zeta(w),$$

以及偶整的黎曼 Ξ-函数

$$\Xi(z) := \xi\Big(\tfrac{1}{2} + iz\Big).$$

引理 6.5（梅林积分的绝对收敛）。 设 Θ 如 (20) 中所述。则对每一个 $s \in \mathbb{C}$，梅林积分

$$M(s) := \int_0^\infty \Theta(t)\, t^{s-1}\, dt \tag{21}$$

绝对收敛，并定义 s 的一个整函数。

证明。 对 $t \geq 1$，利用 $e^{-\pi n^2 t} \leq e^{-\pi t}$ 以及 $\sum_{n\geq 1} n^k e^{-\pi n^2 t} \ll_k 1$ 对 $t \geq 1$一致成立的事实逐项估计；由此得到 $|\Theta(t)| \ll t^{3/2} e^{-\pi t}$，从而对所有 s 在 $+\infty$处绝对可积。

对于 $0 < t \leq 1$，有 $e^{-\pi n^2 t} \leq 1$，因此 $|\Theta(t)| \ll t^{1/2} \sum_{n\geq 1} n^2 e^{-\pi n^2 t} + t^{3/2} \sum_{n\geq 1} n^4 e^{-\pi n^2 t}$。将求和与高斯积分进行比较，可得 $\sum_{n\geq 1} n^2 e^{-\pi n^2 t} \ll t^{-3/2}$ 和 $\sum_{n\geq 1} n^4 e^{-\pi n^2 t} \ll t^{-5/2}$，于是 $|\Theta(t)| \ll t^{-1}$，当 $t \downarrow 0$ 时成立。因此，对于所有 s， $\Theta(t) t^{s-1}$ 在 0 附近可积（事实上，只要保留 $e^{-\pi n^2 t}$ 并采用稍微精细一些的估计，该界在竖条区域上一致成立）。利用对 $\mathbb{C}$紧子集上的控制收敛，可得 s 中的解析性。□

引理 6.6（梅林恒等式与完备 ζ 函数）。 对所有 $s \in \mathbb{C}$ 都有

$$M(s) = \xi(2s-1). \tag{22}$$

等价地，对所有 $w \in \mathbb{C}$，

$$\int_0^\infty \Theta(t)\, t^{\frac{w+1}{2}-1}\, dt = \xi(w). \tag{23}$$

证明。 由引理 6.5， M 是整函数，因此只需在一个右半平面上进行计算，在那里逐项积分是合理的（例如 $\Re(s) > 2$），然后利用恒等定理延拓。

对于 $\Re(s) > 2$，将 (20) 代入 (21)，并逐项积分：

$$M(s) = \sum_{n\geq 1}\Big(2\pi^2 n^4 \int_0^\infty t^{s+\frac{1}{2}} e^{-\pi n^2 t}\, dt - 3\pi n^2 \int_0^\infty t^{s-\frac{1}{2}} e^{-\pi n^2 t}\, dt\Big).$$

利用 $\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-\lambda t}\,dt = \lambda^{-\alpha}\Gamma(\alpha)$ 表示 $\Re(\alpha) > 0$，我们得到

$$\int_0^\infty t^{s+\frac{1}{2}}e^{-\pi n^2 t}\,dt = (\pi n^2)^{-(s+\frac{3}{2})}\Gamma\Big(s+\frac{3}{2}\Big),$$
$$\int_0^\infty t^{s-\frac{1}{2}}e^{-\pi n^2 t}\,dt = (\pi n^2)^{-(s+\frac{1}{2})}\Gamma\Big(s+\frac{1}{2}\Big).$$

代入并化简可得

$$M(s) = \pi^{-(s-\frac{1}{2})}\Big(2\Gamma\Big(s+\frac{3}{2}\Big) - 3\Gamma\Big(s+\frac{1}{2}\Big)\Big)\sum_{n\geq 1} n^{1-2s}.$$

