arXiv:2602.01281v1 [math.CO] 1 Feb 2026

极大不可细分分拆的几何刻画：通过 Keith-Nath 变换和杨图

RICCARDO ARAGONA LORENZOCAMPIONI 和 ROBERTOCIVINO

摘要。我们通过不可细化分拆与数值集及杨图之间的对应关系，研究其组合结构。基于 Keith 和 Nath 提出的双射，我们应用一条一般性的几何判据，将分拆的不可细化性直接关联到其相应杨图的钩长。该判据为刻画任意不可细化分拆提供了一种结构性方法。

利用这一一般框架，我们重新审视极大不可细分分拆与互异部件分拆之间的对应关系；此前，这些结果是通过枚举方法建立的。我们针对杨图刚性的对称结构，为这些双射提供了替代性的纯组合证明。在三角形权情形下，我们证明相应的图是准对称的，即除一列额外列外均对称。我们将这一分析扩展到非三角形情形，并证明根据最大部分的不同，这些图要么呈现相同的准对称结构，要么完全自共轭。

1. 引言

由互异部分构成的整数分割 λ 若满足以下条件，则称为不可细化：没有任何部分 $a \in \lambda$ 能被 e repl替换为一组互异正整数 $b_1, \ldots, b_m$，且满足 $m \geq 2$，使得

(1) 这些 b_i 均不属于 λ；(2)

$$a = b_1 + \cdots + b_m,$$

并且所得多重集

$$(\lambda \setminus \{a\}) \cup \{b_1, \ldots, b_m\}$$

仍是由互异部分构成的同一个整数的分拆。等价地，若 λ 中的每个部分 $a \in \lambda$ 都无法分解为若干互异正整数之和，且这些正整数均不在 λ 中，则称 λ 不可细化；否则称其为可细化。

部分之间的这种特殊限制自然会对这类分拆所能包含的最大部分施加上界。此前的研究已确定这一最大上界 [ACCL22, ACC26], 并区分了分拆的权是三角数还是非三角数。

DISIM，拉奎拉大学，维托约街，67100 科皮托（AQ），意大利电子邮箱地址： riccardo.aragona@univaq.it, lorenzo.campioni1@univaq.it, roberto.civino@univaq.it。2010 数学主题分类。11P81，05A17，05A19。关键词和短语。不可细化分拆、互异部件分拆、数值半群、杨图、Keith和Nath变换、钩长。R. Aragona 和 R. Civino 是 INdAM-GNSAGA（意大利）的成员。R. Civino 获得拉奎拉大学 ExEMERGE卓越中心的资助。作者衷心感谢意大利大学与研究部通过 PRIN 2022RFAZCJ“密码分析中的代数方法”提供的经费支持，其中 L. Campioni 获得全额资助。

极大不可细分分拆，即达到最大部分上界的分拆，已通过枚举方法得到完整分类。研究还进一步表明，这些极大分拆与互异部件分拆的某些子集之间存在双射对应。具体而言，对于三角权重 T_n 且 n 为奇数的情形，已证明这类分拆的数量等于将 $\frac{n+1}{2}$ 分拆为互异部分的分拆数量；而当 n 为偶数时，这类分拆只有一个。对于权为 $T_n - d$ 的非三角情形，也存在类似的对应关系：极大不可细分分拆会根据 $n-d$ 的奇偶性及最大部分的取值，映射到互异部件分拆的特定子集。

尽管其底层的组合机制很简单，却被冗长而复杂的计算所掩盖。然而，不可细化性这一概念揭示了其内部严谨的结构，而几何解释能更自然地呈现这种结构。

本文借助 Keith 和 Nath 提出的变换 [KN11]（KN 变换），从数值集及其相应杨图的角度来诠释不可细化分拆。这一视角使我们能够直观地编码分拆的组合性质，并为根据相应数值集和杨图的结构研究不可细化性提供了框架。这种方法基于一项近期提出的不可细化性一般判据，该判据可直接从数值集经 KN 变换得到的相应杨图的几何性质中推导出来 [Cam26]。这一判据提供了一种直观且结构化的方法，可以在不依赖具体部分枚举的情况下判断一个分拆是否不可细化。

我们的方法带来了两项主要成果。首先，我们将这一框架应用于三角形权为 T_n的极大不可细分分拆。对于 n为奇数的情形，我们证明，这些分拆所对应的杨图呈现出显著的“准对称性”。具体而言，它们具有对称阶梯结构，唯一的扰动是在主对角线之后紧邻处出现一列“额外列”。我们证明，这一额外列中的钩长完整编码了分拆的组合数据，因此可以构造一个到由 k 个互异部分组成的分拆的双射。

其次，我们将这一几何分析拓展到权为 $T_n - d$的非三角情形。我们发现，这些分拆的几何结构由其最大部分 λ_t决定。当 $n-d$ 为偶数时（对应于最大部分为 $\lambda_t = 2n-5$的分拆），我们证明相应的杨图是自共轭的。当 $n-d$ 为奇数时（$\lambda_t = 2n-4$），这些图呈现出与三角形情形相同的准对称模式，即具有对称阶梯结构和一列额外列。基于这些观察，我们为这些分拆与各自对应对象（由互异奇数部分组成的分拆或标准互异部分分拆）之间的对应关系给出了构造性证明。

通过应用这一方法，我们能够重新推导出此前关于极大不可细分拆分的结果，这些结果最初是通过枚举方法 [ACCL22，ACC26]获得的。除了重现这些已知结论之外，我们的框架还凸显了不可细分拆分背后的组合机制，并阐明了它们与数值集和杨图之间的深层联系。从这个意义上说，由杨图导出的判据不仅可用作验证工具，还提供了一个统一视角，将分拆的结构性质与其枚举行为联系起来。

1.1. **相关工作**。 不可细化分拆最初是在群论背景下被引入的，它们在其中以一种自然且出人意料地刚性的对应关系出现，对应于子群正规化子链的生成元 [ACGS22]。这一最初的出现将组合

不可细化性的概念与有限群的结构性质联系起来，并推动了对其组合与枚举行为的后续研究。

不可细化分拆的计算分析见 [ACCL23], ，作者在其中提出了一种高效且通用的算法，能够验证并生成所有固定权重的不可细化分拆，为实验和基于数据的猜想提供了实用工具。随后，极大不可细化分拆（即最大部分达到上界的分拆）的完整分类得以建立并完成 [ACCL22，ACC26]。这些研究采用完全枚举的视角，确立结构约束，给出精确计数，并展示了与适当的互异部件分拆子集之间的双射。

与这些进展并行，另一条不同但密切相关的研究路线关注整数分拆与数值半群之间的转换。Keith 和 Nath 的研究 [KN11] 提出了本文所称的 KN 变换，该变换将一个分拆与一个数值集关联起来，并通过其钩集编码组合信息。这一变换是我们研究的核心。关于图的钩长集合与相应数值半群的间隙之间双射关系的基本联系，由 Constantin 等人进行了正式探讨 [CHEK15]。

分拆、数值集与杨图之间的相互联系在 [TKG19], 中得到了进一步探讨，作者为 Arf 分拆提供了几何刻画和基于杨表的刻画。Constantin、Houston-Edwards 和 Kaplan [CHEK15]利用这种几何对应关系，推导出关于结构性分拆类（例如核分拆）的组合学结果。在 [SY21], 中，作者通过杨图研究对称和伪对称数值半群；在 [BNST23], 中，作者探讨半群性质如何影响关联分拆。Yeşil 等人较新的研究 [Yeş25], 则考察了近乎对称数值半群的精细杨图分解。

另一个独立但密切相关的研究方向关注最小排除数（mex）；这一统计量在不可细化分拆的结构中发挥着根本作用。在不可细化分拆中，mex 决定哪些细化是不允许的，从而施加强有力的结构约束 [ACCL23]。mex 在组合学中的重要性已在多种语境下得到强调：Andrews 和 Newman [AN20] 以及 Ballantine 和 Merca [BM20] 研究了它在分拆中的分布，而 mex 与互异部件分拆之间的联系也成为近期研究的主题 [KBEM22]。Fraenkel 和 Peled [FP15]综述了基于 mex 的不变量在组合学和博弈论中的更广泛意义。最后，通过几何方法研究分拆统计量，近年来也与关于分拆 crank 的经典研究相交汇 [HSS22]。

枚举不可细化分拆的数列的初始项被记录为 A179009，收录于在线整数数列百科全书（在线整数数列百科全书） [OEI]。

1.2. **论文结构**。 本文接下来的安排如下：在第2节中，我们回顾分拆与数值集的必要背景。我们正式定义不可细化分拆与极大不可细分分拆，并回顾最大部分的已知上界。然后我们介绍 Keith-Nath 变换，并回顾几何判据（命题 2.9），该判据借助相应的杨图的钩长刻画不可细化性。

第 3 节专门讨论三角形权的极大不可细分拆分 T_n。我们分析其杨图的结构性质，重点说明准对称模式和额外列的作用。这些几何论证带来了一个组合证明（定理 3.25），证明这些分拆与由 $\binom{n+1}{2}$ 组成的互异部件分拆之间存在双射，该双射通过双重嵌入构造实现。

第4节和第 5节将我们的分析拓展到非三角情形。我们重点研究最大部分等于 $2n-5$ 和 $2n-4$的极大不可细分拆分，分别证明其对应的杨图呈现自共轭对称性或准对称结构。基于这些几何性质，我们得到了它们与适当的互异部件分拆之间的双射对应（定理 4.14 和定理 5.3）。

2. 预备知识

我们首先回顾与不可细化分拆、数值集合及半群相关的基本概念，以及本文采用的特定记号。

2.1. 不可细化分拆及相关事实。 正整数序列 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_t)$ 称为一个将 N分拆为互异部分，如果它满足

$$\sum_{i=1}^{t}\lambda_i=N,\quad \lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_t,\quad t\geq 2.$$

在这种情况下，我们记作 $\lambda\vdash N$，并用 $|\lambda|=t$ 表示该分拆的长度。令 $\mathbb{D}_N$ 表示将 N 分拆为互异部分的所有分拆所组成的集合。

此外，我们将 $\mathbb{D}_{oN}$ 和 $\mathbb{D}_N^{e}$ 定义为 $\mathbb{D}_N$ 的子集，分别表示所有部分均为奇数或偶数的分拆。

对于分拆 $\lambda=(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ldots,\ \lambda_t)\in\mathbb{D}_N$，我们引入缺失部分的集合

$$\mathcal{M}_\lambda\overset{\text{def}}{=}\{1,2,\ldots,\lambda_t\}\setminus\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_t\}.$$

这些缺失部分可以按递增顺序排列为 $\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_m$，其中 $m\geq 0$。

容易看出，若一个分拆是可细分的，则其最小的可细分部分允许形如 $a+b$ [ACCL23，命题 4] 的细分。这一观察引出如下定义。

定义 2.1. 设 $\lambda=(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ldots,\ \lambda_t)$ 是将 N 分成互异部分的分拆，并设 $\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_m$ 表示其缺失部分。若存在下标 $1\leq\ell\leq t$ 与 $1\leq i<j\leq m$ 使得，则称分拆 λ 为可细分

$$\mu_i+\mu_j=\lambda_\ell,$$

a否则它是不可细化的。我们将 N 的不可细化分拆的集合记为$\mathcal{U}_N$.

