arXiv:2602.01252v1 [math.NT] 1 Feb 2026

幂相关基数的等差数列中的同时 Niven 数

Scott Duke Kominers*

Abstract. 最近，Harrington、Litman 和 Wong [《澳大利亚数学学会通报》的 2024] 证明表明，对于任意固定的 $b \geq 2$，每个等差数列都包含无穷多个b 进制 Niven 数。我们使用稀疏循环节构造来处理同一问题的结构化双进制版本，证明每个公差与 b互素的等差数列都包含无穷多个整数，这些整数同时是 b-Niven 数和 b^k-Niven 数（事实上，我们可以得到同时具有 $\ell = 1$、……、 k个b^ℓ-Niven 数性质的整数）。

1. 引言

如果一个正整数 *Niven* 数（或哈沙德数）在给定进制下可被其在该进制中的数字之和整除，则称其为该进制下的 Niven 数。这些数最初由 Kaprekar [Kap55] 在十进制情形下引入，此后人们从各种解析和组合的角度对其进行了研究（例如参见 [KGB80、KC84、KC89、Gru94、Cai96、DD03、DKDK03、FILS07、DKDK08、Wit16、San21]）。

最近，Harrington、Litman 和 Wong [HLW24]证明了每一个等差数列都包含无穷多个基数为b 的尼文数，且对任意固定的 $b \geq 2$均成立。受其分析启发，我们在此研究其问题的一个变体，针对某些同时成立的多进制尼文数条件。

2020 数学学科分类。 主分类：11A63 / 次分类：11B25。关键词与短语。 数位和、Niven（Harshad）数、等差数列、乘法阶、循环节数。

*哈佛商学院；哈佛大学经济学系与数学科学及应用中心；以及 a16z crypto。我衷心感谢 Ben Golub、Steven J. Miller、Ken Ono、Jesse Shapiro 以及编辑（John Loxton）提出的有益意见，并特别感谢匿名审稿人极为细致的审读。本研究的部分工作是在我访问麻省理工学院斯隆管理学院技术创新、创业与战略管理（TIES）小组期间完成的；我非常感谢他们的盛情款待。在准备本文时，我使用大语言模型协助完成了部分计算，尤其是 GPT-5.2-Pro 和 Claude-Sonnet-4.5（二者均通过 Poe 访问，并得到 Quora 的支持；我是 Quora 的顾问）。问题、方法以及最终的书面表述均为我本人所为；当然，任何错误仍由我负责。

我们处理该问题一个结构特别的双进制版本：考虑进制对 $\{b, B\}$，其中 $B = b^k$ 是 b的幂。对于单一基数 b，基于乘法阶的循环节数论证已经给出初等证明，表明在公差与该基数互素的任意等差数列中存在无穷多个此类数。我们说明如何将这一想法与数位和兼容性构造——即 Witno 的“稀疏循环数”的一个版本 [Wit16]——结合起来，从而得到显式的同时 b 进制与 b^k进制尼文数，且它们属于每一个这样的等差数列。作为推论，我们证明可以在这些等差数列中同时强制尼文数性质，对任意（有限）多个如下之幂： b。

将范围限制在幂相关基数上，并非只是为了方便，而是反映了一种真正的结构性简化。当 $B = b^k$ 时，每个 k 进制的 B 位都对应一个 b 进制的 k 位数字块，因此，只要让 B 进制的数字较小（事实上，在 $\{0, 1, \dots, b-1\}$ 中），我们就能确保从 B 进制转换到 b 进制时不会在数字块之间产生进位，从而保持数位和不变。这种数位块兼容性提供了一种具体机制，将两种进制下的 Niven 数条件联系起来。我们利用这种联系，并结合一种基于乘法阶的“带间隔的循环数”构造，从而同时确保所需的模 m 剩余类以及被指定数位和整除。

1.1. 主要结果。对于满足 $0 \le r < m$ 的正整数 $m \ge 1$ 和 r，我们记

$$S_{m,r} := \{n \in \mathbb{Z}_{\ge 1} : n \equiv r \pmod m\},$$

表示等差数列 $r + t \cdot m$。

THEOREM 1.1. 设 $b \ge 2$ 和 $k \ge 1$ 为整数，并令 $B = b^k$。若 $m \ge 1$ 满足 最大公约数$(m, b) = 1$，那么对于任意满足 $0 \le r < m$ 的 r，都存在无穷多个整数$n \in S_{m,\, r}$ 使得

$$\mathsf{s}_b(n) \mid n \quad \textit{and} \quad \mathsf{s}_B(n) \mid n;$$

也就是说，等差数列 $S_{m,r}$ 中有无穷多个 n 同时是 b-*Niven* 数和 b^k-*Niven* 数。此外，对于任意 $s_0 \ge 1$，都存在这样的 n，使得$\mathsf{s}_b(n) = \mathsf{s}_B(n) \ge s_0$。

