一维 XY 模型中动力学相变与磁化强度的内在联系

Lin-Yue Luo,[1,2] Wei-Lin Li,[1,2] Bao-Ming Xu,[3],* 和 Zhi Li[1,2],†
[1] *Key Laboratory of Atomic and Subatomic Structure and Quantum Control (Ministry of Education), Guangdong Basic Research Center of Excellence for Structure and Fundamental Interactions of Matter, School of Physics, South China Normal University, Guangzhou 510006, China*
[2] *Guangdong Provincial Key Laboratory of Quantum Engineering and Quantum Materials, Guangdong-Hong Kong Joint Laboratory of Quantum Matter, Frontier Research Institute for Physics, South China Normal University, Guangzhou 510006, China*[3] *Institute of Biophysics, Dezhou University, Dezhou 253023, China*(日期：2026年2月9日)

本文研究了从相干吉布斯态出发的横场 XY 模型的淬火动力学。结果表明，初始磁化强度在动力学量子相变的出现过程中起着至关重要的作用。具体而言，当在同一相内进行淬火时，通过费舍尔零点和磁化强度等可观测量的性质，我们表明，初始磁化强度越强，动力学量子相变就越难出现。其内在机制在于，较强的初始磁化强度会产生方向性效应，抑制量子淬火过程中的自旋翻转，从而使动力学量子相变难以出现。由于动力学量子相变可以在各种人工系统中通过实验实现，我们希望本文所预测的物理现象能够在桌面平台上得到实验验证。

arXiv:2602.01259v1 [quant-ph] 1 Feb 2026

I. 引言

量子模拟平台的快速发展极大地推动了非平衡动力学的研究。在这一领域中，动力学量子相变（动力学量子相变）引起了广泛关注 [1–8]。动力学量子相变可在淬火动力学过程中出现。先前的研究表明，动力学量子相变可分为两类 [9, 10]。第一类动力学量子相变记为DQPT-OP，其特征是淬火后序参量（或某些关联函数）的长时间极限值出现不连续性，可作为底层相变的动力学标志 [11–25]。第二类动力学量子相变称为DQPT-LE，其特征是洛施密特回波的速率函数在时间演化中出现非解析性 [1, 26–35]。理论上，先前的工作表明，DQPT-LE可出现于横场伊辛模型 [1, 36, 37], XY模型 [38–42], Kitaev 蜂窝模型 [43], Floquet 系统 [44–52], 以及拓扑系统 [53–59], 等 [60–79]。实验上，DQPT-LE已在多种量子模拟器上实现，例如超冷原子 [80], 囚禁离子 [81], 超导量子电路 [82],等 [83–86]。

另一方面，DQPT-LE出现的内在机制仍是一个悬而未决的问题。最初，人们认为DQPT-LE源于平衡态量子临界性。这是因为DQPT-LE最早是在研究淬火动力学 [87, 88] 跨越相变不同平衡态的临界点 [1, 89–92]时发现的。然而，近期研究表明，在同一相内进行淬火同样可以诱导DQPT-LE [38, 53, 93–97]。换言之，DQPT-LE是一种真正的非平衡现象，从根本上与平衡态临界点无关。尽管其拓扑特征已被确定 [98–104], , 但对其动力学原理的全面理解仍未建立。此外，磁化动力学长期以来一直是研究动力学量子相变的基本探针。在DQPT-OP的背景下，磁化强度的弛豫（或其相关的二点关联函数）通常遵循幂律衰减（$t^{-\alpha}$），其指数 α 主要由淬火后哈密顿量所处的相决定 [105–108]。有趣的是，在DQPT-LE的先驱性研究中发现，在数值精度范围内，磁化强度振荡的周期与DQPT-LE临界时刻的周期相一致 [1]。

迄今为止，大多数主流研究都聚焦于淬火后磁化强度的演化中所蕴含的动力学量子相变性质 [109–112], , 而初始磁化强度对动力学量子相变的影响在很大程度上仍未得到探索 [21]。作为反映系统自旋集体序的关键物理量，初始磁化强度对动力学量子相变至关重要。这促使我们研究其对淬火动力学的影响。本文研究一种典型自旋链——一维各向异性XY模型的淬火动力学。初态制备为相干吉布斯态 [113, 114]。这种方法使我们能够探究初始磁化强度如何影响DQPT-LE的出现。为方便起见，在下文中，“动力学量子相变”特指DQPT-LE。

本文其余部分安排如下：第II节介绍模型及其对应的相

* 通讯作者：xubm2018@163.com
† 通讯作者：lizphys@m.scnu.edu.cn

图。在第III节中，我们讨论相干吉布斯态对动力学量子相变的影响。在第IV节中，我们讨论磁化强度大小与动力学量子相变出现之间的关系。第V 节为结论。

II. 模型与全局相图上的淬火路径

我们从横场 XY 模型出发。相应的哈密顿量写为 [107]

$$\hat{H} = -\frac{J}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1+\gamma}{2}\sigma_j^x\sigma_{j+1}^x + \frac{1-\gamma}{2}\sigma_j^y\sigma_{j+1}^y + \lambda\sigma_j^z\right), \tag{1}$$

其中 J 表示纵向自旋-自旋耦合强度。 $\gamma \in [-1,1]$ 是各向异性参数，它控制沿 x 和 y 方向的耦合。不失一般性，我们将 $J = 1$ 设为能量单位。σ_j^α（$\alpha = x,\ y,\ z$）是定义在格点 j上的自旋-1/2泡利矩阵。采用周期性边界条件，即$\hat{}\sigma_{N+1} = \hat{}\sigma_1$。

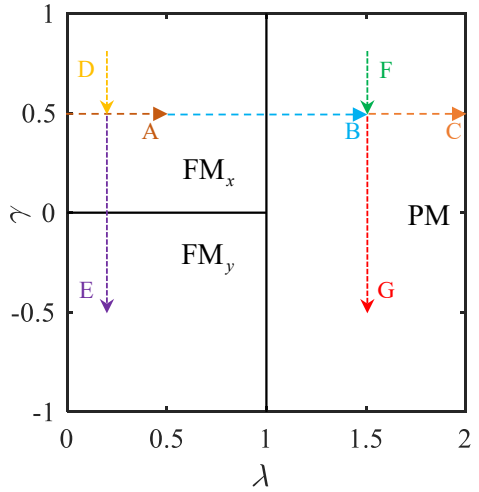

图 1. 横场 XY 模型的相图。实线为临界线，它们分隔三个有能隙相。虚线箭头表示不同的淬火路径A-G。

全局相图如图所示。1先前的研究表明，激发谱在 $\lambda = 1$或 $\gamma = 0$ [38, 107]处无能隙。如图1所示，通过调节外磁场 λ，可以发生伊辛相变，即从铁磁（FM）相到顺磁（PM）相的相变。相应的量子临界点为 $\lambda_c = 1$。通过调节参数 γ，可以实现各向异性相变，即FM$_x$ 相与FM$_y$ 相之间的相变。相应的临界点为 $\gamma_c = 0$。本文探讨了多种淬火方案下的动力学行为，涵盖相内淬火以及跨越临界线的淬火。相应的淬火路径标示在相图中（见图1）。请注意，哈密顿量（1）是可积的。因此，可以将其映射为自由费米子模型，从而得到相应的精确解。通过应用Jordan-Wigner变换和傅里叶变换，可以得到

$$\hat{H} = \sum_{k>0}\left(\hat{c}_k^\dagger \ \ \hat{c}_{-k}\right)\hat{H}_k\begin{pmatrix}\hat{c}_k\\ \hat{c}_{-k}^\dagger\end{pmatrix}, \tag{2}$$

with

$$\hat{H}_k = \begin{pmatrix}-\lambda-\cos k & i\gamma\sin k\\ -i\gamma\sin k & \lambda+\cos k\end{pmatrix}, \tag{3}$$

其中$\hat{c}_k$ （$\hat{c}_k^\dagger$）表示模式 $k = (2n-1)\pi/N$的费米子湮灭（产生）算符，且 $n = 1,\ 2\cdots N/2$。$\hat{}H_k$ 作用于由 $\left\{|1\rangle = \hat{}c_k^\dagger\hat{c}_{-k}^\dagger|0\rangle,\ \ |0\rangle\right\}$张成的二维希尔伯特空间，其中 $|0\rangle$ 是约旦-维格纳费米子$\hat{c}_k$ 和$\hat{c}_{-k}$的费米子真空态，并可在该基中用一个 2×2 矩阵表示。于是可得瞬时本征值，即 $\varepsilon_k^\pm = \pm\varepsilon_k$，其中

$$\varepsilon_k = \sqrt{(\lambda+\cos k)^2 + \gamma^2\sin^2 k}. \tag{4}$$

相应的本征矢量为

$$\begin{aligned}\left|\varepsilon_k^+\right\rangle &= -i\sin\theta_k\,|1\rangle + \cos\theta_k\,|0\rangle,\\ \left|\varepsilon_k^-\right\rangle &= \cos\theta_k\,|1\rangle - i\sin\theta_k\,|0\rangle,\end{aligned} \tag{5}$$