若不可细化分拆 $\lambda=(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ldots,\ \lambda_t)\in\mathcal{U}_N$满足以下条件，则称其为极大

$$\lambda_t=\max_{(\lambda_1',\lambda_2',\ldots,\lambda_t')\in\mathcal{U}_N}\lambda_t'.$$

~所有 N 的极大不可细分拆的集合记为$\mathcal{U}_N$。

研究极大不可细分拆的一个基本方面是最大部分 λ_t 的行为。对于每个整数 N， λ_t 的值并非任意，而是受到不可细化性所施加的组合结构约束。

我们回顾一下，若 $T_n=\binom{n+1}{2}$ 是第 n 个三角数，则每个非三角数都可以唯一地写成（对于 $1\leq d\leq n-1$）$T_{n,\ d}=T_n-d$.

在三角形情形下 $N=T_n$ 对于 $n\geq 6$，极大不可细分分拆必然满足 $\lambda_t=2n-4$，达到 Aragona 等人所证明的缺失部分数量上界 [ACCL22]。对于非三角数，情况更为微妙，但遵循类似的原则。在先前的工作中 [ACC26], ，研究表明，对于一个极大不可细分

Case	条件	λ_t的上界
三角形	$N = T_n$	$\lambda_t = 2n-4$
$3 < d \le n-1$	$n-d$ 奇数	$\lambda_t \le 2n-4$
	$n-d$ 偶数	$\lambda_t \le 2n-5$
$d=3$	—	$\lambda_t \le 2n-4$
$d=2$	—	$\lambda_t \le 2n-3$
$d=1$	—	$\lambda_t \le 2n-2$

表1. $T_{n,d}$的极大不可细分拆中最大部分 λ_t 的上界。

~分拆 $\lambda \in \mathcal{U}_{T_n,\ d}$，除 n 的最初几个零星值外， λ_t 最大部分满足一个取决于 $n-d$ 奇偶性的紧上界。更准确地说，如果 $3 < d \le n-1$，那么

$$\begin{cases} \lambda_t \le 2n-5, & \text{if } n-d \text{ is even}, \\ \lambda_t \le 2n-4, & \text{if } n-d \text{ is odd}. \end{cases}$$

极值情形 $d \in \{1、2、3\}$ 分别给出

$$\lambda_t \le 2n-2, \qquad \lambda_t \le 2n-3, \qquad \lambda_t \le 2n-4.$$

所有这些极大值汇总于表1，其中列出了每个可容许值对应的尖锐上界： n 和 d。

此外，已知不可细化分拆所含的缺失部分 [ACCL22]不能过多。更确切地说，若 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ 是最大部分为 λ_t的不可细化分拆，且 $\mu_1 < \cdots < \mu_m$ 是其缺失部分，那么缺失部分的数量 m 有如下上界：

$$m \le \left\lfloor \frac{\lambda_t}{2} \right\rfloor . \tag{1}$$

该上界是尖锐的，几乎所有极大不可细分拆都能达到；这一事实可直接由显式分类 [ACCL22， ACC26]推出。因此，自然有必要单独考察达到方程（1）上界的极大不可细分拆这一类。

定义 2.2. 对于固定整数 N，我们定义

$$\overline{\mathcal{U}}_N \overset{\text{def}}{=} \left\{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t) \in \widetilde{\mathcal{U}}_N \mid \#\mathcal{M}_\lambda = \left\lfloor \frac{\lambda_t}{2} \right\rfloor \right\}.$$

注 1. 关于$\mathcal{U}$中极大不可细化分拆的性质，可以得到两个有用的观察。首先，$\mathcal{U}$ 中的任何分拆都不可能包含值 $\frac{\lambda_t}{2}$，这一点已由 [ACCL22,ACC26]. Second, for any $x \neq \frac{\lambda_t}{2}$, we have

$$x \in \lambda \quad \text{if and only if} \quad \lambda_t - x \notin \lambda.$$

这一对称性是后续分析的核心，并将在文中反复加以利用。

该分类对$\mathcal{U}_N$给出了明确描述：它由~$\mathcal{U}_N$ 中的所有分拆构成，但不包括若干特殊分拆，详见表 2。需要强调的是，根据三角形情形的分类 [ACCL22], ，唯一的非平凡情形是 T_n 为 n奇数时。相反，当 n 为偶数时，存在

一个极大不可细分分拆（即 $\widetilde{\pi}_n$ 表 2中所列的分拆），因此不再考察这种情形。对于 d（即 $1 \le d \le 2$）方面的极值情形，情况也相同；如表 1所示，这些情形也不再进一步讨论。

Case	条件	例外分拆
三角形	$N = T_n$	$\widetilde{\pi}_n \overset{\text{def}}{=} (1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n-3,\ n+1,\ 2n-4)$
非三角形	$N = T_{n,d}$, $n-d$ 奇数, $d=3$	$\widetilde{\sigma}_n \overset{\text{def}}{=} (1,2,\ldots,n-2,2n-4)$
	$N = T_{n,d}$, $n-d$ 偶数, $d=4$	$\widetilde{\tau}_n \overset{\text{def}}{=} (1,2,\ldots,n-2,2n-5)$

表 2. 显式分类中从$\mathcal{U}_N$ 中排除的例外分拆。

2.2. **数值集与杨图**。 现在我们引入数值的概念
值半
群，它们将在本研究不可细化分拆的过程中发挥关键作用。

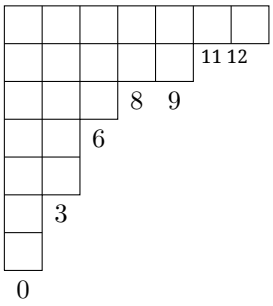
定义 2.3. 一个数值集 S 是非负整数 $\mathbb{N}_0$的一个子集，包含 0，且其补集 $S^c = \mathbb{N}_0 \setminus S$ 是有限的。若一个数值集 S 对加法封闭，则称其为数值半群 。我们用 NSg 和 NS 分别表示所有数值半群和数值集组成的集合。

S^c 中的元素称为 S的间隙 ，其个数记作 $G(S)$，称为 S的亏格 。 S^c 中的最大元素称为弗罗贝尼乌斯数 $F(S)$。最后， S 的重数$M(S)$是 S中最小的正元素。

注记 2. 设 $S = \{s_0 = 0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \to\}$ 是一个数值半群，其间隙集合为$S^c = \{s_1^c, s_2^c, \ldots, s_t^c\}$，其中符号“$\to$”表示所有大于 s_n 的整数也属于该集合。根据定义，数值半群对加法封闭，这意味着 S 中任意两个元素之和都不可能属于 S^c。等价地， S^c中的每个间隙都不能表示为 S中若干元素之和。这一观察表明，数值半群的间隙自然构成一个不可加细分拆 λ。更具体地说，半群与关联分拆之间的对应关系如下：

$$
\begin{array}{lcl}
S^c = \{s_1^c, \ldots, s_t^c\} & \to & \lambda_S = \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t) \\
S = \{0, s_1, \ldots, s_t + 1, \to\} & \to & \{0\} \cup \mathcal{M}_\lambda \cup \{\lambda_t + 1, \to\} \\
G(S) & \to & |\lambda| \\
F(S) & \to & \lambda_t \\
M(S) & \to & \mu_1
\end{array}
$$

这样，每个数值半群都可以看作编码了一个不可加细分拆，其中它的间隙、亏格、弗罗贝尼乌斯数和重数分别对应于 λ的部分、长度、最大部分和最小排除元素。因此， NSg $\subset \mathcal{U}$，即每个数值半群都可通过其间隙集合自然地产生一个不可加细分拆。然而，反过来并不成立：并非每个不可加细分拆都对应一个数值半群。例如，考虑不可加细分拆 $\lambda = (1, 2, 5, 6, 8)$。其对应的集合 $S_\lambda = \{0, 3, 4, 7, 9, \to\}$ 不是数值半群，因为诸如 $6 = 3 + 3$和 $8 = 4 + 4$ 这样的和不在 S_λ中。这表明，分拆的不可加细性并不能保证对应集合具有加法封闭性。



F图 1. 示例中数值集对应的杨图2.4。

Keith 和 Nath 证明了 [KN11] 每个数值集都唯一确定一个整数分拆。实际上，给定一个数值集 $S = \{0, s_1, \ldots, s_n, \rightarrow\}$ 可以通过从原点出发，在 $\mathbb{Z}^2$ 中按如下方式绘制一条连续的多边形路径，构造一个杨图 Y_S （它又会导出一个分拆）：对于每个整数 $0 \le k \le F(S)$

▷ 若 $k \in S$,▷ ，则向东走一步；
若 $k \notin S$，则向北走一步。

注意，杨图 Y_S 有 $G(S)$ 行和 n 列，其中 $S = \{0, s_1, \ldots, s_n, \rightarrow\}$。我们将上述构造称为 KN 变换，它将一个数值集映射为其相应的杨图。此构造定义了一种一一对应关系，记为

$$\begin{aligned} \mathrm{KN} : \mathrm{NS} &\to \{Y : Y \text{ is a Young diagram}\} \\ S &\mapsto Y_S. \end{aligned}$$

若 S 是一个数值集，通过 KN 变换得到的杨图 Y_S 按照注 2中的方法进行处理后，会导出分拆 $\lambda_S = S^c$。当 S 是一个数值半群时，其关联分拆 λ_S 是不可细化的。

Ex例 2.4. 令 $S = \{0, 3, 6, 8, 9, 11, 12, 14, \rightarrow\}$ 为一个数值集。其关联杨 g
diag图 Y_S 如图 1所示。

在继续讨论之前，我们先介绍分析杨图组合性质所需的结构组成部分。所有图均按从左到右、从上到下的顺序读取。

定义 2.5. 我们用 C_i 表示杨图的第 i 列，并用 R_j 表示第 j 行。给定图中的单元格 $c_{i,j}$，$c_{i,j}$ 的臂 是第 i 行中位于其右侧的格子数 $a(c_{i,j})$，而 $c_{i,j}$ 的腿 是数 $l(c_{i,j})$，即第 j 列中位于其下方的格子数。单元格 $c_{i,j}$ 的钩 $h_{i,j}$ 定义为其臂与腿之和再加一，所有钩的集合称为钩集。

下面的引理给出杨图中钩的一个一般性质。

引理 2.6. 设 Y 为一个杨图。若 $i, j \neq 1$，则

$$h_{i,j} = h_{1,j} + h_{i,1} - h_{1,1}. \tag{2}$$

证明。 我们首先注意到，单元格$c_{1,j}$ 的腿为$\#C_j - 1$，而其臂为 $n-1-j$。因此$h_{1,j} = \#C_j + n - 1 - j$. 类似地，对于单元格$c_{i,1}$，我们有$h_{i,1} = \#R_i + n - 2 - i$. 结合

