分数阶线性二次跟踪系统的新型闭环控制器

Iman Malmir[†]

摘要 本文提出了一种求解分数阶跟踪二次最优控制问题闭环最优控制器的新方法。获得了分数阶最优控制问题的最优性条件。通过示例说明了该方法的适用性和有效性。

关键词 分数阶跟踪最优控制；闭环最优控制器；分数阶最优控制；Caputo导数；分数阶线性跟踪系统；最优控制律

MSC 93B52, 93C05, 93C10

1 引言

分数阶最优跟踪控制结合了分数阶最优控制与跟踪控制 [1,2], ，旨在求得最优控制律，使分数阶系统以最优方式跟踪所需的参考信号。跟踪系统广泛应用于航空航天与机械系统中。例如，考虑用于跟踪飞机的天线控制系统。在大型系统中，优化问题的复杂性会呈指数级增长 [3] ，传统方法已不再适用。在 [4], 中，我们结合一种新思路与正交函数，求得了分数阶线性二次调节器问题的闭环解。正交函数是解决众多工程和数学问题的基础，涵盖微分方程和积分方程、逼近理论以及动力学系统等 [5]。本文针对包含二次 Bolza 跟踪性能指标和分数阶线性状态方程的分数阶最优控制问题，提出一种反馈最优控制方法。

分数阶模型比整数阶系统更能描述某些系统的行为 [6]。分数阶模型如今已成为工程科学中成熟的工具 [7]。分数阶微分方程应用于工程、科学、金融和生物工程领域 [8]。在工程系统中，我们会遇到跟踪问题，例如参见 [9,10]。

†航空航天与机械工程组，Ronin Institute，美国蒙特克莱尔。电子邮箱: iman.malmir@outlook.com

设计分数阶系统的反馈控制有两种不同的思路。第一种思路是先设计控制器，然后通过调整一些参数来确定该控制器的各个元素。许多论文都研究过第一种思路。第二种思路则是针对既定的性能指标，根据目标研究分数阶最优控制问题，其中反馈控制器必须满足某些条件和方程；值得注意的是，只有少数研究从第二种思路出发，探讨了分数阶最优控制问题的闭环解。此外，还有许多关于分数阶最优控制的文献仅研究了开环解。更多详情请参见 [11]。

许多重要的现实挑战都可表述为不同类别控制系统 [12]上的优化问题。例如， [13]开发了用于揭示帕金森病相关神经回路背后生理机制的计算模型。若干文献提出了用于分数阶线性二次跟踪的闭环控制器。

在 [6], 中，给出了分数阶描述符系统跟踪控制问题的最优跟踪控制—状态对的显式公式。 [14]介绍了分数阶跟踪最优控制在控制糖尿病患者血糖水平方面的一项应用。本文将利用 [4, 15, 16] 中的结果，求解分数阶线性跟踪二次型最优控制问题的闭环最优控制器。利用 [11, 17], 中的结果，我们可以将这一思路扩展到非线性跟踪系统。

近期文献研究了分数阶最优控制问题的解。在 [18], 中，针对带有终端与过程状态约束的分数阶最优控制问题，推导了庞特里亚金极大值原理，并得出了该问题的必要最优性条件。在 [19],中，研究了无限时域上具有二次型代价泛函的奇异线性沃尔泰拉积分控制系统，并讨论了最优控制的存在性。

分数阶最优控制问题通常通过将整数阶导数替换为所需意义下的分数阶导数来定义 [20–22]。文献 [23–25] 研究了不同类别的分数阶最优控制问题。在定义新的分数阶系统时，我们发现可能存在不一致之处，例如参见 [24] 中的第 4.2.1 节。求解分数阶最优控制问题无疑比求解旧的整数阶问题更加复杂；尽管存在这种复杂性，本研究仍将该方法应用于分数阶问题。

有些理论研究只从理论上探讨最优控制问题，却连一个简单的例子都不求解；但事实上，显而易见，使用这些方法中的任何一种都无法找到分数阶系统的最优控制律。在最优控制理论中，每一种求解方法都应在实际的最优控制问题上进行测试和应用，例如参见 [1] 和 [2]。我们的方法兼具理论性和实用性。许多文献只从理论上讨论整数阶最优控制问题的求解，任何人都能看出，即使是一个简单的一阶优化问题也未曾求解过，因此无法验证其方法。