其中， θ_k 定义为

$$e^{i\theta_k} = \frac{-\lambda-\cos k-\varepsilon_k+i\gamma\sin k}{\sqrt{\gamma^2\sin^2 k+(-\lambda-\cos k-\varepsilon_k)^2}}. \tag{6}$$

系统初始时处于态 $|\psi(0)\rangle$ ，持续时间为 $t < 0$。在 $t = 0$时，系统发生一次突然淬火，哈密顿量从 $H(\lambda,\gamma)$ 切换至 $\hat{}H(\lambda',\ \gamma')$。之后的动力学由算符 $\hat{}U(t) = e^{-i\,\hat{}H(\lambda',\ \gamma')t}$ ($\hbar = 1$) 描述。时间演化态 $|\psi(t)\rangle$可表示为

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}(\lambda',\gamma')t}|\psi(0)\rangle. \tag{7}$$

淬火之后，洛施密特振幅为

$$\mathcal{G}(t) = \langle\psi(0)|\psi(t)\rangle = \langle\psi(0)|e^{-i\hat{H}(\lambda',\gamma')t}|\psi(0)\rangle. \tag{8}$$

相应的洛施密特回波量化了时间演化态返回初态的概率，由 $\mathcal{L}(t) = |\mathcal{G}(t)|^2$ 给出。动力学量子相变由洛施密特回波 $\mathcal{L}(t) = 0$趋于零来标志，这发生在时间演化态与初态正交之时。在 XY 自旋链中，这种正交性

从根本上表明，淬火动力学过程中已发生集体自旋翻转 [115]。式 8 表明，这一动力学过程由初态和淬火后哈密顿量支配。因此，对于固定的淬火方案，由磁化强度量化的初始自旋极化起着决定性作用。它直接决定淬火过程中自旋翻转的难易，从而控制动力学量子相变的出现。因此，本文将深入探讨初始磁化强度与动力学量子相变之间的关系。

为此，我们将相干吉布斯态作为初态，其可表示为

$$|\psi(0)\rangle = \bigotimes_k |\psi_k(0)\rangle, \tag{9}$$

其中

$$|\psi_k(0)\rangle = \sqrt{\frac{e^{-\beta\varepsilon_k}}{Z_k}}\left|\varepsilon_k^+\right\rangle + \sqrt{\frac{e^{\beta\varepsilon_k}}{Z_k}}e^{i\phi_k}\left|\varepsilon_k^-\right\rangle, \tag{10}$$

其中 $Z_k = 2\cosh[\beta\varepsilon_k]$ 表示配分函数。在上述表达式中，$\beta = 1/(k_B T)$。不失一般性，在以下计算中我们令玻尔兹曼常数 $k_B = 1$。注意，相干吉布斯态和传统吉布斯态的密度矩阵在能量本征基下具有相同的对角元素，因此它们的能量分布无法区分。关键区别在于非对角元素：相干吉布斯态引入了量子相干性。传统吉布斯态的能量分布由实际逆温度决定，而在我们的相干吉布斯态中，能量分布由参数 β 决定。由于这两种态具有相同的给定 β时的能量分布，因此该参数在吉布斯系综中扮演着类似于逆温度的角色。因此，我们将 β 称为“有效逆温度”。参数 ϕ_k 表示与动量模 k相关的相对相位。为简单起见，我们假设同一能级上所有模的相对相位均匀一致，即 $\phi_k \equiv \phi$。

III. β 对动力学量子相变的影响

在本节中，我们考察动力学量子相变的出现如何受到初态的影响，而初态可通过调节 β来控制。我们在图1所定义的两类淬火路径下研究这种依赖关系：横场淬火和各向异性参数淬火。

经典平衡相变由配分函数的零点（例如李-杨零点）表征，这些零点标志着热力学可观测量中的非解析性。该框架可推广到非平衡动力学，从而提供一种通过费舍尔零点诊断动力学量子相变的直接方法。因此，我们采用该方法来识别我们系统中动力学量子相变的发生。洛施密特振幅 $\mathcal{G}(t)$ 的费舍尔零点在解析延拓到复 z 平面后（即通过将 it 于式8中替换为 z），满足如下表达式

$$\mathcal{G}(z) = \langle\psi(0)|\, e^{-z\hat{H}(\lambda',\gamma')}\,|\psi(0)\rangle = 0, \tag{11}$$

其中 $z \in \mathbb{C}$。通过直接计算，我们得到费舍尔零点的解析表达式 [114,116], 即,

$$z_n(k) = \frac{1}{2\varepsilon_k(\lambda',\gamma')}\left[\ln\left|\frac{e^{-\beta\varepsilon_k(\lambda,\gamma)}\cos^2(\Delta_{\theta_k}) + e^{\beta\varepsilon_k(\lambda,\gamma)}\sin^2(\Delta_{\theta_k}) + \sin(2\Delta_{\theta_k})\sin\phi}{e^{-\beta\varepsilon_k(\lambda,\gamma)}\sin^2(\Delta_{\theta_k}) + e^{\beta\varepsilon_k(\lambda,\gamma)}\cos^2(\Delta_{\theta_k}) - \sin(2\Delta_{\theta_k})\sin\phi}\right| + i(2n+1)\pi\right], \tag{12}$$

其中 $\Delta_{\theta_k} = \theta_k - \theta'_k$。在有限系统中，费舍尔零点在复 z 平面上呈离散点分布。随着系统尺寸增大，费舍尔零点的密度也随之增加。在热力学极限下，费舍尔零点汇聚成复 z 平面上的连续线，并由整数$n \in \mathbb{Z}$ 标记。在接下来的分析中，我们聚焦于 $n = 0$分支。当费舍尔零点线与复 z 平面上的虚轴相交时，就会发生动力学量子相变。该交点定义了动力学量子相变的临界时刻；此时，时间演化态与初态正交，这与集体自旋翻转相对应。此外，费舍尔零点线与虚轴的每个交点都对应一个临界动量 k^*。每个 k^* 都对应淬火过程中一种不同类型的动力学量子相变，其特征是临界时间具有独特的周期性。

A. 横向场 λ 的淬火

我们首先计算沿横向场淬火路径的费舍尔零点 λ，即图1中的路径 A、B 和 C。由于铁磁y情形没有定性差异，我们仅展示铁磁x 情形的结果（见图 2）。

首先，对于铁磁x相内给定的淬火方案（路径A），在 $\beta = 0.1$，1的情形下，费舍尔零点线会穿过虚轴；而在$\beta = 10$的情形下，相应的费舍尔零点线始终无法穿过虚轴 [见图2(a)]。由式10可知，减小 β 可增强相干吉布斯态中的量子相干性。这些结果表明，对于固定的淬火方案，由此增强的相干性为动力学量子相变开辟了一条途径，这些相变

从基态淬火时不允许。

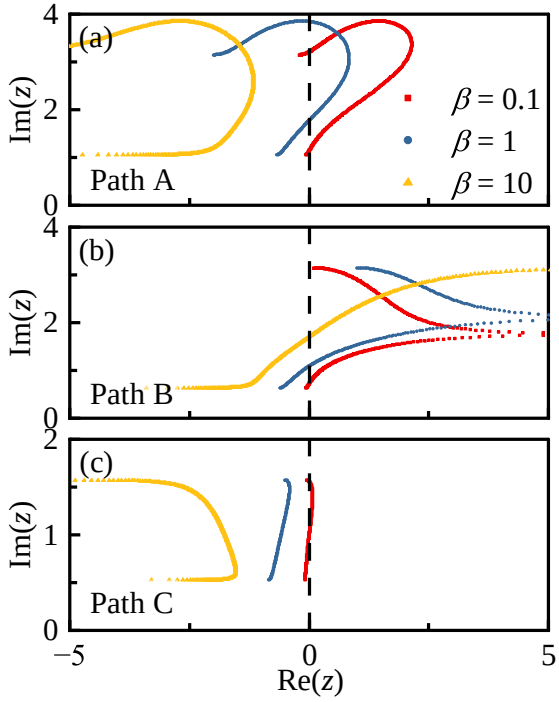

图 2. 沿淬火路径 A（$\lambda = 0 \to 0.5$）、B（$\lambda = 0.5 \to 1.5$）和 C （$\lambda = 1.5 \to 2.0$）进行横向场淬火时的费舍尔零点， β 各不相同。始终有， $\phi = -\pi/2$ 和 $\gamma = 0.5$。

其次，对于穿过临界点的淬火路径，我们观察到费舍尔零点线始终穿过虚轴 [见图2(b)]。这一发现与先前的研究一致 [1, 38, 89], ，这些研究表明，与平衡临界点相关联的淬火往往会诱导动力学量子相变。