利用 $\Gamma(s+\frac{3}{2}) = (s+\frac{1}{2})\Gamma(s+\frac{1}{2})$，括号内的表达式可化简为

$$2(s+\tfrac{1}{2})\Gamma(s+\tfrac{1}{2}) - 3\Gamma(s+\tfrac{1}{2}) = (2s-2)\Gamma(s+\tfrac{1}{2}) = 2(s-1)\Gamma(s+\tfrac{1}{2}).$$

此外，对于 $\Re(s)$，$\sum_{n\geq 1} n^{1-2s} = \zeta(2s-1)$ > 1。因此

$$M(s) = 2(s-1)\,\pi^{-(s-\frac{1}{2})}\Gamma\Big(s+\frac{1}{2}\Big)\zeta(2s-1).$$

最后，$\Gamma(s+\frac{1}{2}) = (s-\frac{1}{2})\Gamma(s-\frac{1}{2})$，所以

$$M(s) = (2s-1)(s-1)\,\pi^{-(s-\frac{1}{2})}\Gamma\Big(s-\frac{1}{2}\Big)\zeta(2s-1) = \xi(2s-1),$$

这就是 (22)。用 $w = 2s-1$ 重写可得 (23)。 □

定理 6.7 (阿基米德梅林变换识别)。假设自-$\widetilde{\text{对偶尺度}}$ $L^2 = 4\pi D$，于是由引理 *6.3* 得 $K_{\text{arch}} = \Theta$。对 $z \in \mathbb{C}$，定义：

$$F_{\text{arch}}(z) := \int_0^\infty \widetilde{K}_{\text{arch}}(t)\,t^{\frac{3}{4}+iz}\,\frac{dt}{t}. \tag{24}$$

那么对所有 $z \in \mathbb{C}$，

$$F_{\text{arch}}(z) = \Xi(2z). \tag{25}$$

证明。由引理 6.3，$F_{\text{arch}}(z) = M(\frac{3}{4}+iz)$，其中 M 如式 (21) 所示。于是由引理 6.6 得

$$F_{\text{arch}}(z) = \xi\Big(2\big(\tfrac{3}{4}+iz\big)-1\Big) = \xi\Big(\tfrac{1}{2}+2iz\Big) = \Xi(2z),$$

这就是式 (25)。 □

7. Completion of the main theorem and the remaining seam

本节最后 (i) 记录一个简短的解析引理，清晰地指出从未完备化核过渡到其阿基米德完备化时，边界项可能出现的唯一位置；(ii) 将第 4–6 节的结果汇总为主定理。

7.1.**阿基米德完备化算子的一个边界项引理**。 回顾定义 3.5 中的阿基米德完备化算子 $\mathcal{A}$：

$$(\mathcal{A}f)(t) = \frac{d}{dt}\Big(t^{3/2} f'(t)\Big).$$

下面的引理是一个一般性的分部积分恒等式，并带有明确的边界项；在应用中，我们会验证这些项均为零。

引理 7.1 (带明确边界项的梅林变换 $\mathcal{A}f$ **)**。设 $f:(0,\infty)\to\mathbb{C}$ 连续可微，并假设$t^{3/2}f'(t)$ 在$(0,\infty)$的每个紧子区间上绝对连续。固定 $s\in\mathbb{C}$，并定义截断积分

$$I_s(R,\varepsilon) := \int_{\varepsilon}^{R} (\mathcal{A}f)(t)\, t^{s-1}\, dt, \qquad 0<\varepsilon<R<\infty.$$

于是有如下恒等式

$$\begin{aligned} I_s(R,\varepsilon) &= \Big[t^{s+\frac12} f'(t)\Big]_{t=\varepsilon}^{t=R} - (s-1)\Big[f(t)\, t^{s-\frac12}\Big]_{t=\varepsilon}^{t=R} \\ &\quad + (s-1)\Big(s-\tfrac12\Big)\int_{\varepsilon}^{R} f(t)\, t^{s-\frac32}\, dt. \end{aligned} \tag{26}$$

特别地，若(26) 中的两个边界项在 $\varepsilon\downarrow 0$和 $R\uparrow\infty$处趋于0，且 $\int_0^\infty |f(t)|\,|t^{s-\frac32}|\,dt<\infty$，则反常积分$\int_0^\infty (\mathcal{A}f)(t)\ t^{s-1}\,dt$ 绝对收敛，且有

$$\int_0^\infty (\mathcal{A}f)(t)\, t^{s-1}\, dt = (s-1)\Big(s-\tfrac12\Big)\int_0^\infty f(t)\, t^{s-\frac32}\, dt. \tag{27}$$