2. 预备知识

2.1. 数位和与进制展开。对于整数基数 $g \ge 2$，每个正整数 c 都有唯一的基数为 g 的展开

$$c = \sum_{i=0}^{L} d_i g^i, \qquad d_i \in \{0, 1, \dots, g-1\},\ d_L \ne 0;$$

在这种情况下， c 的基数为 g 的数字之和为

$$\mathsf{s}_g(c) = \sum_{i=0}^{L} d_i.$$

为方便起见，令 $\mathsf{s}_g(0) = 0$。如果 $\mathsf{s}_g(c) \mid c$，则称 c 为 g-*Niven* 数。

我们还记

$$\operatorname{rad}(c) := \prod_{\substack{p \mid c \\ p \text{ prime}}} p$$

整数 $c \ge 1$ 的根基，即 c 的不同素因子的乘积，约定 $\mathsf{rad}(1) = 1$。

2.2. 进制之间的相容性 b **和** $B = b^k$。对于幂相关基数 b 和$B = b^k$，一个基数为 B 的数字占据一组由 k 个基数为 b 的数字组成的数字块。以下关于这些数字块之间联系的初等观察是我们构造的核心。

PROPOSITION 2.1. 令 $b \geq 2$ 和 $k \geq 1$ 为整数，并设 $B = b^k$。假设 n可表示为如下形式的基数为 B 的展开式

$$n = \sum_{i=0}^{L} d_i B^i \quad with \quad d_i \in \{0, 1, \ldots, b-1\} \text{ for all } i \text{ and } d_L \neq 0.$$

于是，我们有

$$\mathsf{s}_b(n) = \mathsf{s}_B(n) = \sum_{i=0}^{L} d_i.$$

PROOF. 记 $B^i = b^{ki}$，于是

$$n = \sum_{i=0}^{L} d_i b^{ki}.$$

由于 $0 \leq d_i \leq b-1$，$d_i b^{ki}$ 的基数为 b 的展开式仅在位置 ki 上有一个数字 d_i，其余位置均为 0。各个位置 ki 互不相同，因此对 i求和时，基数为 b的每个位置至多出现一个非零数字，故不会发生进位。因此，基数为 b 时的数位和等于 $\sum_i d_i$。另一方面，根据定义，基数为 B 时的数位和也等于 $\sum_i d_i$。□

REMARK 2.2. 更一般地，若 $n = \sum_{i=0}^{L} d_i B^i$ 是基数为 B 的展开式，且 $0 \leq d_i < B = b^k$，那么将每个系数 d_i 按基数 b 展开时至多使用 k 个数字，占据位置块 ki，$ki+1$，…，$ki+k-1$；不同 i对应的位置块互不重叠，因此它们之间不会发生进位。因此

$$\mathsf{s}_b(n) = \sum_{i=0}^{L} \mathsf{s}_b(d_i).$$

命题 2.1 是如下特殊情形：对所有 $d_i < b$，都有 i，由此得到$\mathsf{s}_b(d_i) = d_i$。

2.3. 乘法阶。 对于整数 $a \in \mathbb{Z}$和 $N \geq 1$，若 $\gcd(a, N) = 1$，则 a 模 N 的乘法阶 为

$$\mathrm{ord}_N(a) := \min\{\omega \in \mathbb{Z}_{\geq 1} : a^\omega \equiv 1 \pmod{N}\};$$

由 $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$的有限性可知，只要 $N \geq 2$，$\mathrm{ord}_N(a)$ 就存在。（当 $N = 1$时，对所有 ω，同余式 $a^\omega \equiv 1 \pmod 1$ 均成立，而上述定义给出 $\mathrm{ord}_1(a) = 1$。）

我们还采用标准形式的中国剩余定理（CRT）：若 $\gcd(M_1, M_2) = 1$，则对任意剩余 x_1 (模 M_1) 和 x_2 (模 M_2)，存在唯一的剩余类x (模 M_1M_2) 满足这两个同余式（例如参见 [NZM91]第 2.3 节）。