上述事实，我们得到

$$h_{1,j} + h_{i,1} - h_{1,1} = \#C_j + n - 1 - j + \#R_i + n - 2 - i - (2n - 4).$$

因此，我们有

$$h_{1,j} + h_{i,1} - h_{1,1} = \#R_i - j + \#C_j - i + 1.$$

现在，$\#R_i - j$ 恰好对应于单元格$c_{i,\ j}$的臂，而$\#C_j - i$ 对应于其腿。由此可得

$$h_{1,j} + h_{i,1} - h_{1,1} = a(c_{i,j}) + l(c_{i,j}) + 1,$$

这确立了方程（2）中的结论。 □

在 [TKG19], 中，作者建立了若干将杨图的钩集与相应数值半群联系起来的性质；完整论述请参阅他们的结果。下面，我们陈述其中一项已知结果，它随后将作为模板，用于给出适用于不可细化分拆集合$\mathcal{U}$的版本。

命题 2.7 （[TKG19，引理 4]）。设 $S = \{0,\ s_1,\ ...,\ s_n,\ \rightarrow\}$ 为一个数值集，其对应的杨图为 Y_S。则：

(1) 第一列第 i 行单元格的钩长对应于 S 中第 i 大的间隙；*(2)* 对于每个 $0 \leq i \leq n-1$，Y_S 的第 i 列顶端格子的钩长为 $F(S) - s_{i-1}$；*(3)* 当且仅当所有钩长都出现在第一列中时，S 是数值半群。

Ex例 2.8。设 S 为例 2.4中的数值集。钩长在杨 e
You图中如下所示。

13	10	7	5	4	2	1
10	7	4	2	1		
7	4	1				
5	2					
4	1					
2						
1						

根据命题2.7的判据，集合 S 是数值半群，因为所有作为钩长出现的整数都位于 Y_S的第一列中。此外，第一列展示了关联分拆 λ_S，在本例中，它可明确写为

$$\lambda_S = (1, 2, 4, 5, 7, 10, 13).$$

注意，命题 2.7的第 （3） 条给出了数值集中的数值半群的刻画。现在，我们将这一结果推广到不可细化分拆的集合 $\mathcal{U}$。更确切地说，我们从通过 KN 变换得到的相应数值集的杨图出发，推导出一个判据，以直接判断一个分拆是否不可细化，从而加强第 （3）条中的条件，使其能够刻画不可细化性。证明取自 [Cam26]，但为求完整，我们仍在此给出证明。

命题 2.9. 设 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ 为对应于杨表 Y_{S_λ} 的不可加细分拆，其中 S_λ 是与 λ 相关联的数值集。则

(1) 第一列第 i 行单元格的钩长为 λ_{t-i+1}；*(2)* 对每个 $2 \le i \le \#M_\lambda$， Y_{S_λ} 的第 i 列顶端格子的钩长等于 $\lambda_t - \mu_{i-1}$；*(3)* λ 为不可加细分拆，当且仅当 Y_{S_λ}的格子的每一钩长*(a)* 包含在第一列 Y_{S_λ} 中；或 *(b)* 第一列同一行单元格的钩长为其两倍。

证明。 条目（1）和（2）的证明与命题 2.7 在 [TKG19], 中给出的论证完全相同，并且对所有互异部件分拆普遍成立。

现在设 λ是一个不可细化分拆。若 λ 对应于一个数值半群 S_λ，则根据命题 2.7(3)，所有格子都包含第一列中出现的数，因此命题（3a）得证。若 $S_\lambda \notin$NSg，则存在 $\mu_j \in$M$_\lambda$ 使得 $k\mu_j \in \lambda$, 其中某个 $k > 1$。特别地， λ 的不可细化性迫使 $k = 2$。由于 $2\mu_j \in \lambda$，根据条目（1）存在一行，其第一个单元格标记为 $2\mu_j$，该行的所有其他格子均为 $2\mu_j - s_i$的形式，其中 $s_i \in S_\lambda$ 且 $s_i < \mu_j$, 因此特别存在一个标记为 $2\mu_j - \mu_j = \mu_j$的单元格。假设条件（3a）和条件（3b）均不成立。由于条件（3a）不成立，存在一个标记为 x 且未出现在第一列中的单元格；根据条目（1），这意味着 $x \notin \lambda$。设 z 为与 x同行的第一个单元格，于是对某个 $s_i \in S_\lambda$，有 $x = z - s_i$。否定条件（3b）可得 $z \neq 2x$ 和 $z = x + s_i$，这会导致矛盾，因为此时 λ 将是可细分分拆。

反之，若仅满足条件（3a），则 S_λ 是一个数值半群，从而 λ 是不可细化的。若条件（3a）或（3b）成立，则在第一列之外存在一个标记为 μ_j的单元格，其所在行以 $2\mu_j$开头。由第（1）项，我们于是有$2\mu_j \in \lambda$，它不能表示为 $\mu_j + \mu_j$，因此该分拆仍是不可细化的。□

例2.10. 考虑不可加细分拆 $\lambda =$(1，2，5，6，8)。若我们将相应杨图 Y_{S_λ} 的每个单元格以其钩长进行标记，则得到

8	5	4	1
6	3	2	
5	2	1	
2			
1			

在此，这些数字被着色，以强调与条件（3b）相关、见于命题2.9的元素。由图可见，所有要求均已满足，因此分拆 λ 是不可细化的。

利用通过 KN 变换从杨图导出的不可细分性的一般判据，我们现在恢复了给定权和最大部分的极大不可细分分拆，与将拆成互异部分的适当分拆之间的对应关系。在第 3节~中，我们证明，$\mathcal{U}$中权为三角形权 T_n 且满足 $n = 2k - 1$的不可细化分拆（其最大部分为 $\lambda_t = 2n - 4$）与将 k 拆成互异部分的分拆一一对应。在下一节以及后续各节中，我们将~系统地采用$\mathcal{U}$，而不是 $\mathcal{U}$。原因在于，被排除在外的分拆~（从 $\mathcal{U}$ 转到$\mathcal{U}$时排除，列于表 2）属于例外情形，不符合一般的

结构模式。不过，在进行最终计数论证时，我们仍将单独考虑这些例外情形。

3. 三角形权

本节旨在证明双射 $\mathcal{U}_{T_n} \leftrightarrow \mathbb{D}^{e}_{2k} \leftrightarrow \mathbb{D}_k$，其中 $n = 2k-1$ 和$k \geq 4$。我们通过构造双重嵌入来建立这一对应关系，具体内容将在接下来的两个小节中给出。

3.1. 证明 $\mathcal{U}_{T_n}, \to \mathbb{D}_k$。

如预期所示，我们聚焦于分拆 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t) \in \mathcal{U}_{T_n}$，它们是缺失部分数目达到最大可能值的极大不可细分分拆。在这种情况下，$\mathcal{U}_{T_n} = \mathcal{U}_{T_n} \setminus \{\widetilde{\pi}_n\}$。为证明我们的结论，对于给定的分拆 λ，我们考虑与之关联的数值集 S_λ，并应用 Keith-Nath 变换构造相应的杨图 Y_{S_λ}。

设 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t) \in \overline{\mathcal{U}}_{T_n} = \mathcal{U}_{T_n} \setminus \{\widetilde{\pi}_n\}$，其中 $n = 2k-1$ 且 $k \geq 4$，并设 $S_\lambda \in$ NS 为满足 $S^c_\lambda = \lambda$ 的数值集。我们考虑杨图

$$Y_{S_\lambda} = \mathrm{KN}(S_\lambda),$$

通过 Keith-Nath 方法由 S_λ 构造而成。

首先，我们注意到，如果 $\lambda \in \overline{\mathcal{U}}_{T_n}$，那么最大部分满足 $\lambda_t = 2n-4$，且部分数为 $t = \lfloor \frac{\lambda_t}{2} \rfloor = n-2$。现在我们着手建立 Y_{S_λ}的一些结构性质。特别地，我们将证明杨图 Y_{S_λ}（本节中 λ 的含义如上）是准对称的，也就是说，除主对角线之后紧接着添加的一列附加列外，其余部分均对称。

我们首先给出两个结果，说明第一行和第一列的结构，以及第一行包含一个标记为 $n-2$的单元格这一事实。

引理 3.1。使用上述记号，有如下结论：

(1) Y_{S_λ} 的第一列包含 $n-2$ 个格子，且该列第i行中单元格的钩长为

$$h_{i,1} = \lambda_{n-2-(i-1)};$$

(2) Y_{S_λ} 的第一行包含 $n-1$ 个格子，且该行第 i 列单元格的钩长为

$$h_{1,i} = \lambda_{n-2} - s_{i-1}.$$

证明。我们依次证明每个结论。

(1) 由定理 2.9(1), 钩长 $h_{i,\,1}$ 对应于 i-thlargest element ofS^c_λ。因此，我们得到 $\#C_1 = |\lambda| = n-2$ 并且 $h_{i,\,1} = \lambda_{n-2-(i-1)}$。(2) 由定理 2.9(2)，可得

$$\#R_1 = \#\{s_i \in S_\lambda \mid s_i < \lambda_{n-2} = 2n-4\} = \#\{0 \cup \mathcal{M}_\lambda\}.$$

因此，$\#R_1 = n-1$，此外 $h_{1,\,i} = F(S_\lambda) - s_{i-1} = \lambda_{n-2} - s_{i-1}$。 □

引理 3.2。存在一个整数 $1 \leq z \leq n-2$ 使得

$$h_{1,z+1} = n-2.$$

证明。由于 $\lambda \in \overline{\mathcal{U}_{T_n}}$，我们有 $n-2 \notin \lambda = S^c_\lambda$。因此，存在一个元素 $s_z \in S_\lambda$ 使得$s_z = n-2$。于是可得

$$h_{1,z+1} = \lambda_{n-2} - s_z = n-2.$$ □

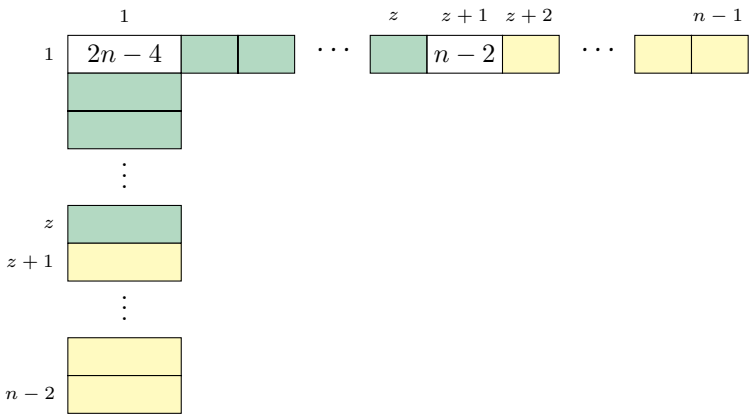


图2. Y_{S_λ}中第一行与第一列之间的对称性，突出显示特殊单元格 z。

以下引理揭示了杨图 Y_{S_λ} 的第一行与第一列之间几乎完美的对称性。具体而言，对于较小的指标 $0 \le i \le z-1$，第一列第（$i+1$）行中单元格的钩长与第一行第（$i+1$）列中单元格的钩长相同。对于较大的指标 $z+1 \le i \le n-2$，第一行第（$i+1$）列中单元格的钩长与第一列第 i 行中单元格的钩长相匹配。换言之，第一行和第一列的主体部分呈镜像关系，只是在与 z 相关的单元格处存在轻微偏移。