只提出纯理论而不加以应用，实际上毫无用处，因为作为现实世界系统模型的最优控制问题需要实用且高效的求解方法。这类研究只从理论上探讨最优控制问题，并给出许多公式，却连一个简单的优化问题都不求解，例如参见 [26], 但在实践中，这些方法甚至无法求解非典型最优控制问题的整数阶（旧版本）情形，例如 [27],更不用说求解这类 [24]中的难题了。

2 问题陈述

定义 1。 函数 $f(t)$ 的 α 阶左 *Caputo*导数“${}_0^C D_t^\alpha f(t)$”定义为

$$ {}_0^C D_t^\alpha f(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\rho)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\rho)\, d\rho, & n-1 < \alpha < n \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \alpha = n, \end{cases} $$

其中 $n \in \mathbb{N}$。

备注 1。 $\alpha \in$ 阶左 *Caputo*导数$(0,1[$ 的形式为

$$ {}_0^C D_t^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\rho)^{-\alpha} \dot{f}(\rho)\, d\rho. $$

显然，可以看出，项$(t-\rho)^{-\alpha}$ 内在地存在于积分中。

2.1 分数阶二次线性跟踪问题

分数阶线性跟踪问题由以下被控对象构成:

$$ {}_0^C D_t^\alpha \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \quad 0 \le t \le t_f \tag{1} $$

实值性能指标

$$ J = \tfrac{1}{2}[\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{r}(t_f)]^\top \mathbf{T}[\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{r}(t_f)] + \tfrac{1}{2}\int_0^{t_f} \{[\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)]^\top \mathbf{Q}[\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)] + \mathbf{u}^\top(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)\}\, dt, \tag{2} $$

且初始条件为 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, ，其中终止时间 t^f 固定，且 $\mathbf{x}(t^f)$ 是自由的。这里，$C\ 0\ D_t^\alpha$是 α 阶左 Caputo导数， $\alpha \in (0,1]$,$\mathbf{x}: [0,t_f] \to R^q$和 $\mathbf{u}: [0,t_f] \to R^r$分别为状态向量和控制向量，$A(t) \in R^{q\times q}$、$B(t) \in R^{q\times r}$、$: R \times R^q \times R^r \to$为实值函数，$\mathbf{r}: [0,t_f] \to R^q$为期望状态向量或参考状态向量，且在其区间内连续；T、$Q(t) \in R^{q\times q}$为对称半正定矩阵，$R(t) \in R^{r\times r}$ a 为对称正定矩阵。A(t)、B(t)、Q(t) 和 R(t) 可以是时变的，也可以是时不变的。我们的目标是控制该系统，使状态 x(t) 在时间区间 $[0,t_f]$ 内尽可能贴近期望状态 r(t)，同时将控制努力的支出降至最低。换言之，最优跟踪问题是为分数阶系统 (1) 寻找闭环最优控制 u^*(t)，使性能指标 (2) 最小化。

备注 2。 在跟踪最优控制问题中，我们希望最小化实际状态与参考状态或期望状态之间的误差，因此在性能指标中考虑平方项‘$(\mathbf{x}(t)-\mathbf{r}(t))^2$’，以减小跟踪误差。虽然我们希望最优状态等于期望参考状态，但在现实中，我们

$$\mathbf{x}^*(t) \neq \mathbf{r}(t).$$

为实现这一目标，我们设计加权矩阵的取值，例如参见 *[9]*。此外，若取$\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{r}(t) \equiv \mathbf{0}$，那么在性能指标（*2*）的被积函数中取0 并无任何现实意义。

2.2 分数阶二次非线性跟踪问题

分数阶非线性跟踪问题包含由下式描述的被控对象

$$ {}_0^C D_t^{\alpha}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \tag{3}$$

性能指标或代价泛函由式（2）给出。

2.3 纯分数阶二次线性/非线性跟踪问题：开放问题

在一些研究中，分数阶最优控制问题的性能指标也定义为分数阶次形式，例如，[23–25]。作为一个开放问题，我们可以考虑以下分数阶线性或非线性跟踪系统（1）和（3）的性能指标，而不是式（2），