3. 构造

现在我们介绍同时尼文数构造。以下固定整数 $b \geq 2$、$k \geq 1$，令 $B = b^k$，并固定等差数列 $S_{m,\,r}$，其中 $m \geq 1$、$0 \leq r < m$，且 $\gcd(m,\ b) = 1$。

步骤 1：可容许数字和。 我们选择整数 $s \geq 1$，使其同时满足

$$s \equiv r \pmod{m} \qquad \text{and} \qquad \gcd(s, b) = 1; \tag{1}$$

我们称这样的 s 为可采纳的。

步骤 2：间距参数。 由于 $B = b^k$，我们有 $\gcd(B, ms) = 1$ 当且仅当 $\gcd(b, ms) = 1$。对于每个可采纳的 s，假设 $\gcd(s, b) = 1$，便可推出 $\gcd(ms, b) = 1$，因为我们选择了满足 $\gcd(m, b) = 1$的 m和 b。因此，我们可以定义[1]

$$\omega_s := \operatorname{ord}_{ms}(B). \tag{2}$$

步骤 3：基数为 B的稀疏循环单位数。定义

$$n_s := \sum_{j=0}^{s-1} B^{j\omega_s}; \tag{3}$$

等价地，由于该和是等比数列的和，

$$n_s = \frac{B^{s\omega_s} - 1}{B^{\omega_s} - 1}.$$

我们在命题 4.1 中证明 $n_s \equiv r$ （模 m），且 $\mathsf{s}_b(n_s) = \mathsf{s}_B(n_s) = s$，并且$s \mid n_s$；也就是说，对于任意可采纳的 s，所构造的整数 n_s 同时是 b-Niven 数和B-Niven 数。随后，我们在第 1.1 节完成定理5的证明，方法是证明存在无穷多个可采纳的 s。

Remark 3.1。 按构造，整数 n_s 在（3）中是辅助基数 B^{ω_s}中的长度为 s 的循环单位数，即：

$$n_s = 1 + (B^{\omega_s}) + (B^{\omega_s})^2 + \cdots + (B^{\omega_s})^{s-1}.$$

等价地，在基数 B 中，它是一个 稀疏循环单位数，其中各个 1 之间间隔 $\omega_s - 1$ 个位置。这一观点将我们的构造与 Witno 对广义循环单位数的研究联系起来 [**Wit16**]（另见 [**Wit13**]）。在 Witno 的记号中（该记号与我们的记号略有重叠，因此本备注中仅暂时采用）：对于整数 $n \geq 1$， $k \geq 1$和基数 $b \geq 2$，我们定义

$$R_{n,b,k} := \sum_{j=0}^{n-1} b^{jk} = \frac{b^{nk} - 1}{b^k - 1},$$

它在基数 b 中是由 n 1组成的字符串，各组之间由 $k-1$ 0组成的区块分隔；等价地$R_{n,\,b,\,k} = R_{n,\,b^k}$是基数 b^k中的广义循环单位数。我们的 n_s 恰好是 Witno 所定义的形式，只是将基数 b替换为 B，并将间隔参数 k 替换为 ω_s。

Witno 的定理4.2给出了判定这类稀疏重复单位数何时为 b-Niven 数的乘法阶准则。相比之下，我们选择间距 ω_s =ord$_{ms}$(B)，使得

$$B^{\omega_s} \equiv 1 \pmod{ms},$$

从而迫使同余 $n_s \equiv s \pmod{ms}$，因而得到 $s \mid n_s$，同时强制满足等差约束 $n_s \equiv r \pmod{m}$。

[1]注意，任何满足 $B^\omega \equiv 1 \pmod{m}$ 和 $B^\omega \equiv 1 \pmod{s}$ 的正整数 ω 都足以进行下面的同余计算；取 $\omega_s = \operatorname{ord}_{ms}(B)$ 是一种方便的规范选择，可确保这些同余式成立（事实上，还能保证更强的同余式 $B^{\omega_s} \equiv 1 \pmod{ms}$）。

4. 验证所需性质

PROPOSITION 4.1. 假设 s 满足(1)，并定义 ω_s 与 n_s 由(2) 与(3)分别给出。则：

(1) $n_s \equiv r$ (模 m)，因此 $n_s \in S_{m,r}$；(2) $\mathsf{s}_B(n_s) = \mathsf{s}_b(n_s) = s$；(3) $s \mid n_s$。