引理 3.3. 使用上述记号，并令 z 为引理 3.2中的整数，则若 $0 \le i \le z-1$，有

$$h_{i+1,1} = h_{1,i+1},$$

而若 $z+1 \le i \le n-2$，则

$$h_{1,i+1} = h_{i,1}.$$

证明. 首先，设 $i \le z-1$。在此情形下，我们考虑满足 $s_i \in S_\lambda$ 的元素$s_i < s_z$，于是 $s_i \in \{0\} \cup \mathcal{M}_\lambda$。由于 $\lambda \in \mathcal{U}_{T_n}$，对任意 $x \neq \frac{\lambda_t}{2}$，有 $x \in \lambda$ 当且仅当$\lambda_t - x \in \mathcal{M}_\lambda$ （另见注记 1）。因此

$$\lambda_{n-2} - s_i = \lambda_{n-2-i},$$

从而

$$h_{i+1,1} = \lambda_{n-2-i} = \lambda_{n-2} - s_i = h_{1,i+1}.$$

接下来，设 $i \ge z+1$。在此情形下，$s_i > s_z$，类似地可得

$$\lambda_{n-2} - s_i = \lambda_{n-2-(i-1)},$$

这意味着

$$h_{i,1} = \lambda_{n-2-(i-1)} = \lambda_{n-2} - s_i = h_{1,i+1}.$$ □

图 2 展示了在$\mathcal{U}_{T_n}$中极大不可细分分拆的杨图里，第一行与第一列之间对称性的示意图，并突出显示了对应于索引 z的特殊单元格。该图直观地反映了我们迄今为止确立的性质。

下面的结果是将引理 2.6 应用于由 $\mathcal{U}_{T_n}$. 所对应的极大不可细分分拆所生成的杨图这一特定情形。

推论 3.4. 设 $\lambda \in U_{T_n}$，并令 Y_{S_λ} 为相应的杨图。若 $2 \le i \le z$，

$$h_{i,j} = \lambda_{n-2} - s_{i-1} - s_{j-1}, \tag{3}$$

而当 $z+1 \le i \le n-2$ 时，

$$h_{i,j} = \lambda_{n-2} - s_i - s_{j-1}. \tag{4}$$

证明。设 $2 \le i \le z$。由方程 (2) 和引理 3.3，可得

$$h_{i,j} = h_{1,j} + h_{i,1} - h_{1,1} = \lambda_{n-2} - s_{j-1} + \lambda_{n-2} - s_{i-1} - \lambda_{n-2},$$

由此得到方程 (3)。

现在设 $z+1 \le i \le n-2$。由引理 3.3，我们知道 $h_{i,\,1} = h_{1,\,i+1} = \lambda_{n-2} - s_i$。将其代入方程 (2)，得到方程 (4)。□

现在我们证明，该图包含一个从左上角开始的主方块，并且我们希望了解它的结构以及紧随其后的那一列。具体而言，位置 $(z+1, z+1)$ 上可能存在的单元格会有负钩，因此并不存在。因此，紧接在该正方形之后的列恰好包含 z 个格子，而主对角线本身恰好由 z 个格子组成。以下引理将这些观察形式化。

引理 3.5. 考虑杨图 Y_{S_λ}，其对应于极大不可细分分拆 $\lambda \in U_{T_n}$。则下列性质成立：

(1) 单元格 $c_{z+1,z+1}$ 在图中不存在；*(2)* 列 C_{z+1} 恰好包含 z 个格子；
(3) Y_{S_λ} 的主对角线恰好包含 z 个格子；等价地，

$$h_{z,z} > 0 \quad and \quad h_{z+1,z+1} < 0.$$

证明。我们逐一证明每一条。

(1) 单元格 $c_{z+1,z+1}$ 的钩将是

$$h_{z+1,z+1} = \lambda_{n-2} - s_{z+1} - s_{z+2} = n - 2 - s_{z+2} < 0,$$

由于 $s_{z+2} > s_{z+1}$。因此，单元格 $c_{z+1,z+1}$ 不能属于该图。

(2) 由前一点，$h_{z+1,z+1} < 0$，而 $h_{z,z+1} = n - 2 - s_z > 0$。由此可得，列 C_{z+1} 恰好包含 z 个格子。(3) 由（1），$h_{z+1,z+1} < 0$。另一方面，$h_{z,z} > 0$，因为 $h_{z,z+1} > 0$ 由（2）。因此 Y_{S_λ} 的主对角线恰好包含 z 个格子。

□

图 3 以图示方式说明了前一个引理，突出显示了杨图中的主方块及其紧邻的下一列，并展示了哪些单元格属于该图、哪些不属于。

下面的结果将对称杨图所呈现的行列行为形式化，但主对角线之后紧邻出现的单个额外列除外。这种不对称性正是导致在 $i = z+1$ 处发生状态变化的原因。

引理 3.6. 设 $1 \le i \le z$。那么 $\#R_i = \#C_i + 1$. 否则，若 $z+1 \le i \le n-2$，则有 $\#R_i = \#C_{i+1}$.

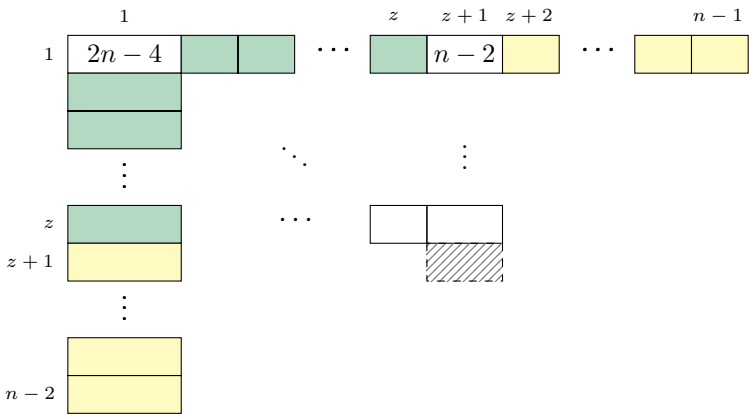


图3. Y_{S_λ}中的主方块及其外侧的第一列，展示了对角线和列 C_{z+1}中存在 z 个格子。

证明。 固定 $1 \le i \le z$。由

$$\#R_i + n - 2 - i = h_{i,1} = h_{1,i} = \#C_i + n - 1 - i \tag{5}$$

由此立即可得 $\#R_i = \#C_i + 1$。

现在令 $z+1 \le i \le n-2$。在这种情况下 $h_{i,\,1} = h_{1,\,i+1}$，因此

$$\#R_i + n - 2 - i = \#C_{i+1} + n - 1 - i + 1, \tag{6}$$

由此得到 $\#R_i = \#C_{i+1}$。 □

现在我们证明 Y_{S_λ}的钩对称性质。在由主对角线确定的 $z \times z$ 正方形内，钩的表现与对称杨图中的完全相同。在此正方形之外，额外列的存在形成了移位对称，将第 i 行中的钩与第 $i+1$列中的钩配对。以下结果将这两种情形形式化。

引理3.7. Y_{S_λ} 的钩结构满足：

(1) 如果 $1 \le i, j \le z$，那么 *(2)* 如果 $z+1 \le i \le n-2$，那么对于每个 $1 \le j \le z$，

$$h_{i,j} = h_{j,i};$$

$$h_{i,j} = h_{j,i+1}.$$

证明。 我们依次证明各个结论。

(1) 对于 $1 \le i,\ j \le z$，由引理 3.6 可得

$$\begin{aligned} h_{i,j} &= \#R_i - (j-1) + \#C_j - (i-1) - 1 \\ &= \#C_i - (j-1) + \#R_j - (i-1) - 1 \\ &= h_{j,i}. \end{aligned}$$

(2) 对于 $z+1 \le i \le n-2$，利用方程 (4) 和方程 (3)，可得

$$h_{i,j} = \lambda_{n-2} - s_i - s_{j-1} = \lambda_{n-2} - s_{j-1} - s_i = h_{j,i+1}.$$ □

最后，为了结束这份结构性质列表，我们将主对角线上的钩与接触额外列的钩联系起来。

引理3.8。 设 $1 \le i \le z$。那么，第 i 行主对角线上单元格的钩长 $h_{i,\,i}$ 恰好是同一行 i额外列C_{z+1}中单元格钩长的两倍：

$$h_{i,i} = 2\,h_{i,z+1}.$$

证明。 直接计算可得：

$$\begin{aligned} h_{i,i} &= \lambda_{n-2} - 2s_{i-1} \\ &= 2(n-2-s_{i-1}) \\ &= 2(\lambda_{n-2} - s_z - s_{i-1}) \\ &= 2h_{i,z+1}. \end{aligned}$$

□

我们已经证明，与三角数的极大不可细分分拆相对应的杨图呈现出阶梯状结构，其包含一条主对角线以及对角线之外的一列额外列。现在我们可以计算 Y_{S_λ} 的格子数。

命题 3.9。 设 $\lambda \in \mathcal{U}_{T_n}$。那么， Y_{S_λ} 的格子数为 $3n-3$. 因此，主对角线上的钩长之和等于 $3n-3$。

证明。 图中的格子总数等于每一行的格子数之和：

$$\begin{aligned} \#Y_{S_\lambda} &= \sum_{i=1}^{n-2} \#R_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-2} h_{i,1} - (\#C_1 - i) \\ &= \sum_{i=1}^{n-2} h_{i,1} - \sum_{i=1}^{n-2} \#C_1 + \sum_{i=1}^{n-2} i \\ &= T_n - (n-2)(n-2) + T_{n-2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} - (n-2)^2 + \frac{(n-2)(n-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}(6n-6) \\ &= 3n-3. \end{aligned}$$

□

以下命题强调了三角形情形 T_n 中与极大不可细分分拆相对应的杨图的一项关键性质，其中 $n = 2k-1$。它说明，主对角线之外额外列上的钩长自然编码了一个等于 k 的和，从而建立了这些分拆与将 k 分拆成互异部分的分拆之间的直接组合联系。这一观察将成为建立所需双射的基石。

