arXiv:2602.01275v1 [math.QA] 1 Feb 2026

关于 Kashina 的 Hopf 代数 $H_{b:x^2y}$ 上有限维 Hopf 代数的若干分类

Yihan Wu、Hengyi Wang 和 Naihong Hu*

Abstract. 设 H 是 Kashina 分类的 16 维非平凡（即非交换且非余交换）半单 Hopf 代数 $H_{b:x^2y}$。我们确定了所有简单 Yetter-Drinfeld H-模，进而确定满足约束条件 $\mathcal{B}(V) \cong \bigotimes_{i\in I}\mathcal{B}(V_i)$ 的所有有限维 Nichols 代数，其中 $V=\bigoplus_{i\in I}V_i$，且每个 V_i 都是 ${}^H_H\mathcal{YD}$中的一个简单对象。最后，我们描述了相应 Radford 双积 $\mathcal{B}(V)\sharp H$ 的若干提升，从而给出了以 H 为其余根的有限维 Hopf 代数的若干分类。

1. 引言

1.1. 设 $\mathbb{K}$ 是一个特征为零的代数闭域。1975 年，Kaplansky [31]提出了十个猜想，其中一个涉及 $\mathbb{K}$ 上有限维 Hopf 代数的同构类数目。迄今为止，尽管已经获得了大量分类结果，但仍没有统一的标准方法。一个显著的例外是 Andruskiewitsch 和 Schneider [1] 于 1998 年提出的提升方法，此后它在有限维（余）点 Hopf 代数的分类中发挥了核心作用。（例如 [3], [4], [6], [7], [8], [10], [19], [24] 等。）

实际上，对于具有 Radford 双积结构的有限维霍普夫代数类，或其经某些 Hopf 2-余循环变形所得的代数类，提升方法效果很好。设 A 是一个霍普夫代数。若余根 A_0 是一个霍普夫子代数，则余根滤过 $\{A_n\}_{n\geq 0}$ 是一个 Hopf 代数滤过，而伴随分次余代数$grA=\bigoplus_{n\geq 0}A_n/A_{n-1}$ 也是一个霍普夫代数，其中 $A_{-1}=0$。设 $\pi: grA\to A_0$ 为齐次投影。根据 Radford 的一个定理 [35], ，存在唯一的连通分次编织霍普夫代数 $R=\bigoplus_{n\geq 0}R(n)$，它属于幺半辫范畴${}^{A_0}_{A_0}\mathcal{YD}$，并满足 $grA\cong R\sharp A_0$。我们分别称 R 或 $R(1)$ 为 A的图或无穷小编织。此外， R 是严格分次的，也就是说， $R(0)=\mathbb{K}$， $R(1)=\mathcal{P}(R)$（见定义 2.1 [3]）。

1.2. 提升方法已用于分类一些有限维尖点 Hopf 代数，例如 [5], [9], [11],[12], [19], [22], 等，以及余点 Hopf 代数[8], [30], 等。然而，关于余根既非群代数也非群代数的对偶的有限维 Hopf 代数，目前只有少数分类结果，例如 [14], [18], [21], [28], [29], [37], [38], [39], [40], [41] [42], [43] 等。事实上，Shi 在 [37] 中启动了一项研究计划，旨在通过由其半单 Yetter-Drinfeld 模 $A_0=H_8$ 导出的相关 Nichols 代数，将某个给定的非平凡 8 维半单 Hopf 代数（Kac-Paljutkin 代数）上的有限维增长对象分类

2020 数学主题分类。主要分类 16T05；次要分类 16T99。本研究得到国家自然科学基金（项目编号：12171155）的资助，并部分得到上海市科学技术委员会（项目编号：22DZ2229014）的资助。

。另一方面，Kashina [32] 对 16 维半单 Hopf 代数进行了分类，共对应 16 个同构类，即，

$$H_{a:1},\ H_{a:y},\ H_{b:1},\ (H_{b:1})^*,\ H_{b:y},\ H_{b:x^2y},\ H_{B:1},\ H_{B:X},$$
$$H_{c:\sigma_0},\ H_{c:\sigma_1},\ (H_{c:\sigma_1})^*,\ H_{C:1},\ H_{C:\sigma_1},\ H_{d:-1,1},\ H_{d:1,1},\ H_E.$$

随后，Zheng、Gao、Hu 等人对余根源自某些 16 维 Kashina 半单霍普夫代数的有限维霍普夫代数进行了类似的分类： $H_{b:1}$ ([45])、$H_{d:-1,\ 1}$ ([46])、$(H_{b:1})^*$ ([47])、 $H_{a:y}$ ([48])。本文旨在对 Kashina 半单霍普夫代数 $H_{b:x^2y}$ 上的一些有限维霍普夫代数进行分类。

有限维霍普夫代数 A 的余根 A_0 若为霍普夫子代数，其分类主要分为以下三个步骤:

(a) 确定 ${}^{A_0}_{A_0}\mathcal{YD}$ 中那些 Yetter-Drinfeld 单的或半单的 A_0-模 V，使得相应的 Nichols代数 $\mathcal{B}(V)$ 是有限维的，并用生成元与关系给出 $\mathcal{B}(V)$。 (b) 若 ${}^{A_0}_{A_0}\mathcal{YD}$ 中的 $R=\bigoplus_{n\geq 0}R(n)$ 是一个具有 $V=R(1)$ 的有限维霍普夫代数，则判断 $R\cong\mathcal{B}(V)$ 是否成立。(c) 给定 (a) 中的 V，对所有满足 $\mathrm{gr}\,A\cong\mathcal{B}(V)\sharp A_0$ 的有限维霍普夫代数 A 进行分类。我们称 A 为 A_0 上 $\mathcal{B}(V)$ 的一个提升。

1.3. 本文首先固定一个 16 维非平凡半单霍普夫代数$H=H_{b:x^2y}$，然后研究上述问题。关于霍普夫代数H的定义，参见定义 3.1。我们首先确定 Drinfeld 双 $D:=D(H^{cop})$ of H^{cop}，并描述其简单 D-模。事实上，我们在定理 3.7 中证明，存在 32 个一维简单对象$\mathbb{K}_{\chi_{i,j,k,l}}$，它们满足 $0\leq i,\ k,\ l<2,\ 0\leq j<4$；以及 56 个二维简单对象 $V_{i,j,k,l}$，它们满足 $(i,j,k,l)\in\Omega$、$W_{i,j,k}$，且满足 $(i,j,k)\in\Lambda^1$、$U_{i,j,k,l}$，且满足 $(i,j,k,l)\in\Lambda^2$。利用编织范畴 ${}_D\mathcal{M}$ 与 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 彼此幺半同构这一事实（参见 [33]），我们实际上得到了 ${}^H_H\mathcal{YD}$中的简单对象。此外，对于 $N=\oplus_{i\in I}N_i$，我们得到了满足约束条件 $\mathcal{B}(N)\cong\bigotimes_{i\in I}\mathcal{B}(N_i)$ 的半单对象的所有可能的有限维Nichols代数。以下是我们的第一个主要结果。

Theorem A. 假设 $N=\oplus_{i\in I}N_i$是半单的，且 ${}^H_H\mathcal{YD}$中的每个简单对象 N_i使得*Nichols*代数 $\mathcal{B}(N)\cong\otimes_{i\in I}\mathcal{B}(N_i)$。则*dim* $\mathcal{B}(N)<\infty$当且仅当*N*同构于下列*Yetter-Drinfel*模之一:

(1) $\Omega_{i,j}=V_i\oplus V_j,\ i,j\in\mathbb{I}_1$,8; (2) $\Omega_{1,i,j}(n_1,n_2,n_3)=M_1^{\oplus n_1}\oplus V_{2i-1}^{\oplus n_2}\oplus V_{2j}^{\oplus n_3},\ i,\ j\in\mathbb{I}_1$,2, $n_1\geq 1,\ n_2,\ n_3\in\mathbb{I}_0$,1, $(n_1,n_2,n_3)\neq$(2, 0, 0); (3) $\Omega_{7,i,j}(n_1,n_2,n_3)=M_7^{\oplus n_1}\oplus V_{2i-1}^{\oplus n_2}\oplus V_{2j}^{\oplus n_3},\ i,\ j\in\mathbb{I}_1$,2, $n_1\geq 1,\ n_2,\ n_3\in\mathbb{I}_0$,1, $(n_1,n_2,n_3)\neq$(2, 0, 0); (4) $\Omega_{8,i,j}(n_1,n_2,n_3)=M_8^{\oplus n_1}\oplus V_{2i-1}^{\oplus n_2}\oplus V_{2j}^{\oplus n_3},\ i\in\mathbb{I}_3$,4, $n_1\geq 1,\ n_2,\ n_3\in\mathbb{I}_0$,1, $(n_1,n_2,n_3)\neq$(2, 0, 0); (5) $\Omega_{9,i,j}(n_1,n_2,n_3)=M_9^{\oplus n_1}\oplus V_{2i-1}^{\oplus n_2}\oplus V_{2j}^{\oplus n_3},\ i\in\mathbb{I}_3$,4, $j\in\mathbb{I}_1$,2, $n_1\geq 1,\ n_2,n_3\in\mathbb{I}_0$,1, $(n_1,n_2,n_3)\neq$(2, 0, 0); (6) $\Omega_{10,i,j}(n_1,n_2,n_3)=M_{10}^{\oplus n_1}\oplus V_{2i-1}^{\oplus n_2}\oplus V_{2j}^{\oplus n_3},\ i\in\mathbb{I}_3$,4, $j\in\mathbb{I}_1$,2, $n_1\geq 1,\ n_2,n_3\in\mathbb{I}_0$,1, $(n_1,n_2,n_3)\neq$(2, 0, 0); (7) $\Omega_i=M_i\oplus M_i,\ i\in\mathbb{I}_1$,12; (8) $\Omega_i{}^{(1)}=M_1\oplus M_i,\ i\in\{6,8\}$;

（9）$\Omega_i{}^{(2)} = M_i \oplus M_{i+2}, \quad i \in \{2,3\}$；（
10）$\Omega_i{}^{(3)} = M_i \oplus M_{i+1}, \quad i \in \{6,7,9,11\}$。

最后，基于提升方法的原理，我们对 H 上的有限维霍普夫代数进行分类，使其无穷小编织为 **定理 A** 中列出的 Yetter-Drinfeld 模 (1)，(7)、(8)、(9)、(10)。下面给出第二个主要结果。

THEOREM B. 设 A 是 H 上的有限维霍普夫代数，且其无穷小编织同构于 定理 ***A*** 中的 ***Yetter-Drinfeld*** 模(1)、(7)、(8)、(9)、(10)之一，则 A 同构于以下某个代数

(1) $\mathfrak{U}_1$*(1(*λ, μ*)*，见定义 *6.4*；$\mathfrak{U}_1$*(2(*λ*)*，见定义 *6.5*；$\mathfrak{U}_1$*(3(*λ*)*，见定义 *6*；$\mathfrak{U}_1$*(4(*λ, μ*)*，见定义 *6.7*；$\mathfrak{U}_1$*(5(*λ, μ*)*，见定义 *6.8*；$\mathfrak{U}_1$*(6(*λ, μ*)*，见定义 *6.9*；$\mathfrak{U}_1$*(7(*λ, μ*)*，见定义 *6.10*；$\mathfrak{U}_1$*(8(*λ, μ*)*，见定义 *6.11*。
(2) $\mathfrak{U}_1(\lambda, \mu)$，见定义 *6.13*；$\mathfrak{U}_2(J)$，见定义 *6*；$\mathfrak{U}_3(I)$，见定义 *6.16*；$\mathfrak{U}_6(I)$，见定义 *6.17*；$\mathfrak{U}_9(I)$，见定义 *6.18*；$\mathfrak{U}_{10}(I)$，见定义 *6.19*；$\mathfrak{U}_{13}(I)$，见定义 *6.21*；$\mathfrak{U}_{14}(\lambda, \mu)$，见定义 *6.22*；$\mathfrak{U}_{15}(I)$，见定义 *6.23*；$\mathfrak{U}_{16}(\lambda, \mu)$，见定义 *6.24*；$\mathfrak{U}_{17}(I, \beta)$，见定义 *6.25*；$\mathfrak{U}_{19}(I)$，见定义 *6.26*。

REMARK 1.1. 在 [**14**]，中，作者通过确定所有与有限群代数 ***Morita*** 等价的半单霍普夫代数，构造了一些具有对偶 ***Chevalley*** 性质的霍普夫代数实例。但在我们的情形中：半单霍普夫代数 $H_{b:x^2y}$是某个群代数的 2-伪余循环扭曲，而非 2-余循环扭曲，因此作为半单代数，它不再与群代数 ***Morita*** 等价。

1.4. 本文结构如下。第 2 节回顾 Yetter-Drinfeld 模、Nichols代数、Radford 双积和 Drinfeld 双的一些基础知识与记号。第 3 节回顾 H 的定义，并通过生成元与关系给出 Drinfeld 双 $D = D(H^{cop})$。我们还确定了 D-模的简单模。第 4 节利用编织范畴 ${}^H_H\mathcal{YD} \cong {}_D\mathcal{M}$的幺半群同构描述 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 的简单对象。第 5 节对于 $N = \oplus_{i\in I} N_i$，求出满足 $\mathcal{B}(N) \cong \bigotimes_{i\in I} \mathcal{B}(N_i)$ 的半单模的所有可能的有限维 Nichols 代数。第 6 节基于提升方法的原理，对 H 上的有限维霍普夫代数进行分类，其中其无穷小编织为 (1)、(7)、(8)、(9)、(10) 中列出的 Yetter-Drinfeld 模。由此得到**定理 A**。然后得到**定理 B**。

2. 预备知识

约定。全文中，基域 $\mathbb{K}$ 是特征零的代数闭域，我们用 ξ 表示一个本原四次单位根。关于霍普夫代数理论的参考资料，可参阅 [**34**], [**33**], [**36**], [**44**], 等。

若 H 是 $\mathbb{K}$上的霍普夫代数，则 $\triangle$, ε, S 分别表示余乘法、余单位和反元。我们对余乘法和余作用使用Sweedler记号， $e.g.$, $\triangle(h) = h_{(1)} \otimes h_{(2)}$ 表示 $h \in H$。我们用 H^{op} 表示具有反乘法的霍普夫代数，用 H^{cop} 表示具有反余乘法的霍普夫代数，用 H^{bop} 表示霍普夫代数 $H^{op\ cop}$。用 $G(H)$表示H的类群元集合。

$$\mathcal{P}_{g,h}(H) = \{x \in H \mid \triangle(x) = x \otimes g + h \otimes x\}, \quad \forall\ g,\ h \in G(H).$$

特别地，线性空间 $\mathcal{P}(H) = \mathcal{P}_{1,1}(H)$称为本原元集合。

若 V是 $\mathbb{K}$-向量空间， $v \in V$, $f \in V^*$，我们用 $f(v)$ $\langle f, v\rangle$ 或 $\langle v, f\rangle$ 表示求值。给定 $n \geq 0$,我们记 $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 和$\mathbb{I}_{0,n} = \{0, 1, \cdots, n\}$。需要强调的是，当未特别说明时，运算 ij 和 $i \pm j$ 对 i,$j \in \mathbb{I}_{0,n}$按模 $n+1$ 考虑。

2.1. Yetter-Drinfeld 模与 Nichols 代数。设 H 是一个具有双射反 antipode 的霍普夫代数。H 上的左Yetter-Drinfeld模 V是一个左 H-模（V, $\cdot$）和一个左 H-模（V, δ），满足对所有 $v \in V$，有 $\delta(v) = v_{(-1)} \otimes v_{(0)} \in H \otimes V$，并且

$$\delta(h \cdot v) = h_{(1)}v_{(-1)}S(h_{(3)}) \otimes h_{(2)} \cdot v_{(0)}, \ \forall\, v \in V, \ \forall\, h \in H.$$

我们用 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 表示 H上的有限维左Yetter-Drinfeld模范畴。它是一个编织幺半范畴：对于 V, $W \in {}^H_H\mathcal{YD}$，编织$c_{V,\ W}$: $V \otimes W \to W \otimes V$定义为

$$c_{V,W}(v \otimes w) = v_{(-1)} \cdot w \otimes v_{(0)}, \quad \forall\, v \in V,\ w \in W. \tag{2.1}$$

特别地，(V, $c_{V,\ V}$)是一个编织向量空间，也就是说， $c := c_{V,\ V}$是满足辫子方程的线性同构

$$(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c).$$

Definition 2.1. ([**3**], 定义 *2.1*) 设 H 是一个霍普夫代数， V是 H上的 ***Yetter-Drinfeld*** 模。 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的一个编织 $\mathbb{N}$-分次霍普夫代数 $R = \bigoplus_{n\geq 0} R(n)$ 称为 V 的 ***Nichols*** 代数，如果 $\mathbb{K} \simeq R(0)$， $V \simeq R(1)$， $R(1) = \mathcal{P}(R)$，且 R 作为代数由 $R(1)$ 生成。

对于任意 $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$ ，都有与之关联的 Nichols代数 $\mathcal{B}(V)$。它是张量代数 $T(V)$ 对极大齐次双边理想 I 取商所得，其中该理想满足： I由次数大于或等于二的齐次元素生成， $\Delta(I) \subseteq I \otimes T(V) + T(V) \otimes I$，也就是说，它同时也是一个余理想。在这种情况下， $\mathcal{B}(V) = T(V)/I$([**3**],第 2.1 节)。

Remark 2.2。 众所周知，***Nichols***代数 $\mathcal{B}(V)$ 作为代数和余代数，完全由辫子空间 V 决定。若 $W \subseteq V$ 是一个子空间，满足$c(W \otimes W) \subseteq W \otimes W$，则当维数 $\mathcal{B}(W) = \infty$时，维数 $\mathcal{B}(V) = \infty$。特别地，若 V 包含一个非零元素 v，使得 $c(v \otimes v) = v \otimes v$，则维数$\mathcal{B}(V) = \infty$。

Lemma 2.3. ([**23**], 定理 *2.2*) 设 (V, c) 是一个编织向量空间，$V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$，且每个 $\mathcal{B}(V_i)$ 都是有限维的。则 维数$\mathcal{B}(V) \geq \prod_{i=1}^n$ 维数 $\mathcal{B}(V_i)$。此外，当且仅当对所有 $i \neq j$, $b_{ij} = b_{ji}^{-1}$ 时等号成立，其中 $b_{ij} = c\,|_{V_i \otimes V_j}$。