特别地，n_s 同时是 b-*Niven* 数和 B-*Niven* 数。

PROOF. 由于 $\omega_s = \mathsf{ord}_{ms}(B)$，按构造，我们有 $B^{\omega_s} \equiv 1$ (模 ms)。因此，对于每个 $j \geq 0$，我们有

$$B^{j\omega_s} = (B^{\omega_s})^j \equiv 1 \pmod{ms}. \tag{4}$$

将（3）模 ms展开，并利用（4），可得

$$n_s = \sum_{j=0}^{s-1} B^{j\omega_s} \equiv \sum_{j=0}^{s-1} 1 = s \pmod{ms}. \tag{5}$$

将（5）模 m 化简，得到 $n_s \equiv s$ （模 m），又因为 $s \equiv r$ （模 m），所以得到$n_s \equiv r$ （模 m），从而证明了第 1部分。将（5）模 s 化简则得到

$$n_s \equiv s \equiv 0 \pmod{s},$$

从而证明了第 3部分。

对于第2部分，在 n_s的基数为B 的展开中，各项是 B 的互不相同的幂，系数均为1，因此在基数为 B时不会发生进位：位置0、ω_s、$2\omega_s$、……、$(s-1)\,\omega_s$上是1，其余所有位置上都是0。由此可得 $\mathsf{s}_B(n_s) = s$。由于 n_s 的所有基数为B 的数字都属于 $\{0,1\} \subseteq \{0,1,\ldots,b-1\}$，命题 2.1 随即给出 $\mathsf{s}_b(n_s) = \mathsf{s}_B(n_s) = s$。□

5. 可容许的 s的无穷性

还需证明可容许的 s 有无穷多个，并且由此得到的 n_s彼此不同。

LEMMA 5.1. 对于任意 $b \geq 2$ 和 $m \geq 1$ 满足 最大公约数$(m,b) = 1$，存在无穷多个整数 $s \geq 1$ 满足 (1) 对于任意剩余类 r (模 m)。此外，对于任意 $s_0 \geq 1$，存在这样的 s 满足 $s \geq s_0$。

PROOF. 令 $q := \mathsf{rad}(b)$，我们有最大公约数$(m,q) = 1$，因为最大公约数$(m,b) = 1$。根据中国剩余定理，同时同余式

$$s \equiv r \pmod{m} \qquad \text{and} \qquad s \equiv 1 \pmod{q}$$

有一个解 $s \equiv s^*$ (模 mq)。令 s^* 表示该剩余类中最小的正整数。每个整数

$$s = s^* + t(mq) \qquad (t \geq 0)$$

于是满足 $s \equiv r$ (模 m) 和 $s \equiv 1$ (模 q)；因此，对于这样的 s，我们有最大公约数$(s,q) = 1$。由于 q 与 b具有相同的素因子，这意味着最大公约数$(s,b) = 1$。任取足够大的 t，即可得到无穷多个满足条件的 s；并且通过将 t 取得足够大，可以确保 $s \geq s_0$。□

LEMMA 5.2. 若 s 与 s' 是不同的可容许整数，则 $n_s \neq n_{s'}$。

PROOF. 我们证明逆否命题：若 $n_s = n_{s'}$，则先验地，

$$\mathsf{s}_B(n_s) = \mathsf{s}_B(n_{s'}). \tag{6}$$

但是根据命题 2 的第 4.1 部分，我们有 $\mathsf{s}_B(n_s) = s$ 和 $\mathsf{s}_B(n_{s'}) = s'$；因此，(6) 意味着 $s = s'$。 □

PROOF OF THEOREM 1.1. 根据引理 5.1，存在无穷多个可 admissible 的整数 s。对于每一个这样的 s，命题 4.1 表明 $n_s \in S_{m,\,r}$并且 n_s 同时是 b-Niven 数和 B-Niven 数。引理 5.2 表明，与可 admissible 整数 n_s 相关的s 彼此均不相同，从而得到无穷多个具有所需性质的整数。

为了加强结论，给定 $s_0 \geq 1$，我们选择一个可 admissible 的 $s \geq s_0$（根据引理 5.1，这样的对象存在）。命题 2 的第 4.1部分随后给出$\mathsf{s}_b(n_s) = \mathsf{s}_B(n_s) = s \geq s_0$，如所需。 □