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}(t), \alpha_1) = {} & \tfrac{1}{2}[\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{r}(t_f)]^{\top}\mathbf{T}[\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{r}(t_f)] \\ & + \tfrac{1}{2}\,{}_0^{RL}I_{t_f}^{\alpha_1}\left\{[\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)]^{\top}\mathbf{Q}[\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)] + \mathbf{u}^{\top}(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)\right\}, \end{aligned} \tag{4}$$

其中，阶数为 α 的函数$f(t)$的常数黎曼–刘维尔积分，在${}_{t_0}^{RL}I_{t_f}^{\alpha}f(t)$中记作“4”，其定义适用于$t_0 \leq t \leq tf$，定义如下： [24]

$${}_{t_0}^{RL}I_{t_f}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t_f}(t_f - t)^{\alpha-1}f(t)\,dt. \tag{5}$$

我们首先采用 [4] 中针对分数阶调节器系统给出的结果。然后，利用 [16], 中给出的变换和步骤，并结合 [15], 中给出的结果，得到第一个问题的最优性条件。之后，利用 [11] 中给出的结果以及前述变换，我们可以求解第二个分数阶最优控制问题。

注释 3. 在最优控制理论中，我们将被控对象描述为一组线性微分方程，从而构成一个线性调节器问题。该系统可以是液位控制系统、质量-弹簧-阻尼器系统、汽车悬架系统、n板式气体吸收器系统、搅拌釜式化学反应器、疾病治疗系统等。因此，可以看出，(1) 是以下系统的状态方程：

控制系统的状态或控制量可以表示温度、压力、密度、系统浓度的偏差、物种的质量分数以及釜式反应器各组分的入口进料速率，也可以表示疾病模型中的药物浓度等。

3 分数阶跟踪问题的闭环最优控制与最优性条件

引理1. 若函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 属于 $C[0,t_f]$，则对于 $\alpha \in (0.9,1]$

$$\int_0^{t_f} f(t)\,{}_0^C D_t^\alpha g(t)\,dt \simeq \Delta_{0f} - \int_0^{t_f} ({}_0^C D_t^\alpha f(t))g(t)\,dt, \tag{6}$$

其中 Δ_{0f} 表示常数项。

证明. 取 $\Delta_{0f} = \Delta_{0f}^0 + \Delta_{0f}^1 + \Delta_{0f}^2$，证明见 [4]。 □

以下几点值得注意：

- 对于 $\alpha = 1$，证明很简单，因此我们不再给出。此外，由于对于 $\alpha = 1$，我们有“=”（6）且对于 $\alpha \in (0.9,1)$，在≈中引理3.1证明的第九个等号之后的近似过程中，我们使用了“ [4], ，在（6）中使用了“≃
- 我们使用变分法来求得 [4] 中的最优性条件，这是最优控制理论中求得这些条件的一种常用方法。给定引理中包含常数项，但这些项用于边界条件，而我们的方法不需要它们。关于边界条件的推导，可参阅 [1] 第230–233页以及 [2] 第61–65页，这些都是最优控制理论方面的优秀参考资料。例如，可参见 [2]第65页的式（2.7.32）。 [4] 中的方法是一种混合方法（结合了两种方法，一种用于**K** 和**l**，另一种用于消除边界条件）。由于采用了另一种方法并结合这些方法，我们不需要边界条件，因此没有推导边界条件。这些项不会影响最优性条件，所以我们在本文的方法中没有讨论它们。

- 对于项$f(t)\,\Gamma^{\,1}{}_{(1-\alpha)}\,\overline{[(t-\rho)^{-\alpha}g(\rho)]}\Big|^{\rho=}{}_t$，利用 [4] 中针对 $\alpha \in (0.9,1)$给出的展开式，我们可以写成

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} f(t)\,[(t-\rho)^{-\alpha} g(\rho)]\Big|^{\rho=t} \approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} f(t)\Big[(t-\rho)^{1-\alpha} g(\rho) \sum_{m=0} \frac{\rho^m}{t^{m+1}}\Big]\Big|^{\rho=t}$$

or

$$\approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\Big[\sum_{m_1=0}\sum_{m_2=0}\sum_{m_3=0} (t-\rho)^{1-\alpha} f_{m_1} g_{m_2} t^{m_1-m_3-1} \rho^{m_2+m_3}\Big]\Big|^{\rho=t}$$