第三，可以观察到，对于顺磁区域内的淬火路径，也会出现动力学量子相变 $\beta = 0.1$[见图 2(c)]。

此外，可以发现，在同相淬火过程中 [图2(a) 和 (c)]，费舍尔零点线随着 β减小而单调趋近虚轴。这意味着，对于给定的淬火方案，存在一个临界 β 值，此时费舍尔零点线恰好与虚轴相切。该接触点标志着动力学量子相变的出现。

B. 各向异性淬火 γ

讨论了横向场淬火后，我们现在转而研究通过淬火各向异性参数 γ诱导的动力学量子相变。我们重点关注图1中的淬火路径 D、E、F、G。结果表明，与所有淬火路径对应的费舍尔零点线都会穿过虚轴，这意味着在所有情况下，β 都可以诱导动力学量子相变（见图3）。可以清楚地看出淬火各向异性参数得到的结果与此前淬火横向场参数得到的结果类似。具体而言，调控 β可以在原本不可能出现动力学量子相变的情况下诱导动力学量子相变。对于穿过相变点的情况，同样的原因，即 β的促进作用，确保动力学量子相变的出现不会受到阻碍。

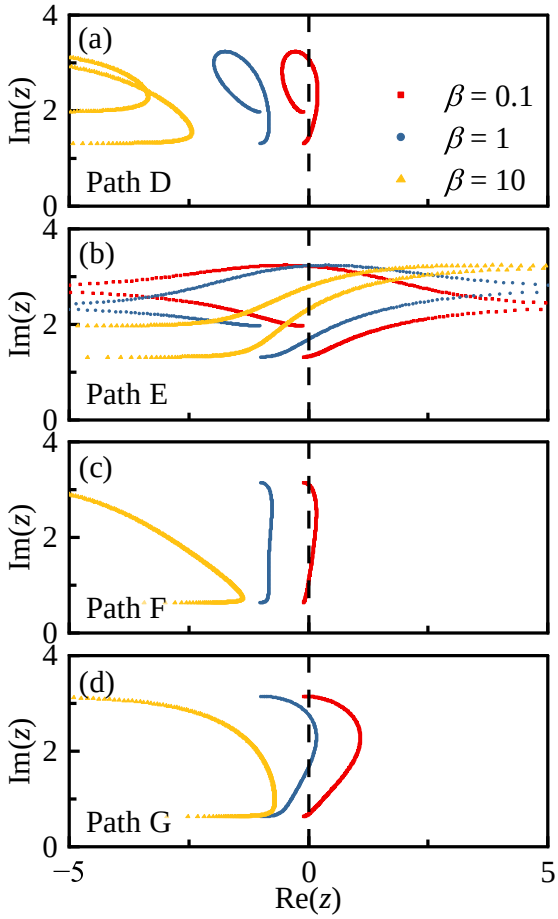

图 3. 各向异性淬火路径的费舍尔零点。路径 D（E）满足 $\gamma = 0.8 \to 0.5$（$\gamma = 0.5 \to -0.5$），其中 $\lambda = 0.2$ 固定。路径 F（G）沿着与路径 D（E）相同的 γ 淬火，但取不同的 λ=1.5。整个过程中， $\phi = -\pi/2$。

根据上述两种典型淬火路径的结果，可以发现，相干吉布斯态为淬火动力学带来了新的自由度，即一个可调的 β。较小的 β 使系统在采用相同的相内淬火方案、但初态为传统基态时无法观测到的动力学量子相变得以显现。仔细检查公式（4）-（10），可以发现，本质上，β 通过调节能级布居，决定了相干吉布斯态中的量子相干。在 $\beta \to \infty$的极限下，该态退化为不含量子相干的传统基态。相反，当 $\beta \to 0$时，各能级的布居趋于相等，使量子相干达到最大值

对于合适的相对相位，量子相干ϕ。需要注意的是，对于同相淬火情形，可以发现，β的减小使我们发现一种新的依赖于β的动力学量子相变。下一节将考察β如何影响磁化强度，从而深入了解这一新型动力学量子相变的起源。

IV. 磁化强度对动力学量子相变的影响

沿α方向的磁化强度（$\alpha = x,\ y,\ z$）定义为

$$M_\alpha = \langle \sigma_j^\alpha \rangle. \tag{13}$$

然而，由于Z_2系统的对称性 [117–119], 序参量M_x和M_y无法直接获得（详见附录A ）。对于铁磁相，在$\gamma > 0$（$\gamma < 0$）条件下，系统的极化沿x（y）方向。对于顺磁相，相应的极化由横向场决定，即沿z方向。我们计算了相应的磁化强度M_x，M_y和M_z随γ在不同β下的变化（见图4）。

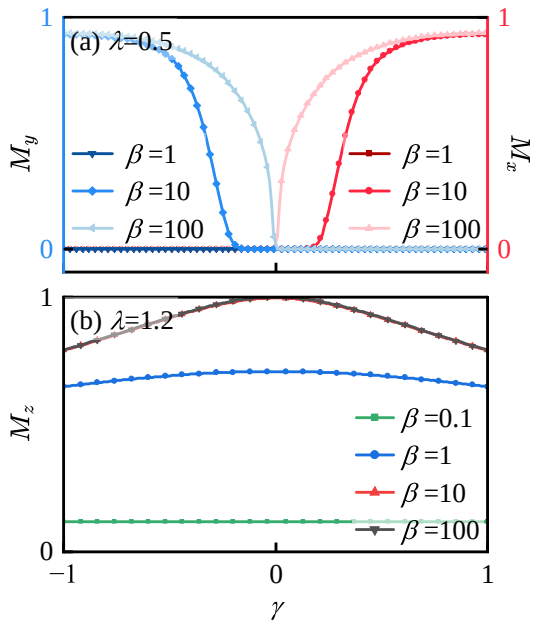

图 4. 磁化强度随γ的变化，分别对应（a）M_x、M_y（$\lambda = 0.5$）以及（b）M_z（$\phi =$（$\lambda = 1.2$）。在整个范围内，$-\pi/2$，且的取值已β标出。

在$\beta \to \infty$的极限下，系统退化为基态（见图$\beta = 100$中的4线），这与先前的结果高度吻合 [120]。这对应于磁化强度最大的情况，即$M_x \to 1$或$M_y \to 1$。如图4所示，磁化强度M_x、M_y和M_z会随着β的减小而下降，最终趋近于零。这一现象表明，减小β会抑制磁化强度，从而增强系统在淬火过程中对集体自旋翻转的敏感性，进而促进动力学量子相变。通过比较图γ中不同固定β值下磁化强度随4(a)和(b)的变化趋势，我们发现，在$\beta = 1$的条件下，铁磁相的磁化强度可被完全抑制（$M_x \to 0$或$M_y \to 0$）；而在顺磁相中，只有在$\beta = 0.1$的条件下，磁化强度才能被大幅抑制。换言之，与铁磁相相比，要在顺磁相中完全破坏磁化强度，需要更小的β值。这表明，不同相中的磁化强度对β的抑制作用表现出不同的敏感性。

值得注意的是，即使初始自旋极化很强，只要淬火跨越临界点，动力学量子相变仍会出现（见第III节）。这类动力学量子相变对初始磁化强度不敏感，可以从自旋翻转的角度来理解。考虑 XY模型最初处于铁磁x相，所有自旋均沿x- 方向极化。若将系统淬火至顺磁相，淬火后哈密顿量的主导项将变为沿z方向的横向场。该z—向场会使自旋偏离其初始x-极化构型，从而引发动力学量子相变。类似地，若将系统淬火至铁磁y相，淬火后哈密顿量将由沿y-方向的自旋-自旋相互作用主导。在平均场描述下，这等效于每个自旋都受到沿y-方向的有效场。该y-向场同样会使x-极化的自旋发生翻转，从而触发动 力学量子相变。

然而，如果淬火在同一相内进行，仅靠淬火后哈密顿量通常无法诱导自旋翻转。在这种情况下，应引入额外机制来驱动动力学量子相变，例如本文中相干吉布斯态所提供的量子相干。因此，自旋翻转的难易程度决定了动力学量子相变所需额外资源的多少。我们认为，这种难易程度由系统的初始磁化强度控制：较大的磁化强度会阻碍自旋翻转，并提高触发动力学量子相变的阈值。换言之，磁化强度与动力学量子相变之间存在着深刻而密切的联系。这一关系详见图5，并通过单参数相内淬火得以揭示，其中展示了（a）铁磁x相与（b）顺磁相内的横向场淬火，以及（c）铁磁x相与（d）顺磁相内的各向异性参数淬火。

从图 5的磁化强度等高线图中，我们可以确定各种初始态（λ_0、γ_0、β）所对应的磁化强度。对于每种态，我们对单个参数进行相内淬火，采用以下淬火方案之一：（$\lambda_0 \to \lambda_f$、γ_0、β）或（λ_0、$\gamma_0 \to \gamma_f$、β）。对于固定的淬火方案，可以找到一个临界值β_c，低于该值时会发生动力学量子相变。通常，该β_c曲线下方的区域定义了该次淬火的“DQPT 区域”，且该区域往往会随着淬火幅度的增大而向更高的β_c值扩展。