6. 说明性示例

取 $b = 2$、$k = 3$，于是 $B = b^k = 8$。令 $m = 5$ 和 $r = 3$。

我们选择 $s \equiv 3 \pmod 5$ 且 $\gcd(s,2) = 1$；满足条件的最小选择是 $s = 3$。我们有

$$\begin{aligned} 8 &\equiv 8 \pmod{15}, \\ 8^2 \equiv 64 &\equiv 4 \pmod{15}, \\ 8^4 \equiv 16 &\equiv 1 \pmod{15}, \end{aligned}$$

并且由于 $8^2 \not\equiv 1 \pmod 15$，我们有 $\omega_s = 4$。

于是该构造给出

$$n_s = 1 + 8^4 + 8^8 = 1 + 4096 + 16777216 = 16781313.$$

现在 $n_s \equiv 3 \pmod 5$，因此 $n_s \in S_{5,3}$。此外，由于 $8^4 \equiv 1 \pmod 3$，我们有

$$n_s \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod 3,$$

所以 $3 \mid n_s$。

在八进制中，我们有

$$n_s = 1 \cdot 8^8 + 1 \cdot 8^4 + 1 \cdot 8^0 = (100010001)_8;$$

因此，$\mathsf{s}_8(n_s) = 3$，正如预期。在二进制中，

$$n_s = 1 \cdot 2^{24} + 1 \cdot 2^{12} + 1 \cdot 2^0 = (1000000000001000000000001)_2,$$

其中恰有三个 1（位于位置 0、12 和 24）；因此，$\mathsf{s}_2(n_s) = 3$。

因此，我们看到 n_s 同时是 2-奈文数和 8-奈文数，并且属于等差数列$n \equiv 3 \pmod 5$。

7. 总结

我们已经证明，对于每一对幂相关基数 $\{b, b^k\}$，以及每一个满足 $\gcd(m,\ b) = 1$ 的等差数列 $S_{m,\ r}$，其中有无穷多个整数 $S_{m,\ r}$ 同时是 b- 奈文数和 b^k- 奈文数。论证是初等的，并基于两个简单的想法：

(1) 当基数为 b^k 的数字属于 $\{0, \ldots, b-1\}$ 时，进制 b 和 b^k 的数位和相容性，以及

(2) 利用乘法阶强制同余，以确保既满足指定的等差数列，又能被选定的数位和整除。

定理 1.1 仅要求 $\mathsf{s}_b(n) \mid n$ 和 $\mathsf{s}_B(n) \mid n$，而不要求 $\mathsf{s}_b(n)$ 与 $\mathsf{s}_B(n)$ 之间存在任何关系。然而，我们的构造得出了更强的性质

$$\mathsf{s}_b(n_s) = \mathsf{s}_B(n_s)$$

因为基数为 B 时的数字被选取为属于 $\{0,1\} \subseteq \{0,1,\dots,b-1\}$，从而可以实现命题 2.1中得到的数字和相容性。这一特征似乎是该方法本身所导致的，但它很方便，也可能对其他多基数问题有所帮助。

我们还注意到，定理 1.1 的证明完全是显式的：对于选定的可接受 s，我们计算 $\omega_s = \mathrm{ord}_{ms}(B)$，然后通过（3）构造 n_s。所得整数增长极快（大致为 $B^{(s-1)\omega_s}$ 的量级），因此这不是一种高效的枚举方法，但它确实给出了一个具体的无穷族和构造性存在性证明。

7.1. 与互素情形下阶–循环节数方法的关系。对于固定的基数 b，若模数与 b 互素，则利用乘法阶来强制满足同余式是标准做法。具体而言，取满足 $\gcd(s,b) = 1$ 的整数 s，令

$$\omega_s^{(b)} := \mathrm{ord}_{ms}(b), \qquad n_s^{(b)} := \sum_{j=0}^{s-1} b^{j\omega_s^{(b)}} \tag{7}$$

可得 $b^{\omega_s^{(b)}} \equiv 1 \pmod{ms}$，因此 $n_s^{(b)} \equiv s \pmod{ms}$，且 $\mathsf{s}_b(n_s^{(b)}) = s$。选取 $s \equiv r \pmod{m}$，即可将 $n_s^{(b)}$置于指定的等差数列中。（这正是定理 1.1 的特殊情形。）