由于该项是常数，且用于求取边界条件，因此我们没有对其进行分析。在其他关系中，从注释 1 可以明显看出，该项 $(t-\rho)^{-\alpha}$ 对于 $\rho \to t$ 本身就存在于积分中。

• 在分析 $\delta J_a(\mathbf{u}^*(t)) = 0$ 中给出的 [4], 积分中从 0 到 t_f的常数是确定的，它们是常数值，不会影响最优性条件，无论它们是否依赖于函数f 和 g。定积分是常数，我们没有讨论它们，因为它们不会影响 [4]中以式 (17) 给出的最优性条件。从我们的方法可以很容易看出，无需推导状态变量和协态变量的边界条件。

• 在传统方法中，使用这类条件（初末条件）通过其微分方程求得最优状态和协状态（例如，参见 [2]中的表2.1第4步），而在 [4]的方法中则不需要这些条件。因此，我们没有讨论 [4]中的常数项。

3.1 分数阶二次线性跟踪问题的最优性条件

定理1。 对于 (1) 和 (2)中给出的分数阶二次线性跟踪问题，以及 $\alpha \in (0。9, 1]$ 其最优性条件为

$$\mathbf{Q}(t)(\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{r}(t)) + \mathbf{A}^\top(t)\boldsymbol{\lambda}^*(t) + {}_0^C D_t^\alpha \boldsymbol{\lambda}^*(t) \simeq \mathbf{0}, \tag{7}$$

$$\mathbf{R}(t)\mathbf{u}^*(t) + \mathbf{B}^\top(t)\boldsymbol{\lambda}^*(t) = \mathbf{0} \tag{8}$$

and

$$\mathbf{A}(t)\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}^*(t) - {}_0^C D_t^\alpha \mathbf{x}^*(t) = \mathbf{0}, \tag{9}$$

对于黎卡提矩阵$\mathbf{P}(t)$和向量$\mathbf{z}(t)$，取 $\boldsymbol{\lambda}^*(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{r}(t) + \mathbf{z}(t)$。$\mathbf{P}(t)$是如下黎卡提分数阶微分矩阵方程的解

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^1(\mathbf{P}(t))\mathbf{x}^*(t) = & {}_0^C D_t^{1-\alpha}[-\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{A}^\top(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}^*(t)] \\ & - \mathbf{P}(t){}_0^C D_t^{1-\alpha}[\mathbf{A}(t)\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^\top(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}^*(t)], \end{aligned} \tag{10}$$

对于协参考$\mathbf{v}(t)$，$\mathbf{z}(t)$ 是如下向量分数阶微分方程的解

$${}_0^C D_t^1 \mathbf{z}(t) = -{}_0^C D_t^{1-\alpha}[\mathbf{A}^\top(t)\mathbf{z}(t)] + \mathbf{P}(t){}_0^C D_t^{1-\alpha}[\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^\top(t)\mathbf{z}(t) - \mathbf{v}(t)]. \tag{11}$$

由于 $\alpha = 1$，我们在 =中有‘(7)；而对于 $\alpha \in (0.9,1)$，我们有‘≈’，因此在 ≃中使用‘(7)’。

证明。 首先，我们使用 [16]中给出的变换。然后，应用该变换对系统（1）重新建模。现在定义协参考向量 $\mathbf{v}(t)$，其中$\mathbf{A}(t)\mathbf{r}(t)$ 已知，并通过级数逼近可以从 Mittag–Le$_{C\ 0}D_t^\alpha \mathbf{r}(t)$ 函数求得，例如参见 [19]。因此，新系统为

$${}_0^C D_t^\alpha \bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t). \tag{12}$$

利用 [4] 和 [15], 中的讨论，我们可以得到最优性条件以及（7）–（9）和（10）、（11）中给出的分数阶微分方程。 □

引理*2*。假设在（*12*）中，对于常数 $\mu_1,\mu_2,\mu_3 > 0$, $\|A(t)\| \le \mu 1$, $\|v(t)\| \le \mu_3$，且由 $C(t) := -B(t)R^{-1}(t)B^\top(t)P(t)$, $\|C(\bar{}x(t),t) - C(\hat{}x(t),t)\| \le \mu_2\|\bar{}x - \hat{}x(t)\|$，其中$\bar{}x, \hat{}x \in R^q$。那么（*12*）有唯一解。