2.2. 玻色化与带投射的霍普夫代数。 设 R 是 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的一个霍普夫代数，并用 $\Delta_R(r) = r^{(1)} \otimes r^{(2)}$ 表示其余乘法，其中 $r \in R$。我们如下定义 Radford 双积或玻色化 $R\sharp H$：作为一个向量空间， $R\sharp H = R \otimes H$，其乘法和余乘法分别由交叉积和交叉余积给出：

$$(r\sharp g)(s\sharp h) = r(g_{(1)} \cdot s)\sharp g_{(2)}h, \Delta(r\sharp g) = r^{(1)}\sharp(r^{(2)})_{(-1)}g_{(1)} \otimes (r^{(2)})_{(0)}\sharp g_{(2)}.$$

显然，映射 ι：$H \to R\sharp H$， $h \mapsto 1\sharp h$， $\forall\, h \in H$，是单射，而映射

$$\pi : R\sharp H \to H,\ r\sharp h \mapsto \epsilon_R(r)h, \quad \forall\, r \in R,\ b \in H.$$

是满射，且 $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathrm{H}}$. 。此外，有

$$R \cong R\sharp 1 = (R\sharp H)^{coH} = \{x \in R\sharp H \mid (\mathrm{id} \otimes \pi)\Delta(x) = x \otimes 1\}.$$

反过来，若 A 是具有双射反元的霍普夫代数，且 π： $A \to H$ 是具有霍普夫代数截面 ι： $H \to A$ 的霍普夫代数满态射，并且满足 $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathrm{H}}$，则 $R = A^{co\pi}$ 是 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的编织霍普夫代数，并且 $A \simeq R\sharp H$ 是霍普夫代数（见 [**35**], [**36**]）。

2.3. Drinfeld 双。设 H 是域 $\mathbb{K}$ 上的有限维霍普夫代数。Drinfeld 双 $D(H) = H^{*cop} \otimes H$ 是具有张量积余代数结构的霍普夫代数，其代数结构定义如下：

$$(p \otimes a)(q \otimes b) = p\langle q_{(3)}, a_{(1)}\rangle q_{(2)} \otimes a_{(2)}\langle q_{(1)}, S^{-1}(a_{(3)})\rangle b, \quad \forall\, p,\ q \in H^*,\ a,\ b \in H.$$

Proposition 2.4。 （[**34**], 命题 ***10.6.16***）设 H 为有限维 ***Hopf*** 代数。则 ***Yetter-Drinfeld*** 范畴 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 可识别为左模范畴${}_{D\,(H^{cop})}\mathcal{M}$，其中对象是 ***Drinfeld*** 双 $D(H^{cop})$ 的左模。

3. 霍普夫代数 H 及其 Drinfeld 双

本节将回顾 16 维非平凡半单 Hopf 代数 $H = H_{b:x^2y}$ [**32**] 的结构，并通过生成元与关系给出 Drinfeld 双 $D = D(H^{cop})$。随后，我们将确定所有单的左 D-模。

Definition 3.1。 作为代数， H 由满足以下关系的 x、 y、 t 生成

$$x^4 = 1, \quad y^2 = 1, \quad t^2 = x^2y, \quad xy = yx, \quad tx = x^{-1}t, \quad ty = yt, \tag{3.1}$$

其余代数结构由下式确定

$$\begin{gathered}\triangle(x) = x \otimes x, \quad \triangle(y) = y \otimes y, \quad \triangle(t) = \frac{1}{2}(\,(1+y)t \otimes t + (1-y)t \otimes x^2t\,),\\ \varepsilon(x) = \varepsilon(y) = 1, \quad \varepsilon(t) = 1,\end{gathered} \tag{3.2}$$

其反元由下式确定

$$S(x) = x^{-1}, \quad S(y) = y, \quad S(t) = \frac{1}{2}((1+y)x^2t - (1-y)t).$$

Remark 3。 2. 1. $G(H) = \langle x\rangle \times \langle y\rangle$， $\mathcal{P}_{1,\ g}(H) = \mathbb{K}\{1-g\}$ 对于 $g \in G(H)$， H 的线性基由 $\{x^i,\ x^iy,\ x^it,\ x^iyt \mid i \in \mathbb{I}_{0,3}\}$ 给出。

2. 记 $\{(x^i)^*、(x^iy)^*、(x^it)^*、(x^iyt)^* \mid i \in \mathbb{I}_{0,3}\}$ 为霍普夫代数H^*的对偶基。令

$$a = (\,(1+x+x^2+x^3)(1-y)(1+\xi t)\,)^*,\ b = (\,(1-x+x^2-x^3)(1+y)(1-t)\,)^*,$$
$$c = (\,(1+\xi x-x^2-\xi x^3)(1-y)(1+t)\,)^*.$$

然后，利用由 H 的关系所导出的乘法表，可得 t

$$a^4 = b^2 = 1, \quad c^2 = b, \quad ab = ba, \quad ca = a^3c, \quad cb = bc,$$
$$\triangle(a) = a \otimes a, \quad \triangle(b) = b \otimes b,$$
$$\triangle(c) = \frac{1}{2}(c + a^2c) \otimes c + \frac{1}{2}(c - a^2c) \otimes a^2bc.$$

PROPOSITION 3.3. H 的自同构群由下式给出

$$\langle \tau_2 \rangle \times \langle \tau_5 \rangle \times \langle \tau_{13} \rangle \times \langle \tau_{17} \rangle \times \langle \tau_{33} \rangle \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

因此， H 的所有自同构均在表 *1* 中给出。

	x	y	t		x	y	t
τ_1	x	y	t	τ_{33}	xy	y	t
τ_2	x	y	xt	τ_{34}	xy	y	xt
τ_3	x	y	x^2t	τ_{35}	xy	y	x^2t
τ_4	x	y	x^3t	τ_{36}	xy	y	x^3t
τ_5	x	y	yt	τ_{37}	xy	y	yt
τ_6	x	y	xyt	τ_{38}	xy	y	xyt
τ_7	x	y	x^2yt	τ_{39}	xy	y	x^2yt
τ_8	x	y	x^3yt	τ_{40}	xy	y	x^3yt
τ_9	x	x^2y	$\tau_2((1+\xi)yt + (1-\xi)x^2yt)$	τ_{41}	xy	x^2y	$\tau_2((1+\xi)yt + (1-\xi)x^2yt)$
τ_{10}	x	x^2y	$\tau_2((1-\xi)yt + (1+\xi)x^2yt)$	τ_{42}	xy	x^2y	$\tau_2((1-\xi)yt + (1+\xi)x^2yt)$
τ_{11}	x	x^2y	$\tau_2((1+\xi)xyt + (1-\xi)x^3yt)$	τ_{43}	xy	x^2y	$\tau_2((1+\xi)xyt + (1-\xi)x^3yt)$
τ_{12}	x	x^2y	$\tau_2((1-\xi)xyt + (1+\xi)x^3yt)$	τ_{44}	xy	x^2y	$\tau_2((1-\xi)xyt + (1+\xi)x^3yt)$
τ_{13}	x	x^2y	$\tau_2((1+\xi)t + (1-\xi)x^2t)$	τ_{45}	xy	x^2y	$\tau_2((1+\xi)t + (1-\xi)x^2t)$
τ_{14}	x	x^2y	$\tau_2((1-\xi)t + (1+\xi)x^2t)$	τ_{46}	xy	x^2y	$\tau_2((1-\xi)t + (1+\xi)x^2t)$
τ_{15}	x	x^2y	$\tau_2((1+\xi)xt + (1-\xi)x^3t)$	τ_{47}	xy	x^2y	$\tau_2((1+\xi)xt + (1-\xi)x^3t)$
τ_{16}	x	x^2y	$\tau_2((1-\xi)xt + (1+\xi)x^3t)$	τ_{48}	xy	x^2y	$\tau_2((1-\xi)xt + (1+\xi)x^3t)$
τ_{17}	x^3	y	t	τ_{49}	x^3y	y	t
τ_{18}	x^3	y	xt	τ_{50}	x^3y	y	xt
τ_{19}	x^3	y	x^2t	τ_{51}	x^3y	y	x^2t
τ_{20}	x^3	y	x^3t	τ_{52}	x^3y	y	x^3t
τ_{21}	x^3	y	yt	τ_{53}	x^3y	y	yt
τ_{22}	x^3	y	xyt	τ_{54}	x^3y	y	xyt
τ_{23}	x^3	y	x^2yt	τ_{55}	x^3y	y	x^2yt
τ_{24}	x^3	y	x^3yt	τ_{56}	x^3y	y	x^3yt
τ_{25}	x^3	x^2y	$\tau_2((1+\xi)yt + (1-\xi)x^2yt)$	τ_{57}	x^3y	x^2y	$\tau_2((1+\xi)yt + (1-\xi)x^2yt)$
τ_{26}	x^3	x^2y	$\tau_2((1-\xi)yt + (1+\xi)x^2yt)$	τ_{58}	x^3y	x^2y	$\tau_2((1-\xi)yt + (1+\xi)x^2yt)$
τ_{27}	x^3	x^2y	$\tau_2((1+\xi)xyt + (1-\xi)x^3yt)$	τ_{59}	x^3y	x^2y	$\tau_2((1+\xi)xyt + (1-\xi)x^3yt)$
τ_{28}	x^3	x^2y	$\tau_2((1-\xi)xyt + (1+\xi)x^3yt)$	τ_{60}	x^3y	x^2y	$\tau_2((1-\xi)xyt + (1+\xi)x^3yt)$
τ_{29}	x^3	x^2y	$\tau_2((1+\xi)t + (1-\xi)x^2t)$	τ_{61}	x^3y	x^2y	$\tau_2((1+\xi)t + (1-\xi)x^2t)$
τ_{30}	x^3	x^2y	$\tau_2((1-\xi)t + (1+\xi)x^2t)$	τ_{62}	x^3y	x^2y	$\tau_2((1-\xi)t + (1+\xi)x^2t)$
τ_{31}	x^3	x^2y	$\tau_2((1+\xi)xt + (1-\xi)x^3t)$	τ_{63}	x^3y	x^2y	$\tau_2((1+\xi)xt + (1-\xi)x^3t)$
τ_{32}	x^3	x^2y	$\tau_2((1-\xi)xt + (1+\xi)x^3t)$	τ_{64}	x^3y	x^2y	$\tau_2((1-\xi)xt + (1+\xi)x^3t)$

PROOF. 设 f 是 H的一个自同构。由于 $G(H) = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$, 以及 $x^4 = 1$、 $y^2 = 1$, 我们有 $f(x) \in \{x, x^3, xy, x^3y\}$, $f(y) \in \{y, x^2y\}$。若 $f(t)$含有类群元, 则它不满足 $\Delta f(t) = (f \otimes f)\Delta(t)$。于是我们令 $f(t) = (k_1 + k_2x + k_3x^2 + k_4x^3 + k_5y + k_6xy + k_7x^2y + k_8x^3y)t$, $k_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq 8$。假设 $f(x) = x$, $f(y) = y$, 利用$\Delta f(t) = (f \otimes f)\Delta(t)$并比较 $x^iy^jt \otimes x^{i'}y^{j'}t$、 i、 i' $\in \mathbb{I}_0$、3、 j、 j' $\in \mathbb{I}_0$、1的系数，我们

得到如下结果:

$$\begin{aligned}
&k_1(k_3-k_7)=k_1(k_3+k_7)=k_1(k_4+k_8)=k_1(k_2+k_6)=0,\\
&k_2(k_4-k_8)=k_2(k_4+k_8)=k_2(k_1+k_5)=k_2(k_3+k_7)=0,\\
&k_3(k_1-k_5)=k_3(k_1+k_5)=k_3(k_2+k_6)=k_3(k_4+k_8)=0,\\
&k_4(k_2-k_6)=k_4(k_2+k_6)=k_4(k_1+k_5)=k_4(k_3+k_7)=0,\\
&k_5(k_3-k_7)=k_5(k_3+k_7)=k_5(k_2+k_6)=k_5(k_4+k_8)=0,\\
&k_6(k_4-k_8)=k_6(k_4+k_8)=k_6(k_1+k_5)=k_6(k_3+k_7)=0,\\
&k_7(k_1-k_5)=k_7(k_1+k_5)=k_7(k_2+k_6)=k_7(k_4+k_8)=0,\\
&k_8(k_2-k_6)=k_8(k_2+k_6)=k_8(k_1+k_5)=k_8(k_3+k_7)=0.
\end{aligned}$$

因此，我们有 $f(t)\in\{t,xt,x^2t,x^3t,yt,xyt,x^2yt,x^3yt\}$。
当 $f(x)=x,f(y)=xy$时，由 $\Delta f(t)=(f\otimes f)\Delta(t)$并比较$x^iy^jt\otimes x^{i'}y^{j'}t$、 $i,i'\in\mathbb{I}_{0,3},j,j'\in\mathbb{I}_{0,1}$的系数，则

$$\begin{aligned}
&k_1(k_2+k_8)=k_1(k_4+k_6)=k_1(k_1+k_3+k_5+k_7-1)=0,\\
&k_2(k_1+k_7)=k_2(k_3+k_5)=k_2(k_2+k_4+k_6+k_8-1)=0,\\
&k_3(k_2+k_8)=k_3(k_4+k_6)=k_3(k_1+k_3+k_5+k_7-1)=0,\\
&k_4(k_3+k_5)=k_4(k_1+k_7)=k_4(k_2+k_4+k_6+k_8-1)=0,\\
&k_5(k_2+k_8)=k_5(k_4+k_6)=k_5(k_1+k_3+k_5+k_7-1)=0,\\
&k_6(k_1+k_7)=k_6(k_3+k_5)=k_6(k_2+k_4+k_6+k_8-1)=0,\\
&k_7(k_2+k_8)=k_7(k_4+k_6)=k_7(k_1+k_3+k_5+k_7-1)=0,\\
&k_8(k_1+k_7)=k_8(k_3+k_5)=k_8(k_2+k_4+k_6+k_8-1)=0.
\end{aligned}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
f(t)\in\Big\{&\frac{1}{2}(\,(1+\xi)t+(1-\xi)x^2t\,),\ \frac{1}{2}(\,(1-\xi)t+(1+\xi)x^2t\,),\\
&\frac{1}{2}(\,(1+\xi)xt+(1-\xi)x^3t\,),\ \frac{1}{2}(\,(1-\xi)xt+(1+\xi)x^3t\,),\\
&\frac{1}{2}(\,(1+\xi)yt+(1-\xi)x^2yt\,),\ \frac{1}{2}(\,(1-\xi)yt+(1+\xi)x^2yt\,),\\
&\frac{1}{2}(\,(1+\xi)xyt+(1-\xi)x^3yt\,),\ \frac{1}{2}(\,(1-\xi)xyt+(1+\xi)x^3yt\,)\Big\}.
\end{aligned}$$

$f(x)$与 $f(y)$的其余情形可类似处理。因此，这就完成了我们的证明。□

现在我们描述 H^{cop}的Drinfeld 双 $D(H^{cop})$。

Proposition 3。4. $D:=D(H^{cop})$ 作为余代数同构于张量余代数$H^{*bop}\otimes H^{cop}$，作为代数则由元素 a、 b、 c、 x、 y、 t 生成，使得x、 y、 t 满足 H^{cop}、 a、 b、 c 的关系，满足 H^{*bop} 的关系，并且

$$\begin{aligned}
&xa=ax,\quad xb=bx,\quad xc=a^2cx,\\
&ya=ay,\quad yb=by,\quad yc=cy,\\
&ta=ax^2t,\quad tb=bt,\quad tc=a^2bcx^2yt.
\end{aligned}$$

PROOF. 经过直接计算，我们得到

$$\begin{aligned}
\triangle^2_{H^{cop}}(x) =& x\otimes x\otimes x,\ \triangle^2_{H^{cop}}(y)=y\otimes y\otimes y,\\
\triangle^2_{H^{*bop}}(a) =& a\otimes a\otimes a,\ \triangle^2_{H^{*bop}}(b)=b\otimes b\otimes b,\\
\triangle^2_{H^{cop}}(t) =& \frac{1}{4}((t+x^2t)\otimes t\otimes(t+yt)+(t+x^2t)\otimes x^2t\otimes(t-yt)\\
&+(t-x^2t)\otimes yt\otimes(t+yt)+(t-x^2t)\otimes x^2yt\otimes(yt-t)),\\
\triangle^2_{H^{*bop}}(c) =& \frac{1}{4}((c+a^2c)\otimes c\otimes(c+a^2bc)+(c-a^2c)\otimes a^2bc\otimes(c+a^2bc)\\
&+(c+a^2c)\otimes a^2c\otimes(c-a^2bc)+(a^2c-c)\otimes bc\otimes(c-a^2bc)).
\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&xa=\langle a,x\rangle ax\langle a,S(x)\rangle=ax,\ xb=\langle b,x\rangle bx\langle b,S(x)\rangle,\\
&xc=\frac{1}{4}(\langle c+a^2c,x\rangle(c+a^2x)x\langle c,S(x)\rangle+\langle c+a^2c,x\rangle(c-a^2c)x\langle a^2bc,S(x)\rangle)=a^2cx,\\
&ya=\langle a,y\rangle ay\langle a,S(y)\rangle=ay,\ yb=\langle b,y\rangle by\langle b,S(y)\rangle=by,\\
&yc=\frac{1}{4}(\langle c+a^2c,y\rangle(c+a^2c)y\langle c,S(y)\rangle+\langle c+a^2c,y\rangle(c-a^2c)y\langle a^2bc,S(y)\rangle)=cy,\\
&ta=\frac{1}{4}(\langle a,t+x^2t\rangle at\langle a,S(t+yt)\rangle+\langle a,t+x^2t\rangle ax^2t\langle a,S(t-yt)\rangle)=ax^2t,\\
&tb=\frac{1}{4}(\langle b,t\rangle b(t+yt)\langle b,S(t+yt)\rangle+\langle b,x^2t\rangle b(t-yt)\langle b,S(t+yt)\rangle)=bt,\\
&tc=\frac{1}{16}(\langle c+a^2bc,t-x^2t\rangle cyt\langle c+a^2c,S(t+yt)\rangle-\langle c+a^2bc,t-x^2t\rangle cx^2yt\langle c+a^2c,S(t-yt)\rangle\\
&\quad+\langle c+a^2bc,t-x^2t\rangle a^2bcyt\langle c-a^2c,S(t+yt)\rangle-\langle c+a^2bc,t-x^2t\rangle a^2bcx^2yt\langle c-a^2c,S(t-yt)\rangle)\\
&\quad=a^2bcx^2yt.
\end{aligned}$$