本文的构造是对这一思路的结构化改进，在（B 7）中用 7代替 b。因此，正如注 3.1所述，n_s 是辅助基数 s 中的一个长度为 B^{ω_s} 的循环节数，在基数 B 中则表现为稀疏循环单位数（参见 [Wit16]），其数字均为 1。与单基数互素情形的论证一样，乘法阶强制满足所需的同余式；但在这里，幂相关结构还使得同一个稀疏循环单位数在基数 b 和 B 中的数位和相同。

7.2. 扩展到多个幂相关基数。若 ℓ 是 k的正因子，那么我们在定理 n_s 1.1 的证明中构造的整数 自动具有 b^ℓ-Niven 数性质。事实上，令 $k = \ell t$，则有

$$n_s = \sum_{j=0}^{s-1} b^{kj\omega_s} = \sum_{j=0}^{s-1} (b^\ell)^{tj\omega_s},$$

因此，基 数-b^ℓ 表示法下，n_s 恰有 s 个数字为 1，因此 $\mathsf{s}_{b^\ell}(n_s) = s$.

在第6节的数值例子中，我们还有 $n_s = (1000001000001)_4$, ，因此 n_s除了是 2-Niven 数和 8-奈文数外，也是 4-Niven 数。这里 $4 = 2^2$ 而且 $\ell = 2$ 并不对应 $k = 3$的一个因子，所以这种额外的 4-Niven 数性质只是一个算术巧合。一般而言，应用为 $\{b, b^k\}$ 给出的构造，并不能保证 b^ℓ 在满足 ℓ 的中间指数 $\ell \nmid k$下具有-Niven 数性质。[2] 尽管如此，上述整除性观察

[2]例如，再取 $b = 2$ 和 $k = 3$（因此 $B = 8$），并选择 $m = 1$ 和 $s = 7$。那么$\omega_s = \mathrm{ord}_7(8) = 1$, 因此构造得出

$$n_s = 8^6 + \cdots + 8^2 + 8 + 1 = 299593,$$

这意味着，对我们的构造进行扩展，就可以选取任意有限个幂相关基数 $\{b, b^2, \dots, b^k\}$。

COROLLARY 7.1. 设 $b \geq 2$ 和 $k \geq 1$ 为整数，并令 $K = \mathrm{lcm}(1、2、\dots\dots、k)$。若$m \geq 1$ 满足 $\gcd(m, b) = 1$，那么对于任意满足 $0 \leq r < m$的 r，存在无穷多个整数 $n \in S_{m,r}$，使得对于所有满足 $1 \leq \ell \leq k$的 ℓ，它们都是 b^ℓ-*Niven* 数。此外，对于每个$s_0 \geq 1$，都存在这样一个 n，使得

$$\mathsf{s}_b(n) = \mathsf{s}_{b^2}(n) = \cdots = \mathsf{s}_{b^k}(n) \geq s_0.$$

PROOF. 固定 $s_0 \geq 1$并选择一个可采纳的 $s \geq s_0$，如引理5.1所述，使得$s \equiv r$ (模 m) 且 $\gcd(s, b) = 1$。

令 $B := \overline{b^K}$ 并定义

$$\Omega_s = \mathrm{ord}_{ms}(\overline{B}), \qquad N_s := \sum_{j=0}^{s-1} \overline{B}^{j\Omega_s}$$

(注意，$\mathrm{ord}_{ms}(B)$存在，因为 $\gcd(B, \overline{m}s) = 1$。按构造，$B^{\Omega_s} \equiv 1$ (模 ms)，因此，按照命题4.1 证明中的相同论证可得 $N_s \equiv s \equiv r$ (模 m)，并且$s \mid N_s$。

现在，我们固定 $\ell \in \{1, 2, \dots, k\}$。由于 $\ell \mid K$，我们可以写成

$$\overline{B}^{j\Omega_s} = b^{Kj\Omega_s} = (b^\ell)^{(K/\ell)j\Omega_s}.$$

因此，我们看到

$$N_s = \sum_{j=0}^{s-1} (b^\ell)^{(K/\ell)j\Omega_s}$$

是 b^ℓ 的互不相同的幂之和，且每一项的系数均为 1；因此，N_s 的 b^ℓ 进制展开中恰有 s 个数字 1，且没有进位，所以 $\mathsf{s}_{b^\ell}(N_s) = s$。由于还满足 $s \mid N_s$，可知 $\mathsf{s}_{b^\ell}(N_s) \mid N_s$；这对每个 $\ell = 1, \dots, k$ 都成立，正如所需。