证明。 写出 $(\mathcal{A}f)(t) = \frac{d}{dt}(t^{3/2}f'(t))$，并对 $[\varepsilon,R]$ 分部积分：

$$\begin{aligned} I_s(R,\varepsilon) &= \Big[t^{3/2} f'(t)\, t^{s-1}\Big]_{\varepsilon}^{R} - (s-1)\int_{\varepsilon}^{R} t^{3/2} f'(t)\, t^{s-2}\, dt \\ &= \Big[t^{s+\frac12} f'(t)\Big]_{\varepsilon}^{R} - (s-1)\int_{\varepsilon}^{R} f'(t)\, t^{s-\frac12}\, dt. \end{aligned}$$

对剩余的积分再次进行分部积分：

$$\int_{\varepsilon}^{R} f'(t)\, t^{s-\frac12}\, dt = \Big[f(t)\, t^{s-\frac12}\Big]_{\varepsilon}^{R} - \Big(s-\tfrac12\Big)\int_{\varepsilon}^{R} f(t)\, t^{s-\frac32}\, dt.$$

代入即可得到（26）。最后一个结论可通过取极限，并利用给定的边界条件和可积性条件得出。□

注 7.2（多项式因子）。 若令 $s = \frac{w+1}{2}$ ，则（27）中的因子变为

$$(s-1)\Big(s-\tfrac{1}{2}\Big) = \frac{w(w-1)}{4}.$$

这恰好是出现在完备ζ因子 $\xi(w)$中的二次多项式（至多相差一些无关紧要的归一化，具体取决于使用 $K_L - 1$ 还是 $2(K_L - 1)$ 等）。关键在于， $\mathcal{A}$ 会消去常数模态和 $t^{-1/2}$ 奇异模态（引理 6.1），而 $\mathcal{A}f$ 的梅林变换会引入这个普适的二次因子。

7.2. 汇总主定理的证明。 现在我们汇总前面各节的结果。为清楚起见，我们将本文无条件证明的内容与尚未解决的剩余识别问题区分开来。

定理7.3 (汇总主定理)。 假设第 *3* 节的强区间假设成立，因此缩放极限核 K_L 存在，且可以确定自对偶归一化。那么：

(i) (无条件的结构性结果。) 存在一个非负核 $\Phi \in L^1(\mathbb{R})$ 满足：

- $\Phi \in \mathrm{PF}_\infty$;
- 其双边拉普拉斯变换 $\mathcal{B}\Phi$ 满足反射律 $\mathcal{B}\Phi(s) = \mathcal{B}\Phi(\frac{1}{2} - s)$，且该等式在绝对收敛的公共定义域上成立；
- $\mathcal{B}\Phi$ 具有典范的 *Schoenberg–Edrei–Karlin* 表示 $\mathcal{B}\Phi(s) = E(s)/\Psi(s)$，其中 Ψ 属于 *Laguerre–Pólya* 类，因而仅有实零点。

(ii) （无条件阿基米德梅林变换识别。）阿基米德 n-完备核 K_{arch} 的梅林变换为 $F_{\mathrm{arch}}(z) = \Xi(2z)$，如定理 *6.7* 所述。

证明。 第 (i) 部分综合了以下结果：定义 4.3 与引理 4.6（给出 $\Phi \in L^1$）、命题 4.10（反射律）、定理 5.3 与推论 5.5（全正性及 Schoenberg–Edrei–Karlin 输出）。

第 (ii) 部分正是定理 6.7。 □

8. A detailed proof of total positivity

在第5节中，我们将全正性性质 $\Phi \in \mathrm{PF}_\infty$ 作为 Schoenberg–Edrei–Karlin 分类的关键依据。本节旨在根据引理 4.5 的混合公式，对 $\Phi \in \mathrm{PF}_\infty$ 作出完全明确且自成一体的验证，只使用两个标准事实：