证明完毕。

□

我们首先描述一维 D-模。

LEMMA 3.5. 有 32个两两不同构的一维单的简单模$\mathbb{K}_{\chi_{i,\ j,\ k,\ l}}$ 其特征标为$\chi_{i,j,k,l}$

$$\begin{aligned}
\chi_{i,j,k,l}(x)=(-1)^i,\quad \chi_{i,j,k,l}(y)=(-1)^j,\quad \chi_{i,j,k,l}(t)=\xi^j,\\
\chi_{i,j,k,l}(a)=(-1)^k,\quad \chi_{i,j,k,l}(b)=(-1)^j,\quad \chi_{i,j,k,l}(c)=(-1)^l\xi^j,
\end{aligned}$$

其中 $0\le i$、 k、 $l\le 1$、 $0\le j\le 3$。

此外，任意一维 D-模均同构于 $\mathbb{K}_{\chi_{i,j,k,l}}$，对所有 $0\le i, k,l\le 1, 0\le j\le 3$。

PROOF. 设 λ: $D\to\mathbb{K}$ 为一个特征标，并令

$$\lambda(x)=\lambda_1,\quad \lambda(y)=\lambda_2,\quad \lambda(t)=\lambda_3,\quad \lambda(a)=\lambda_4,\quad \lambda(b)=\lambda_5,\quad \lambda(t)=\lambda_6.$$

由 $x^4=y^2=a^4=b^2=1$，我们得到 $\lambda_1^4=\lambda_2^2=\lambda_4^4=\lambda_5^2=1$。由于 $tx=x^{-1}t$，可得 $\lambda_3\lambda_1=\lambda_1^3\lambda_3$，这意味着 $\lambda_1^2=1$。此外，由 $t^2=x^2y$可得 $\lambda_3^2=\lambda_1^2\lambda_2$。利用$\lambda_1^2=1$，我们得到 $\lambda_3^2=\lambda_2$。这意味着 $\lambda_3^4=1$。由 $ac=ca^3$ 可知 $\lambda_4^2=1$。最后， $tc=a^2bcx^2yt$ 意味着 $\lambda_2\lambda_5=1$。因此， λ 完全由 $\lambda(x)$、$\lambda(t)$、 $\lambda(a)$、 $\lambda(b)$ 确定。据此，我们设

$$\lambda(x)=(-1)^i,\ \lambda(t)=\xi^j,\ \lambda(a)=(-1)^k,\ \lambda(b)=(-1)^j,$$

其中 $0 \le i,\ k,\ l \le 1,\ 0 \le j \le 3$. 不难验证，这些特征标两两不同构，且任意一维 D 模都同构于$\mathbb{K}_{\chi_{i,j,k,l}}$, 对所有 $0 \le i,\ k,\ l \le 1,\ 0 \le j \le 3$. □

接下来，我们描述二维单的 D-模。为方便起见，记

$$\begin{aligned}
&\Omega^1 = \{(0,j,k,l) \mid j \in \mathbb{Z}_4, k \in \{1,3\}, l \in \mathbb{Z}_2\},\\
&\Omega^2 = \{(i,j,k,l) \mid i \in \mathbb{Z}_2, j \in \mathbb{Z}_2, k \in \{0,2\}, j+l \equiv 1 \bmod 2\},\\
&\Omega = \Omega^1 \cup \Omega^2,\\
&\Lambda^1 = \{(1,j,k) \mid j,k \in \mathbb{Z}_2\} \cup \{(3,j,k) \mid j,k \in \mathbb{Z}_2, j+k \equiv 0 \bmod 2\},\\
&\Lambda^2 = \{(1,j,k) \mid j,k \in \mathbb{Z}_2, j+k \equiv 1 \bmod 2\},\\
&\Gamma = \{(1,j,k,l) \mid j,k \in \mathbb{Z}_2, l \in \mathbb{Z}_4\},\\
&|\Omega| = 24, |\Lambda^1| = 6, |\Lambda^2| = 2, |\Gamma| = 16.
\end{aligned}$$

LEMMA 3.6. 对于任意4元组$(i,j,k,l) \in \Omega$，存在一个二维单的D-模$V_{i,j,k,l}$ 使得相对于某个固定基， D的生成元的作用由下式给出

$$[x] = \begin{pmatrix} (-1)^i & 0 \\ 0 & (-1)^{i+k} \end{pmatrix}, \quad [y] = \begin{pmatrix} (-1)^j & 0 \\ 0 & (-1)^j \end{pmatrix}, \quad [t] = \begin{pmatrix} \xi^j & 0 \\ 0 & (-1)^{j+k+l}\xi^j \end{pmatrix},$$
$$[a] = \begin{pmatrix} \xi^k & 0 \\ 0 & (-\xi)^k \end{pmatrix}, \quad [b] = \begin{pmatrix} (-1)^l & 0 \\ 0 & (-1)^l \end{pmatrix}, \quad [c] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^l & 0 \end{pmatrix}.$$

对于任意3元组$(i,j,k) \in \Lambda^1$，存在一个二维单的 D-模 $W^1_{i,j,k}$，使得相对于某个固定基， D 的生成元的作用由下式给出

$$[x] = \begin{pmatrix} \xi^i & 0 \\ 0 & (-\xi)^i \end{pmatrix}, \ [y] = \begin{pmatrix} (-1)^j & 0 \\ 0 & (-1)^j \end{pmatrix}, \ [t] = \begin{pmatrix} 0 & \xi^i \\ (-1)^j\xi^i & 0 \end{pmatrix},$$
$$[a] = \begin{pmatrix} \xi^i & 0 \\ 0 & (-\xi)^i \end{pmatrix}, \ [b] = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}, \ [c] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix}.$$

对于任意3元组$(i,j,k) \in \Lambda^1$，存在一个二维单的 D-模 $W^2_{i,j,k}$，使得相对于某个固定基， D 的生成元的作用由下式给出

$$[x] = \begin{pmatrix} \xi^i & 0 \\ 0 & (-\xi)^i \end{pmatrix}, \ [y] = \begin{pmatrix} (-1)^j & 0 \\ 0 & (-1)^j \end{pmatrix}, \ [t] = \begin{pmatrix} 0 & \xi^i \\ (-1)^j\xi^i & 0 \end{pmatrix},$$
$$[a] = \begin{pmatrix} (-\xi)^i & 0 \\ 0 & \xi^i \end{pmatrix}, \ [b] = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}, \ [c] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix}.$$

对于任意 3元组 $(i,j,k) \in \Lambda^2$，存在一个单的二维 D-模 $W^3_{i,j,k}$，使得相对于某个固定基， D 的生成元的作用由下式给出

$$[x] = \begin{pmatrix} \xi^i & 0 \\ 0 & (-\xi)^i \end{pmatrix}, \ [y] = \begin{pmatrix} (-1)^j & 0 \\ 0 & (-1)^j \end{pmatrix}, \ [t] = \begin{pmatrix} 0 & (-\xi)^i \\ (-1)^{i+j}\xi^i & 0 \end{pmatrix},$$
$$[a] = \begin{pmatrix} \xi^i & 0 \\ 0 & (-\xi)^i \end{pmatrix}, \ [b] = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}, \ [c] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix}.$$

对于任意 3元组 $(i,j,k)\in\Lambda^2$，存在一个单的二维 D-模 $W^4_{i,j,k}$，使得相对于某个固定基， D 的生成元的作用由下式给出

$$[x]=\begin{pmatrix}\xi^i & 0\\ 0 & (-\xi)^i\end{pmatrix},\ [y]=\begin{pmatrix}(-1)^j & 0\\ 0 & (-1)^j\end{pmatrix},\ [t]=\begin{pmatrix}0 & (-\xi)^i\\ (-1)^{i+j}\xi^i & 0\end{pmatrix},$$
$$[a]=\begin{pmatrix}(-\xi)^i & 0\\ 0 & \xi^i\end{pmatrix},\ [b]=\begin{pmatrix}(-1)^k & 0\\ 0 & (-1)^k\end{pmatrix},\ [c]=\begin{pmatrix}0 & 1\\ (-1)^k & 0\end{pmatrix}.$$

对于任意 4 元组 $(i,j,k,l)\in\Gamma$，存在一个单的二维 D-模 $U_{i,\ j,\ k,\ l}$使得相对于某个固定基， D 的生成元的作用表示为

$$[x]=\begin{pmatrix}\xi^i & 0\\ 0 & (-\xi)^i\end{pmatrix},\quad [y]=\begin{pmatrix}(-1)^j & 0\\ 0 & (-1)^j\end{pmatrix},\quad [t]=\begin{pmatrix}0 & 1\\ (-1)^{i+j} & 0\end{pmatrix},$$
$$[a]=\begin{pmatrix}(-1)^k & 0\\ 0 & (-1)^{i+k}\end{pmatrix},\quad [b]=\begin{pmatrix}(-1)^l & 0\\ 0 & (-1)^l\end{pmatrix},\quad [c]=\begin{pmatrix}\xi^l & 0\\ 0 & (-1)^{i+j+l}\xi^l\end{pmatrix}.$$

反之，每个单的二维 D-模 V 都同构于下列模 $V_{i,j,k,l}$ 中的一个，其中 $(i,j,k,l)\in\Omega$; $W^p_{i,j,k}$ 其中 $(i,j,k)\in\Lambda^q$ 以及 $p\in\mathbb{I}_{1,4}$; 或$U_{i,j,k,l}$，其中 $(i,j,k,l)\in\Gamma$。最后，上述单的二维 D-模的同构类两两不同构。事实上，$V_{i,j,k,l}\cong V_{i',j',k',l'}$ 当且仅当 $(i,j,k,l)=(i',j',k',l')\in\Omega$; $W^p_{i,j,k}\cong W^p_{i',j',k'}$, $p\in\mathbb{I}_{1,4}$ 当且仅当 $(i,j,k)=(i',j',k')\in\Lambda^q$; $U_{i,j,k,l}\cong U_{i',j',k',l'}$ 当且仅当 $(i,j,k,l)=(i',j',k',l')\in\Gamma$。

Proof. 设 V 是一个二维单 D-模。由于生成元 x、 y、 a、$b\in D$ 彼此交换并满足 $x^4=y^2=a^4=b^2=1$，因此 D 的生成元在 V 上的作用可由如下形式的矩阵表示

$$[x]=\begin{pmatrix}x_1 & 0\\ 0 & x_2\end{pmatrix},\quad [y]=\begin{pmatrix}y_1 & 0\\ 0 & y_2\end{pmatrix},\quad [t]=\begin{pmatrix}t_1 & t_2\\ t_3 & t_4\end{pmatrix},$$
$$[a]=\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix},\quad [b]=\begin{pmatrix}b_1 & 0\\ 0 & b_2\end{pmatrix},\quad [c]=\begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{pmatrix},$$

其中 $x_1^4=x_2^4=y_1^2=y_2^2=a_1^4=a_2^4=b_1^2=b_2^2=1$. 关系 $ty=yt$ 和 $yc=cy$意味着

$$t_2(y_1-y_2)=0,\quad t_3(y_1-y_2)=0,\quad c_2(y_1-y_2)=0,\quad c_3(y_1-y_2)=0.$$

假设 $y_1\neq y_2$。那么 $t_2=t_3=c_2=c_3=0$。然而， V 是单的当且仅当 $t_2\neq0$，且 $t_3\neq0$、$c_2\neq0$ 和 $c_3\neq0$。这导致矛盾。因此 $y_1=y_2$。类似地，由关系 $bc=cb,\quad bt=tb$，我们得到

$$c_2(b_1-b_2),\quad c_3(b_1-b_2)=0,\quad t_2(b_1-b_2)=0,\quad t_3(b_1-b_2)=0.$$

与上述相同的论证表明 $b_1=b_2$。由 $t^2=x^2y$、 $tx=x^{-1}t$，我们得到

$$t_1^2+t_2t_3=x_1^2y_1,\quad t_2t_3+t_4^2=x_2^2y_1,\quad t_2(t_1+t_4)=0,\quad t_3(t_1+t_4)=0, \tag{3.3}$$
$$x_1t_1(1-x_1^2)=0,\quad x_2t_2(1-x_2^2)=0,\quad t_2(x_2-x_1^3)=0,\quad x_1(t_3-x_2^3)=0. \tag{3.4}$$

现在，利用 $ta=ax^2t$ 和 $tc=a^2bcx^2yt$，我们得到

$$t_1a_1(1-x_1^2)=0,\quad t_4a_2(1-x_2^2)=0,\quad t_2(a_2-a_1x_1^2)=0,\quad t_3(a_1-a_2x_2^2)=0, \tag{3.5}$$
$$t_1c_1+t_2c_3=a_1^2b_1y_1(c_1x_1^2t_1+c_2x_2^2t_3),\quad t_1c_2+t_2c_4=a_1^2b_1y_1(c_1x_1^2t_2+c_2x_2^2t_4), \tag{3.6}$$
$$t_3c_1+t_4c_3=a_2^2b_1y_1(c_3x_1^2t_1+c_4x_2^2t_3),\quad t_3c_2+t_4c_4=a_2^2b_1y_1(c_3x_1^2t_2+c_4x_2^2t_4). \tag{3.7}$$

其余关系 $c^2 = b$、 $ca = a^3c$ 和 $xc = a^2cx$ 给出

$$(3.8)\quad c_1^2 + c_2c_3 = b_1,\quad c_2(c_1 + c_4) = 0,\quad c_3(c_1 + c_4) = 0,\quad c_2c_3 + c_4^2 = b_1,$$
$$(3.9)\quad a_1c_1(1 - a_1^2) = 0,\quad a_2c_4(1 - a_2^2) = 0,\quad c_2(a_2 - a_1^3) = 0,\quad c_3(a_1 - a_2^3) = 0,$$
$$(3.10)\quad x_1c_1(1 - a_1^2) = 0,\quad x_2c_4(1 - a_2^2) = 0,\quad c_2(x_1 - a_1^2x_2) = 0,\quad c_3(x_2 - a_2^2x_1) = 0.$$

假设 $t_1t_4 \neq 0$ and $t_2 = t_3 = 0$。由 (3.3) –(3.7)，可得

$$(3.11)\quad t_1^2 = x_1^2y_1,\quad t_4^2 = x_2^2y_1,\quad x_1^2 = x_2^2 = 1,\quad (1 - a_1^2b_1x_1^2y_1)c_1 = 0,$$
$$(3.12)\quad (1 - a_2^2b_1x_2^2y_1)c_4 = 0,\quad c_2(t_1 - a_1^2b_1x_2^2y_1t_4) = 0,\quad c_3(t_4 - a_2^2b_1x_1^2y_1t_1) = 0.$$

由于 V是单的， $c_2c_3 \neq 0$。利用 (3.8) – (3.12)，我们有

$$c_1 + c_4 = 0,\ a_2 = a_1^3,\ a_1 = a_2^3,\ x_1 = a_1^2x_2,\ x_2 = a_2^2x_1,\ t_1 = a_1^2b_1x_2^2y_1t_4,\ t_4 = a_2^2b_1x_1^2y_1t_1.$$

在这种情况下，假设 $c_1 = c_4 = 0$。那么 $c_2c_3 = b_1$ 显然成立。不失一般性，我们可以假设 $c_2 = 1, c_3 = b_1$。因此，D的生成元在 V上的作用由如下形式的矩阵表示：$V_{i,j,k,l}$，其中 $(i, j, k, l) \in \Omega$。另一方面，假设 $c_1c_4 \neq 0$。那么 V不是单的，证明显而易见。

现在考虑 $t_1 = t_4 = 0$ 的情形。立即可得 $t_2 \neq 0$， $t_3 \neq 0$。与前一种情形一样，由(3.3) – (3.7)，我们有

$$t_2t_3 = x_1^2y_1,\quad x_2 = x_1^3,\quad a_2 = a_1x_1^2,\quad c_4 = a_1^2b_1y_1c_1x_1^2,\quad t_3c_2 = a_2^2b_1y_1c_3x_1^2t_2.$$

进一步假设 $c_1c_4 = 0$。这意味着

$$a_2 = a_1^3,\quad x_2 = a_2^2x_1.$$

因此， D 的生成元在 V 上的作用由以下形式的矩阵表示：$W_{i,\ j,\ k}^{p}$，其中 $(i,\ j,\ k) \in \Lambda^q$， $p \in \mathbb{I}_{1,\ 4}$， $q \in \mathbb{I}_{1,\ 2}$。另一方面，假设 $c_1c_4 \neq 0$， $c_2c_3 = 0$，我们得到

$$c_1^2 = c_4^2 = b_1,\quad c_4 = a_1^2b_1y_1c_1x_1^2.$$

D 的生成元在 V 上的作用由以下形式的矩阵表示：$U_{i,\ j,\ k,\ l}$，其中 $(i,\ j,\ k,\ l) \in \Gamma$。其余情形得出与上述结论相同的结论。此外，对于任意 $(i,\ j,\ k,\ l) \in \Omega$，表示矩阵 $V_{i,\ j,\ k,\ l}$ 均不等价于上述两类表示矩阵中的任何一类。此外，对于任意 $(i,\ j,\ k) \in \Lambda^p$， $p \in \mathbb{I}_1$、4 以及 $(i',\ j',\ k',\ l') \in \Gamma$，$W_{i,\ j,\ k} \ncong U_{i',\ j',\ k',\ l'}$。