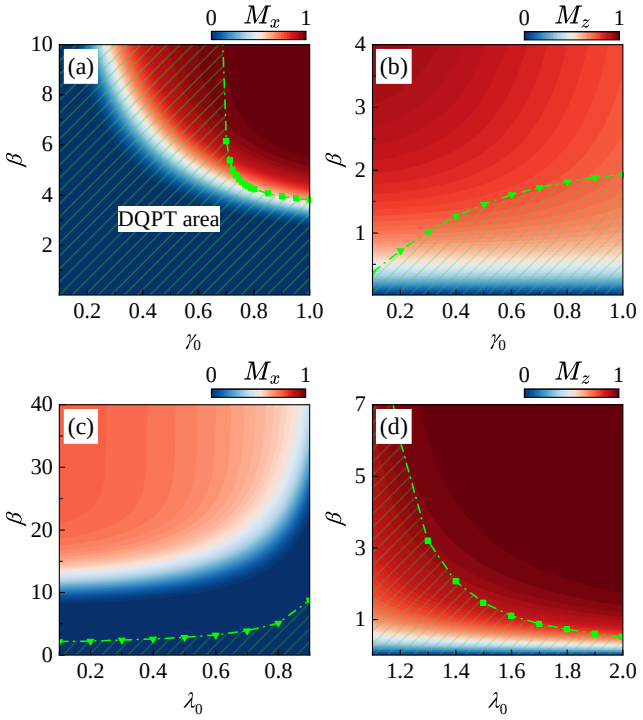

图 5. 磁化强度与等高线图表征初态 $\psi(\lambda_0,\ \gamma_0,\ \beta)$，其中临界 β_c 线（绿色虚线）标示了最大相内淬火幅度。绿色阴影区域标出了“DQPT 区域”，在该区域内可通过相应的淬火方案实现动力学量子相变。(a) 和 (b) 分别展示了横向场淬火的结果，其中 λ 分别在铁磁$_x$ 相中从 0 淬火至 0.999，以及在顺磁相中从 1.2 淬火至 2。(c) 和 (d) 展示了各向异性参数淬火的对应行为，其中 γ 分别在铁磁$_x$ 相中从 0.2 淬火至 1，以及在顺磁相中从 0.2 淬火至 -1。全文中，$\phi=-\pi/2$。

（详见附录 B）。由于较大的 β对应更高的磁化强度，如图 4所示，因此 DQPT 区域的扩展意味着，在该区域内，能够表现出动力学量子相变的态的磁化强度上限提高了。因此，极限情况下的最大相内淬火幅度会产生可能最大的 DQPT 区域。在图 5中，我们特别标出了这一最大 β_c 曲线（绿色虚线）及其对应的 DQPT 区域。

我们首先分析铁磁相内的横向场淬火$_x$，初始态由 $(\lambda_0=0,\gamma_0,\beta)$ 参数化，如图 5(a) 所示。对于有限的 β，M_x在固定 β 时，γ_0 会随 x增大，这是由于沿该方向的自旋-自旋耦合增强，从而在等高线图的右上角形成一个饱和区域（深红色）。“DQPT 区域”定义为最大淬火幅度（$\lambda_f=0.999$）。一个关键发现是，零磁化强度的初始态（深蓝色区域）普遍容易发生动力学量子相变。随着初始磁化强度增强，触发动力学量子相变所需的淬火幅度也逐渐增大。最大淬火幅度对应的临界β_c 线（绿色虚线）因此，这条线界定了一个边界：超过该边界后，初始磁化强度过强，无法被任何相内横向场淬火克服。本质上，较弱的初始磁化强度会显著促进动力学量子相变的发生。

现在我们转向图 5(b) 中的顺磁相，其中初态由 ($\lambda_0=1.2,\ \gamma_0,\ \beta$) 参数化。对横向场淬火 ($\lambda_0=1.2\rightarrow\lambda_f$) 的响应呈现出与铁磁$_x$ 情形一致的模式。最大淬火幅度 β_c 的临界线 $\lambda_f=2$将参数空间划分开来，其中 DQPT 区域涵盖了零磁化区域。这证实，初始磁化强度为零时，系统易受横向场淬火诱发的动力学量子相变影响。在 DQPT 区域内，初始磁化强度越大，触发动力学量子相变所需的淬火幅度就越大；而位于 β_c 边界上方的态，其磁化强度过于稳健，任何相内横向场淬火都无法克服。

接下来，我们研究各向异性参数的淬火。图5（c）展示了铁磁$_x$ 相内初态的磁化强度等高线图，其参数化形式为（$\lambda_0,\ \gamma_0=0.2,\ \beta$）。然而，系统对各向异性参数淬火（$\gamma_0=0.2\rightarrow\gamma_f=1$）的响应与此前的情况有一个关键区别。尽管临界 β_c 线再次将参数空间划分开来，但此时形成的动力学量子相变区域未能完全覆盖零磁化区域。这表明，在这一特定的 γ淬火方案下，某些零磁化强度的初态不会出现动力学量子相变。然而，制备于这些初态的系统在横向场淬火下可以出现动力学量子相变（详见附录C），这凸显了动力学量子相变对淬火方案的依赖性。动力学量子相变区域之外且距离临界 β_c 线较远的态具有更强的磁化强度，因此在相内 γ淬火下不太可能发生动力学量子相变。

图 5(d) 通过考察各向异性淬火下的顺磁相，完成了我们的分析，所用初态为（λ_0、$\gamma_0=0.2$、β）。系统在最大振幅各向异性淬火（$\gamma_0=0.2\rightarrow\gamma_f=-1$）下的行为再次印证了已确立的规律。由此得到的动力学量子相变区域完整包含零磁化强度区域，证实足够小的初始磁化强度能够确保系统通过 γ 淬火易发生动力学量子相变。在此区域内，随着初始磁化强度增大，触发动力学量子相变所需的淬火幅度也逐渐增大。最大淬火幅度对应的临界 β_c 线再次界定了基本极限：超过这一极限后，无论淬火幅度如何，同相内的 γ 淬火都无法诱发动力学量子相变。

基于前述分析，我们确立同一相内的动力学量子相变与系统的自旋极化密切相关，磁化强度可作为直接指标。动力学量子相变的基本机制从根本上取决于自旋能否在淬火后动力学下发生翻转。当初始磁化强度为零时，系统可以轻易发生集体自旋翻转，从而导致

动力学量子相变的出现。在这一特定情形下，至少存在一种类型的淬火，可使动力学量子相变发生。在对应于最大淬火幅度的“DQPT 区域”内，更大的初始磁化强度需要相应更大的淬火幅度才能触发动力学量子相变。这表明，随着初始磁化强度增大，通过淬火诱导动力学量子相变会变得越来越困难。对于位于最大“DQPT 区域”之外的初始态，其初始磁化强度超过了 DQPT 区域内所观测到的最大值。因此，对于相内淬火，即使采用最大淬火幅度，也无法克服这些态强烈的初始自旋极化，从而无法诱导动力学量子相变。

V. 结论

总之，我们以一维横场XY模型为例，讨论了以相干吉布斯态为初态的淬火动力学。我们解析地得到了费舍尔零点的分布，从而确定了相应的临界 β_c。通过将其与初始磁化强度进行比较，我们得到了动力学量子相变的出现与磁化强度之间的关系。结果表明，在同相淬火条件下，动力学量子相变的发生显著依赖于磁化强度。也就是说，对于固定最大振幅的淬火方案，在相应的 DQPT 区域内，初始磁化强度越强，动力学量子相变越难出现。从物理机制的角度来看，动力学量子相变源于自旋翻转动力学。较弱的初始磁化强度使系统更容易克服初始自旋极化，并在淬火过程中发生集体自旋翻转，从而促进动力学量子相变的发生。位于这一最大 DQPT 区域之外的初态无法发生动力学量子相变，因为其自旋极化会抵抗淬火，即使在最大振幅下也是如此。在实验上，动力学量子相变已在冷原子气体、超导电路等人工系统中实现。同时，针对李-杨零点和磁化强度等可观测量的探测技术也已得到发展 [111, 121]。因此，我们希望本文的理论预言能够为相关实验带来益处，并有助于揭示动力学量子相变的物理机制。

致谢

我们诚挚感谢 X.-Y. Zhang 和 L.-F. Yu 富有帮助的讨论。L.-Y. Luo、W.-L. Li 和 ZL 获国家重点研发计划（项目编号：2022YFA1405300）、量子科学与技术创新计划（项目编号：2021ZD0301700）以及广东省基础与应用基础研究基金（项目编号：2021A1515012350）资助，广东省量子科学战略 инициатив计划（项目编号：GDZX2304002 和 GDZX2404001），以及原子与亚原子结构和量子调控教育部重点实验室开放基金资助。