(i) PF_∞ 在简单“规范”运算（乘以指数函数和求和）下的一条便捷封闭性原理；以及 (ii) 一个经典的基本构件，其双边拉普拉斯变换本质上就是伽马函数；与之相关的 Laguerre–P´olya 分母为 $1/\Gamma$。

论证很简短，但将其清晰地写出来可以避免暗中诉诸传统说法。

8.1. **P´ólya 频率类的两个闭包原理。**

引理 8.1（指数规范不变性）。 设 $\phi:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ 并固定 $a\in\mathbb{R}$。定义

$$\phi_a(x):=e^{-ax}\phi(x).$$

若 $\phi\in\mathrm{PF}_\infty$，则 $\phi_a\in\mathrm{PF}_\infty$。

证明。 固定 $n\ge 1$ 和严格递增的 $x_1<\cdots<x_n$、$y_1<\cdots<y_n$。那么

$$\phi_a(x_i-y_j)=e^{-a(x_i-y_j)}\phi(x_i-y_j)=e^{-ax_i}\,e^{ay_j}\,\phi(x_i-y_j).$$

因此

$$\det\big(\phi_a(x_i-y_j)\big)_{i,j}=\Big(\prod_{i=1}^{n}e^{-ax_i}\Big)\Big(\prod_{j=1}^{n}e^{ay_j}\Big)\det\big(\phi(x_i-y_j)\big)_{i,j}.$$

这个前因子严格为正，因此行列式的符号不变。所以，ϕ的非负性意味着 ϕ_a 的非负性。□

引理 8.2 (有限正和)。 若 $\phi_1,\dots,\phi_M\in\mathrm{PF}_\infty$ 且 $c_1,\dots,c_M\ge 0$，则 $\sum_{m=1}^{M}c_m\phi_m\in\mathrm{PF}_\infty$。

证明。 固定如上所述的 n 和 (x_i),(y_j)。行列式

$$D(\phi):=\det(\phi(x_i-y_j))_{1\le i,j\le n}$$

是矩阵元素 $\phi(x_i-y_j)$ 的一个多项式。特别地，它对每一列都是多重线性的。将矩阵中 $\sum_m c_m\phi_m$ 对应的第 j 列写成 ϕ_m 的对应列之和，并按多重线性展开，得到

$$D\Big(\sum_{m=1}^{M}c_m\phi_m\Big)=\sum_{m_1,\dots,m_n\in\{1,\dots,M\}}\Big(\prod_{k=1}^{n}c_{m_k}\Big)\,\det\big(\phi_{m_k}(x_i-y_k)\big)_{1\le i,k\le n}.$$

右侧的每个行列式都是相应 ϕ_{m_k} 的 PF_∞（注意，指标取决于列），每个系数都是 ≥ 0。因此，该和是 ≥ 0。□

注释 8.3（过渡到无限求和）。 在我们的应用中， Φ是由 PF_∞ 核构成的有限正和的局部一致极限。由于每个行列式只涉及有限个点的取值，因此可以逐项取极限，并利用行列式作为其各项元素的多项式函数所具有的连续性。这里不需要紧致性或控制收敛。

8.2. **一个基本构件：** $x \mapsto e^{-ue^{-x}}$。

引理 8.4（一个伽马变换核是 PF_∞）。 令 $u > 0$ 并定义

$$\phi_u(x) := e^{-ue^{-x}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

那么 $\phi_u \in \mathrm{PF}_\infty$。

证明。 我们在半平面$\Re(s) > 0$上计算双边拉普拉斯变换：

$$\mathcal{B}\phi_u(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ue^{-x}} e^{-sx}\, dx.$$

作变量替换 $y = e^{-x}$ （因此 $y \in (0,\infty)$ 且 $dx = -dy/y$），得到

$$\mathcal{B}\phi_u(s) = \int_0^\infty e^{-uy} y^{s-1}\, dy = u^{-s}\Gamma(s), \qquad \Re(s) > 0.$$

现在回顾伽马函数的倒数的经典魏尔斯特拉斯乘积：

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s\, e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{s}{n}\Big) e^{-s/n}, \tag{28}$$