我们声称，$V_{i,j,k,l} \cong V_{i',j',k',l'}$ 当且仅当 $(i, j, k, l) = (i', j', k', l') \in \Omega$。假设 $\Phi : V_{i,j,k,l} \to V_{i',j',k',l'}$ 是 D-模的一个同构。令 $[\Phi] = (p_{i,j})_{i,j=1,2}$表示 Φ 相对于给定基的矩阵表示。由于 $[b][\Phi] = [\Phi][b], [c][\Phi] = [\Phi][c]$，我们有 $l = l', (-1)^l p_{12} = p_{21}, p_{11} = p_{22}$。由于

$$[x][\Phi] = [\Phi][x],\ [a][\Phi] = [\Phi][a],\ [t][\Phi] = [\Phi][t],$$

我们有

$$((-1)^i-(-1)^{i'})p_{11}=0,\quad ((-1)^{i+k}-(-1)^{i'})p_{12}=0, \tag{3.13}$$

$$(-1)^l((-1)^i-(-1)^{i'+k'})p_{12}=0,\quad ((-1)^{i+k}-(-1)^{i'+k'})p_{11}=0, \tag{3.14}$$

$$(\xi^k-\xi^{k'})p_{11}=0,\quad ((-\xi)^k-\xi^{k'})p_{12}=0, \tag{3.15}$$

$$(-1)^l(\xi^k-(-\xi)^{k'})p_{12}=0,\quad ((-\xi)^k-(-\xi)^{k'})p_{11}=0, \tag{3.16}$$

$$(\xi^j-\xi^{j'})p_{11}=0,\quad ((-1)^{j+k+l}\xi^j-\xi^{j'})p_{12}=0, \tag{3.17}$$

$$(-1)^l(\xi^j-(-1)^{j'+k'+l'}\xi^{j'})p_{12}=0, \tag{3.18}$$

$$((-1)^{j+k+l}\xi^j-(-1)^{j'+k'+l'}\xi^{j'})p_{11}=0. \tag{3.19}$$

当 $l=0$ 时，我们有 $l'=0$，且 $j=j'=0$。由 (3.14) 及 (3.16)—(3.19)，我们有 $i=i'$，$k=k.$。当 $l=1$ 时，$p_{12}=-p_{21}$ 蕴含 $i=i'$，$j=j'$，$k=k'$。这就完成了该断言的证明。□

THEOREM 3.7. 存在 *88* 个两两不同构的简单左 D-模，其中 *32* 个一维对象由引理 *3.5* 给出，*56* 个二维对象由引理 *3.6* 给出。

PROOF.假设存在一个维数为 $d>2$ 的简单模，并令 n 表示维数为 d 的简单模的同构类数。根据引理 3.5 和 3.6，我们有

$$32\cdot 1^2+56\cdot 2^2+nd=256+nd^2\le \dim(D^*)_0=\dim D^*=256,$$

这意味着 $n=0$。因此，所有简单的 D-模的维数至多为 2 . □

4. ${}^H_H\mathcal{YD}$范畴

本节将利用幺半群同构 ${}^H_H\mathcal{YD}\cong {}_D\mathcal{M}$，描述 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的简单对象，并确定它们的编织。

PROPOSITION 4.1. 设 $\mathbb{K}_{\chi_{i,j,k,l}}=\mathbb{K}\{v\}$ 是一个一维 D-模，其中 $i,k,l\in\mathbb{I}_{0,1}$，$j\in\mathbb{I}_{0,3}$。则 $\mathbb{K}_{\chi_{i,j,k,l}}\in {}^H_H\mathcal{YD}$，其模结构和余模结构定义如下：

$$x\cdot v=(-1)^i v,\ y\cdot v=(-1)^j v,\ t\cdot v=\xi^j v,\ \delta(v)=x^{j+2k+2l}y^k\otimes v.$$

对于任意 $(i,k,l)\in\mathbb{I}_{0,1}$，$j\in\mathbb{I}_{0,3}$，$\mathbb{K}_{\chi_{i,j,k,l}}$ 上的编织由 $c(v\otimes v)=(-1)^{ij+jk}v\otimes v$ 给出。

PROOF. 作用由引理 3.5 中给出的作用限制而来。由于 $\mathbb{K}_{\chi_{i,j,k,l}}$ 是一维的，我们必有 $\delta(v)=h\otimes v$，其中 $h\in G(H)=\langle x\rangle\times\langle y\rangle$。由于对所有 $f\in H^*$，$f\cdot v=\langle f,h\rangle v$，因此可得 $\delta(v)=x^{j+2k+2l}y^k\otimes v$。

由公式 (2.1)，我们得到

$$c(v\otimes v)=x^{j+2k+2l}y^k\cdot v\otimes v=(-1)^{ij+jk}v\otimes v.$$

因此，编织显而易见。 □

PROPOSITION 4.2. 若 $V_{i,j,k,l}=\mathbb{K}\{v_1,v_2\}$ 是一个二维单的 D-模，且$(i,j,k,l)\in\Omega$，则 $V_{i,j,k,l}\in {}^H_H\mathcal{YD}$，其作用定义为

$$x.v_1=(-1)^i v_1,\qquad y.v_1=(-1)^j v_1,\qquad t.v_1=\xi^j v_1,$$
$$x.v_2=(-1)^{i+k}v_2,\qquad y.v_2=(-1)^j v_2,\qquad t.v_2=(-1)^{j+k+l}\xi^j v_2.$$

其余作用定义为

$$\begin{aligned}\delta(v_1) &= \frac{1}{2}(x^{k+l}y^{[\frac{k}{2}]}t^{k(mod2)} + x^{k+l+2}y^{[\frac{k}{2}]}t^{k(mod2)}) \otimes v_1 \\ &\quad + \frac{1}{2}(-1)^{[\frac{k}{2}]}\xi^{k+l}(x^{k+l}y^{[\frac{k+1}{2}]}t^{k(mod2)} - x^{k+l+2}y^{[\frac{k+1}{2}]}t^{k(mod2)}) \otimes v_2, \\ \delta(v_2) &= \frac{1}{2}(-1)^{[\frac{k}{2}]}\xi^{k-l}(x^{k+l}y^{[\frac{k+1}{2}]}t^{k(mod2)} - x^{k+l+2}y^{[\frac{k+1}{2}]}t^{k(mod2)}) \otimes v_1 \\ &\quad + \frac{1}{2}(x^{k+l}y^{[\frac{k+1}{2}]}t^{k(mod2)} + x^{k+l+2}y^{[\frac{k+1}{2}]}t^{k(mod2)}) \otimes v_2.\end{aligned}$$

PROOF. 只需描述余作用。设 $\{h_i\}_{1\leq i\leq 16}$ 是 H的一组基，$\{h^i\}_{1\leq i\leq 16}$ 是 H^*的对偶基。那么，$V_{i,j,k,l}$ 的余模结构由$\delta(v) = \sum_{i=1}^{16} h_i \otimes h^i \cdot v$给出。由此可得

$$\begin{aligned}\delta(v_1) &= \sum_{m=0}^{3}\sum_{n=0}^{1}\sum_{r=0}^{1}(a^mb^nc^r)^* \otimes a^mb^nc^r \cdot v_1 \\ &= (1^* + (-1)^k b^* + \xi^i a^* + (-1)^k\xi^i(ab)^* + (-1)^i(a^2)^* + (-1)^{i+k}(a^2b)^* + (-\xi)^i(a^3)^* \\ &\quad + (-1)^{i+k}\xi^i(a^3b)^*) \otimes v_1 \\ &\quad + ((-1)^k c^* + (bc)^* + (-1)^k\xi^i(ac)^* + \xi^i(abc)^* + (-1)^{i+k}(a^2c)^* + (-1)^i(a^2bc)^* \\ &\quad + (-1)^{i+k}\xi^i(a^3c)^* + (-\xi)^*(a^3bc)^*) \otimes v_2, \\ \delta(v_2) &= (c^* + (-1)^l(bc)^* + (-1)^k(a^2c)^* + (-\xi)^k(a^3c)^* + (-1)^l(bc)^* + (-1)^l\xi^k(abc)^* \\ &\quad + (-1)^{l+k}(a^2bc)^* + (-1)^{l+k}\xi^k(a^3bc)^*) \otimes v_1 \\ &\quad + (1^* + \xi^k(a^3)^* + (-1)^k(a^2)^* + (-\xi)^k a^* + (-1)^l b^* + (-1)^l\xi^k(a^3b)^* \\ &\quad + (-1)^{l+K}(a^2b)^* + (-1)^{l+k}\xi^k(ab)^*) \otimes v_2.\end{aligned}$$

通过讨论所有可能的情形，即可得出该结论。 □

类似地，我们可以证明以下命题。

PROPOSITION 4.3. 若 $W^1_{i,j,k} = \mathbb{K}\{v_1, v_2\}$ 是一个二维单的 D-模，其$(i, j, k) \in \Lambda^1$，则 $W^1_{i,j,k} \in^H_H \mathcal{YD}$，其作用由下式给出

$$\begin{aligned}x.v_1 = \xi^i v_1, \qquad y.v_1 = (-1)^j v_1, \qquad t.v_1 = (-1)^j\xi^i v_2, \\ x.v_2 = (-\xi)^i v_2, \qquad y.v_2 = (-1)^j v_2, \qquad t.v_2 = \xi^i v_1,\end{aligned}$$

其余作用由下式给出

$$\begin{aligned}\delta(v_1) &= \frac{1}{2}(x^{i+k}y^{[\frac{i}{2}]}t + x^{i+k+2}y^{[\frac{i}{2}]}t) \otimes v_1 \\ &\quad + \frac{1}{2}(-1)^{[\frac{i}{2}]}\xi^{i+k}(x^{i+k}y^{[\frac{i}{2}]+1}t - x^{i+k+2}y^{[\frac{i}{2}]+1}t) \otimes v_2, \\ \delta(v_2) &= \frac{1}{2}(-1)^{[\frac{i}{2}]}(-\xi)^{i+k}(x^{i+k}y^{[\frac{i}{2}]}t - x^{i+k+2}y^{[\frac{i}{2}]}t) \otimes v_1 \\ &\quad + \frac{1}{2}(x^{i+k}y^{[\frac{i}{2}]+1}t + x^{i+k+2}y^{[\frac{i}{2}]+1}t) \otimes v_2.\end{aligned}$$

PROPOSITION 4.4. 若 $W^2_{i,j,k} = \mathbb{K}\{v_1, v_2\}$ 是一个二维单的 D-模，其$(i, j, k) \in \Lambda^2$，则 $W^2_{i,j,k} \in^H_H \mathcal{YD}$，其作用由下式给出

$$\begin{aligned}x.v_1 = \xi^i v_1, \qquad y.v_1 = (-1)^j v_1, \qquad t.v_1 = (-1)^j\xi^i v_2, \\ x.v_2 = (-\xi)^i v_2, \qquad y.v_2 = (-1)^j v_2, \qquad t.v_2 = \xi^i v_1,\end{aligned}$$

其余作用由下式给出

$$\begin{aligned}\delta(v_1) &= \frac{1}{2}(x^{i+k}y^{[\frac{i}{2}]+1}t + x^{i+k+2}y^{[\frac{i}{2}]+1}t)\otimes v_1\\ &\quad + \frac{1}{2}(-1)^{[\frac{i}{2}]+1}\xi^{i+k}(x^{i+k}y^{[\frac{i}{2}]}t - x^{i+k+2}y^{[\frac{i}{2}]}t)\otimes v_2,\\ \delta(v_2) &= \frac{1}{2}(-1)^{[\frac{i+k}{2}]}\xi^{i+k}(x^{i+k}y^{[\frac{i}{2}]+1}t - x^{i+k+2}y^{[\frac{i}{2}]+1}t)\otimes v_1\\ &\quad + \frac{1}{2}(x^{i+k}y^{[\frac{i}{2}]}t + x^{i+k+2}y^{[\frac{i}{2}]}t)\otimes v_2.\end{aligned}$$

PROPOSITION 4.5. 若 $W^3_{i,j,k} = \mathbb{K}\{v_1, v_2\}$ 是一个二维单的 D-模，其$(i,j,k) \in \Lambda^2$，则 $W^3_{i,j,k} \in^H_H \mathcal{YD}$，其作用由下式给出

$$\begin{aligned}&x.v_1 = \xi^i v_1, \qquad y.v_1 = (-1)^j v_1, \qquad t.v_1 = (-1)^{i+j}\xi^i v_2,\\ &x.v_2 = (-\xi)^i v_2, \qquad y.v_2 = (-1)^j v_2, \qquad t.v_2 = (-\xi)^i v_1,\end{aligned}$$

其余作用由下式给出

$$\begin{aligned}\delta(v_1) &= \frac{1}{2}(x^{i+k}t + x^{i+k+2}t)\otimes v_1 + \frac{1}{2}\xi^{i+k}(x^{i+k}yt - x^{i+k+2}yt)\otimes v_2,\\ \delta(v_2) &= \frac{1}{2}(-\xi)^{i+k}(x^{i+k}t - x^{i+k+2}t)\otimes v_1 + \frac{1}{2}(x^{i+k}yt + x^{i+k+2}yt)\otimes v_2.\end{aligned}$$

PROPOSITION 4.6. 若 $W^4_{i,j,k} = \mathbb{K}\{v_1, v_2\}$ 是一个二维单的 D-模，其$(i,j,k) \in \Lambda^2$，则 $W^4_{i,j,k} \in^H_H \mathcal{YD}$，其作用由下式给出

$$\begin{aligned}&x.v_1 = \xi^i v_1, \qquad y.v_1 = (-1)^j v_1, \qquad t.v_1 = (-1)^{i+j}\xi^i v_2,\\ &x.v_2 = (-\xi)^i v_2, \qquad y.v_2 = (-1)^j v_2, \qquad t.v_2 = (-\xi)^i v_1,\end{aligned}$$

其余作用由下式给出

$$\begin{aligned}\delta(v_1) =& \frac{1}{2}(x^{i+k}yt + x^{i+k+2}yt)\otimes v_1 + \frac{1}{2}(-\xi^{i+k})(x^{i+k}t - x^{i+k+2}t)\otimes v_2,\\ \delta(v_2) =& \frac{1}{2}(-1)^k\xi^{i+k}(x^{i+k}yt - x^{i+k+2}yt)\otimes v_1 + \frac{1}{2}(x^{i+k}t + x^{i+k+2}t)\otimes v_2.\end{aligned}$$

PROPOSITION 4.7. 若 $U_{i,j,k,l} = \mathbb{K}\{v_1, v_2\}$ 是一个二维单的 D-模，其$(i,j,k,l) \in \Gamma$，则 $U_{i,j,k,l} \in^H_H \mathcal{YD}$，其作用由下式给出

$$\begin{aligned}&x.v_1 = \xi^i v_1, \qquad y.v_1 = (-1)^j v_1, \qquad t.v_1 = (-1)^{i+j}v_2,\\ &x.v_2 = (-\xi)^i v_2, \qquad y.v_2 = (-1)^j v_2, \qquad t.v_2 = v_1,\end{aligned}$$

及其余作用由

$$\delta(v_1) = x^{l+(-1)^j 2k}y^k \otimes v_1, \qquad \delta(v_2) = x^{2|j-k|-l+4}y^{k+1}\otimes v_2.$$

5. HHYD 中的 Nichols 代数

LEMMA 5.1. 设 $(i,j,k,l) \in \mathbb{I}_{0,1}\times\mathbb{I}_{0,3}\times\mathbb{I}_{0,1}\times\mathbb{I}_{0,1}$。与 $\mathbb{K}_{\chi_{i,j,k,l}} = \mathbb{K}v$ 相关联的 *Nichols* 代数 $\mathcal{B}(\mathbb{K}_{\chi_{i,j,k,l}})$ 为 $\mathcal{B}(\mathbb{K}_{\chi_{i,j,k,l}}) = \begin{cases}\mathbb{K}[v], & otherwise,\\ \mathbb{K}[v]/\langle v^2\rangle = \bigwedge\mathbb{K}_{\chi_i}(), & i,k,l, \ if\ (i+k)j = 1, \ 3。\end{cases}$

REMARK 5.2. $\mathcal{B}(\mathbb{K}_{\chi_{i,\ j,\ k,\ l}})$ 当且仅当$\mathbb{K}_{\chi_{i,\ j,\ k,\ l}}$ 同构于以下某个 *Yetter–Drinfeld* 模

$$\begin{aligned}&V_1 := \mathbb{K}_{\chi_{0,1,1,0}}, \qquad V_2 := \mathbb{K}_{\chi_{0,1,1,1}}, \qquad V_3 := \mathbb{K}_{\chi_{0,3,1,0}}, \qquad V_4 := \mathbb{K}_{\chi_{0,3,1,1}},\\ &V_5 := \mathbb{K}_{\chi_{1,1,0,0}}, \qquad V_6 := \mathbb{K}_{\chi_{1,1,0,1}}, \qquad V_7 := \mathbb{K}_{\chi_{1,3,0,0}}, \qquad V_8 := \mathbb{K}_{\chi_{1,3,0,1}}.\end{aligned}$$

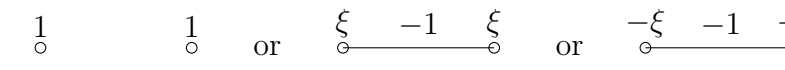
REMARK 5.3. 为便于陈述，我们设

$$M_1 := V_{0,1,2,0}, \quad M_2 := V_{0,2,1,0}, \quad M_3 = V_{0,2,1,1}, \quad M_4 := V_{0,2,3,0},$$
$$M_5 := V_{0,2,3,1}, \quad M_6 := V_{1,0,0,1}, \quad M_7 = V_{1,0,2,1}, \quad M_8 := V_{1,1,2,0},$$
$$M_9 := U_{1,0,0,2}, \quad M_{10} := U_{1,0,1,0}, \quad M_{11} = U_{1,1,0,2}, \quad M_{12} = U_{1,1,1,2}.$$