命题3.10. 设 $\lambda \in \mathcal{U}_{T_n}$，其中 $n = 2k-1$。那么

$$\sum_{i=2}^{z} h_{i,z+1} = k.$$

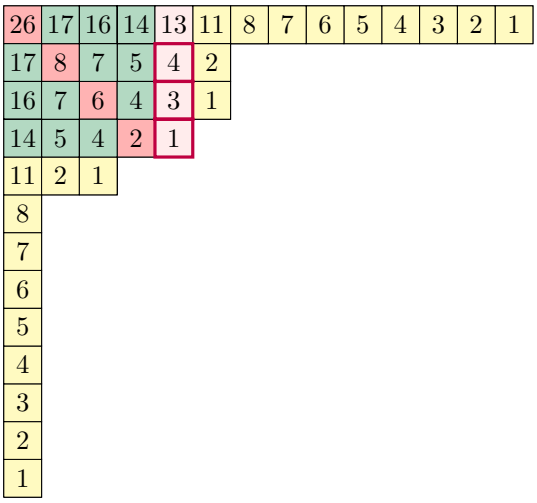


图4. 展示主对角线、额外列及其对称性的极大不可细分分拆的杨图。

证明。 我们先计算从第二行开始沿主对角线的钩之和：

$$\sum_{i=2}^{z} h_{i,i} = 3n - 3 - (2n-4) = n + 1 = 2k.$$

由引理3.8可知，每个对角钩的长度都是额外列中对应钩的两倍：

$$h_{i,i} = 2h_{i,z+1}.$$

因此，两边同时除以 2，可得 $\sum_{i=2}^{z} h_{i,z+1} = k$，如所述。 □

注3. 命题 3.10 可以解释为将集合 $\mathcal{U}_{T_{2k-1}}$嵌入分拆集合 $\mathbb{D}_k$中。注意，同一性质既允许建立与具有互异部分的 k 分拆之间的对应关系，也可以从将 $2k$ 分拆为偶数（且互异）部分的角度来理解。从这一视角出发，无需参照额外列，便可直接沿杨图的主对角线读取每个部分的贡献。下面的例子将具体展示这些特点。

例3.11. 考虑分拆

$$\lambda = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 14, 16, 17, 26) \in \overline{\mathcal{U}}_{T_{15}},$$

与 k 相等于 $8 = \frac{15+1}{2}$。我们在图4 中展示了它的杨图及相应的对称性。观察主对角线或额外列，可以找到相应的互异部分分拆$(1,\ 3,\ 4) \in \mathbb{D}_8$。

在下一节中，我们将完成双射的证明，即说明如何将$\mathcal{U}_{T_n}$ 中的每个元素唯一地对应到 k 的一个不同部件分拆，但~~分拆 $(3, k-3)$~~ 除外。由于 $\#\mathcal{U}_{T_n} = \#\mathcal{U}_{T_n} + 1$，这一差异恰好对应于缺失的情形，从而得到所需的对应关系。

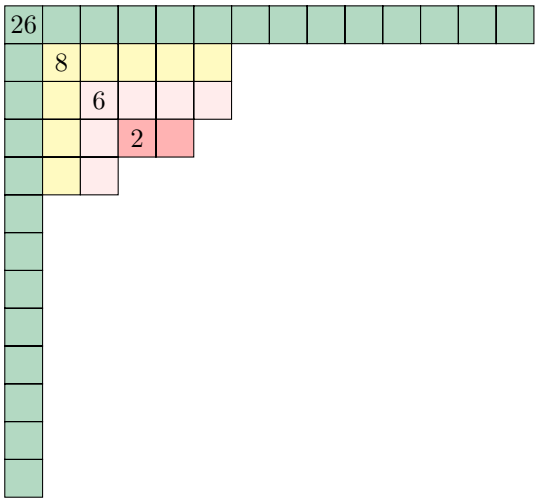


图5. 杨图 $Y_{2\eta^*}$ 对应于 $\eta=(1,\ 3、4)$。

~3.2. **证明** $\mathbb{D}_k \hookrightarrow \mathcal{U}^{T_n}$. 设 $\eta=(\eta_1,\cdots\ \eta_l) \in \mathbb{D}_k\setminus\{(3,k-3)\}$，并定义$\eta^*=(\eta_1,\cdots\ \eta_l,n-2)$ 和 $2\eta^*=(2\eta_1,\cdots\ 2\eta_l,2n-4)$，其中 $n=2k-1$。

我们通过施加以下条件来构造杨图 $Y_{2\eta^*}$：

$$\begin{aligned} h_{1,1} &= 2n-4, \\ h_{i,i} &= 2\eta_{l-(i-2)}, \qquad 2\le i\le l+1, \\ a(c_{i,i}) &= l(c_{i,i})+1, \qquad 1\le i\le l+1. \end{aligned} \tag{7}$$

对于上述构造的杨图 $Y_{2\eta^*}$，下面我们将应用 KN变换的逆变换，得到数值集 $S_{2\eta^*}=\mathrm{KN}^{-1}(Y_{2\eta^*})$。我们将定义关联分拆 $\lambda=S^c_{2\eta^*}$，并证明它是不可细化的。

例3.12. 我们考虑分拆 $\eta=(1,3,4)\in\mathbb{D}_8$，因此 $2\eta^*=(2,6,8,26)$。所得杨图 $Y_{2\eta^*}$ 按上述规则得到，显示于图 5

与上一节一样，我们现在将推导杨图 $Y_{2\eta^*}$的若干结构性质，首先从关于由主对角线确定的正方形的结果开始。

引理 3.13. 设 $Y_{2\eta^*}$ 为如上构造的杨图。则：

(1) $\#C_1=n-2$, *and for* $2\le i\le l+1$ *we have* $\#C_i=\eta_{l-(i-2)}+(i-1)$;
(2) $\#R_1=n-1$, *and for* $2\le i\le l+1$ *we have* $\#C_i=\eta_{l-(i-2)}+i$.

证明。 我们依次证明每一条陈述。

(1) 由方程（7）可得

$$h_{1,1}=1+a(c_{1,1})+l(c_{1,1})=2+2l(c_{1,1}).$$

我们知道$h_{1,\ 1}=2n-4$，于是得到

$$\#C_1=l(c_{1,1})+1=n-2.$$

对于 $2\le i\le l+1$，我们有$h_{i,\ i}=2\eta_{l-(i-2)}$，则

$$\#C_i=i+l(c_{i,i})=i+\frac{2\eta_{l-(i-2)}-2}{2}=\eta_{l-(i-2)}+(i-1).$$

(2) 我们有

$$\#R_1 = 1 + a(c_{1,1}) = 1 + \frac{2n-4}{2} = n-1.$$

对于 $2 \le i \le l+1$，我们有 $h_{i,\ i} = 2\eta_{l-(i-2)}$，得到

$$\#R_i = i + a(c_{i,i}) = i + \frac{h_{i,i}}{2} = \eta_{l-(i-2)} + i.$$ □

引理 3.14. 考虑由主对角线两侧前 $l+1$ 行和列构成的 $Y_{2\eta^*}$ 中的正方形。于是：

(1) 对于 $2 \le i \le l+1$，该正方形第一行和第一列中的钩满足

$$h_{1,i} = h_{i,1};$$

(2) 对于 $2 \le i, j \le l+1$，正方形内的钩关于主对角线对称，即

$$h_{i,j} = h_{j,i}.$$

证明。 我们分别证明这两点。

(1) 使用引理 3.13，我们有

$$\begin{aligned} h_{i,1} &= \#R_i + l(c_{i,1}) \\ &= \eta_{l-(i-2)} + i + (n-2-i) \\ &= \eta_{l-(i-2)} + n - 2 \\ &= \eta_{l-(i-2)} + (i-1) + (n-1-i) \\ &= \#C_i + a(c_{1,i}) \\ &= h_{1,i}. \end{aligned}$$

(2) 根据引理 3.13 并利用上一点，我们得到

$$\begin{aligned} h_{i,j} &= 1 + a(c_{i,j}) + l(c_{i,j}) \\ &= 1 + \#R_i - j + \#C_j - i \\ &= 1 + \eta_{l-(i-2)} + i - j + \eta_{l-(j-2)} + (j-1) - i \\ &= 1 + \#C_i - j + \#R_j - i \\ &= 1 + l(c_{j,i}) + a(c_{j,i}) \\ &= h_{j,i}. \end{aligned}$$

□

设 $\lambda = S^c_{2\eta^*}$，其中 $S_{2\eta^*} = \mathrm{KN}^{-1}(Y_{2\eta^*})$。根据命题 2.7，对所有 i，有：

▷ $h_{i,\ 1} \in \lambda$；▷ $h_{1,\ i} = h_{1,\ 1} - s_{i-1}$，其中 $s_{i-1} \in S_{2\eta^*}$。

作为前述关于 $Y_{2\eta^*}$的结构引理的直接推论，我们现在可以推导出关联分拆 λ的基本性质，概括如下推论所述。

推论 3.15。 设 $\eta \in \mathbb{D}_k \setminus \{(3,\ k-3)\}$，并令 λ 表示按照上述描述由 η得到的分拆。则有以下结论：

(1) $|\lambda| = n-2$，其中 $n = 2k-1$；*(2)* λ 的最大部分满足 $\lambda_{n-2} = 2n-4$；*(3)* λ 的缺失部分数量为 $\#M_\lambda = n-2$。

证明。 我们分别处理每个断言。

(1) 由引理 3.13(1) 可知 $\#C_1 = n-2$，并由命题 2.7 我们推出 $|\lambda| = n-2$。(2) 由上一点我们有 $\lambda_{n-2} = h_{1,\,1} = 2n-4$.(3) 由引理3.13(2) 可知

$$\#\{s \in S_{2\eta^*} \mid 0 \le s \le 2n-4\} = \#R_1 = n-1.$$

显然，$\#\mathcal{M}_\lambda = \#\{s \in S_{2\eta^*} \mid 0 < s \le 2n-4\} = n-2$。 □

现在我们考察杨图 $Y_{2\eta^*}$ 的结构性质，这将使我们能够推导出其关联分拆 $\lambda = S^c_{2\eta^*}$ 的不可细化性。具体而言，我们首先关注主对角线上的钩的排列，以及 $Y_{2\eta^*}$ 的行与列之间的相互关系。

引理 3.16. 设 $\eta \in \mathbb{D}_k \setminus \{(3, k-3)\}$，并将如上所述与 $Y_{2\eta^*}$ 关联的分拆记为 λ。则有以下性质：