最后，以这种方式选取的不同可容许 s 会产生不同的整数 N_s，因为 $\mathsf{s}_b(N_s) = s$；然后，取越来越大的 s_0，即可得到无穷性结论。□

7.3. 进一步扩展的可能性。我们的构造依赖于选取 ω_s，使得 $B^{\omega_s} \equiv 1$（模 m），从而对所有 j 都有 $B^{j\omega_s} \equiv 1$（模 m）。推论 7.1 表明，只要指数取自有限集合，同一构造便可以同时处理若干个都是公共基数 b 的幂的进制。但是，如果某个素数 p 同时整除 m 和 b，那么 $p \mid B$，因而对每个 $\ell \geq 1$ 都有 $B^\ell \equiv 0$（模 p），这使得我们不可能达到 $B^{\omega_s} \equiv 1$（模 m）。因此，$\gcd(m, b) = 1$ 的假设并非仅仅是技术性的：对于此处所使用的特定同余强制机制而言，它是必需的。

Harrington、Litman 和 Wong [HLW24], 与此同时证明，任何等差数列——不只是最大公约数$(m, b) = 1$——都包含无穷多个 b-奈文数，对任意单一基数 $b \geq 2$均如此；这表明，至少可以认为互素性

它同时是 2-奈文数和 8-奈文数：

$$299593 = (1001001001001001001)_2 = (1111111)_8,$$

按构造，$\mathsf{s}_2(299593) = \mathsf{s}_8(299593) = 7$。然而，$299593 = (1021021021)_4$ 的 $\mathsf{s}_4(299593) = 10 \nmid 299593$，因此 n_s 不是 4-Niven 数。

定理 1.1 中的假设可以放宽。我们也可以期望在一组非幂相关基数上同时满足尼文数性质，但这似乎需要新的思路来关联不同基数之间的结构。

参考文献

[Cai96] Tianxin Cai，关于 2-尼文数和 3-尼文数，《斐波那契季刊》34 (1996)，第 2 期，118–120。[DD03] Jean-Marie DeKoninck 和 Nicolas Doyon，关于不超过 x 的尼文数的数量，《斐波那契季刊》41 (2003)，第 5 期，431–440。[DKDK03] Jean-Marie De Koninck、Nicolas Doyon 和 Imre K´atai，关于尼文数的计数函数，《算术学报》106 (2003)，第 3 期，265–275。[DKDK08] J. M. De Koninck、N. Doyon 和 I. K´atai，孪生尼文数的数量，《拉马努金杂志》17 (2008)，第 1 期，89–105。[FILS07] Harold Fredricksen、Eugen J. Ionascu、Florian Luca 和 Pantelimon St˘anic˘a，关于最小尼文数序列的评论，《序列、子序列与结果》，《计算机科学讲义》第 4893 卷，施普林格，2007 年，第 162–168 页。[Gru94] H. G. Grundman，连续 n 个尼文数序列，《斐波那契季刊》32 (1994)，第 2 期，174–175。[HLW24] Jacob Harrington、Max Litman 和 Tony W. H. Wong，每个等差数列都包含无限多个 b 个尼文数，《澳大利亚数学学会通报》109 (2024)，第 3 期，409–413。[Kap55] D. R. Kaprekar，多位数，《数学文集》21 (1955)，27。[KC84] Robert E. Kennedy 和 Curtis N. Cooper，尼文数的自然密度，《两年制学院数学杂志》15 (1984)，第 4 期，309–312。[KC89] , 尼文重复数与 $10^n \equiv 1 \pmod{n}$，《斐波那契季刊》27 (1989)，第 2 期，139–143。[KGB80] Robert E. Kennedy、Terry A. Goodman 和 Clarence H. Best，数学发现与尼文数，《MATYC 杂志》14 (1980)，第 1 期，21–25。[NZM91] Ivan Niven、Herbert S. Zuckerman 和 Hugh L. Montgomery，《数论导论》，约翰·威立父子公司，1991。[San21] Carlo Sanna，加法基与尼文数，《澳大利亚数学学会通报》104 (2021)，第 3 期，373–380。[Wit13] Amin Witno，生成史密斯数的一个序列族，《整数序列杂志》16 (2013)，第 2 期，文章 3。[Wit16] , 一般基数下的尼文重复数，《斐波那契季刊》54 (2016)，第 1 期，59–64。