证明。 证明与 [4]中引理 3.5 的证明类似。 □

3.2 分数阶二次线性跟踪问题的闭环最优控制

分数阶二次线性跟踪问题的最优控制律为

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{l}(t), \tag{13}$$

其中

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^\top(t)\mathbf{P}(t),$$

$\mathbf{K}(t)$ 是卡尔曼增益，黎卡提矩阵 $\mathbf{P}(t)$ 是式（10）所给矩阵分数阶微分黎卡提方程的解。采用传统方法时，式（13）中的项 $\mathbf{l}(t)$ 应由给定的分数阶微分方程（11）推导得到。然而，我们采用 [15] 中提出的混合方法，无需求解上述方程即可求得该项，并进一步以一种新形式给出该项。

4 仿真研究

本节将应用所提出的方法，求解分数阶跟踪最优控制问题的闭环最优控制。

4.1 例1

考虑由范德波尔振荡器方程 [28]构建的分数阶跟踪范德波尔振荡器问题。该系统表示为

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha x_1(t) &= x_2(t), \\ {}_0^C D_t^\alpha x_2(t) &= -x_1(t) + (1 - x_1^2(t))x_2(t) + u(t), \end{aligned}$$

其中$x_1(0) = 1$ 且$x_2(0) = 0$。跟踪问题的性能指标为

$$J = \frac{1}{2}\int_0^5 \left\{(x_1(t) - r(t))^2 + x_2^2(t) + u^2(t)\right\} dt,$$

其中$r(t) = (1 - 0.4t)\cos(t)$。该问题旨在求出最优控制律。

注 4. 该问题最初并非用于跟踪目的，但我们对其进行了修改，以实现所提出的方法。需要注意的是，为了获得更好的跟踪效果，我们必须增大加权矩阵$\mathbf{Q}$的取值，例如，参见 *[16]*,中的例 *1–3*，以及 *[29]*所给示例中的$\mathbf{Q}$。

我们将最优控制律定义为

$$u^*(t) = -[k_{11}(t),\ k_{12}(t)]\mathbf{x}^*(t) + [k_{11}^r(t),\ 0][1 + (1 - 0.4t)\cos(t); 0]$$

最优状态、最优控制和反馈增益如图1 所示，针对 $\alpha = 0$。9. 考虑备注4，我们改变状态加权矩阵的值q_{11}，并在性能指标中设定 $10(x_1(t) - r(t))^2$，即：

$$J = \frac{1}{2}\int_0^5 \left\{10(x_1(t) - r(t))^2 + x_2^2(t) + u^2(t)\right\} dt.$$

结果如图2 所示。可以看出，通过采用这一新的状态加权矩阵值，系统能够更好地跟踪所需的参考信号$r(t)$。

4.2 示例2

这是在中研究过的一个示例的分数阶跟踪版本问题。分数阶状态方程为

$$ {}_{0}^{C}D_{t}^{\alpha}\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\boldsymbol{\kappa} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/m_L \end{bmatrix}^{\top} u(t), $$

性能指标为

$$ J = \int_0^{10} \left([\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)]^{\top} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\kappa} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} [\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)] + u^2(t) \right) dt, $$

where

$$ \mathbf{r}(t) = [0;0;0;-\tfrac{13}{450}t^2 + \tfrac{163}{450}t - \tfrac{1}{3};0;0;0;0;0;0], $$

$$ \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_L \end{bmatrix}, $$

$$ \boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_1 + \kappa_2 & -\kappa_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa_2 & \kappa_2 + \kappa_3 & -\kappa_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_3 & \kappa_3 + \kappa_4 & -\kappa_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \kappa_{L-2} + \kappa_{L-1} & -\kappa_{L-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\kappa_{L-1} & \kappa_{L-1} + \kappa_L & -\kappa_L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\kappa_L & \kappa_L \end{bmatrix}. $$

初始条件为

$$ x_L(0) = 1, x_l(0) = 0, l = 1, 2, \ldots, L-1, L+1, \ldots, 2L. $$

该问题旨在求解分数阶跟踪系统的最优控制律。取 $\alpha = 0.95$、$L = 5$、$m_l = 10\,\mathrm{kg}$，以及 $\kappa_l = 1\,\mathrm{N/m}$，其中 $l = 1$、2、.....、L。因此，$\mathbf{x}(0) = [0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 1;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0]\,\mathrm{m}$。