(1) 对于 $2 \le i \le l+1$，主对角线上的钩长满足

$$h_{i,i} = \lambda_{n-2} - 2s_{i-1}; \tag{8}$$

(2) 若 $s_i, s_j \ne n-2$，则 $s_i + s_j \ne \lambda_{n-2}$。因此，对于每个 $\lambda_i \in \lambda$，存在唯一的 $s_j \in S_{2\eta^*}$ 使得

$$\lambda_i + s_j = \lambda_{n-2}. \tag{9}$$

换言之，λ的每一部分都与 $S_{2\eta^*}$ 的一个元素配对，二者之和等于最大部分。

证明。 我们分别证明每个断言。

（1）由方程（2）及引理 3.14（1），我们有

$$h_{i,i} = 2h_{1,i} - h_{1,1} = \lambda_{n-2} - 2s_{i-1}.$$

（2）反设存在 s_i，$s_j \ne n-2$ 使得 $\lambda_{n-2} = s_i + s_j$。则

$$h_{1,i+1} = \lambda_{n-2} - s_i = s_j,$$
$$h_{1,j+1} = \lambda_{n-2} - s_j = s_i.$$

不失一般性，假设 $s_i > n-2$，从而 $s_j < n-2$。则

$$h_{j+1,j+1} = \lambda_{n-2} - 2s_j > 0,$$

从而推出 $1 \le j \le l$。这将迫使$h_{j,\,1} = h_{1,\,j} \in S_{2\eta^*}$，矛盾。因此$s_i + s_j \ne \lambda_{n-2}$。

现在，给定 $\lambda_i \in \lambda$。根据前面已证明的结果，对于每个 λ_i，恰好存在一个满足 $\lambda_i + s_j = \lambda_{n-2}$的 $s_j \in S_{2\eta^*}$。其存在性源于每个 λ_i 都对应于 $Y_{2\eta^*}$ 中的一个钩，而这个钩可以通过第一行或第一列中的一个单元格“补全”为 λ_{n-2}，并且该单元格与某个 $s_j \in S_{2\eta^*}$ 相对应。其唯一性源于这样一个事实：$S_{2\eta^*}$ 中任意两个不同的元素（可能的 $n-2$ 除外，该情况将单独处理）都不可能相加得到 λ_{n-2}。因此，对于每个 $\lambda_i \in \lambda$，都存在唯一的 $s_j \in S_{2\eta^*}$ 使得 $\lambda_i + s_j = \lambda_{n-2}$。 □

推论 3.17。 在与前述引理相同的假设下，我们有 $n-2 \in S_{2\eta^*}$。

证明。 反设 $n-2 \in \lambda = S^c_{2\eta^*}$。根据引理 3.16(2)，存在某个 $s_i \in S_{2\eta^*}$ 使得 $n-2+s_i = \lambda_{n-2}$，从而推出 $s_i = n-2 \in S_{2\eta^*}$，这就产生了矛盾。 □

在陈述下一个引理之前，我们注意到，其第一项和第三项确立了索引为 $l+2$ 的列的重要性质，而第二项则揭示了位于主方块外的钩块与第 $l+2$ 列之间的对称性。

引理 3.18. 设 $\eta \in \mathbb{D}_k \setminus \{(3, k-3)\}$，并设 $Y_{2\eta^*}$ 为相应的杨图。则有以下结论：

(1) $h_{1,l+2} = n-2$；*(2)* 对所有 $l+2 \le i \le n-2$ 和 $2 \le j \le l+1$，都有

$$h_{i,1} = h_{1,i+1} \quad and \quad h_{i,j} = h_{j,i+1};$$

(3) 对于 $1 \le i \le l+1$，有

$$h_{i,i} = 2h_{i,l+2}.$$

换言之，

$$h_{i,l+2} = \eta_{l-(i-2)}.$$

证明。 我们分别考察每一项来证明这些结论。

(1) 根据 $Y_{2\eta^*}$ 的构造，我们知道$h_{l+1,\ l+1} = 2\eta_1 > 0$。设$h_{1,\ l+2} = 2n-4-s_{l+1} \neq n-2$，使得 $s_{l+1} < n-2$。那么 $h_{l+2,\ 1} = 2n-4-s_{l+1}$ 也成立。由方程 (2)，可得

$$h_{l+2,l+2} = h_{1,l+2} + h_{l+2,1} - h_{1,1} = 2(n-2-s_{l+1}) > 0,$$

这与构造矛盾。

(2) 由于

$$\#\{h_{i,1} \mid l+2 \le i \le n-2\} = \#\{h_{1,j} \mid l+3 \le j \le n-1\},$$

并且已知 $h_{i,\ 1} > h_{i+1,\ 1}$ 以及 $h_{1,\ i} > h_{1,\ i+1}$，我们可以得出

$$h_{i,1} = h_{1,i+1}.$$

那么，对于 $2 \le j \le l+1$，我们得到

$$\begin{aligned} h_{i,j} &= \#R_i - j + \#C_i - j + 1 \\ &= h_{i,1} - (n-2-i) - j + h_{1,j} - (n-1-j) - i + 1 \\ &= h_{1,i+1} - (n-1-(i+1)) - j + h_{j,1} - (n-2-j) - (i+1) + 1 \\ &= \#C_{i+1} - j + \#R_j - i + 1 \\ &= h_{j,i+1}. \end{aligned}$$

(3) 对于 $i=1$，$h_{1,\ 1} = 2n-4 = 2(n-2) = 2h_{1,\ l+2}$ 由第 (1) 项可知。对于 $2 \le i \le l+1$，由引理3.16(1) 可得

$$h_{i,i} = h_{1,1} - 2s_{i-1} = 2(n-2-s_{i-1}),$$

并且根据方程 (2)，我们有

$$h_{i,l+2} = h_{i,1} + h_{1,l+2} - h_{1,1} = h_{1,i} - (n-2) = n-2-s_{i-1}. \qquad \square$$

例 3.19。 考虑分拆 $\eta = (1,\ 3,\ 4) \in \mathbb{D}_8$ 并将本节介绍的杨图构造应用于该分拆。这样做后，我们恰好得到例 4 中的图，见图 3.11。特别是，可以观察到索引为 $l+2=5$ 的列所对应的钩（其中包含 η），以及以相同颜色标示的钩之间的对称性。

在得出由 η 得到的分拆 λ 不可细化这一结论之前，我们先验证其权与 T_n 相同。

命题 3.20。设 $\eta \in \mathbb{D}_k \setminus \{(3, k-3)\}$。那么

$$\lambda \vdash T_n.$$

证明。 λ的权等于第一列中各钩的总和。因此,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-2} h_{i,1} &= 2n-4+\sum_{i=2}^{n-2} h_{i,1} \\
&= 2n-4+\sum_{i=2}^{n-2} (l(c_{i,1})+1)+a(c_{i,1}) \\
&= 2n-4+\sum_{i=1}^{n-3} i+\sum_{i=2}^{n-2} a(c_{i,1}) \\
&= 2n-4+\sum_{i=1}^{n-3} i+\sum_{i=1}^{l} 2\eta_i \\
&= 2n-4+\frac{(n-3)(n-2)}{2}+2k \\
&= \frac{1}{2}(4n-8+n^2-5n+6+2n+2) \\
&= \frac{1}{2}(n^2+n) \\
&= T_n.
\end{aligned}$$

□

3.2.1. 不可细分性的证明。 现在我们来到论证的最后阶段：证明按照第 λ 节所述由 η 构造的3.2是不可细分的。

根据命题 2.9，当且仅当第一列以外的每个钩都满足以下条件之一时，一个分拆才是不可细分的：

(1) 它与第一列中的某个钩相同（命题 2.9(3a)）；(2) 它恰好是同一行中单元格的钩的一半（命题 2.9(3b)）。

因此，为了证明 λ 不可细化，我们采用反证法。具体而言，假设第一列以外的某个钩 s_α 不满足第一个条件（即 $s_\alpha \notin \lambda = S^c_{2\eta^*}$），我们将证明，这样的钩要么必然属于第二种情形，要么其存在会导致矛盾。为此，我们将图划分为三个自然区域：

（1）主方块内的钩（$2 \le i,\ j \le l+1$），即图 4 中绿色区域；（2）索引为 $l+2$ 的移位列中的钩，即图 4 中粉色区域；（3）方块下方的钩（根据对称性，主方块及额外列 $l+2$ 右侧的钩也属于此类），即图 4 中黄色区域。

在接下来的引理中，我们将分别分析每个区域，并用 s_α 表示$h_{i,\ j}$ 中的一个钩$Y_{2\eta^*}$。

引理 3.21. 设 $2 \le i, j \le l+1$ 满足 $i \ne j$，并假设 s_α 是上述定义的第一列之外的一个钩长。那么，存在这样的 s_α 会导致矛盾。

证明. 首先，根据方程 (2) 和引理 3.14，钩长 s_α 可以表示为

$$\begin{aligned} s_\alpha = h_{i,j} &= h_{1,j} + h_{i,1} - h_{1,1} \\ &= h_{1,j} + h_{1,i} - h_{1,1} \\ &= \lambda_{n-2} - s_{j-1} + \lambda_{n-2} - s_{i-1} - \lambda_{n-2} \\ &= \lambda_{n-2} - s_{j-1} - s_{i-1}. \end{aligned}$$

为方便起见，我们将其等价地改写为关于 η的部分的表述:

$$s_\alpha = \eta_{l-(i-2)} + \eta_{l-(j-2)}. \tag{10}$$

这一等价性由关系 $2\eta_{l-(x-2)} = h_{x,\ x} = \lambda_{n-2} - 2s_{x-1}$ 得出，因此对于 $2 \le x \le l+1$，有 $s_{x-1} = (n-2) - \eta_{l-(x-2)}$。

现在，假设 $\alpha + 1 \neq i,\ j$。那么，由于 $\eta \vdash k$，我们有 $s_\alpha = \eta_{l-(i-2)} + \eta_{l-(j-2)} \le k$。对于 $n > 5$，我们有 $n - 2 > \frac{n+1}{2} \geqslant k$，进而得到 $s_\alpha < n - 2$。这意味着

$$h_{\alpha+1,\alpha+1} = 2\eta_{l-(\alpha-1)} = 2n - 4 - 2s_\alpha > 0$$

and

$$n - 2 = \eta_{l-(i-2)} + \eta_{l-(j-2)} + \eta_{l-(\alpha-1)} \le k,$$

矛盾。

现在不失一般性，假设 $\alpha = i - 1$。那么我们有

$$n - 2 = \eta_{l-(j-2)} + 2\eta_{l-(i-2)}. \tag{11}$$

计算

$$\eta_{l-(j-2)} + \eta_{l-(i-2)} = \eta_{l-(j-2)} + \frac{n - 2 - \eta_{l-(j-2)}}{2} = \frac{n - 2 + \eta_{l-(j-2)}}{2},$$

由于 $\eta \vdash k$，我们得到

$$n - 2 + \eta_{l-(j-2)} \le 2k = n + 1.$$

化简后，

$$\eta_{l-(j-2)} \le 3.$$

现在区分三种可能的情形:

▷ 若 $\eta_{l-(j-2)} = 1$，则

$$\eta_{l-(i-2)} = \frac{n-3}{2} = \frac{2k-4}{2} = k - 2,$$

但 $\eta \vdash k$，因此 $\eta = (1,\ 1,\ k-2)$，矛盾;