其中 γ 是欧拉常数。右侧是一个整函数，其零点恰为非正整数，且均为实数且为单零点；其乘积表示属于拉盖尔–波利亚型。特别地，

$$\Psi(s) := \frac{1}{\Gamma(s)} \quad \text{is Laguerre–Pólya,} \qquad E(s) := u^{-s} = e^{-s\log u} \quad \text{is entire and zero-free.}$$

因此，在 $\Re(s) > 0$ 上，我们有如下表示

$$\mathcal{B}\phi_u(s) = \frac{E(s)}{\Psi(s)}.$$

Schoenberg–Edrei–Karlin定理也有一个“逆向”结论：若一个非负可积核的双边拉普拉斯变换具有 E/Ψ的形式，其中 Ψ属于Laguerre–P´olya类且 E 无零点，则该核是PF_∞ 核（参见 [8, 第VII章]）。将这一判据应用于 ϕ_u ，可得 $\phi_u \in \mathrm{PF}_\infty$。 □

8.3. **证明Phi的全正性**。现在我们回到特定的对数核 Φ。

定理 8.5 (Φ的全正性)。定义 *4.3* 中的对数核 Φ 属于PF_∞。

证明。由引理 4.5，存在常数 $C_0 > 0$ 和 $\alpha > 0$ ，使得

$$\Phi(x) = C_0\, e^{-3x/4} \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} e^{-\alpha m^2 e^{-x}}.$$

对每个固定的整数 $m \neq 0$，定义核

$$\Phi_m(x) := e^{-3x/4} e^{-\alpha m^2 e^{-x}}.$$

由引理 8.4，函数 $x \mapsto e^{-\alpha m^2 e^{-x}}$ 是 PF$_\infty$ （它是 ϕ_u ，且 $u = \alpha m^2$）。由引理 8.1，乘以 $e^{-3x/4}$ 可保持 PF$_\infty$。因此，每个 Φ_m ∈都是 PF$_\infty$。

对于 $N \geq 1$，令

$$\Phi^{(N)}(x) := C_0 \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\\ |m|\leq N}} \Phi_m(x).$$

由引理 8.2， $\Phi^{(N)} \in$ PF$_\infty$ 对每个 N 都成立。

最后，对每个固定的 $x \in \mathbb{R}$，由引理 4.5 中的绝对收敛可知，当 $N \to \infty$ 时， $\Phi^{(N)}(x) \to \Phi(x)$。固定 n 和递增的 (x_i)、(y_j)；于是每个矩阵元素 $\Phi^{(N)}(x_i - y_j) \to \Phi(x_i - y_j)$。由于行列式是矩阵元素的多项式，我们得出

$$\det\left(\Phi(x_i - y_j)\right)_{i,j} = \lim_{N\to\infty} \det\left(\Phi^{(N)}(x_i - y_j)\right)_{i,j} \geq 0,$$

因为每个 $\Phi^{(N)}$ 都是 PF$_\infty$。这就证明了 $\Phi \in$ PF$_\infty$。 □

备注 8.6（本证明用了什么，没用什么）。我们没有使用任何梅林变换，也没有将其与 Ξ联系起来，更没有超出自然收敛半平面的任何解析延拓。唯一用到的外部结果是乘积公式 (28)，以及将 Laguerre–P´olya 分母与 PF$_\infty$ 核联系起来的标准 Schoenberg–Edrei–Karlin 判据。

9. The bridge problem (open)

本文所发展的构造自然引出了另一个分析问题，但我们在此不予讨论。一方面，上文所考虑的本原有限动力系统以一种典范且完全阿基米德的方式，产生了一个非负可积核 Φ，其双边拉普拉斯变换具有 Schoenberg–Edrei–Karlin

因式分解 $\mathcal{B}\Phi = E/\Psi$，其中 Ψ 属于 Laguerre–P´olya 类[10, 12]。另一方面，此处引入的阿基米德完备化过程，在一个特定的自对偶归一化下，产生了一个与经典函数 $\Xi(2z)$ 相吻合的梅林变换。