注5。 该系统最初并非用于跟踪目的。需要注意的是，为了更好地解决跟踪最优控制问题，我们必须尝试其加权矩阵的不同取值，例如参见 *[16]* 和 *[29]*数值实验中给出的加权矩阵取值。

对于该分数阶跟踪系统，通过将最优控制律取为

$$ u^*(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{K}^r(t)[0;0;0;-\tfrac{13}{450}t^2 + \tfrac{163}{450}t - \tfrac{4}{3};0;0;0;0;0;0], $$

最优状态与控制以及反馈增益如图 3。

许多现有理论方法无法求得这些问题的闭环解。

参考文献

[1] D.E. Kirk, 《最优控制理论：导论》, Courier Corporation, 2004年。[2] D.S. Naidu, 《最优控制系统》, 爱达荷州立大学, 美国, CRC出版社, 2003年。[3] Y. Chen、Y. Nan、X. Sun、T. Tan, 《航天器再入轨迹的优越控制》, 《应用科学》, 14（2024）：10585。[4] I. Malmir, 《分数阶线性二次时变系统的新型闭环控制器》, 《数值代数、控制与优化》, 14卷, 第2期（2024）：366–403。[5] S. Kumar、A. Kumar Awasthi、S. Kumar Mishra、H.Chandra Yadav、S. Lal, 《利用第一类伪切比雪夫小波技术估计绝对连续信号的误差并求解阿贝尔积分方程》, 《Franklin Open》, 10（2025）：100205。[6] M. Muhafzan、A. Nazra、A. I. Baqi、Z. Zulakmal, 《分数阶描述符系统的跟踪控制问题》, 《控制论与物理学》, 11（2022）：87–93。[7] C. Han、Y. Chen、D.-Y. Liu和D. Boutat, 《采用移位伯恩斯坦–勒让德多项式配置算法对变分数阶模型的黏弹性旋转梁进行数值分析》, 《分形与分数阶》5卷, 第1期（2021）：8。[8] A. K. Hameed、M. M. Mustafa, 《利用有限差分法求解带时滞的线性分数阶微分方程》, 《伊拉克科学杂志》（2022）：1232-1239。[9] J. Sheng-Hong Tsai、Y.-T. Liao、F. Ebrahimzadeh、S.-Y. Lai、T.-J. Su、S.-M. Guo、L.-S. Shieh和T.-J. Tsai, 《一种用于连续时间非方阵非最小相位系统的新型PI最优线性二次状态估计跟踪器》, 《国际系统科学杂志》, 48（2017）：1438–1459。[10] M. Pal、S. Mondal、S. Chowdhury、A. Mondal、A. Mukherjee, 《采用事件触发PID控制的压水堆堆芯功率控制》, 载于《2025年IEEE第一届电气工程智能与可持续发展国际会议论文集》（SSDEE）, （2025）：1–6。[11] I. Malmir, 《分数阶非线性二次系统的新型闭环控制器》, 《数学建模与控制》, 3（2023）：345–354。[12] V. Ayala、M. Torreblanca、W. Valdivia, 《线性控制系统在现实世界中的应用与理论挑战》, 《对称性》, 13卷, 第2期（2021）：167。[13] Y. Tian, 《深部脑刺激（DBS）影响下基底神经节和丘脑核团的计算模型开发及其对基于模型的深部脑刺激闭环控制的意义》, 博士论文, 多伦多大学, 加拿大, 2024年。[14] M. Muhafzan、A. Nazra、A. I. Baqi、Z. Zulakmal, 《分数阶跟踪控制及其在糖尿病治疗中的应用》, 载于《AIP会议论文集》, 第2920卷, 第1期, AIP出版社, （2024）。[15] I. Malmir, 《存在扰动时多重分数阶高阶线性二次调节器系统的次优控制律》, 《控制与优化研究成果》, （2023）, 100251。[16] I. Malmir, 《一种适用于具有多重时滞的时变系统的新型基于小波的最优线性二次跟踪器》, 《统计、优化与信息计算》, 9卷, 第2期（2021）：418–434。[17] I. Malmir, 《利用小波实现分数阶非线性时滞系统最优控制的通用框架》, 《统计、优化与信息计算》, 8卷, 第4期（2020）：858–875。