L.-Y. Luo 和 W.-L. Li 对本工作贡献相同。

附录A：磁化强度

z方向上的磁化强度可直接作为局域期望值 [122] 获得：

$$M_z = \langle \sigma_j^z \rangle. \tag{A1}$$

经过 Jordan-Wigner变换和傅里叶变换后， M_z 可表示为：

$$M_z = \frac{2}{N} \sum_k \langle c_k^\dagger c_k \rangle - 1. \tag{A2}$$

相比之下， α方向上的磁序（$\alpha = x, y$）由相应自旋-自旋关联函数的长程极限定义：

$$M_\alpha = \sqrt{\lim_{r\to\infty} \langle \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha \rangle}, \tag{A3}$$

其中 $r = |j - i|$。之所以需要作此定义，是因为期望值 $\langle \sigma^x \rangle$ 和 $\langle \sigma^y \rangle$ 由于系统的 Z_2 对称性而直接消失。

为明确记号，我们将自旋-自旋关联函数 $\langle \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha \rangle$ 定义为：

$$C_\alpha(r) = \langle \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha \rangle. \tag{A4}$$

通过 Jordan-Wigner变换，我们还可以将其表示为 $A_j = c_j^\dagger + c_j$ 和 $B_j = c_j^\dagger - c_j$的乘积：

$$\begin{aligned} C_x(r) &= \left\langle (c_i - c_i^\dagger) \prod_{i<m<j} (1 - 2c_m^\dagger c_m)(c_j^\dagger + c_j) \right\rangle \\ &= \langle B_i A_{i+1} B_{i+1} \dots A_{j-1} B_{j-1} A_j \rangle, \end{aligned} \tag{A5}$$

$$C_y(r) = (-1)^r \langle A_i B_{i+1} A_{i+1} \dots B_{j-1} A_{j-1} B_j \rangle. \tag{A6}$$

方程（A5）和（A6）中的期望值涉及很长的算符串。根据Wick定理，这些期望值可以表示为一个斜对称矩阵的 Pfaffian（斜对称行列式），即：

$$C_x(r) = \mathrm{Pf} \begin{vmatrix} 0 & G_1 & S_1 & G_2 & S_2 & \cdots & G_r \\ & 0 & D_0 & Q_1 & D_1 & \cdots & Q_{r-1} \\ & & 0 & G_1 & S_1 & \cdots & G_{r-1} \\ & & & 0 & D_0 & \cdots & Q_{r-2} \\ & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 & G_1 \\ & & & & & & 0 \end{vmatrix}, \tag{A7}$$

$$C_y(r) = (-1)^r \mathrm{Pf} \begin{vmatrix} 0 & D_1 & Q_1 & D_2 & Q_2 & \cdots & D_r \\ & 0 & G_0 & S_1 & G_1 & \cdots & S_{r-1} \\ & & 0 & D_1 & Q_1 & \cdots & D_{r-1} \\ & & & 0 & G_0 & \cdots & S_{r-2} \\ & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 & D_1 \\ & & & & & & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{(A8)}$$

其中，矩阵元是如下定义的成对收缩:

$$\begin{aligned} Q_r &= \langle A_i A_j \rangle \\ &= \sum_k \frac{-i \sin(kr) \langle c_k^\dagger c_k + c_{-k} c_k + c_k^\dagger c_{-k}^\dagger + c_{-k} c_{-k}^\dagger \rangle}{N}, \end{aligned} \quad \text{(A9)}$$

$$\begin{aligned} S_r &= \langle B_i B_j \rangle \\ &= \sum_k \frac{i \sin(kr) \langle c_k^\dagger c_k - c_{-k} c_k - c_k^\dagger c_{-k}^\dagger + c_{-k} c_{-k}^\dagger \rangle}{N}, \end{aligned} \quad \text{(A10)}$$

$$\begin{aligned} G_r &= -D_{-r} \\ &= \langle B_i A_j \rangle \\ &= \sum_k \frac{\cos(kr) \langle c_k^\dagger c_k - c_{-k} c_{-k}^\dagger \rangle + i \sin(kr) \langle c_{-k} c_k - c_k^\dagger c_{-k}^\dagger \rangle}{N} \end{aligned} \quad \text{(A11)}$$

最后，相干吉布斯初态的费米子双算符期望值由下式给出:

$$\begin{aligned} &\langle c_k^\dagger c_{-k}^\dagger \rangle \\ &= \frac{i(e^{-\beta\varepsilon} - e^{\beta\varepsilon}) \sin\theta_k \cos\theta_k + e^{i\phi} \sin^2\theta_k + e^{-i\phi} \cos^2\theta_k}{Z_k}, \\ &\langle c_k^\dagger c_k \rangle \\ &= \frac{i(e^{i\phi} - e^{-i\phi}) \sin\theta_k \cos\theta_k + e^{\beta\varepsilon} \cos^2\theta_k + e^{-\beta\varepsilon} \sin^2\theta_k}{Z_k}, \\ &\langle c_{-k} c_k \rangle \\ &= \frac{i(e^{\beta\varepsilon} - e^{-\beta\varepsilon}) \sin\theta_k \cos\theta_k + e^{i\phi} \cos^2\theta_k + e^{-i\phi} \sin^2\theta_k}{Z_k}, \\ &\langle c_{-k} c_{-k}^\dagger \rangle \\ &= \frac{i(e^{-i\phi} - e^{i\phi}) \sin\theta_k \cos\theta_k + e^{-\beta\varepsilon} \cos^2\theta_k + e^{\beta\varepsilon} \sin^2\theta_k}{Z_k}, \end{aligned} \quad \text{(A12)}$$

其中 $Z_k = 2\cosh[\beta\varepsilon_k]$ 是第 k个模式所对应的配分函数。

附录 B：淬火幅度对“DQPT 区域”的影响

我们研究淬火幅度对不同相内淬火过程中动力学量子相变临界 β_c 的影响，如图 6 所示。对于每种淬火幅度，我们用虚线绘出相应的临界 β_c 线。每种特定淬火方案下可能发生动力学量子相变的区域称为“DQPT 区域”，并以相应颜色标示。

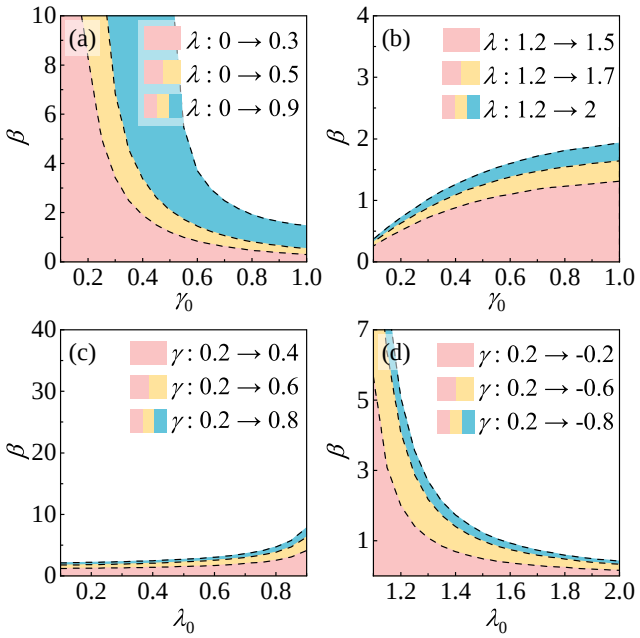

图 6. 淬火幅度对动力学量子相变临界 β_c 的影响。虚线表示不同淬火振幅下的临界 β_c ，相应的“DQPT 区域”以匹配的颜色着色。横向场淬火在铁磁$_x$ （a）和顺磁（b）相区域内进行。（c）和（d）分别表示铁磁$_x$ 相和顺磁相内的各向异性参数淬火。始终为 $\phi = -\pi/2$。

这些结果呈现出一种普遍趋势，适用于横向场淬火和各向异性参数淬火，无论是在铁磁$_x$ 还是顺磁相中。当淬火前参数固定时，淬火幅度的增加会系统地使临界 β_c 线移向更高的数值。这一移动进而引起“DQPT 区域”的逐步扩大。以横向场淬火（$\lambda_0 = 0 \to \lambda_f$）在铁磁$_x$ 相中的情况作为一个具体例子 [见图 6（a）]，，对于固定的 γ_0，较大的淬火幅度会产生更高的临界 β_c。鉴于已确立的磁化强度与 β 由图4所示的正相关，更高的临界 β_c 直接意味着磁化强度更强的初始态现在可以在更大的淬火下发生动力学量子相变。

附录 C：关于图5(c)中动力学量子相变的更多讨论

为进一步刻画非平衡动力学，我们计算所谓的速率函数，它在平衡态中发挥着类似于自由能密度的作用

统计力学：

$$r\left(t\right)=-\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\ln\mathcal{L}\left(t\right), \tag{C1}$$