对任何未来等同的合理性检验。 任何拟议的等同至少应当尊重：(i) 由典范中心化与自对偶归一化所产生的函数对称性，以及 (ii) Ψ-侧[13, 4, 8, 10]上内在的全正性/Laguerre–P´olya 结构。

一个自然的问题是，这两种解析结构能否直接关联起来。更确切地说，人们可以问：由全正性一侧产生的 Laguerre–P´olya 数据 Ψ能否在乘以一个无零点整因子的意义下与 $\Xi(2z)$ 等同，或者一旦将这两个对象置于共同的解析框架中，某个适当的刚性原理是否会迫使这种等同成立。任何这样的等同都相当于比较两个源自先验上无关构造的函数的零点除子。

我们将这一等同问题视为未来工作的一个有前景的方向。其解决将需要超出本文范围的额外解析性输入，因此我们将其留作开放问题。

References

[1] M. V. Berry 和 J. P. Keating。黎曼零点与特征值渐近。*SIAM Review*，41：236–266，1999。[2] K. Chandrasekharan。椭圆函数，第281卷，收录于数学科学基础丛书。施普林格出版社，柏林和纽约，1985。[3] Louis de Branges。整函数希尔伯特空间。Prentice-Hall，恩格尔伍德克利夫斯，新泽西州，1968。[4] Albert Edrei。关于全正序列生成函数（第二部分）。数学分析杂志´，2：104–109，1952。[5] Harold M. Edwards。《黎曼ζ函数》。学术出版社，纽约，1974。[6] F. R. Gantmacher 和 M. G. Krein。振荡矩阵与核及机械系统的微小振动。美国数学会（AMS Chelsea Publishing），普罗维登斯，罗得岛州，2002。[7] Carl Gustav Jacob Jacobi。《椭圆函数新理论基础》。Sumtibus fratrum Borntraeger，柯尼斯堡，1829。[8] Samuel Karlin。《全正性，第一卷》。斯坦福大学出版社，斯坦福，加利福尼亚州，1968。[9] M. G. Krein。对指数型整函数理论的贡献。《苏联科学院院报》。数学辑，11(4)：309–326，1947。

[10] B. Ya. Levin。整函数零点分布，第5卷，收录于数学专著译丛。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1964。[11] Allan Pinkus。全正矩阵，第181卷，收录于剑桥数学丛书。剑桥大学出版社，剑桥，2010。.[12] George P´olya 和 Issai Schur。论代数方程理论中的两类因子序列。纯粹与应用数学杂 ¨志，144：89–113，1914。[13] I. J. Schoenberg。论波利亚频率函数。I. 全正函数及其拉普拉斯变换。数学分析杂志´，1：331–374，1951。[14] Atle Selberg。弱对称黎曼空间中的调和分析与不连续群及其在狄利克雷级数中的应用。印度数学会杂志，20：47–87，1956。[15] Elias M. Stein 和 Rami Shakarchi。复分析，第二卷，收录于普林斯顿分析讲义。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2003。[16] E.C. Titchmarsh。黎曼ζ函数理论。克拉伦登出版社，牛津，第二版，1986。由 D. R. Heath-Brown 修订。

Appendix A. Technical analytic justifications

本附录汇集了正文中或隐或显地用到的若干解析估计与论证。此处的结果均不引入新对象，也不改变论证的逻辑结构；它们仅用于为已经援引的标准极限过程、逐项运算和边界处理提供依据。

A.1. 一致局部中心极限定理界。 在第3节中，我们借助一致局部中心极限定理（ULCLT），从离散原始动力学过渡到缩放极限核 K_L。此处记录一个足以涵盖本文全部使用情形的代表性界。

引理 A.1 (一致局部中心极限定理估计)。 设 $(X_t^{(N)})_{t\ge 0}$ 是 N-循环上的重缩放原始过程，其有效扩散常数为 $D>0$，并设 $p_t^{(N)}(j)$ 表示其转移核。那么，对于每个紧区间 $[t_0,t_1]\subset(0,\infty)$，存在常数 $C=C(t_0,t_1)$，使得

$$\sup_{t\in[t_0,t_1]}\sup_{j\in\mathbb{Z}}\Big|p_t^{(N)}(j)-\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp\Big(-\frac{j^2}{4Dt}\Big)\Big|\le\frac{C}{N},$$