[18] JMoon, 《带终端与过程状态约束的Caputo分数阶最优控制问题的庞特里亚金型极大值原理》, AIMS Mathematics, 10（2025）: 884– 920。[19] J.-P. Huang, H.-C. Zhou, 《奇异Volterra积分方程的无限时域线性二次最优控制问题》, SIAM控制与优化杂志, 63（2025）: 57–85。[20] G. Dewangan, A. Singh, A. Kanaujiya, 《采用Laguerre小波方法求解广义分布阶分数阶最优控制问题》, 数学建模杂志, （2025）: 707–725。[21] A. Singh, A Kanaujiya., J. Mohapatra, 《用于求解多维变阶分数阶最优控制问题的Chelyshkov小波方法》, 应用数学与计算杂志, 70（2024）: 3135–3160。[22] S. Karami, M. H. Heydari, D. Baleanu, M. Shasadeghi, 《采用 ψ-Caputo分数阶导数的分数阶时滞最优控制问题的广义帽函数》, 应用科学中的数学方法, （2025）。[23] I. Malmir, 《一种适用于多种具有分数阶性能指标的分数阶时滞最优控制问题的高效方法》, 国际动力学与控制杂志, 11, 第2期（2023）: 2886–2910。[24] I. Malmir, 《带约束的新型纯多阶分数阶最优控制问题: 二次规划与线性规划方法》, ISA Transactions, 153（2024）: 155–190。[25] I. Malmir, 《偏微分方程的纯分数阶最优控制: 非线性、时滞和二维偏微分方程》, 泛美数学杂志, 4（2025）: 9。[26] R. S. Hilscher, V. M. Zeidan, 《保持可控性的变换: 具有联合边界条件的非线性最优控制问题》, ESAIM: 控制、优化与变分法, 27（2021）: 75。[27] I. Malmir, S. H. Sadati, 《通过小波将具有二次准则的线性时变最优控制问题转化为二次规划问题》, 应用分析杂志, 26（2020）: 131–151。[28] S. Lal, D. K. Singh, 《Hölder类函数的连续模及采用第六类切比雪夫小波求解Rayleigh、Van der Pol和杜芬方程》, 印度纯粹与应用数学杂志, （2025）。[29] T. Cuchta, D. Poulsen, N. Wintz, 《采用连续协调分数阶导数的线性二次跟踪》, 欧洲控制杂志, 72（2023）: 100808。[30] M. L. Nagurka和S.-K. Wang, 《用于线性二次最优控制的基于切比雪夫的状态表示》, 动态系统、测量与控制杂志, 115（1993）: 1–6。