其中 $\mathcal{L}(t)=|\mathcal{G}(t)|^2$ 是洛施密特回波，用于量化系统返回其初态的概率

经过时间演化之后。值得注意的是，速率函数 $r(t)$ 在临界时刻出现的尖 cusp 型奇异性反映了非解析行为，被视为动力学量子相变的标志。在热力学极限下，速率函数 $r(t)$ 具有如下解析表达式：

$$r(t)=-\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left[\int_0^{\pi}dk\,\ln\left\{\cos[\varepsilon_k(\gamma',\lambda')t]+i\sin[\varepsilon_k(\gamma',\lambda')t]\left[\cos(2\Delta_{\theta_k})\tanh(\beta\varepsilon_k(\gamma,\lambda))-\frac{2}{Z_k(\gamma,\lambda)}\sin\phi\sin(2\Delta_{\theta_k})\right]\right\}\right]. \tag{C2}$$

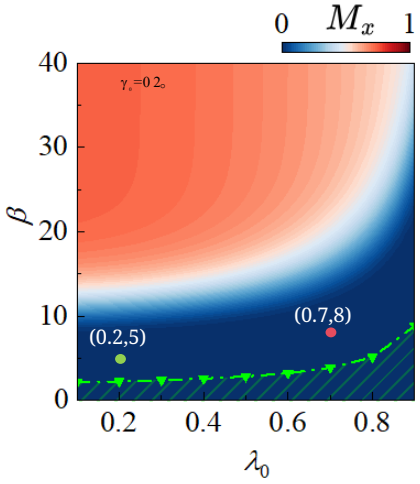

图 7. 铁磁$_x$ 相中初始条件 $(\lambda_0,\gamma_0=0.2,\beta)$ 对应的磁化强度等高线图。绿色曲线标示了淬火幅度取最大各向异性参数时的临界 β_c 线，绿色阴影线标出了相应的“DQPT 区域”。图中突出显示了两个位于 DQPT 区域之外、零磁化强度的特定初始态：$(\lambda_0=0.2,\gamma_0=0.2,\beta=5)$（绿色圆点）和 $(\lambda_0=0.7,\gamma_0=0.2,\beta=8)$（洋红色圆点）。全文中，$\phi=-\pi/2$。

为阐明动力学量子相变的方案依赖性，我们考察图中两个特别标记的初始态。7这两个态的磁化强度为零，但位于各向异性参数淬火的“DQPT 区域”之外。现在，我们通过进行横向场淬火，并借助费舍尔零点和速率函数监测随后的动力学，来研究这些特定的初始条件。当横向场淬火至 0。9，

两种情况下，费舍尔零点线都与虚轴相交 [图8(a) 和 (b)]。与此同时，速率函数出现非解析尖点 [图 8(c) 和 (d)]。这一现象表明，对于初始磁化强度为零的系统，至少可以通过两种淬火方案之一诱发动力学量子相变：横向场淬火或 γ淬火。这强调了动力学临界性并非初态的内禀属性，而是从根本上依赖于淬火方案。

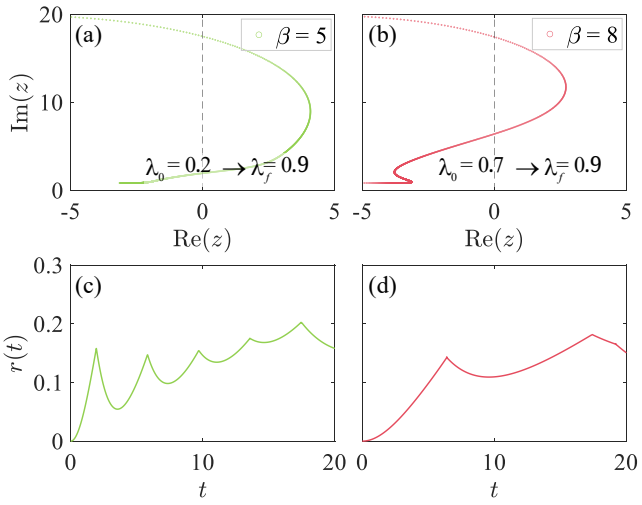

图 8. 图中标出的态的动力学量子相变特征7 经横向场淬火至 $\lambda_f=0.9$后的结果。(a) 和 (b) 分别展示绿色和洋红色圆点对应的费舍尔零点。(c) 和 (d) 展示相应的速率函数。全文中，$\phi=-\pi/2$。

[1]M. Heyl、A. Polkovnikov 和 S. Kehrein，横向场伊辛模型中的动力学量子相变，《物理评论快报》110，135704（2013）。[2] J. Eisert、M. Friesdorf 和 C. Gogolin，非平衡态下的多体量子系统，《自然物理学》11，124（2015）。[3] A. Polkovnikov、K. Sengupta、A. Silva 和 M. Vengalattore，专题讨论会：封闭相互作用量子系统的非平衡动力学，《现代物理评论》83，863 (2011)。[4] W. H. Zurek、U. Dorner 和 P. Zoller，量子相变的动力学，《物理评论快报》95，105701 (2005)。[5] M. Heyl，动力学量子相变：综

述，《物理学进展报告》81, 054001 (2018)。[6] M. Heyl，动力学量子相变：简要综述，《欧洲物理快报》125, 26001 (2019)。[7] J. Marino、M. Eckstein、M. S. Foster 和 A. M. Rey，孤立量子系统碰撞无关预热态中的动力学相变：理论与实验，《物理学进展报告》85, 116001 (2022)。[8] A. A. Zvyagin，动力学量子相变（综述文章），《低温物理学》42, 971 (2016)。[9]B. ˇZunkoviˇc、M. Heyl、M. Knap 和 A. Silva，具有长程相互作用的自旋链中的动力学量子相变：不同非平衡临界性概念的融合，《物理评论快报》120, 130601 (2018)。[10] A. L. Corps 和 A. Rela˜no，具有对称性破缺本征态的量子系统中动力学相变的理论，《物理评论快报》130, 100402 (2023)。[11] M. Eckstein 和 M. Kollar，Falicov-Kimball 模型中相互作用淬火后的非热稳态，《物理评论快报》100, 120404 (2008)。[12] M. Eckstein、M. Kollar 和 P. Werner，Hubbard 模型中相互作用淬火后的热化，《物理评论快报》103, 056403 (2009)。[13] M. Moeckel 和 S. Kehrein，Hubbard 模型中的相互作用淬火，《物理评论快报》100, 175702 (2008)。[14] M. Moeckel 和 S. Kehrein，Hubbard 模型中从绝热到骤然相互作用淬火的交叉：预热化与非平衡动力学，《新物理学杂志》12, 055016 (2010)。[15] B. Sciolla 和 G. Biroli，无限维 Bose-Hubbard 模型中的量子淬火与非平衡动力学转变，《物理评论快报》105, 220401 (2010)。[16] B. Sciolla 和 G. Biroli，量子淬火、动力学转变与非平衡量子临界性，《物理评论B》88, 201110 (2013)。[17] A. Gambassi 和 P. Calabrese，将量子淬火视为经典临界薄膜，《欧洲物理快报》95, 66007 (2011)。[18] A. Maraga、A. Chiocchetta、A. Mitra 和 A. Gambassi，孤立量子系统淬火后的老化与粗化：量子 O(n) 模型（具有 $n \to \infty$）的精确结果，《物理评论E》92, 042151 (2015)。[19] A. Chandran、A. Nanduri、S. S. Gubser 和 S. L. Sondhi，无限 n 下量子 $o(n)$ 模型中的平衡化与粗化，《物理评论B》88, 024306 (2013)。[20] P. Smacchia、M. Knap、E. Demler 和 A. Silva，利用激发的量子噪声探索动力学相变与预热化，《物理评论B》91, 205136 (2015)。[21] J. C. Halimeh、V. Zauner-Stauber、I. P. McCulloch、I. de Vega、U. Schollw¨ock 和 M. Kastner，在不存在热相变的情况下实现预热化与持久有序，《物理评论B》95, 024302 (2017)。[22] T. Mori、T. N. Ikeda、E. Kaminishi 和 M. Ueda，孤立量子系统中的热化与预热化：理论综述，《物理学杂志 B：原子、分子与光学物理》51, 112001 (2018)。[23] J. A. Muniz、D. Barberena、R. J. Lewis-Swan、D. J. Young、J. R. K. Cline、A. M. Rey 和 J. K. Thompson，《在光学腔中的冷原子体系中探索动力学相变》，《自然》580，602（2020）。[24] S. Smale、P. He、B. A. Olsen、K. G. Jackson、H. Sharum、S. Trotzky、J. Marino、A. M. Rey 和 J. H. Thywissen，《在量子简并费米气体中观测动力学相之间的转变》，《科学进展》5，eaax1568（2019）。[25] T. Tian、H.-X. Yang、L.-Y. Qiu、H.-Y. Liang、Y.-B. Yang、Y. Xu 和 L.-M. Duan，《观测与激发态相图存在对应关系的动力学量子相变》，《物理评论快报》124，043001 2020( )。[26] K. Cao、H. Guo 和 G. Yang，《多能带布洛赫哈密顿量中的非周期动力学量子相变及其起源》，《物理学杂志：凝聚态物质》36，155401（2024）。[27] H. Cheraghi 和 N. Sedlmayr，《双重淬火后的动力学量子相变：初态的持续性与动力学相》，《新物理学杂志》25，103035（2023）。[28] J. C. Budich 和 M. Heyl，《远离平衡时的动力学拓扑序参量》，《物理评论B》93，085416 2016( )。[29] U. Bhattacharya、S. Bandyopadhyay 和 A. Dutta，《混合态动力学量子相变》，《物理评论B》96，180303（2017）。[30] M. Heyl 和 J. C. Budich，《混合态的动力学拓扑量子相变》，《物理评论B》96，180304（2017）。[31] K. Cao、W. Li、M. Zhong 和 P. Tong，《弱无序对各向异性XY链中动力学量子相变的影响》，《物理评论B》102，014207（2020）。[32] M. Heyl，《具有对称性破缺相的系统中的动力学量子相变》，《物理评论快报》113，205701（2014）。[33] M. Heyl，《动力学量子相变中的标度与普适性》，《物理评论快报》115，140602（2015）。[34] R. Jafari，《动力学量子相变与准粒子激发》，《科学报告》9（2019）。[35] J. M. Hickey、S. Genway 和 J. P. Garrahan，《动力学相变、时间积分可观测量与态几何》，《物理评论B》89，054301（2014）。[36] J. C. Halimeh 和 V. Zauner-Stauber，《具有长程相互作用的量子自旋链的动力学相图》，《物理评论B》96，134427（2017）。[37] J. Lang、B. Frank 和 J. C. Halimeh，《动力学量子相变：一种几何图像》，《物理评论快报》121，130603（2018）。[38] S. Vajna 和 B. D´ora，《将动力学相变与平衡相变区分开来》，《物理评论B》89，161105（2014）。[39] S. Porta、F. Cavaliere、M. Sassetti 和 N. Traverso Ziani，《XY 链中动力学量子相变的拓扑分类》，《科学报告》10，12766（2020）。[40] K. Cao、M. Zhong 和 P. Tong，《具有 Dzyaloshinskii-Moriya 相互作用和 XZY–YZX三格点相互作用的 XY 链中的动力学量子相变》，《中国物理B》31，060505（2022）。[41] U. Divakaran、S. Sharma 和 A. Dutta，《调控广义自旋链中动力学相变的出现》，《物理评论E》93，052133（2016）。