▷ 若 $\eta_{l-(j-2)} = 2$，则 $\eta_{l-(i-2)} = \frac{2k-5}{2} \notin \mathbb{Z}$，这就产生了矛盾;

▷ 若 $\eta_{l-(j-2)} = 3$，则 $\eta_{l-(i-2)} = k - 3$ 且 $\eta = (3, k-3)$，再次产生矛盾。 □

引理3.22. 设 $2 \le i = j \le l + 1$，并假设如上所定义的、位于第一列之外的一个钩的长度为 s_α。那么，这样一个 s_α 的存在迫使关系成立

$$h_{\alpha+1,1} = 2h_{\alpha+1,\alpha+1}.$$

证明. 由假设可得

$$s_\alpha = h_{i,i} = 2\eta_{l-(i-2)}. \tag{12}$$

我们通过区分三种可能的情形来进行讨论，首先假设 $s_\alpha < n - 2$。在这种情形下

$$\lambda_{n-2} - 2s_\alpha = h_{\alpha+1,\alpha+1} = 2\eta_{l-(\alpha-1)} > 0.$$

改写后，我们得到

$$n - 2 = s_\alpha + \eta_{l-(\alpha-1)}.$$

参数值	
l	2
i	2
λ_{n-2}	$4k-6$
$s_\alpha = h_{2,2}$	$2k-2$
s_{i-1}	$k-2$
$h_{1,\ \alpha+1}$	$2k-4$
$h_{i,\ \alpha+1}$	$k-2$

表3. 分拆图的参数 $(1,\ k-1)$ 引理 3.22的证明中。

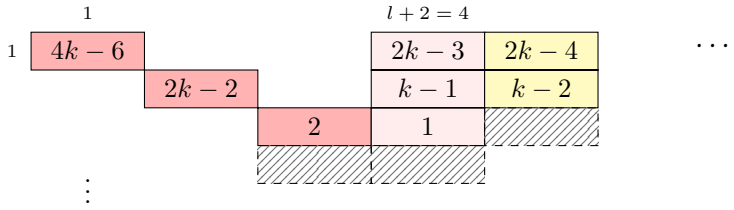


图6. 尝试重构杨图 $Y_{2\eta^*}$，其中 η =(1，$k-1$)，并标出了相关钩长。

利用方程 (12)，可得

$$n-2=\eta_{l-(\alpha-1)}+2\eta_{l-(i-2)}. \tag{13}$$

现在我们区分两种子情况:

▷ 如果 $\alpha\neq i-1$，交换 α 与 j;▷ 如果 $\alpha=i-1$，则由方程 (13) 得到 $n-2=3\eta_{l-(\alpha-1)}$，或者等价地 $\lambda_{n-2}=6\eta_{l-(\alpha-1)}$ =$3s_\alpha$. 因此

$$h_{\alpha+1,1}=h_{1,\alpha+1}=\lambda_{n-2}-s_\alpha=2s_\alpha,$$
$$h_{\alpha+1,\alpha+1}=\lambda_{n-2}-2s_\alpha=s_\alpha,$$

由此可得所声称的等式。

现在假设 $s_\alpha=n-2$。由方程 (12) 可得

$$2\eta_{l-(i-2)}=s_\alpha=n-2=2k-3,$$

这是不可能的，因为 $\eta_{l-(i-2)}$ 是一个整数。

最后，假设 $s_\alpha>n-2$，因此 $s_\alpha\geq n-1=2k-2$。然后，由方程（12），我们得到$\eta_{l-(i-2)}\geq k-1$.由于 $\eta\vdash k$，我们必须有 $\eta=(1,k-1)$。为了在这种情况下重构杨图，我们确定所有相关量；为方便起见，我们将它们汇总在表 3中。

注意到 $\alpha=4$，我们尝试重构杨图 $Y_{2\eta^*}$ 在假设 $\eta=(1,k-1)$下，如图 6所示，并标出了相关钩长和参数。按照该构造，我们计算

$$k-1=h_{2,4}=h_{2,5}+2=k,$$

这立即导致矛盾。 □

现在我们将重点放在位于主方块之外的元素上。

引理3.23。 设 $1 \le j \le l+1$ 和 $l+2 \le i \le n-2$。那么，这样一个 s_α的存在会导致矛盾。

证明。 由引理3.18(2)可得

$$h_{i,j} = h_{j,i+1} = \lambda_{n-2} - s_{j-1} - s_i.$$

由于 $s_i > n-2$，可得

$$s_\alpha = h_{i,j} < n-2.$$

因此 $1 \le \alpha \le l+1$，且 $h_{\alpha+1,\,j} = s_i$，这可归结为引理3.21 以及引理 3.22第三种情形中已讨论过的情况，从而导致矛盾。 □

引理3.24。 设 $2 \le i \le l+1$ 和 $j = l+2$。那么，这样一个 s_α 的存在会导致矛盾。

证明。 由引理3.18(3)，可得

$$s_\alpha = h_{i,l+2} = \eta_{l-(i-2)} < k < n-2.$$

因此，

$$h_{\alpha+1,\alpha+1} = \lambda_{n-2} - 2s_\alpha > 0,$$

可化为

$$s_\alpha + \eta_{l-(\alpha-1)} = n-2.$$

化简后得到

$$n-2 = \eta_{l-(\alpha-1)} + \eta_{l-(i-2)} \le k < n-2,$$

这就产生了矛盾。 □

前述引理共同证明， s_α 在 $Y_{2\eta^*}$ 中，第一列之外的任一钩长，要么与第一列中某个钩的长度相同，要么恰好是第一列中对应单元格的钩长的一半。因此，第一列之外钩的所有可能位置均已考察，而任何违反命题2.9 判据的假设都会导致矛盾。由此，我们可以将分析总结为以下命题。

定理 3.25. 令 $\eta \in \mathbb{D}_k \setminus \{(3, k-3)\}$，并令 $\lambda = S^c_{2\eta^*}$ 为与杨图 $Y_{2\eta^*}$对应的分拆，其中 $S_{2\eta^*}$ =KN^{-1}($Y_{2\eta^*}$)。则 λ 不可细化。特别地，$\lambda \in U_{T_n}$。

证明。 证明直接由前面的结果得出。特别地： λ<style id='6}根据上述引理是不可细化的，满足 T_n 由命题3.20给出的权条件，是 T_n 根据推论3.15(2)的分拆中极大的分拆，最后还满足属于$\mathcal{U}_{T_n}$ 的必要条件，根据推论 3.15(3)。 □

最后请注意，对于 $k \ge 4$，前面的结果立即表明， T_{2k-1} 的极大不可细分分拆数量与 $\#\mathbb{D}_k$ 相同，而后者又等于 $\#\mathbb{D}^e_{2k}$。这一计数是通过将分拆 $(3,\ k-3) \in \mathbb{D}_k$（我们将其排除在外）与分拆 $\tilde{\pi}_n$（同样被排除在外）建立对应关系而得到的。下面的例子说明了对应关系 KN^{-1} 在分拆 $(3,\ k-3)$ 上为何会以不符合要求的方式表现。

例 3.26. 令 $k=8$， $n=2k-1=15$。考虑 $\eta=(3,\ k-3)=(3,\ 5)$。注意，杨图 $Y_{2\eta^*}$ 不符合命题 2.9 中不可细化性的要求，这一点可由图 7 中高亮的方格看出。

26	18	16	13	12	11	9	7	6	5	4	3	2	1
18	10	8	5	4	3	1							
16	8	6	3	2	1								
12	4	2											
11	3	1											
9	1												
7													
6													
5													
4													
3													
2													
1													

图7. 分拆(3， $k-3$)的杨图，用以说明KN^{-1}的不符合行为。

现在我们可以转向非三角情形了。在本节讨论的这一情形中，本文余下部分将探讨的 $T_{n,\ d}$ 的不可细化分拆结构自然分为两个不同的族，具体取决于分拆的最大部分的值：当 $2n-5$ 为偶数时为 $n-d$，当 $2n-4$ 为奇数时为 $n-d$。在第 4 节中，我们讨论 $T_{n,\ n-2k}$ 的情形；在第 5 节中，我们讨论$T_{n,\ n-2k+1}$ 的情形。

4. 最大部分为 $2n-5$的非三角权

在本节中，我们旨在证明双射$\mathcal{U}_{T_{n,\ n-2k}} \leftrightarrow \mathbb{D}^{\circ}_{2k+2}$，其中 $2 \le 2k \le n-4$。我们再次通过构造双重嵌入来建立这一对应关系，呈现在随后的两个小节中。与三角形情形一样，我们必须首先从$\mathcal{U}_{T_{n,\ n-2k}}$中移除那个未达到缺失部分最大数目的唯一分拆，即例外分拆 $\tilde{\tau}_n$，列于表2 （仅当 $2k=n-4$，或 $d=4$时存在）。

4.1. 证明 $\mathcal{U}_{T_{n,\ n-2k}} \to \mathbb{D}^{\circ}_{2k+2}$。

设 $\lambda=(\lambda_1,\ \ldots\ldots,\ \lambda_t) \in \mathcal{U}_{T_{n,\ n-2k}} = \mathcal{U}_{T_{n,\ n-2k}} \setminus \{\tilde{\tau}_n\}$ 且$2 \le 2k \le n-4$，并设 $S_\lambda \in \mathrm{NS}$ 为满足 $S_\lambda^c = \lambda$ 的数值集。我们考虑通过

$$Y_{S_\lambda} = \mathrm{KN}(S_\lambda),$$

S_λ 按照前文所述的 Keith-Nath 方法构造的杨图。

我们首先确立一个一般的结构性质：当最大部分为奇数时，不可加细分拆的部分集合可通过完全互补关系，由其缺失部分完全确定。

引理 4.1。 设 $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_t) \in U$，且假设 λ_t 为奇数。那么

$$\lambda_i \in \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_t - \lambda_i \notin \lambda.$$

证明。 设 $\lambda_t = 2q-1$。由于 $\lambda \in \mathcal{U}$，我们有

$$\#\mathcal{M}_\lambda = \left\lfloor \frac{\lambda_t}{2} \right\rfloor = q-1, \qquad |\lambda| = q.$$

回想一下，对于每个缺失部分 $\mu \in \mathcal{M}_\lambda$，必定存在一个部分 $\lambda_i \in \lambda$，使得 $\lambda_i + \mu = \lambda_t$，否则 λ 就可以细化。此外，$\#\{\lambda_i \in \lambda \mid \lambda_i < \lambda_t\} = \#\mathcal{M}_\lambda$，因此存在部分与缺失部分之间是一一对应的。这就得到了所需的等价关系。□