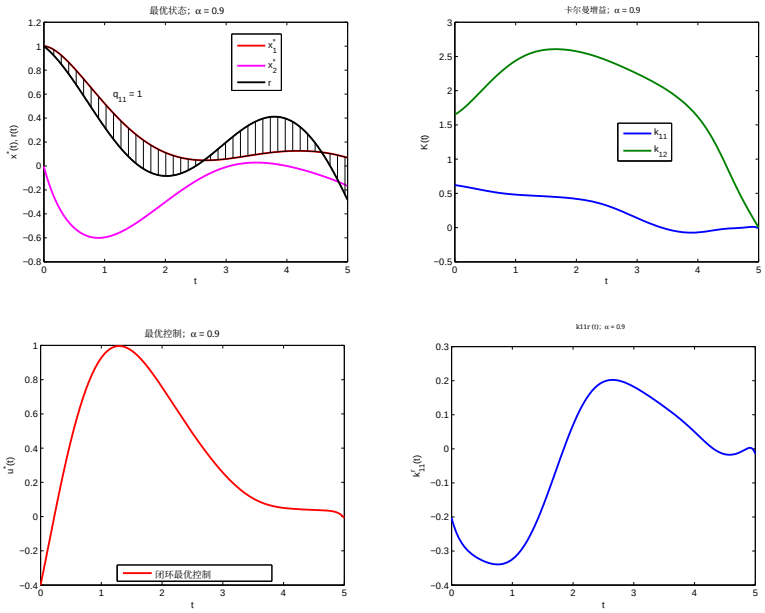

图1：例1的最优解，$q_{11} = 1$ 和 $\alpha = 0.9$

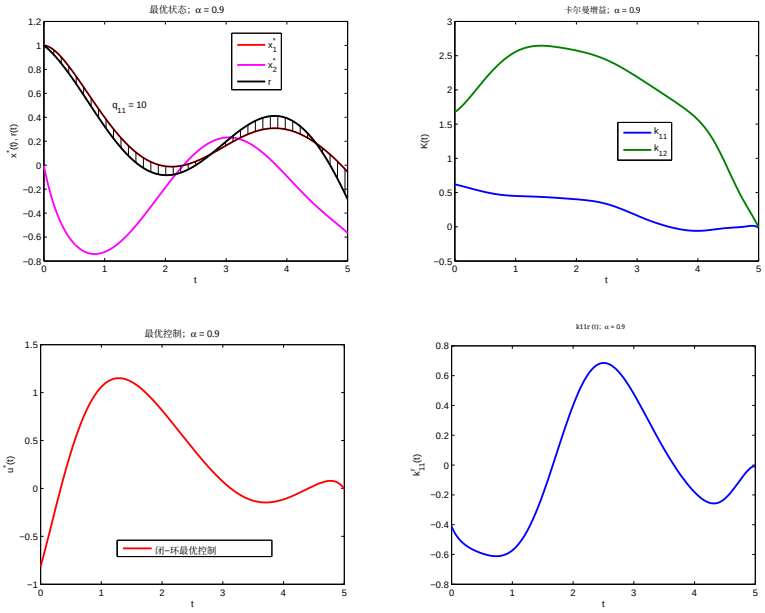

图2：例1的最优解，$q_{11} = 10$ 和 $\alpha = 0.9$

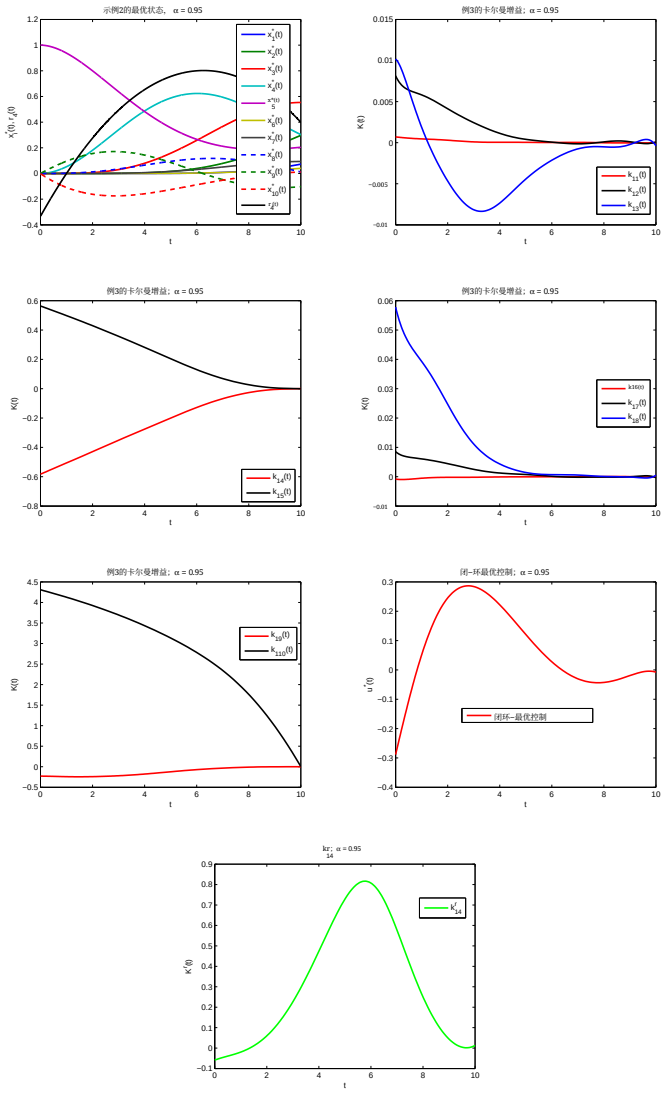

图3：示例2的最优解及 $\alpha = 0.95$