[42]Y. Zeng 和 S. Chen, 《双能带系统中平衡量子相变与动力学量子相变之间的关系》, 《物理评论B》112, 064307（2025）。[43] M. Schmitt 和 S. Kehrein, 《Kitaev 蜂窝模型中的动力学量子相变》, 《物理评论B》92, 075114（2015）。[44] S. Sharma、A. Russomanno、G. E. Santoro 和 A. Dutta, 《周期驱动量子系统中的洛施密特回波与动力学保真度》, 《欧洲物理快报》106, 67003（2014）。[45] K. Yang、L. Zhou、W. Ma、X. Kong、P. Wang、X. Qin、X. Rong、Y. Wang、F. Shi、J. Gong 和 J. Du, 《Floquet 动力学量子相变》, 《物理评论B》100, 085308（2019）。[46] S. Zamani、R. Jafari 和 A. Langari, 《扩展 XY 模型中的 Floquet 动力学量子相变：从非绝热到绝热的拓扑相变》, 《物理评论B》102, 144306（2020）。[47] L. Zhou 和 Q. Du, 《周期淬火系统中的 Floquet 动力学量子相变》, 《物理学杂志：凝聚态物质》33, 345403（2021）。[48] R. Jafari 和 A. Akbari, 《Floquet 动力学相变与纠缠谱》, 《物理评论A》103, 012204 2021( )。[49] R. Hamazaki, 《周期驱动系统中的异常动力学量子相变》, 《自然通讯》12, 5108（2021）。[50] S. Zamani、R. Jafari 和 A. Langari, 《时间序外关联与 Floquet 动力学量子相变》, 《物理评论B》105, 094304（2022）。[51] L.-N. Luan、M.-Y. Zhang 和 L. Wang, 《周期淬火下 XY 自旋链的 Floquet 动力学量子相变》, 《物理学A：统计力学及其应用》604, 127866（2022）。[52] R. Jafari、A. Akbari、U. Mishra 和 H. Johannesson, 《同步周期驱动下的 Floquet 动力学量子相变》, 《物理评论B》105, 094311 2022( )。[53] S. Vajna 和 B. D´ora, 《动力学相变的拓扑分类》, 《物理评论B》91, 155127（2015）。[54] R. Jafari 和 H. Johannesson, 《洛施密特回波复现：临界与非临界》, 《物理评论快报》118, 015701（2017）。[55] N. Sedlmayr、P. Jaeger、M. Maiti 和 J. Sirker, 《一维拓扑绝缘体和超导体中动力学相变的体-边对应》, 《物理评论B》97, 064304（2018）。[56] T. V. Zache、N. Mueller、J. T. Schneider、F. Jendrzejewski、J. Berges 和 P. Hauke, 《有质量 Schwinger 模型中由一项引发的动力学拓扑相变》, 《物理评论快报》122, 050403（2019）。 θ R. Okugawa、H. Oshiyama 和 M. Ohzeki, 《拓扑晶体绝缘体中受镜面对称性保护的动力学量子相变》, 《物理评论研究》3, 043064（2021）。[57] R. Jafari、H. Johannesson、A. Langari 和 M. A. Martin-Delgado, 《淬火动力学与零能模：Creutz 模型的情形》, 《物理评论B》99, 054302（2019）。[58] T. Mas-lowski 和 N. Sedlmayr, 《多能带拓扑绝缘体中的准周期动力学量子相变及其与纠缠熵的联系》

以及保真度易感性, 《物理评论B》101, 014301 (2020). [60] S. Sharma、S. Suzuki 和 A. Dutta, 《非可积量子伊辛模型中的淬火与动力学相变》, 《物理评论B》92, 104306 (2015). [61] V. Zauner-Stauber 和 J. C. Halimeh, 《通过费舍尔零点线探测长程量子自旋链中的反常动力学相》, 《物理评论E》96, 062118 2017( ). [62] I. Homrighausen、N. O. Abeling、V. Zauner-Stauber 和 J. C. Halimeh, 《具有长程相互作用的量子自旋链中的反常动力学相》, 《物理评论B》96, 104436 (2017). [63] T. Obuchi、S. Suzuki 和 K. Takahashi, 《洛施密特振幅与动力学量子相变的复半经典分析》, 《物理评论B》95, 174305 2017( ). [64] A. Dutta 和 A. Dutta, 《探测长程相互作用在长程基塔耶夫链动力学中的作用》, 《物理评论B》96, 125113 (2017). [65] J. C. Halimeh、M. Van Damme、V. Zauner-Stauber 和 L. Vanderstraeten, 《动力学量子相变的准粒子起源》, 《物理评论研究》2, 033111 (2020). [66] L. Zhou、Q.-h. Wang、H. Wang 和 J. Gong, 《非厄米晶格中的动力学量子相变》, 《物理评论A》98, 022129 (2018). [67] L. Zhou 和 Q. Du, 《非厄米拓扑相与动力学量子相变：一种普遍联系》, 《新物理学杂志》23, 063041 (2021). [68] D. Mondal 和 T. Nag, 《具有扩展无能隙相的非厄米系统中的动力学量子相变异常》, 《物理评论B》106, 054308 (2022). [69] D. Mondal 和 T. Nag, 《非厄米系统中的有限温度动力学量子相变》, 《物理评论B》107, 184311 (2023). [70] H. Lang、Y. Chen、Q. Hong 和 H. Fan, 《开放系统中混合态的动力学量子相变》, 《物理评论B》98, 134310 (2018). [71] X.-Y. Hou、Q.-C. Gao、H. Guo、Y. He、T. Liu 和 C.-C. Chien, 《洛施密特振幅零点在不同物理过程中的混合态中普遍存在及其意义》, 《物理评论B》102, 104305 (2020). [72] T. H. Kyaw、V. M. Bastidas、J. Tangpanitanon、G. Romero 和 L.-C. Kwek, 《动力学量子相变与非马尔可夫动力学》, 《物理评论A》101, 012111 (2020). [73] B. Mera、C. Vlachou、N. Paunkovi´c、V. R. Vieira 和 O. Viyuela, 《由保真度和干涉洛施密特回波诱导度量揭示的有限温度动力学相变》, 《物理评论B》97, 094110 (2018). [74] N. Sedlmayr、M. Fleischhauer 和 J. Sirker, 《有限温度及开放系统中动力学相变的命运》, 《物理评论B》97, 045147 (2018). [75] V. Link 和 W. T. Strunz, 《具有量子光学实现的耗散量子动力学中的动力学相变》, 《物理评论快报》125, 143602 (2020). [76] X.-Y. Hou、H. Guo 和 C.-C. Chien, 《乌尔曼过程中自旋系统的有限温度拓扑相变：一般形式与实验方案》, 《物理评论A》104, 023303 (2021). [77] S. A. Weidinger、M. Heyl、A. Silva 和 M. Knap, 《具有连续对称性破缺的系统中的动力学量子相变》