LEMMA 5.4. 设 $V_{i,j,k,l} \in {}^H_H\mathcal{YD}$ 满足 $(i,j,k,l) \in \Omega$。那么
(1) $dim\,\mathcal{B}(V_{i,j,k,l}) = \infty$, 对于 $V_{i,j,k,l} \notin \{M_1, ..., M_8\}$.(2) 为 r 任意 $V \in \{M_1, ..., M_8\}$, $dim\,\mathcal{B}(V) = 4$，且 $\mathcal{B}(V)$ 的关系由 b 给出 y

$$v_1^2 = 0, \qquad v_1v_2 + v_2v_1 = 0, \qquad v_2^2 = 0.$$

PROOF. (1) 若 $V_{i,j,k,l} \notin \{M_1, ..., M_8\}$，则与该编织相关联的广义 Dynkin 图是以下之一



事实上，与第一个广义 Dynkin 图相关联的 $V_{i,j,k,l}$ 的编织有一个特征向量 $v\otimes v$，其特征值为 1，因此根据注记 2.1，与之对应的 $\mathcal{B}(V_{i,j,k,l})$ 是无限维的。(1) 中其余两种情况由 [25] 得出。

(2) 对于任意 $V \in \{M_1, ..., M_8\}$，它们的编织均为卡当型 $A_1 \times A_1$。显然，我们得到了 $\mathcal{B}(V)$ 所需的关系。□

LEMMA 5.5. 设 $W^1_{i,j,k}$, $W^2_{i,j,k} \in {}^H_H\mathcal{YD}$ 满足 $(i,j,k) \in \Lambda^1$, $W^3_{i,j,k}$, $W^4_{i,j,k} \in {}^H_H\mathcal{YD}$ 满足 $(i,j,k) \in \Lambda^2$。则 $dim\ \mathcal{B}(W^p_{i,j,k}) = \infty$，其中 $p \in \mathbb{I}_{1,4}$, $(i,j,k) \in \Lambda^1 \cup \Lambda^2$。

PROOF. 根据 [15, 第 3 节，7], 我们得到了 $W^p_{i,j,k}$ 对所有 $p \in \mathbb{I}_{1,4}$ 以及 $(i,j,k,) \in \Lambda^1 \cup \Lambda^2$ 的所有编织均为对角型。因此，该断言可由 [25] 立即推出。□

LEMMA 5.6. 令 $U_{i,j,k,l} \in {}^H_H\mathcal{YD}$ 满足 $(i,j,k,l) \in \Gamma$. 则
(1) $dim\,\mathcal{B}(U_{i,j,k,l}) = \infty$，对 $U_{i,j,k,l} \notin \{M_9, ..., M_{12}\}$.(2) 对于任意 $U \in \{M_9, ..., M_{12}\}$, $dim\,\mathcal{B}(U) = 4$，$\mathcal{B}(U)$ 的关系由下式给出

$$v_1^2 = 0, \qquad v_1v_2 + v_2v_1 = 0, \qquad v_2^2 = 0.$$

PROOF. 证明与引理 5.4 的证明类似，因此此处略去。□

根据注记 5.2 和引理 5.4、5.5 及 5.6，我们得出以下命题。

PROPOSITION 5.7. 设 V, W 是 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的简单对象。则 $\mathcal{B}(V \oplus W)$ 是有限维的，并且 $\mathcal{B}(V \oplus W) \simeq \mathcal{B}(V) \otimes \mathcal{B}(W)$ 当且仅当 V, W 满足以下某种情形

(1) $V = W = V_i$, $i \in \mathbb{I}_{1,8}$。 (2) $V = M_1$, $or\ M_7$, $W = V_i$, $i \in \mathbb{I}_{1,4}$。 (3) $V = M_8$, $W = V_{i+4}$, $i \in \mathbb{I}_{1,4}$。 (4) $V = M_9$, $or\ M_{10}$, $W \in \{V_2, V_4, V_5, V_7\}$。 (5) $V = W = M_i$, $i \in \mathbb{I}_{1,12}$。 (6) $V = M_1$, $W = M_6$, $or\ M_8$。 (7) $V = M_i$, $W = M_{i+2}$, $i \in \{2, 3\}$。 (8) $V = M_i$, $W = M_{i+1}$, $i \in \{6, 7, 9, 11\}$。

PROOF. 由于 $\mathcal{B}(V \oplus W)$ 是有限维的，根据注记 5.2 以及引理 5.4、5.5 和 5.6，我们有 $V, W \in \{V_1, ..., V_8, M_1, ..., M_{12}\}$。

令 $V = M_1 = \mathbb{K}\{p_1, p_2\}$, $W = \mathbb{K}_{\chi_{i,j,k,l}} = \mathbb{K}\{q\}$，我们有

$$c(p_1 \otimes q) = (-1)^j q \otimes p_1, \qquad c(p_2 \otimes q) = (-1)^j q \otimes p_2,$$
$$c(q \otimes p_1) = (-1)^k p_1 \otimes q, \qquad c(q \otimes p_2) = (-1)^k p_2 \otimes q.$$

由引理 2.3 可知， $\mathcal{B}(V \oplus W) \simeq \mathcal{B}(V) \otimes \mathcal{B}(W)$ 当且仅当 $(-1)^{j+k} = 1$，即 $W = V_i, i \in \mathbb{I}_{1,4}$。

接下来，我们可以逐个情形进行讨论，其余部分留给读者。 □

6. 关于 H的霍普夫代数

本节基于提升方法的原理，将确定 H 上的有限维 Hopf 代数，使其无穷小编织为定理 A 中 (1),(7), (8), (9), (10) 所列的 Yetter-Drinfeld 模。我们首先证明这些霍普夫代数的图是 Nichols代数。

THEOREM 6.1. 设 A 是 H 上的有限维霍普夫代数，其无穷小编织同构于定理 A 的 (1)、(7)、(8)、(9)、(10) 所列的 *Yetter-Drinfeld* 模 N。则 $grA \cong \mathcal{B}(N)\sharp H$。

PROOF. 令 S 为 A的图 R 的分次对偶。由于 $\mathcal{P}(R) = R(1)$，根据[2,引理 5.5]， S 作为代数由 $W = S(1)$ 生成。由于 S 是 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的分次霍普夫代数，且 $S(0) = \mathbb{K}$，根据 [3, 命题 2.2], 可知，存在一个分次霍普夫代数的满态射 $\phi : S \to \mathcal{B}(W)$。若 $\mathcal{P}(S) = S(1)$，则 S 是一个 Nichols 代数。在此条件下，根据 [3, 引理 2.4], ，R 也是一个 Nichols 代数。为了证明 $\mathcal{P}(S) = S(1)$，只需验证 ϕ 也是一个单态射，换言之， $\mathcal{B}(W)$的关系在 S中也成立。由此得出， W 是， ， (10) 中**定理 A**所列的 Yetter-Drinfeld 模之一。

假设 $W = \Omega_6 = M_6 \oplus M_6$，显然 W由 p_1、 p_2、 q_1、 q_2生成，且，Nichols代数 $\mathcal{B}(W)$ 的定义理想由以下元素生成

$$p_1^2, \quad p_2^2, \quad p_1p_2 + p_2p_1, \quad q_1^2, \quad q_2^2, \quad q_1q_2 + q_2q_1,$$
$$p_1q_1 + q_1p_1 + p_2q_2 + q_2p_2, \quad p_1q_2 + q_1p_2 + p_2q_1 + q_2p_1.$$

根据 [20, 定理 6], ，定义理想的所有生成元都是本原元。我们证明，对于上述定义理想的所有生成元 r，均有 $c(r \otimes r) = r \otimes r$。由于

$$\delta(p_1) = \frac{1}{2}(\,(1+x^2)x \otimes p_1 + \xi(1-x^2)x \otimes p_2\,),$$
$$\delta(p_2) = \frac{1}{2}(\,(1+x^2)x \otimes p_2 - \xi(1-x^2)x \otimes p_1\,),$$

我们有

$$\delta(p_1^2) = \frac{1}{2}(\,(1+x^2) \otimes p_1^2 + (1-x^2)x \otimes p_2^2\,),$$
$$\delta(p_2^2) = \frac{1}{2}(\,(1+x^2) \otimes p_2^2 + (1-x^2) \otimes p_1^2\,),$$
$$\delta(p_1p_2) = \frac{1}{2}(\,(1+x^2) \otimes p_1p_2 - (1-x^2)x \otimes p_2p_1\,),$$
$$\delta(p_2p_1) = \frac{1}{2}(\,(1+x^2) \otimes p_2p_1 - (1-x^2) \otimes p_1p_2\,).$$

于是，由 ${}^H_H\mathcal{YD}$中编织的定义，该断言成立。其余部分留给读者。□

LEMMA 6.2. ([**2**], 引理*6.1*) 设 H 为一个霍普夫代数， $\psi : H \to H$ 为一个霍普夫代数自同构，且 V、 W 为*H*上的*Yetter-Drinfeld*模。

(1) L 令 V^ψ 与底层 V 的空间相同，但作用和余作用 n

$$h \cdot_\psi v = \psi(h) \cdot v,\ \delta^\psi(v) = (\psi^{-1} \otimes id)\delta(v),\ h \in H,\ v \in V.$$

那么 V^ψ 也是 H 上的 *Yetter-Drinfeld* 模。如果 T： $V \to W$ 是 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的态射，那么 T^ψ： $V^\psi \to W^\psi$ 也是如此。此外，编织 c： $V^\psi \otimes W^\psi \to W^\psi \otimes V^\psi$ 与编织 c： $V \otimes W \to W \otimes V$ 一致。

(2) 如果 R 是 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的代数（分别为余代数、霍普夫代数），那么 R^ψ 也是如此，且具有相同的结构映射。

(3) 设 R 是 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的霍普夫代数。那么映射 φ ： $R^\psi \sharp H \to R \sharp H$ ，由$\varphi(r\sharp h) = r\sharp\psi(h)$给出，是一个霍普夫代数同构。

基于 Andruskiewitsch 和 Schneider 的观察 [**2**, 引理 6.1]: Nichols代数的玻色化与其 Nichols代数的某个扭曲的玻色化同构（相对于霍普夫代数的某个自同构），我们首先需要刻画简单 Yetter-Drinfeld 模与其相对于 H 的自同构所得到的扭曲之间的同构关系。

COROLLARY 6.3. 简单 *Yetter-Drinfeld* 模之间存在如下同构关系，即存在 $\tau_i \in$*Aut*(H)，使得

$$\begin{aligned}
&(1)\quad V_1^{\tau_{17}} \cong V_2, \quad V_3^{\tau_{17}} \cong V_4,\\
&(2)\quad V_1^{\tau_{49}} \cong V_5, \quad V_2^{\tau_{49}} \cong V_6, \quad V_3^{\tau_{49}} \cong V_7, \quad V_4^{\tau_{49}} \cong V_8,\\
&(3)\quad V_2^{\tau_{33}} \cong V_5, \quad V_4^{\tau_{33}} \cong V_4,\\
&(4)\quad M_1^{\tau_{49}} \cong M_8, \quad M_2^{\tau_{49}} \cong M_4, \quad M_3^{\tau_{55}} \cong M_5,\\
&(5)\quad M_6^{\tau_{49}} \cong M_7, \quad M_9^{\tau_{12}} \cong M_{11}, \quad M_{10}^{\tau_{12}} \cong M_{12},\\
&(6)\quad \mathcal{B}(\Omega_1)\sharp H \cong \mathcal{B}(\Omega_8)\sharp H, \quad \mathcal{B}(\Omega_6)\sharp H \cong \mathcal{B}(\Omega_7)\sharp H,\\
&(7)\quad \mathcal{B}(\Omega_i)\sharp H \cong \mathcal{B}(\Omega_{i+2})\sharp H, \quad i \in \{2,3,9,10\},\\
&(8)\quad \mathcal{B}(\Omega_6^{(1)})\sharp H \cong \mathcal{B}(\Omega_7^{(3)})\sharp H, \quad \mathcal{B}(\Omega_9^{(3)})\sharp H \cong \mathcal{B}(\Omega_{11}^{(3)})\sharp H.
\end{aligned}$$

DEFINITION 6.4. 记 $\mathfrak{U}_{1,1}(\lambda)$ 为由 x、 y、 t、 p、 q 生成且满足关系 *(3.1)* 以及

$$xp = px, \quad yp = -py, \quad tp = \xi px^2t, \quad xq = qx, \quad yq = -qy, \quad tq = \xi qx^2t, \tag{6.1}$$

$$p^2 = q^2 = \lambda(1 - x^2), \quad pq + qp = \mu(1 - x^2). \tag{6.2}$$

它是一个霍普夫代数，其余代数结构由 *(3.2)* 和

$$\Delta(p) = p \otimes 1 + x^3y \otimes p, \quad \Delta(q) = q \otimes 1 + x^3y \otimes q. \tag{6.3}$$

DEFINITION 6.5. 记 $\mathfrak{U}_{1,2}(\lambda)$ 为由 x、 y、 t、 p、 q 生成且满足关系 *(3.1)*、*(6.1)* 以及

$$p^2 = q^2 = \lambda(1 - x^2), \quad pq = qp = 0. \tag{6.4}$$

It 是一个霍普夫代数，其余代数结构由 *(3.2)* 和 *(6.3)* 确定。

DEFINITION 6.6. 记 $\mathfrak{U}_{1,3}(\lambda)$ 为由 x, y, t, p, q 生成的代数，满足关系式 *(3.1)*、*(6.4)* 以及

$$xp = px,\ yp = -py,\ tp = \xi px^2t,\ xq = qx,\ yq = -qy,\ tq = -\xi qx^2t. \tag{6.5}$$

它是一个霍普夫代数，其余代数结构由 *(3.2)* 和

$$\Delta(p)=p\otimes 1+x^3y\otimes p,\quad \Delta(q)=q\otimes 1+xy\otimes q.$$

DEFINITION 6.7. 记 $\mathfrak{U}_{1,4}(\lambda)$ 为由 x,y,t,p,q 生成的代数，满足 *(3.1)*、*(6.5)* 和

$$p^2=q^2=\lambda(1-x^2),\ pq=qp=\mu(1-x^2).$$

它是一个霍普夫代数，其余代数结构由 *(3.2)* 和 *(6.3)* 确定).

DEFINITION 6.8. 记 $\mathfrak{U}_{1,5}(\lambda,\mu)$ 为由 x,y,t,p,q 生成并满足关系式 *(3.1)* 及

$$xp=px,\ yp=-py,\ tp=\xi px^2t,\ xq=-qx,\ yq=-qy,\ tq=\xi qx^2t, \tag{6.6}$$

$$p^2=q^2=\lambda(1-x^2),\ pq=qp=\mu(1-y). \tag{6.7}$$

它是一个霍普夫代数，其余代数结构由 *(3.2)* 和

$$\Delta(p)=p\otimes 1+x^3y\otimes p,\quad \Delta(q)=q\otimes 1+x\otimes q. \tag{6.8}$$

DEFINITION 6.9. 记 $\mathfrak{U}_{1,6}(\lambda,\mu)$ 为由 x,y,t,p,q 生成并满足关系式 *(3.1)*、*(6.6)* 及

$$p^2=q^2=\lambda(1-x^2),\quad pq=qp=\mu(1-x^2y). \tag{6.9}$$

它是一个霍普夫代数，其余代数结构由 *(3.2)* 和

$$\Delta(p)=p\otimes 1+x^3y\otimes p,\quad \Delta(q)=q\otimes 1+x^3\otimes q. \tag{6.10}$$

DEFINITION 6.10. 记 $\mathfrak{U}_{1,7}(\lambda,\mu)$ 为由 x,y,t,p,q 生成、满足关系式 *(3.1)*、*(6.9)* 及

$$xp=px,\quad yp=-py,\quad tp=\xi px^2t,\quad xq=-qx,\quad yq=-qy,\quad tq=-\xi qx^2t. \tag{6.11}$$

它是一个霍普夫代数，其余代数结构由 *(3.2)* 和

$$\Delta(p)=p\otimes 1+x^3y\otimes p,\quad \Delta(q)=q\otimes 1+x^3\otimes q.$$

DEFINITION 6.11. 记 $\mathfrak{U}_{1,8}(\lambda,\mu)$ 为由 x,y,t,p,q 生成、满足关系式 *(3.1)*、*(6.11)* 和 *(6.7)* 的代数。它是一个霍普夫代数，其余代数结构由 *(3.2)* 和 *(6.8)* 确定。

PROPOSITION 6.12. 假设 A 是一个有限维霍普夫代数，其余根为 H，且其无穷小编织同构于 $\Omega_{1,i}$，其中 $i\in\mathbb{I}_{1,8}$，则 $A\cong\mathfrak{U}_{1,i}(\lambda,\mu)$。

PROOF. 我们证明 $\Omega_{1,1}$. 的情形；其余情形 $\Omega_{1,i}$ 的证明可用同样的方法完成。由定理 6.1，存在一个霍普夫代数同构 $gr(A)\cong(\Omega_{1,1})\sharp H$。只需验证定义 6.4 中列出的关系式 (6.2) 在 A 中成立。令 $V_1=\mathbb{K}\{p\},V_2=\{q\}$。直接验证可得

$$\Delta(p^2)=p^2\otimes 1+x^2\otimes p^2,\ \Delta(q^2)=q^2\otimes 1+x^2\otimes q^2,$$
$$\Delta(pq)=pq\otimes 1+x^2\otimes pq,\ \Delta(qp)=qp\otimes 1+x^2\otimes qp.$$

因此，对于某个 λ，$\mu\in\mathbb{K}$，有 $p^2=q^2=\lambda(1-x^2)$ 和 $pq=qp=\mu(1-x^2)$。由此可知，存在一个从 $\mathfrak{U}_{1,\ 1}(\lambda,\ \mu)$ 到 A 的满射霍普夫代数同态。此外，$\mathfrak{U}_{1,\ 1}(\lambda,\ \mu)$ 中的每个元素都是以下元素的线性组合

$$\{\,p^iq^jx^ky^lt^m\mid i,j,l,m\in\mathbb{I}_{0,1},k\in\mathbb{I}_{0,3}\,\}.$$

应用菱形引理（[17]），该集合构成了 $\mathfrak{U}_{1,1}(\lambda,\mu)$ 的一组基。因此，$\dim A=\dim\mathfrak{U}_{1,1}(\lambda,\mu)$，且该满射是一个同构。因此，$A\cong\mathfrak{U}_{1,1}(\lambda,\mu)$。□

设 $I=\{\lambda,\mu,\alpha\}$、 $J=\{\lambda,\mu,\alpha,\beta,\gamma,\eta\}$ 为参数集，其中 $\lambda,\mu,\alpha,\beta,\gamma,\eta\in\mathbb{K}$。