对所有充分大的 N，均成立。

概述。 这是傅里叶分析在离散环面上的一个标准推论，再结合色散关系在原点附近的泰勒展开即可得到。由紧致性可知其关于 $t\in[t_0,t_1]$ 的一致性。精确证明可参见有限群上的随机游走的经典论述。例如，□

注 A.2。 引理 A.1 仅用于在转向完备核的 θ 级数表示时，证明可以应用控制收敛和逐项取极限。无需任何比 $O(N^{-1})$ 更精确的速率。

A.2. **控制收敛与逐项运算**。 第 4 节和第 6 节中的若干论证依赖于交换极限、求和、导数和积分。这里我们记录一个通用的控制原理，它统一适用于所有此类步骤。

引理 A.3 （θ 级数的一致控制）。 设

$$\Theta(t) := \sum_{n\geq 1} P(n,t)\, e^{-\pi n^2 t},$$

其中 $P(n,t)$ 是关于 n 和 $t^{\pm 1/2}$的多项式。那么：

(i) 对每个 $k \geq 0$，定义 $\partial_t^k \Theta(t)$ 的级数在 $(0,\infty)$上绝对收敛且局部一致收敛；***(ii)*** 对每个 $\sigma \in \mathbb{R}$，只要积分在 0处形式上收敛且 ∞，梅林加权函数 $t \mapsto \Theta(t)\, t^{\sigma}$ 就在 $(0,\infty)$ 上可积。

证明。 对 $t \geq 1$，有 $e^{-\pi n^2 t} \leq e^{-\pi t}$，并且对任意固定的多项式权重，关于 n 的求和一致有界。对 $0 < t \leq 1$，与高斯积分比较可得如下形式的界

$$\sum_{n\geq 1} n^k e^{-\pi n^2 t} \ll_k t^{-(k+1)/2}.$$

这些估计在 t 中对微分保持稳定，并蕴含绝对收敛和局部一致收敛，同时关于多项式梅林权重可积。□

注 A.4。 第 3–6 节中的所有逐项微分和梅林变换计算均由引理 A.3 保证其合理性。

A.3. **阿基米德完备化算子的边界项**。 在第 7 节中，我们对阿基米德完备化算子 $\mathcal{A}$ 使用了一个分部积分恒等式。此处记录一个确保边界项消失的便利充分条件。

引理 A.5 （边界贡献的消失）。 设 $f : (0,\infty) \to \mathbb{C}$ 二次连续可微，并假设存在常数 $\alpha > 0$ 和 $\beta > 0$，使得

$$|f(t)| \ll t^{-\alpha} \quad (t \to \infty), \qquad |f(t)| \ll t^{\beta} \quad (t \downarrow 0).$$

则对每一个 $s \in \mathbb{C}$，引理 *7.1* 中的边界项在 $\varepsilon \downarrow 0$与 $R \uparrow \infty$时消失。

证明。 在所述假设下，有

$$t^{s+\frac{1}{2}} f'(t) \to 0, \qquad f(t)\, t^{s-\frac{1}{2}} \to 0$$

在 0 和 ∞ 处均成立，并且在 $s \in \mathbb{C}$ 的紧子集上一致成立。该结论可直接得出。□

注记 A.6. 在应用于 $f(t) = K_L(t) - 1$ 时，所需的界由显式的 θ 级数表示和引理 A.3 得出。这里不存在微妙的边界行为。

A.4. **利用恒等原理进行解析延拓**。最后，我们记录反复使用的初等恒等原理，它可将局部等式推广为全局等式。

引理 A.7 (亚纯函数的恒等原理)**.** 设 F 和 G 是连通区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上的亚纯函数。若 $F = G$ 在一个包含于 Ω 且具有聚点的集合上成立，则 $F = G$ 在整个 Ω 上成立。

证明。 这是标准结论，可由对 $F - G$ 应用恒等定理得出。□

注 A.8. 引理 A.7 仅用于在非空开集上确立等式后，将局部恒等式推广为全局恒等式。