(2017). [78] R. Jafari, 《横向场中一维扩展量子罗盘模型的淬火动力学与基态保真度》, 《物理学杂志A：数学与理论》49，185004（2016）。[79] M. Abdi, 《玻色-爱因斯坦凝聚体中的动力学量子相变》, 《物理评论B》100，184310（2019）。[80] N. Fl¨aschner、D. Vogel、M. Tarnowski、B. S. Rem、D.-S. L¨uhmann、M. Heyl、J. C. Budich、L. Mathey、K. Sen- gstock 和 C. Weitenberg, 《具有拓扑性质的系统在淬火后观测到动力学涡旋》, Nature Physics 14, 265（2018）。[81] P. Jurcevic、H. Shen、P. Hauke、C. Maier、T. Brydges、C. Hempel、B. P. Lanyon、M. Heyl、R. Blatt 和 C. F. Roos, 《直接观测相互作用多体系统中的动力学量子相变》, 《物理评论快报》119，080501（2017）。[82] X.-Y. Guo、C. Yang、Y. Zeng、Y. Peng、H.-K. Li、H. Deng、Y.-R. Jin、S. Chen、D. Zheng 和 H. Fan, 《通过超导量子比特模拟观测动力学量子相变》, 《物理评论应用》11，044080（2019）。[83] B. Chen、X. Hou、F. Zhou、P. Qian、H. Shen 和 N. Xu, 《在固态量子模拟器中探测动力学量子相变的时间序外关联》, 《应用物理学快报》116, 194002（2020）。[84] K. Wang、X. Qiu、L. Xiao、X. Zhan、Z. Bian、W. Yi 和 P. Xue, 《在光子量子行走中模拟动力学量子相变》, 《物理评论快报》122，020501（2019）。[85] X.-Y. Xu、Q.-Q. Wang、M. Heyl、J. C. Budich、W.-W. Pan、Z. Chen、M. Jan、K. Sun、J.-S. Xu、Y.-J. Han、C.-F. Li 和 G.-C. Guo, 《在量子行走中测量动力学拓扑序参量》, 《光：科学与应用》9，7（2020）。[86] H. Zhang、K. Wang、L. Xiao 和 P. Xue, 《非厄米量子行走中的自归一化与双正交动力学量子相变》, 《光：科学与应用》14，253（2025）。[87] F. H. L. Essler 和 M. Fagotti, 《孤立可积量子自旋链中的淬火动力学与弛豫》, Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment 2016, 064002（2016）。[88] A. Mitra, 《量子淬火动力学》, 《凝聚态物理年度评论》9，245–259（2018）。[89] C. Karrasch 和 D. Schuricht, 《不可积模型中淬火后的动力学相变》, 《物理评论B》87，195104（2013）。[90] J. N. Kriel、C. Karrasch 和 S. Kehrein, 《轴向次近邻伊辛链中的动力学量子相变》, 《物理评论B》90，125106（2014）。[91] S. Bhattacharjee 和 A. Dutta, 《扩展横向伊辛模型中的动力学量子相变》, 《物理评论B》97，134306（2018）。[92] B. Zhou、C. Yang 和 S. Chen, 《洛施密特回波长时间平均中的非平衡量子相变特征》, 《物理评论B》100, 184313（2019）。[93] F. Andraschko 和 J. Sirker, 《动力学量子相变与洛施密特回波：转移矩阵方法》, 《物理评论B》89，125120（2014）。[94] P. Uhrich、N. Defenu、R. Jafari 和 J. C. Halimeh, 《长程超导体的非平衡相图

[95] L. Rossi 和 F. Dolcini, 《磁通淬火 Su-Schrieffer-Heeger 模型中的非线性电流与动力学量子相变》, 《物理评论B》106，045410（2022）。[96] D. Liska 和 V. Gritsev, 《Loschmidt 指数》, 《SciPost Physics》10, 100（2021）。[97] C. Y. Wong、T. H. Hui、P. D. Sacramento 和 W. C. Yu, 《具有反常动力学量子相变的淬火扩展 Su-Schrieffer-Heeger 模型中的纠缠》, 《物理评论B》110，054312（2024）。[98] S. Sharma、U. Divakaran、A. Polkovnikov 和 A. Dutta, 《量子伊辛链中的慢淬火：动力学相变与拓扑》, 《物理评论B》93，144306（2016）。[99] X. Qiu、T.-S. Deng、G.-C. Guo 和 W. Yi, 《二维中动力学量子相变的动力学拓扑不变量与约化速率函数》, 《物理评论A》98，021601（2018）。[100] C. B. Mendl 和 J. C. Budich, 《淬火拓扑绝缘体中动力学量子相变的稳定性：从多能带到无序系统》, 《物理评论B》100，224307（2019）。[101] M. Sadrzadeh、R. Jafari 和 A. Langari, 《临界性处的动力学拓扑量子相变》, 《物理评论B》103，144305（2021）。[102] W. C. Yu、P. D. Sacramento、Y. C. Li 和 H.-Q. Lin, 《相互作用拓扑绝缘体中的关联与动力学量子相变》, 《物理评论B》104，085104（2021）。[103] J. Naji、M. Jafari、R. Jafari 和 A. Akbari, 《耗散 Floquet 动力学量子相变》, 《物理评论A》105，022220（2022）。[104] Z. Huang 和 A. V. Balatsky, 《动力学量子相变：波函数重叠中拓扑节点的作用》, 《物理评论快报》117，086802（2016）。[105] T. Puskarov 和 D. Schuricht, 《横向场伊辛链在有限时间量子淬火期间及之后的时间演化》, 《SciPost Physics》1，003（2016）。[106] A. A. Makki、S. Bandyopadhyay、S. Maity 和 A. Dutta, 《淬火量子多体系统弛豫中的动力学交叉行为》, 《物理评论B》105，054301（2022）。[107] K. Cao、H. Hou 和 P. Tong, 《通过线性淬火探索 xy 链中的动力学相变：早期与长期视角》, 《物理评论A》110，042209（2024）。[108] K. Cao、Y. Hu、P. Tong 和 G. Yang, 《量子淬火后具有无能隙相的扩展 XY 链的动力学弛豫行为》, 《物理评论B》109，024303 2024（）。[109] A. Lerose、B. ˇ Zunkoviˇc、J. Marino、A. Gambassi 和 A. Silva, 《非平衡涨落对长程相互作用自旋链预热化动力学相变的影响》, 《物理评论B》99，045128（2019）。[110] T. Hashizume、I. P. McCulloch 和 J. C. Halimeh, 《二维横场伊辛模型中的动力学相变》, 《物理评论研究》4，013250（2022）。[111] J. Zhang、G. Pagano、P. W. Hess、A. Kyprianidis、P. Becker、H. Kaplan、A. V. Gorshkov、Z.-X. Gong 和 C. Monroe, 《利用 53 量子比特量子模拟器观测多体动力学相变》, 《自然》551，601（2017）。[112] J. Lang

全连接横场伊辛模型在有限温度下的动力学相变，《物理评论B》**97**，174401（2018）。[113] B.-M. Xu、J. Zou、L.-S. Guo 和 X.-M. Kong，量子相干对功统计的影响，Phys. Rev. A **97**，052122（2018）。[114] B.-M. Xu，量子相干辅助的动力学相变，理论物理通讯**76**，125104（2024）。[115] S. Bandyopadhyay、S. Laha、U. Bhattacharya 和 A. Dutta，探索马尔可夫热浴存在时动力学量子相变的可能性，《科学报告》**8**，11921（2018）。[116] M. Fisher，《Boulder讲座：理论物理》第7卷，科罗拉多：科罗拉多大学（1965）。[117] P. Pfeuty，横向场作用下的一维伊辛模型，物理学年鉴**57**，79（1970）。[118] E. Barouch 和 B. M. McCoy，《 xy 模型的统计力学。II. 自旋关联函数，Phys. Rev. A**3**，786（1971）。[119] E. Lieb、T. Schultz 和 D. Mattis，《反铁磁链的两个可解模型》，载于 *Condensed Matter Physics and Exactly Soluble Models: Selecta of Elliott H. Lieb*，B. Nachtergaele、J. P. Solovej 和 J. Yngvason 编（Springer Berlin Heidelberg，柏林、海德堡，2004），第543–601页。[120] M. Zhong 和 P. Tong，《横向场中周期XY模型的伊辛相变和各向异性相变》，《物理学A辑：数学与理论》**43**，505302（2010）。[121] X. Peng、H. Zhou、B.-B. Wei、J. Cui、J. Du 和 R.-B. Liu，《李-杨零点的实验观测》，《物理评论快报》**114**，010601（2015）。[122] C. Miao、Y. Li、J. Wang、P. Zhang、Q. Li、L. Hu、Y. Xu 和 X. Kong，《非厄米XY自旋系统中量子纠缠和关联在例外点处的渡越行为》，《物理评论B》**110**，014403（2024）。