DEFINITION 6.13. 记 $\mathfrak{U}_1(\lambda,\mu)$ 为由 x,y,t,p_1,p_2,q_1,q_2 生成、满足关系式 *(3.1)* 的代数，并且

$$xp_1=p_1x,\ yp_1=-p_1y,\ tp_1=\xi p_1x^2t,\ xp_2=p_2x,\ yp_2=-p_2y,\ tp_2=-\xi p_2x^2t, \tag{6.12}$$

$$xq_1=q_1x,\ yq_1=-q_1y,\ tq_1=\xi q_1x^2t,\ xq_2=q_2x,\ yq_2=-q_2y,\ tq_2=-\xi q_2x^2t, \tag{6.13}$$

$$p_1^2-p_2^2=\lambda(1-x^2),\quad p_1p_2+p_2p_1=0, \tag{6.14}$$

$$q_1^2-q_2^2=\mu(1-x^2),\quad q_1q_2+q_2q_1=0, \tag{6.15}$$

$$p_1q_1+q_1p_1+p_2q_2+q_2p_2=0, \tag{6.16}$$

$$p_1q_2+q_1p_2+p_2q_1+q_2p_1=0. \tag{6.17}$$

它是一个霍普夫代数，其余代数结构由 *(3.2)* 和以下内容确定

$$\Delta(p_1)=p_1\otimes 1+\frac{1}{2}(\,(1+x^2)y\otimes p_1-(1-x^2)y\otimes p_2\,),$$

$$\Delta(p_2)=p_2\otimes 1+\frac{1}{2}(\,(1+x^2)y\otimes p_2-(1-x^2)y\otimes p_1\,),$$

$$\Delta(q_1)=q_1\otimes 1+\frac{1}{2}(\,(1+x^2)y\otimes q_1-(1-x^2)y\otimes q_2\,),$$

$$\Delta(q_2)=q_2\otimes 1+\frac{1}{2}(\,(1+x^2)y\otimes q_2-(1-x^2)y\otimes q_1\,).$$

PROPOSITION 6.14.假设 A 是一个有限维霍普夫代数，其余根为 H，且其无穷小编织为 $\mathfrak{Q}_1$,，那么 $A\cong\mathfrak{B}(\mathfrak{Q}_1)\sharp H$。

PROOF. 令 $M_1=\mathbb{K}\{p_1,p_2\},M_2=\mathbb{K}\{q_1,q_2\}$。根据定理 6.1，我们有 $gr(A)\cong\mathfrak{B}(\mathfrak{Q}_1)\sharp H$。回顾一下， $\mathfrak{B}(\mathfrak{Q}_1)\sharp H$ 是由 p_1,p_2,q_1,q_2,x,y,t 生成的代数，其中 p_1,p_2,q_1,q_2 满足 $\mathfrak{B}(\mathfrak{Q}_1)$ 的关系， x,y,t 满足 H 的关系，且所有元素共同满足以下关系：

$$\begin{aligned}&xp_1=p_1x,\ yp_1=-p_1y,\ tp_1=\xi p_1x^2t,\ xp_2=p_2x,\ yp_2=-p_2y,\ tp_2=-\xi p_2x^2t,\\&xq_1=q_1x,\ yq_1=-q_1y,\ tq_1=\xi q_1x^2t,\ xq_2=q_2x,\ yq_2=-q_2y,\ tq_2=-\xi q_2x^2t.\end{aligned} \tag{6.18}$$

经过直接计算，我们知道

$$\Delta(p_1^2+p_2^2)=(p_1^2+p_2^2)\otimes 1+1\otimes(p_1^2+p_2^2),$$

$$\Delta(p_1^2-p_2^2)=(p_1^2-p_2^2)\otimes 1+1\otimes(p_1^2-p_2^2).$$

于是，对于某个 $\lambda\in\mathbb{K}$，有 $p_1^2=\lambda(1-x^2)$、 $p_2^2=-\lambda(1-x^2)$。由于 $tp_1^2=-p_1^2t$，关系$p_1^2=p_2^2=0$ 在 A 中成立。类似地，关系 $p_1p_2+p_2p_1=0,\ q_1^2=q_2^2=0,\ q_1q_2+q_2q_1=0$,
$p_1q_1+q_1p_1+p_2q_2+q_2p_2=0,\ p_1q_2+q_2p_1+p_2q_1+q_1p_2=0.$ □

DEFINITION 6.15. 将由 x、 y、 t、 p_1、 p_2、 q_1、 q_2 生成且满足关系式 *(3.1)* 的代数记作 $\mathfrak{U}_2(J)$，并且

$$xp_1=p_1x,\ yp_1=p_1y,\ tp_1=-p_1t,\ xp_2=-p_2x,\ yp_2=p_2y,\ tp_2=p_2t, \tag{6.19}$$

$$xq_1=q_1x,\ yq_1=q_1y,\ tq_1=-q_1t,\ xq_2=-q_2x,\ yq_2=q_2y,\ tq_2=q_2t, \tag{6.20}$$

$$p_1^2=\lambda(1-y)+\mu(1-x^2y),\ p_2^2=\lambda(1-y)-\mu(1-x^2y),\ p_1p_2+p_2p_1=0, \tag{6.21}$$

$$q_1^2=\alpha(1-y)+\beta(1-x^2y),\ q_2^2=\alpha(1-y)-\beta(1-x^2y),\ q_1q_2+q_2q_1=0, \tag{6.22}$$

$$p_1q_1+q_1p_1=\gamma(1-y)+\eta(1-x^2y),\ p_2q_2+q_2p_2=\gamma(1-y)-\eta(1-x^2y), \tag{6.23}$$

$$p_1q_2+q_2p_1+p_2q_1+q_1p_2=0. \tag{6.24}$$

它是一个霍普夫代数，其余代数结构由 *(3.2)* 决定，并且

$$\Delta(p_1) = p_1 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,(1+x^2)xt \otimes p_1 + \xi(1-x^2)xyt \otimes p_2\,),$$
$$\Delta(p_2) = p_2 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,\xi(1-x^2)xyt \otimes p_1 + (1+x^2)xyt \otimes p_2\,),$$
$$\Delta(q_1) = q_1 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,(1+x^2)xt \otimes q_1 + \xi(1-x^2)xyt \otimes q_2\,),$$
$$\Delta(q_2) = q_2 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,\xi(1-x^2)xyt \otimes q_1 + (1+x^2)xyt \otimes q_2\,).$$

DEFINITION 6.16. 记 $\mathfrak{U}_3(I)$ 为由 x、y、t、p_1、p_2、q_1、q_2 生成并满足关系式 *(3.1)* 的代数，且

$$xp_1 = p_1x,\ yp_1 = p_1y,\ tp_1 = -p_1t,\ xp_2 = -p_2x,\ yp_2 = p_2y,\ tp_2 = -p_2t, \tag{6.25}$$
$$xq_1 = q_1x,\ yq_1 = q_1y,\ tq_1 = -q_1t,\ xq_2 = -q_2x,\ yq_2 = q_2y,\ tq_2 = -q_2t, \tag{6.26}$$
$$p_1^2 = p_2^2 = \lambda(1-y),\ p_1p_2 + p_2p_1 = 0, \tag{6.27}$$
$$q_1^2 = q_2^2 = \mu(1-y),\ q_1q_2 + q_2q_1 = 0, \tag{6.28}$$
$$p_1q_1 + q_1p_1 + p_2q_2 + q_2p_2 = \alpha(1-x^2y), \tag{6.29}$$
$$p_1q_2 + q_1p_2 + p_2q_1 + q_2p_1 = 0. \tag{6.30}$$

这是一个霍普夫代数，其余代数结构由 *(3.2)* 和以下内容确定：

$$\Delta(p_1) = p_1 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,(1+x^2)t \otimes p_1 + (1-x^2)yt \otimes p_2\,),$$
$$\Delta(p_2) = p_2 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,(1+x^2)yt \otimes p_2 - (1-x^2)yt \otimes p_1\,),$$
$$\Delta(q_1) = q_1 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,(1+x^2)t \otimes q_1 + (1-x^2)yt \otimes q_2\,),$$
$$\Delta(q_2) = q_2 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,(1+x^2)yt \otimes q_2 - (1-x^2)yt \otimes q_1\,).$$

DEFINITION 6.17. 记 $\mathfrak{U}_6(I)$ 为由 x、y、t、p_1、p_2、q_1、q_2 生成并满足关系式 *(3.1)* 的代数，且

$$xp_1 = -p_1x,\ yp_1 = p_1y,\ tp_1 = p_1t,\ xp_2 = -p_2x,\ yp_2 = p_2y,\ tp_2 = -p_2t, \tag{6.31}$$
$$xq_1 = -q_1x,\ yq_1 = q_1y,\ tq_1 = q_1t,\ xq_2 = -q_2x,\ yq_2 = q_2y,\ tq_2 = -q_2t, \tag{6.32}$$
$$p_1^2 = p_2^2 = 0,\ p_1p_2 + p_2p_1 = \lambda(1-x^2), \tag{6.33}$$
$$q_1^2 = q_2^2 = 0,\ q_1q_2 + q_2q_1 = \mu(1-x^2), \tag{6.34}$$
$$p_1q_1 + q_1p_1 + p_2q_2 + q_2p_2 = 0, \tag{6.35}$$
$$p_1q_2 + q_1p_2 + p_2q_1 + q_2p_1 = \alpha(1-x^2). \tag{6.36}$$

它是一个霍普夫代数，其余代数结构由 *(3.2)* 和

$$\Delta(p_1) = p_1 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,(1+x^2)x \otimes p_1 + \xi(1-x^2)x \otimes p_2\,),$$
$$\Delta(p_2) = p_2 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,(1+x^2)x \otimes p_2 - \xi(1-x^2)x \otimes p_1\,),$$
$$\Delta(q_1) = q_1 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,(1+x^2)x \otimes q_1 + \xi(1-x^2)x \otimes q_2\,),$$
$$\Delta(q_2) = q_2 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,(1+x^2)x \otimes q_2 - \xi(1-x^2)x \otimes q_1\,).$$

DEFINITION 6.18. 将由 $x, y, t, p_1, p_2, q_1, q_2$ 生成并满足关系式 *(3.1)* 的代数记作 $\mathfrak{U}_9(I)$，并且

$$xp_1 = \xi p_1 x,\ yp_1 = p_1 y,\ tp_1 = -p_2 t,\ xp_2 = -\xi p_2 x,\ yp_2 = p_2 y,\ tp_2 = p_1 t, \tag{6.37}$$

$$xq_1 = \xi q_1 x,\ yq_1 = q_1 y,\ tq_1 = -q_2 t,\ xq_2 = -\xi q_2 x,\ yq_2 = q_2 y,\ tq_2 = q_2 t, \tag{6.38}$$

$$p_1^2 = p_2^2 = 0,\ p_1p_2 + p_2p_1 = \lambda(1-y), \tag{6.39}$$

$$q_1^2 = q_2^2 = 0,\ q_1q_2 + q_2q_1 = \mu(1-y), \tag{6.40}$$

$$p_1q_1 + q_1p_1 + p_2q_2 + q_2p_2 = 0, \tag{6.41}$$

$$p_1q_2 + q_1p_2 + p_2q_1 + q_2p_1 = \alpha(1-y). \tag{6.42}$$

这是一个霍普夫代数，其余代数结构由 *(3.2)* 和

$$\begin{aligned}\Delta(p_1) &= p_1 \otimes 1 + x^2 \otimes p_1,\\ \Delta(p_2) &= p_2 \otimes 1 + x^2y \otimes p_2,\\ \Delta(q_1) &= q_1 \otimes 1 + x^2 \otimes q_1,\\ \Delta(q_2) &= q_2 \otimes 1 + x^2y \otimes q_2.\end{aligned}$$

DEFINITION 6.19. 将 $\mathfrak{U}_{10}(I)$ 记为由 x、y、t、p_1、p_2、q_1、q_2 生成的代数，满足关系式 *(3.1)*，并且

$$xp_1 = \xi p_1 x,\ yp_1 = p_1 y,\ tp_1 = -p_2 t,\ xp_2 = -\xi p_2 x,\ yp_2 = p_2 y,\ tp_2 = -p_1 t, \tag{6.43}$$

$$xq_1 = \xi q_1 x,\ yq_1 = q_1 y,\ tq_1 = -q_2 t,\ xq_2 = -\xi q_2 x,\ yq_2 = q_2 y,\ tq_2 = -q_1 t, \tag{6.44}$$

$$p_1^2 = p_2^2 = 0,\ p_1p_2 + p_2p_1 = \lambda(1-y), \tag{6.45}$$

$$q_1^2 = q_2^2 = 0,\ q_1q_2 + q_2q_1 = \mu(1-y), \tag{6.46}$$

$$p_1q_1 + q_1p_1 + p_2q_2 + q_2p_2 = 0, \tag{6.47}$$

$$p_1q_2 + q_1p_2 + p_2q_1 + q_2p_1 = \alpha(1-y). \tag{6.48}$$

这是一个霍普夫代数，其余代数结构由 *(3.2)* 和

$$\begin{aligned}\Delta(p_1) &= p_1 \otimes 1 + x^2y \otimes p_1,\\ \Delta(p_2) &= p_2 \otimes 1 + x^2 \otimes p_2,\\ \Delta(q_1) &= q_1 \otimes 1 + x^2y \otimes q_1,\\ \Delta(q_2) &= q_2 \otimes 1 + x^2 \otimes q_2.\end{aligned}$$

PROPOSITION 6.20.(1) 设 A 是一个有限维霍普夫代数，其余根为 H，且无穷小编织同构于Ω_i （其中 $i \in\{2,3,6,9,10\}$），则 $A \cong \mathfrak{U}_i(I)$。

(2) $\mathfrak{U}_2(I) \cong \mathfrak{U}_2(I')$ 当且仅当存在非零参数 a_1、a_2、b_1、b_2，使得

$$\begin{aligned}a_1^2\lambda' + a_1a_2\gamma' + a_2^2\alpha' &= \lambda,\\ a_1^2\mu' + a_1a_2\eta' + a_2^2\beta' &= \mu,\\ b_1^2\lambda' + b_1b_2\gamma' + b_2^2\alpha' &= \alpha,\\ b_1^2\mu' + b_1b_2\eta' + b_2^2\beta' &= \beta,\\ 2a_1b_1\lambda' + a_1b_2\gamma' + a_2b_1\gamma' + 2a_2b_2\alpha' &= \gamma,\\ 2a_1b_1\mu' + a_1b_2\eta' + a_2b_1\eta' + 2a_2b_2\beta' &= \eta,\end{aligned} \tag{6.49}$$

或满足

$$\begin{aligned} a_1^2\lambda^{'} + a_2^2\alpha^{'} &= \lambda, \\ a_1^2\mu^{'} + a_2^2\beta^{'} &= \mu, \\ b_1^2\lambda^{'} + b_2^2\alpha^{'} &= \alpha, \\ b_1^2\mu^{'} + a_2^2\beta^{'} &= \beta. \end{aligned} \tag{6.50}$$

(3) $\mathfrak{U}_3(I) \cong \mathfrak{U}_3(I^{'})$ 当且仅当存在非零参数 a_1, a_2, b_1, b_2 使得

$$\begin{aligned} a_1^2\lambda^{'} + a_1a_2\alpha^{'} + a_2^2\mu^{'} &= \lambda, \\ b_1^2\lambda^{'} + b_1b_2\alpha^{'} + b_2^2\mu^{'} &= \mu, \\ 2a_1b_1\lambda^{'} + a_1b_2\alpha^{'} + a_2b_1\alpha^{'} + 2a_2b_2\mu^{'} &= \alpha. \end{aligned} \tag{6.51}$$

(4) $\mathfrak{U}_6(I) \cong \mathfrak{U}_6(I^{'})$ 当且仅当存在非零参数 a_1, a_2 使得

$$a_1^2\lambda^{'} = \lambda,\ a_2^2\mu^{'} = \mu, \tag{6.52}$$

或满足

$$a_1^2\mu^{'} = \lambda,\ a_2^2\lambda^{'} = \mu, \tag{6.53}$$

或满足

$$a_1^2\lambda^{'} = -\lambda,\ a_2^2\mu^{'} = -\mu, \tag{6.54}$$

或满足

$$a_1^2\mu^{'} = -\lambda,\ a_2^2\lambda^{'} = -\mu. \tag{6.55}$$

(5) 对于 $i \in \{9, 10\}$, $\mathfrak{U}_i(I) \cong \mathfrak{U}_i(I^{'})$ ， 当且仅当存在非零参数 a_1, a_2b_1, b_2 使得

$$\begin{aligned} a_1^2\lambda^{'} + a_1a_2(\alpha^{'} + \beta^{'}) + a_2^2\mu^{'} &= \lambda, \\ b_1^2\lambda^{'} + b_1b_2(\alpha^{'} + \beta^{'}) + b_2^2\mu^{'} &= \mu, \\ a_1b_1\lambda^{'} + a_1b_2\alpha^{'} + a_2b_1\beta^{'} + a_2b_2\mu^{'} &= \alpha, \\ a_1b_1\lambda^{'} + a_1b_2\beta^{'} + a_2b_1\alpha^{'} + a_2b_2\mu^{'} &= \beta, \end{aligned} \tag{6.56}$$

或满足

$$\begin{aligned} -\xi(a_1^2\lambda^{'} + a_1a_2(\alpha^{'} + \beta^{'}) + a_2^2\mu^{'}) &= \lambda, \\ -\xi(b_1^2\lambda^{'} + b_1b_2(\alpha^{'} + \beta^{'}) + b_2^2\mu^{'}) &= \mu, \\ -\xi(a_1b_1\lambda^{'} + a_1b_2\alpha^{'} + a_2b_1\beta^{'} + a_2b_2\mu^{'}) &= \alpha, \\ -\xi(a_1b_1\lambda^{'} + a_1b_2\beta^{'} + a_2b_1\alpha^{'} + a_2b_2\mu^{'}) &= \beta, \end{aligned} \tag{6.57}$$

或满足

$$\begin{aligned} -(a_1^2\lambda^{'} + a_1a_2(\alpha^{'} + \beta^{'}) + a_2^2\mu^{'}) &= \lambda, \\ -(b_1^2\lambda^{'} + b_1b_2(\alpha^{'} + \beta^{'}) + b_2^2\mu^{'}) &= \mu, \\ -(a_1b_1\lambda^{'} + a_1b_2\alpha^{'} + a_2b_1\beta^{'} + a_2b_2\mu^{'}) &= \alpha, \\ -(a_1b_1\lambda^{'} + a_1b_2\beta^{'} + a_2b_1\alpha^{'} + a_2b_2\mu^{'}) &= \beta, \end{aligned} \tag{6.58}$$

或满足

$$\begin{aligned}\xi(a_1^2\lambda^{'}+a_1a_2(\alpha^{'}+\beta^{'})+a_2^2\mu^{'})&=\lambda,\\ \xi(b_1^2\lambda^{'}+b_1b_2(\alpha^{'}+\beta^{'})+b_2^2\mu^{'})&=\mu,\\ \xi(a_1b_1\lambda^{'}+a_1b_2\alpha^{'}+a_2b_1\beta^{'}+a_2b_2\mu^{'})&=\alpha,\\ \xi(a_1b_1\lambda^{'}+a_1b_2\beta^{'}+a_2b_1\alpha^{'}+a_2b_2\mu^{'})&=\beta.\end{aligned}\tag{6.59}$$

Proof. 对于 (1)，我们证明关于 Ω_2 的断言。其余情形的证明沿同样的思路进行。设 $M_2=\mathbb{K}\{p_1,p_2\}=\mathbb{K}\{q_1,q_2\}$。由定理 6.1，存在霍普夫代数同构 $grA\cong\mathcal{B}(\Omega_2)\sharp H$。回想 $\mathcal{B}(\Omega_2)\sharp H$ 是由 p_1、p_2、q_1、q_2、x、y、t 以及 p_1、p_2、q_1、q_2 生成的代数，满足关系 $\mathcal{B}(\Omega_2)$，x、y、t 满足 H 的关系，并且它们共同满足如下关系:

$$\begin{gathered}xp_1=p_1x,\ yp_1=p_1y,\ tp_1=-p_1t,\ xp_2=-p_2x,\ yp_2=p_2y,\ tp_2=p_2t,\\ xq_1=q_1x,\ yq_1=q_1y,\ tq_1=-q_1t,\ xq_2=-q_2x,\ yq_2=q_2y,\ tq_2=q_2t,\end{gathered}$$

经过直接计算，我们得到

$$\begin{aligned}\Delta(p_1^2+p_2^2)&=(p_1^2+p_2^2)\otimes 1+y\otimes(p_1^2+p_2^2),\\ \Delta(p_1^2-p_2^2)&=(p_1^2-p_2^2)\otimes 1+x^2y\otimes(p_1^2-p_2^2),\\ \Delta(p_1p_2+p_2p_1)&=(p_1p_2+p_2p_1)\otimes 1+\frac{1}{2}(1+y+x^2-x^2y)\otimes(p_1p_2+p_2p_1),\\ \Delta(p_1q_1+q_1p_1+p_2q_2+q_2p_2)&=(p_1q_1+q_1p_1+p_2q_2+q_2p_2)\otimes 1\\ &\quad+y\otimes(p_1q_1+q_1p_1+p_2q_2+q_2p_2),\\ \Delta(p_1q_1+q_1p_1-p_2q_2-q_2p_2)&=(p_1q_1+q_1p_1-p_2q_2-q_2p_2)\otimes 1\\ &\quad+x^2y\otimes(p_1q_1+q_1p_1-p_2q_2-q_2p_2),\\ \Delta(p_1q_2+q_1p_2+p_2q_1+q_2p_1)&=(p_1q_2+q_1p_2+p_2q_1+q_2p_1)\otimes 1\\ &\quad+\frac{1}{2}(1+x^2-x^2y+y)\otimes(p_1q_2+q_1p_2+p_2q_1+q_2p_1).\end{aligned}$$

因此，$p_1^2=\lambda(1-y)+\mu(1-x^2y)$，$p_2^2=\lambda(1-y)-\mu(1-x^2y)$，其中某些 λ、$\mu\in\mathbb{K}$、$p_1p_2+p_2p_1=0$。由于 $x(p_1p_2+p_2p_1)=-(p_1p_2+p_2p_1)x$，关系（6.21—6.24）在$A$中成立。因此，存在一个从 $\mathfrak{U}_2(J)$ 到 A 的满射霍普夫代数同态。我们可以观察到，$\mathfrak{U}_2(J)$ 的所有元素都可以表示为以下元素的线性组合

$$\{\,p_1^ip_2^jq_1^kq_2^lx^sy^mt^n\mid i,j,k,l,m,n\in\mathbb{I}_{0,1},s\in\mathbb{I}_{0,3}\,\}.$$

事实上，根据菱形引理，该集合是 $\mathfrak{U}_2(J)$的一组基。于是 $A\cong\mathfrak{U}_2(J)$。

对于 (2)，假设 $\Phi:\ \mathfrak{U}_2(I)\ \to\ \mathfrak{U}_i(I')$是霍普夫代数同构，其中 $I'=\{\lambda^{'},\mu^{'},\alpha^{'},\beta^{'},\gamma^{'},\eta^{'}\}$，且 $\mathfrak{U}_i(I')$由 x、y、t、$p_1^{'}$、$p_2^{'}$、$q_1^{'}$、$q_2^{'}$生成。当 $\Phi|_H\in\{\tau_1,\tau_3,\tau_{17},\tau_{19},\tau_{37},\tau_{39},\tau_{53},\tau_{55}\}$时，存在非零参数 a_1、a_2、b_1、b_2，使得

$$\Phi(p_1)=a_1p_1^{'}+a_2q_1^{'},\ \Phi(p_2)=a_1p_2^{'}+a_2q_2^{'},\tag{6.60}$$

$$\Phi(q_1)=b_1p_1^{'}+b_2q_1^{'},\ \Phi(q_2)=b_1p_2^{'}+b_2q_2^{'},\tag{6.61}$$

于是，当 $\Phi|_H\in\{\tau_{13},\tau_{14}\}$时，关系 (6.49) 成立,

$$\Phi(p_1)=a_1p_1^{'}+a_2q_1^{'},\ \Phi(p_2)=\xi(a_1p_2^{'}+a_2q_2^{'}),\tag{6.62}$$

$$\Phi(q_1)=b_1p_1^{'}+b_2q_1^{'},\ \Phi(q_2)=\xi(b_1p_2^{'}+b_2q_2^{'}),\tag{6.63}$$

于是关系式（6.50）成立。

对于（3），设 $\Phi:\ \mathfrak{U}_3(I)\ \rightarrow\ \mathfrak{U}_i(I')$ 是霍普夫代数同构，其中 $I'\ =\ \{\lambda',\mu',\alpha'\}$，且 $\mathfrak{U}_i(I')$ 由 x、y、t、p_1'、p_2'、q_1'、q_2' 生成。当 $\Phi|_H\ \in\{\tau_1,\tau_3,\tau_{17},\tau_{19},\tau_{33},\tau_{35},\tau_{49},\tau_{51}\}$ 时，存在非零参数 a_1、a_2、b_1、b_2，使得

$$\Phi(p_1)=a_1p_1'+a_2q_1',\ \Phi(p_2)=a_1p_2'+a_2q_2', \tag{6.64}$$

$$\Phi(q_1)=b_1p_1'+b_2q_1',\ \Phi(q_2)=b_1p_2'+b_2q_2', \tag{6.65}$$

则关系式 (6.51) 成立。

对于 (4)，假设 $\Phi:\mathfrak{U}_6(I)\rightarrow\mathfrak{U}_i(I')$ 是霍普夫代数同构，其中 $I'=\{\lambda',\mu'\}$，且 $\mathfrak{U}_i(I')$ 由 x、y、t、p_1'、p_2'、q_1'、q_2' 生成。当 $\Phi|_H\in\{\tau_1,\tau_3,\tau_5,\tau_7,\tau_9,\tau_{10},\tau_{13},\tau_{14}$、$\tau_{17}$、$\tau_{19}$、$\tau_{21}$、$\tau_{23}$、$\tau_{25}$、$\tau_{26}$、$\tau_{29}$、$\tau_{30}\}$ 时，存在非零参数 a_1、a_2，使得

$$\Phi(p_1)=a_1p_1',\ \Phi(p_2)=a_1p_2',\ \Phi(q_1)=a_2q_1',\ \Phi(q_2)=a_2q_2', \tag{6.66}$$

则关系式 (6.52) 成立，或者存在非零参数 a_1，a_2，使得

$$\Phi(p_1)=a_1q_1',\ \Phi(p_2)=a_1q_2',\ \Phi(q_1)=a_2p_1',\ \Phi(q_2)=a_2p_2', \tag{6.67}$$

则关系式 (6.53) 成立，并且当 $\Phi|_H\in\{\tau_2,\tau_4,\tau_6,\tau_8,\tau_{11},\tau_{12},\tau_{15},\tau_{16},\tau_{18},\tau_{20},\tau_{22},\tau_{24},\tau_{27},\tau_{28}$，$\tau_{31}$，$\tau_{32}\}$ 时，存在非零参数 a_1，a_2，使得

$$\Phi(p_1)=a_1p_2',\ \Phi(p_2)=-a_1p_1',\ \Phi(q_1)=a_2q_2',\ \Phi(q_2)=-a_2q_1', \tag{6.68}$$

那么关系 (6.54) 成立，或者存在非零参数 a_1,a_2，使得

$$\Phi(p_1)=a_1q_2',\ \Phi(p_2)=-a_1q_1',\ \Phi(q_1)=a_2p_2',\ \Phi(q_2)=-a_2p_1'. \tag{6.69}$$

那么关系 (6.55) 成立。

对于 (5)，设 $\Phi:\ \mathfrak{U}_9(I)\ \rightarrow\ \mathfrak{U}_i(I')$ 是霍普夫代数同构，其中 $I'\ =\ \{\lambda',\mu',\alpha',\beta'\}$，且 $\mathfrak{U}_i(I')$ 由 $x,y,t,p_1',p_2',q_1',q_2'$ 生成。当 $\Phi|_H\ \in\{\tau_1,\tau_5,\tau_{33},\tau_{37}\}$ 时，存在非零参数 a_1,a_2,b_1,b_2，使得

$$\Phi(p_1)=a_1p_1'+a_2q_1',\ \Phi(p_2)=a_1p_2'+a_2q_2', \tag{6.70}$$

$$\Phi(q_1)=b_1p_1'+b_2q_1',\ \Phi(q_2)=b_1p_2'+b_2q_2', \tag{6.71}$$

那么关系 (6.56) 成立；当 $\Phi|_H\in\{\tau_2,\tau_6,\tau_{34},\tau_{38}\}$ 时，

$$\Phi(p_1)=a_1p_1'+a_2q_1',\ \Phi(p_2)=-\xi(a_1p_2'+a_2q_2'), \tag{6.72}$$

$$\Phi(q_1)=b_1p_1'+b_2q_1',\ \Phi(q_2)=-\xi(b_1p_2'+b_2q_2'), \tag{6.73}$$

那么关系 (6.57) 成立；当 $\Phi|_H\in\{\tau_3,\tau_7,\tau_{35},\tau_{39}\}$ 时，

$$\Phi(p_1)=a_1p_1'+a_2q_1',\ \Phi(p_2)=-(a_1p_2'+a_2q_2'), \tag{6.74}$$

$$\Phi(q_1)=b_1p_1'+b_2q_1',\ \Phi(q_2)=-(b_1p_2'+b_2q_2'), \tag{6.75}$$

则关系式 (6.58) 成立；当 $\Phi|_H\in\{\tau_4,\tau_8,\tau_{36},\tau_{40}\}$ 时，

$$\Phi(p_1)=a_1p_1'+a_2q_1',\ \Phi(p_2)=\xi(a_1p_2'+a_2q_2'), \tag{6.76}$$

$$\Phi(q_1)=b_1p_1'+b_2q_1',\ \Phi(q_2)=\xi(b_1p_2'+b_2q_2'). \tag{6.77}$$

则关系式 (6.59) 成立。

我们完成了证明。 □

DEFINITION 6.21. 将由 x、y、t、p_1、p_2、q_1、q_2 生成且满足关系式 *(3.1)* 的代数记为 $\mathfrak{U}_{13}(I)$，并且

$$xp_1 = p_1x,\ yp_1 = -p_1y,\ tp_1 = \xi p_1x^2t,\ xp_2 = p_2x,\ yp_2 = -p_2y,\ tp_2 = -\xi p_2x^2t, \tag{6.78}$$

$$xq_1 = -q_1x,\ yq_1 = q_1y,\ tq_1 = q_1t,\ xq_2 = -q_2x,\ yq_2 = q_2y,\ tq_2 = -q_2t, \tag{6.79}$$

$$p_1^2 = p_2^2 = \lambda(1-x^2),\ p_1p_2 + p_2p_1 = 0, \tag{6.80}$$

$$q_1^2 = q_2^2 = \mu(1-x^2),\ q_1q_2 + q_2q_1 = \alpha(1-x^2). \tag{6.81}$$

它是一个霍普夫代数，其余代数结构由 *(3.2)* 和

$$\begin{aligned}
\Delta(p_1) &= p_1 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,(1+x^2)y \otimes p_1 - (1-x^2)yx \otimes p_2\,),\\
\Delta(p_2) &= p_2 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,(1+x^2)y \otimes p_2 - (1-x^2)y \otimes p_1\,),\\
\Delta(q_1) &= q_1 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,(1+x^2)x \otimes q_1 + \xi(1-x^2)x \otimes q_2\,),\\
\Delta(q_2) &= q_2 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,(1+x^2)x \otimes q_2 - \xi(1-x^2)x \otimes q_1\,).
\end{aligned}$$

DEFINITION 6.22. 记由 $x, y, t, p_1, p_2, q_1, q_2$ 生成的代数为 $\mathfrak{U}_{14}(\lambda, \mu)$，其满足关系式 *(3.1)*，并且

$$xp_1 = p_1x,\ yp_1 = -p_1y,\ tp_1 = \xi p_1x^2t,\ xp_2 = p_2x,\ yp_2 = -p_2y,\ tp_2 = -\xi p_2x^2t, \tag{6.82}$$

$$xq_1 = -q_1x,\ yq_1 = q_1y,\ tq_1 = q_1t,\ xq_2 = -q_2x,\ yq_2 = q_2y,\ tq_2 = -q_2t, \tag{6.83}$$

$$p_1^2 = p_2^2 = \lambda(1-x^2),\ p_1p_2 + p_2p_1 = 0, \tag{6.84}$$

$$q_1^2 = q_2^2 = \mu(1-x^2), q_1q_2 + q_2q_1 = 0. \tag{6.85}$$

它是一个霍普夫代数，其余代数结构由 *(3.2)* 和

$$\begin{aligned}
\Delta(p_1) &= p_1 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,(1+x^2)y \otimes p_1 - (1-x^2)y \otimes p_2\,),\\
\Delta(p_2) &= p_2 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,(1+x^2)y \otimes p_2 - (1-x^2)y \otimes p_1\,),\\
\Delta(q_1) &= q_1 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,(1+x^2)y \otimes q_1 - (1-x^2)y \otimes q_2\,),\\
\Delta(q_2) &= q_2 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,(1+x^2)y \otimes q_2 - (1-x^2)y \otimes q_1\,).
\end{aligned}$$

DEFINITION 6.23. 将由 $x, y, t, p_1, p_2, q_1, q_2$ 生成、满足关系式 *(3.1)* 的代数记作 $\mathfrak{U}_{15}(I)$，并且

$$xp_1 = p_1x,\ yp_1 = p_1y,\ tp_1 = -p_1t,\ xp_2 = -p_2x,\ yp_2 = p_2y,\ tp_2 = p_2t, \tag{6.86}$$

$$xq_1 = q_1x,\ yq_1 = q_1y,\ tq_1 = -q_1t,\ xq_2 = -q_2x,\ yq_2 = q_2y,\ tq_2 = q_2t, \tag{6.87}$$

$$p_1^2 = p_2^2 = \lambda(1-x^2y),\ p_1p_2 + p_2p_1 = 0, \tag{6.88}$$

$$q_1^2 + q_2^2 = \mu(1-y),\ q_1q_2 + q_2q_1 = 0, \tag{6.89}$$

$$p_1q_1 + q_1p_1 + p_2q_2 + q_2p_2 = \alpha(1-x^2), \tag{6.90}$$

$$p_1q_2 + q_1p_2 + p_2q_1 + q_2p_1 = 0. \tag{6.91}$$

它是一个霍普夫代数，其余代数结构由 *(3.2)* 和

$$\Delta(p_1) = p_1 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,(1+x^2)xt \otimes p_1 + \xi(1-x^2)xyt \otimes p_2\,),$$
$$\Delta(p_2) = p_2 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,\xi(1-x^2)xyt \otimes p_1 + (1+x^2)xyt \otimes p_2\,),$$
$$\Delta(q_1) = q_1 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,(1+x^2)xyt \otimes q_1 - \xi(1-x^2)xt \otimes q_2\,),$$
$$\Delta(q_2) = q_2 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,(1+x^2)xt \otimes q_2 - \xi(1-x^2)xt \otimes q_1\,).$$

DEFINITION 6.24. 记 $\mathfrak{U}_{16}(\lambda,\mu)$ 为由 $x, y, t, p_1, p_2, q_1, q_2$ 生成、满足关系式 *(3.1)* 的代数，并且

$$xp_1 = p_1x,\ yp_1 = p_1y,\ tp_1 = -p_1t,\ xp_2 = -p_2x,\ yp_2 = p_2y,\ tp_2 = -p_2t, \tag{6.92}$$
$$xq_1 = q_1x,\ yq_1 = q_1y,\ tq_1 = -q_1t,\ xq_2 = -q_2x,\ yq_2 = q_2y,\ tq_2 = -q_2t, \tag{6.93}$$
$$p_1^2 = \frac{1}{2}\lambda(1-y) + \frac{1}{2}\mu(1-x^2y), p_2^2 = \lambda(1-y),\ p_1p_2 + p_2p_1 = 0, \tag{6.94}$$
$$q_1^2 = q_2^2 = \mu(1-y),\ q_1q_2 + q_2q_1 = 0, \tag{6.95}$$
$$p_1q_1 + q_1p_1 + p_2q_2 + q_2p_2 = 0, \tag{6.96}$$
$$p_1q_2 + q_1p_2 + p_2q_1 + q_2p_1 = 0. \tag{6.97}$$

它是一个霍普夫代数，其余代数结构由 *(3.2)* 和

$$\Delta(p_1) = p_1 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,(1+x^2)t \otimes p_1 + (1-x^2)yt \otimes p_2\,),$$
$$\Delta(p_2) = p_2 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,(1+x^2)yt \otimes p_2 - (1-x^2)yt \otimes p_1\,),$$
$$\Delta(q_1) = q_1 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,(1+x^2)yt \otimes q_1 - (1-x^2)t \otimes q_2\,),$$
$$\Delta(q_2) = q_2 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,(1+x^2)t \otimes q_2 + (1-x^2)t \otimes q_1\,).$$

DEFINITION 6.25. 记 $\mathfrak{U}_{17}(I,\beta)$ 为由 $x, y, t, p_1, p_2, q_1, q_2$ 生成、满足关系式 *(3.1)* 的代数，并且

$$xp_1 = -p_1x,\ yp_1 = p_1y,\ tp_1 = p_1t,\ xp_2 = -p_2x,\ yp_2 = p_2y,\ tp_2 = -p_2x^2t, \tag{6.98}$$
$$xq_1 = -q_1x,\ yq_1 = q_1y,\ tq_1 = q_1t,\ xq_2 = -q_2x,\ yq_2 = q_2y,\ tq_2 = -q_2t, \tag{6.99}$$
$$p_1^2 = p_2^2 = 0,\ p_1p_2 + p_2p_1 = \lambda(1-x^2), \tag{6.100}$$
$$q_1^2 + q_2^2 = 0,\ q_1q_2 + q_2q_1 = \mu(1-x^2), \tag{6.101}$$
$$p_1q_1 + q_1p_1 + p_2q_2 + q_2p_2 = \alpha(1-x^2y), \tag{6.102}$$
$$p_1q_2 + q_1p_2 + p_2q_1 + q_2p_1 = \beta(1-y). \tag{6.103}$$

它是一个霍普夫代数，其余代数结构由 *(3.2)* 和

$$\Delta(p_1) = p_1 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,(1+x^2)x \otimes p_1 - \xi(1-x^2)x \otimes p_2\,),$$
$$\Delta(p_2) = p_2 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,(1+x^2)x \otimes p_2 - \xi(1-x^2)x \otimes p_1\,),$$
$$\Delta(q_1) = q_1 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,(1+x^2)xy \otimes q_1 - \xi(1-x^2)xy \otimes q_2\,),$$
$$\Delta(q_2) = q_2 \otimes 1 + \frac{1}{2}(\,(1+x^2)xy \otimes q_2 + \xi(1-x^2)xy \otimes q_1\,).$$

DEFINITION 6.26. 记 $\mathfrak{U}_{19}(I)$ 为由 $x, y, t, p_1, p_2, q_1, q_2$ 生成并满足关系式 *(3.1)* 的代数，且

(6.104)
$$xp_1 = \xi p_1 x, \quad yp_1 = p_1 y, \quad tp_1 = -p_2 t, \quad xp_2 = -\xi p_2 x, \quad yp_2 = p_2 y, \quad tp_2 = p_1 t,$$
$$xq_1 = \xi q_1 x, \quad yq_1 = q_1 y, \quad tq_1 = -q_2 t, \quad xq_2 = -\xi q_2 x, \quad yq_2 = q_2 y, \quad tq_2 = q_1 t, \tag{6.105}$$
$$p_1^2 = p_2^2 = 0, \quad p_1 p_2 + p_2 p_1 = \lambda(1-y), \tag{6.106}$$
$$q_1^2 = q_2^2 = 0, \quad q_1 q_2 + q_2 q_1 = \mu(1-y), \tag{6.107}$$
$$p_1 q_1 + q_1 p_1 + p_2 q_2 + q_2 p_2 = \alpha(1-y), \tag{6.108}$$
$$p_1 q_2 + q_1 p_2 + p_2 q_1 + q_2 p_1 = 0. \tag{6.109}$$

它是一个霍普夫代数，其余代数结构由 *(3.2)* 和

$$\Delta(p_1) = p_1 \otimes 1 + x^2 \otimes p_1,$$
$$\Delta(p_2) = p_2 \otimes 1 + x^2 y \otimes p_2,$$
$$\Delta(q_1) = q_1 \otimes 1 + x^2 y \otimes q_1,$$
$$\Delta(q_2) = q_2 \otimes 1 + x^2 \otimes q_2.$$

PROPOSITION 6.27. (1)假设 A 是一个有限维霍普夫代数，其余根为 H，且无穷小编织同构于Ω_i，其中 $i \in \{13, 14, 15、16、17、19\}$，则 $A \cong \mathfrak{U}_i(I)$。

(2) 对于 $i \in \{13, 14, 15, 16, 17, 19\}$, $\mathfrak{U}_i(I) \cong \mathfrak{U}_i(I')$，当且仅当存在非零参数 a_1, a_2 使得

$$a_1^2\lambda' = \lambda,\ a_2^2\mu' = \mu,\ a_2^2\alpha' = \alpha, \tag{6.110}$$
或满足
$$a_1^2\lambda' = \lambda,\ a_2^2\mu' = -\mu,\ a_2^2\alpha' = -\alpha, \tag{6.111}$$
或满足
$$a_1^2\lambda' = -\lambda,\ a_2^2\mu' = \mu,\ a_2^2\alpha' = \alpha, \tag{6.112}$$
或满足
$$a_1^2\lambda' = -\lambda,\ a_2^2\mu' = -\mu,\ a_2^2\alpha' = -\alpha, \tag{6.113}$$
或满足
$$a_1^2\lambda' = \lambda,\ a_2^2\mu' = \mu,\ a_2^2\alpha' = -\alpha, \tag{6.114}$$
或满足
$$a_1^2\lambda' = -\lambda,\ a_2^2\mu' = \mu,\ a_2^2\alpha' = -\alpha, \tag{6.115}$$
或满足
$$a_1^2\lambda' = -\lambda,\ a_2^2\mu' = -\mu,\ a_2^2\alpha' = \alpha, \tag{6.116}$$
或满足
$$a_1^2\lambda' = \lambda,\ a_2^2\mu' = -\mu,\ a_2^2\alpha' = \alpha. \tag{6.117}$$

PROOF. 对于（1），证明与前一个命题6.20的证明类似。

对于 (2)，假设 Φ： $\mathfrak{U}_{13}(I) \to \mathfrak{U}_i(I')$ 是霍普夫代数同构，其中$I' = \{\lambda', \mu', \alpha'\}$，且 $\mathfrak{U}_i(I')$ 由 x、y、t、p_1'、p_2'、q_1'、q_2'生成。当 $\Phi|_H \in \{\tau_1, \tau_3\}$ 时，存在非零参数 a_1、a_2，使得

$$\Phi(p_1) = a_1 p_1',\ \Phi(p_2) = a_1 p_2',\ \Phi(q_1) = a_2 q_1',\ \Phi(q_2) = a_2 q_2', \tag{6.118}$$

因此关系 (6.110) 成立；当 $\Phi|_H \in \{\tau_{13}, \tau_{14}\}$ 时，

$$\Phi(p_1) = a_1 p_1^{'},\ \Phi(p_2) = -a_1 p_2^{'},\ \Phi(q_1) = a_2 q_1^{'},\quad \Phi(q_2) = a_2 q_2^{'}, \tag{6.119}$$

于是关系式 (6.110) 成立。

对于其他情形，证明完全类似。 □

定理 B 的证明：设 N 是 **定理 A** 中 (1)、(7)、(8)、(9)、(10) 所列的 Yetter-Drinfeld 模之一。设 A 是 H 上的有限维 Hopf 代数，其无穷小编织与 N 同构。由定理 6.1，$gr\, A \cong \mathcal{B}(N)\sharp H$。结合命题 6.12、6.14、6.20 和 6.27，即完成证明。□

致谢

Y.H. Wu 衷心感谢华东师范大学提供的资助，并感谢 Yinhuo Zhang 教授在她访问比利时哈瑟尔特大学期间给予的指导和宝贵意见。她感谢 Yiwei Zheng 博士对稿件提出的有益意见和建议，感谢 Rongchuan Xiong 博士分享相关参考文献，并感谢 Yuxing Shi 博士提供与 Nichols 代数相关的 GAP 计算。H.Y. Wang 感谢国家留学基金管理委员会（CSC. No. 202506140042）资助其访问巴黎西岱大学。N.H. Hu 得到国家自然科学基金（项目编号 12171155）的资助，并部分得到上海市科学技术委员会（项目编号 22DZ2229014）的资助。

参考文献

[1] N. Andruskiewitsch 和 H.-J. Schneider，量子线性空间的提升与阶为 p^3 的尖点 Hopf 代数，J. Algebra 209 (2) (1998), 658—691.[2] N. Andruskiewitsch 和 H.-J. Schneider，有限量子群与 *Cartan* 矩阵，Adv. Math. 154 (1) (2000), 1—45.[3] N. Andruskiewitsch 和 H.-J. Schneider，尖点 *Hopf* 代数，载于《Hopf 代数新方向》，Math. Sci. Res. Inst. Publ., 43，Cambridge Univ. Press, 剑桥，2002，1—68.[4] N. Andruskiewitsch 和 S. Zhang，关于与 S_n 中某些共轭类相关的尖点 Hopf 代数，Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), 2723-2731.[5] N. Andruskiewitsch、F. Fantino、M. Gra˜na 和 L. Vendramin，某些散在单群上的尖点 *Hopf* 代数，C. R. Math. Acad. Sci. Paris 348 (2010), 605—608.[6] N. Andruskiewitsch、I. Heckenberger 和 H.-J. Schneider，半单 *Yetter-Drinfeld* 模的 *Nichols* 代数，Amer. J. Math. 132 (6) (2010), 1493—1547.[7] N. Andruskiewitsch 和 H.-J. Schneider关于有限维尖点 *Hopf* 代数的分类，Ann. of Math. 171 (1) (2010), 375—417.[8] N. Andruskiewitsch 和 C. Vay，三阶对称群的对偶群代数上的有限维 *Hopf* 代数，Comm. Algebra 39 (12) (2011), 4507—4517.[9] N. Andruskiewitsch、F. Fantino、M. Gra˜na 和 L. Vendramin，带有交错群的有限维尖点 *Hopf* 代数都是平凡的，Ann. Mat. Pura Appl. (4) 190 (2) (2011), 225—245.[10] N. Andruskiewitsch、I. Angiono、A. G. Iglesias、A. Masuoka 和 C. Vay，通过余循环变形进行提升，J. Pure Appl. Algebra 218 (4) (2014), 684—703.[11] N. Andruskiewitsch、G. Carnovale 和 G. A. Garc´ıa，有限李型单群上的有限维尖点 *Hopf* 代数 *I. PSL* 中的非半单类$_n(q)$，J. Algebra 442 (2015), 36—65.[12] N. Andruskiewitsch、G. Carnovale 和 G. A. Garc´ıa，有限李型单群上的有限维尖点 *Hopf* 代数 *II*：辛群中的幺幂类，Commun. Conte mp. Math. 18 (4) (2016), 1550053, 35.[13] N. Andruskiewitsch、I. Angiono 和 A. G. Iglesias，对角型 *Nichols* 代数的提升 *I. Cartan* 型 A，Int. Math. Res. Not. (9) (2017), 2793—2884.[14] N. Andruskiewitsch、C. Galindo 和 M. M¨uller，具有对偶 *Chevalley* 性质的有限维 *Hopf* 代数实例，Publ. Mat., 61 (2) (2017): 445—474.[15] N. Andruskiewitsch 和 J. M. J. Giraldi，作为量子平面的 *Nichols* 代数，Linear and Multilinear Algebra 66 (5) (2018), 961—991。

[16] N. Andruskiewitsch、I. Heckenberger 和 L. Vendramin，奇数维尖点 Hopf 代数与可解群上的 Nichols 代数，arXiv.2411.02304.[17] G. M. Bergman，环论中的菱形引理，Adv. in Math. 29 (2) (1978), 178—218.[18] C. Cˇalinescu、S. Dˇascˇalescu、A. Masuoka 和 C. Menini，非余交换余半单 Hopf 代数上的量子线，J. Algebra 273 (2) (2004), 53—779.[19] F. Fantino 和 G. A. Garc´ıa，关于二面体群上的尖点 Hopf 代数，Pacific J. Math. 252 (1) (2011), 69—91.[20] X. Fang，关于 Nichols 代数的定义理想与微分代数，J. Algebra 346 (2011), 299—331.[21] G. A. Garc´ıa 和 J. M. J. Giraldi，关于量子子群上的 Hopf 代数，J. Pure Appl. Algebra 223 (2) (2019), 738—768.[22] G. A. Garc´ıa 和 A. G. Iglesias，关于 $\mathbb{S}_4$ 上的有限维尖点 Hopf 代数，Israel J. Math. 183 (2011), 417—444.[23] M. Gra˜na，Nichols 代数的自由性定理，J. Algebra 231 (1) (2000), 235—257.[24] I. Heckenberger，对角型 Nichols 代数的 Weyl广群，Invent. Math. 164 (2006), 175—188.[25] I. Heckenberger，算术根系的分类，Adv. Math. 220 (1) (2009), 59—124.[26] I. Heckenberger 和 H.-J. Schneider，有限根系秩二群上的 Nichols 代数 I，J. Algebra, 324 (11) (2010), 3090—3114.[27] I. Heckenberger、E. Meir 和 L. Vendramin，素数维单的 Yetter-Drinfeld 模（群上）的有限维 Nichols 代数，Adv. Math. 444 (2024), 109637, 30.[28] N. H. Hu 和 R. C. Xiong，若干不具有 Chevalley 性质的 72 维 Hopf 代数，arXiv:1612.0498.[29] N. H. Hu 和 R. C. Xiong，关于不具有对偶 Chevalley 性质的 Hopf 代数族，Rev. Un. Mat. Argentina 59 (2) (2018), 443—469.[30] A. G. Iglesias 和 C. Vay，仿射架上的有限维尖点或余点 Hopf 代数，J. Algebra 397 (2014), 379—406.[31] I. Kaplansky，双代数，数学讲义，芝加哥大学数学系，伊利诺伊州芝加哥，1975 年.[32] Y. Kashina，16 维半单 Hopf 代数的分类，J. Algebra 232 (2) (2000), 617—663.[33] C. Kassel，《量子群》，Graduate Texts in Mathematics，第 155 卷，Springer-Verlag，纽约/柏林，1995.[34] S. Montgomery，《Hopf 代数及其在环上的作用》，CMBS Reg. Conf. Ser. in Math. 82，Amer. Math. Soc., 1993.[35] D. E. Radford，带投影的霍普夫代数的结构，J. Algebra 92 (2) (1985), 322—347.[36] D. E. Radford，《Hopf 代数、纽结与万物》，Knots and Everything 49，World Scientific，2012.[37] Y. X. Shi，Kac-Paljutkin 代数 H_8 上的有限维 Hopf 代数，Rev. Un. Mat. Argentina 60 (1) (2019), 265—298.[38] R. C. Xiong，关于唯一的 12 维且不具有对偶 Chevalley 性质的 Hopf 代数上的 Hopf 代数，Comm. Algebra 47 (2019), 1516—1540.[39] R. C. Xiong，若干有限维 Hopf 代数分类结果，华东师范大学博士学位论文（347 页），2019 年 5 月.[40] R. C. Xiong、N. H. Hu，对偶 Radford 代数上的有限维 Hopf 代数分类，Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 28 (5) (2021), 633—688.[41] R. C. Xiong，关于 24 维基本 Hopf 代数上的 Hopf 代数，即将在 Rev. Un. Mat. Argentina 65 (2) (2023), 469—493 发表.[42] R. C. Xiong，特征为 p 时维数为 p^2q 的尖点 Hopf 代数，J. Algebra 631 (2023), 355—400.[43] R. C. Xiong，最小的非尖点基本 Hopf 代数上的有限维 Hopf 代数，Front. Math. 19 (5) (2024), 865—890.[44] M. Sweedler，《Hopf 代数》，Benjamin，纽约，1969.[45] Y. W. Zheng、Y. Gao 和 N. H. Hu，Kashina 的 Hopf 代数 $H_{b:1}$ 上的有限维 Hopf 代数，J. Algebra 567 (1) (2021), 613—659.[46] Y. W. Zheng、Y. Gao 和 N. H. Hu，Kashina 的 Hopf 代数 $H_{d:-1}$,1 上的有限维 Hopf 代数，J. Pure Appl. Algebra 225 (4) (2021), 106527.[47] Y. W. Zheng、Y. Gao、N. H. Hu 和 Y. X. Shi，关于 Kashina 的 Hopf 代数 $H_{b:1*}$ 上有限维 Hopf 代数的若干分类，Commu. Algebra 51 (2023), 350—371。

[48] Y. W. Zheng，X. L. Yu，*Kashina* 的 $H_{a:y}$ 上有限维霍普夫代数的一些分类，《代数与应用杂志》24 (11) (2025), 2550257。

School of Mathematical Sciences, MOE Key Laboratory of Mathematics and Engineering Applications & Shanghai Key Laboratory of PMMP, East China Normal University, Shanghai 200241, China

Department of Mathematics and Statistics, University of Hasselt, Diepenbeek 3590,Belgium

电子邮箱地址: 52265500002@stu.ecnu.edu.cn

School of Mathematical Sciences, MOE Key Laboratory of Mathematics and Engineering Applications & Shanghai Key Laboratory of PMMP, East China Normal University, Shanghai 200241, China

UFR Mathématique de Université Paris Cité, CNRS, IMJ-PRG, Bâtiment Sophie Germain – 8 place Aurélie Nemours, 75013 Paris, France

电子邮箱：52265500001@stu.ecnu.edu.cn

School of Mathematical Sciences, MOE Key Laboratory of Mathematics and Engineering Applications & Shanghai Key Laboratory of PMMP, East China Normal University, Shanghai 200241, China

电子邮箱：nhhu@math.ecnu.edu.cn