在陈述主要结构事实之前，我们先对其几何解释作些说明。与三角形情形一样，第一行和第一列中各项的行为决定了整个杨图。这里的关键现象是，当最大部分为 $2n-5$ 时，图会变得对称：第一行和第一列包含相同数量的格子，而且沿它们计算出的钩长完全一致。这种对称性会延伸至整个图，从而导出恒等式

$$h_{i,j} = h_{j,i},$$

这就是 λ 的各部分所满足的互补关系在几何上的对应形式。

引理 4.2。 采用上述记号，有如下结论：

(1) Y_{S_λ} 的第一列包含 $n-2$ 个格子，且该列第 i 行单元格的钩长为

$$h_{i,1} = \lambda_{n-2-(i-1)};$$

(2) Y_{S_λ} 的第一行包含 $n-2$ 个格子，且该行第 i 列单元格的钩长为

$$h_{1,i} = \lambda_{n-2} - s_{i-1}.$$

证明。 这些结论直接由引理 3.1 的证明得出。 □

引理 4.3。 对于每个 $1 \le i \le n-2$，我们有

$$h_{i,1} = h_{1,i}.$$

证明。 对于 $i = 1$，该结论是平凡的。对于 $i > 2$，由于

$$h_{1,i} = \lambda_{n-2} - s_{i-1},$$

该值等于 λ 的一个部分（见引理 4.1），因而出现在第一列的钩长之中。由于根据引理 4.2 我们有 $\#C_1 = \#R_1 = n-2$，且两个序列 $(h_{i,1})_i$ 与 $(h_{1,i})_i$ 均严格递减，它们必须逐项相同。因此，

$$h_{i,1} = h_{1,i}.$$ □

推论 4.4。 对于所有 $1 \le i,\ j \le n-2$，我们有

$$h_{i,j} = h_{j,i}.$$

证明。 利用标准钩长恒等式（方程（2）），

$$h_{i,j} = h_{i,1} + h_{1,j} - h_{1,1},$$

并应用引理 4.3，我们得到

$$h_{i,j} = h_{1,i} + h_{j,1} - h_{1,1} = h_{j,i}.$$ □

前述引理所确立的对称性表明，与任意 $\lambda \in \mathcal{U}_{T_{n,n-2k}}$ 相关联的杨图关于其主对角线完全对称。换言之，Y_{S_λ} 是自共轭的：第 i 行的格子数等于第 i 列的格子数，并且每个钩长都满足 $h_{i,j} = h_{j,i}$。等价地，该图与其转置重合，因此其整体形状由第一行（或

对偶地，由第一列）决定。这一点尤为重要，因为自共轭杨图与由互异奇数部分组成的分拆一一对应 [并且98]。因此， Y_{S_λ} 的自共轭性在$\mathcal{U}^{T_{n,n-2k}}$ 中的极大不可细分分拆与这一经典的整数分拆族之间建立了直接联系。

现在我们可以计算 Y_{S_λ} 的格子数。

命题 4.5。 设 $\lambda \in U^{T_{n,\ n-2k}}$。 那么 Y_{S_λ} 中的格子总数为

$$\#Y_{S_\lambda} = 2n - 3 + 2k.$$

因此，主对角线上的钩长之和为 $2n-3+2k$。

证明。 图中的格子总数可以通过将每一行的格子数相加来计算：

$$\begin{aligned}
\#Y_{S_\lambda} &= \sum_{i=1}^{n-2} \#R_i \\
&= \sum_{i=1}^{n-2} h_{i,1} - (\#C_1 - i) \\
&= \sum_{i=1}^{n-2} h_{i,1} - \sum_{i=1}^{n-2} \#C_1 + \sum_{i=1}^{n-2} i \\
&= T_{n,n-2k} - (n-2)(n-2) + T_{n-2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} - (n-2k) - (n-2)^2 + \frac{(n-2)(n-1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}(4n - 6 + 4k) \\
&= 2n - 3 + 2k.
\end{aligned}$$

□

备注 4。 上述结果可以理解为将集合 $\mathcal{U}^{T_{n,\ n-2k}}$ 嵌入自共轭杨图的集合中，即嵌入 $\mathbb{D}^{\circ}_{2k+2}$ 中。这是因为每个分拆 λ 都通过 KN 变换对应于权为 $2n-3+2k$ 的自共轭分拆。这些分拆具有相同的最大部分，即 $2n-5$，将其移除后即可得到与 $\mathbb{D}^{\circ}_{2k+2}$ 的双射对应。从这个角度来看，每个部分的贡献都可以直接沿着 Y_{S_λ} 的主对角线读出。

最后，我们通过一个例子展示上述讨论的杨图的所有对称性质。

例 4.6。我们考虑分拆 $\lambda = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 15, 25) \in U^{T_{15},9}$，即针对 $n = 15$ 和 $k = 3$得到的分拆。所得杨图 Y_λ 如图 8 所示。请注意绿色方框突出显示的对称性，以及红色方框中与之对应的 $2k + 2 = 8$ 的互异奇数部分分拆 $(3, 5)$。

在下一节中，我们将完成双射的证明，即说明如何将 $\mathcal{U}^{T_{n,n-2k}}$ 中的每个元素唯一地对应到 $\mathbb{D}^{\circ}_{2k+2}$ 中的一个分拆，但分拆 $(1, 2k+1)$ 除外（仅当参数满足 $2k = n-4$ 时才会排除该分拆）。由于

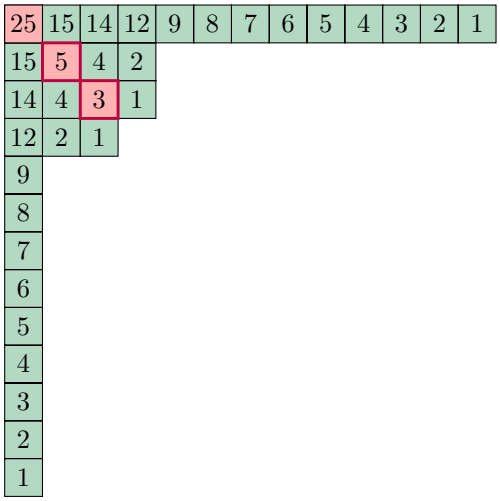


图8. 极大不可细分分拆的杨图，展示了主对角线及其对称性。

$$\#\widetilde{\mathcal{U}}_{T_{n,n-2k}} = \begin{cases} \#\overline{\mathcal{U}}_{T_{n,n-2k}} + 1 & \text{if } 2k = n-4, \\ \#\overline{\mathcal{U}}_{T_{n,n-2k}} & \text{otherwise,} \end{cases}$$

这一差异恰好对应于表 $\tilde{\tau}_n$ 中的例外分拆 2，从而得到所需的对应关系。

在这个意义上，定义以下内容将很有用

$$\overline{\mathbb{D}}^{\mathrm{o}}_{2k+2} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \mathbb{D}^{\mathrm{o}}_{2k+2} \setminus \{(1, 2k-1)\} & \text{if } 2k = n-4, \\ \mathbb{D}^{\mathrm{o}}_{2k+2} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

4.2. 证明 $\mathbb{D}^{\mathrm{o}}_{2k+2}$，$\to$ $\widetilde{\mathcal{U}}_{T_{n,\ n-2k}}$。设 $\eta = (\eta_1, \cdots \eta_l) \in \mathbb{D}_{\overline{\mathrm{o}}\,2k+2}$，并定义 $\eta^* = (\eta_1, \cdots \eta_l,\ 2n-5)$，其中 $2 \le 2k \le n-4$。

我们通过施加以下条件来构造杨图 Y_{η^*}：

$$\begin{aligned} h_{1,1} &= 2n-5, \\ h_{i,i} &= \eta_{l-(i-2)}, \qquad 2 \le i \le l+1, \\ a(c_{i,i}) &= l(c_{i,i}), \qquad 1 \le i \le l+1. \end{aligned} \tag{14}$$

接下来，我们将对上述构造的杨图 Y_{η^*} 应用 KN 变换的逆变换，得到数值集 $S_{\eta^*} = \mathrm{KN}^{-1}(Y_{\eta^*})$。我们将定义关联分拆 $\lambda = S^c_{\eta^*}$，并证明它是不可细化的。

根据构造，与 $\eta \in \mathbb{D}^{\mathrm{o}}_{2k+2}$ 关联的杨图 Y_{η^*} 是自共轭的，这意味着钩长关于主对角线对称。也就是说，对于每一对指标 i，j，都有

$$h_{i,j} = h_{j,i}.$$

引理 4.7。设 $\eta \in \mathbb{D}^{o}_{\overline{2k+2}}$。则 Y_{η^*} 的第一列包含$\#C_1 = n-2$ 个格子，根据自共轭性，第一行也包含$\#R_1 = n-2$ 个格子。

证明。 对于第一列，我们有

$$\#C_1 = l(c_{1,1}) + 1 = \frac{h_{1,1} - 1}{2} = n - 2.$$

Since Y_{η^*} 是自共轭的，第一行的格子数与第一列的格子数相同 :

$$\#R_1 = \#C_1 = n - 2. \qquad \square$$

下一个推论从几何角度解释分拆 λ 与其相应的杨图 Y_{η^*}之间的关系。具体而言，部分总数对应于第一列的格子数，最大部分由左上角钩长给出，而缺失部分的数量反映了第一行的结构，凸显了图的自共轭对称性。我们再次利用命题2.7，对于所有 i，均有:

- $h_{i,1} \in \lambda$;
- $h_{1,i} = h_{1,1} - s_{i-1}$, where $s_{i-1} \in S_{\eta^*}$.

推论 4.8. 设 $\eta \in \mathbb{D}^{o}_{2k+2}$，并令 λ 表示如上所述与 η 相应的分拆。则有:

(1) λ 的部分总数为 $|\lambda| = n - 2$; *(2)* λ 的最大部分满足 $\lambda_{n-2} = 2n - 5$; *(3)* λ 的缺失部分数为$\#M_\lambda = n - 3$。

证明。 我们分别证明各项结论。

(1) 根据引理 4.7， Y_{η^*} 的第一列包含 $\#C_1 = n-2$ 个单元格。根据 λ 由 η构造而成的方式，这意味着 λ 的部分总数为 $|\lambda| = n - 2$。(2) 根据前一点，我们知道 λ 的最大部分对应于图中左上角单元格的钩长：$\lambda_{n-2} = h_{1,\ 1} = 2n - 5$.(3) 根据引理4.7 我们知道

$$\#\{s \in S_{\eta^*} \mid 0 \le s \le 2n - 5\} = \#R_1 = n - 2.$$

Clearly, $\#\mathcal{M}_\lambda = \#\{s \in S_{\eta^*} \mid 0 < s \le 2n - 5\} = n - 3.$ $\square$

命题 4.9。 设 $\eta \in \mathbb{D}^{o}_{2k+2}$。则相应的分拆 λ 满足

$$\lambda \vdash T_{n,n-2k},$$

其中 $2 \le 2k \le n - 4$。

证明。 λ 的权等于 Y_{η^*} 第一列中的钩长之和。因此，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-2} h_{i,1} &= h_{1,1} + \sum_{i=2}^{n-2} h_{i,1} \\ &= (2n-5) + \sum_{i=2}^{n-2} \big(l(c_{i,1}) + 1 + a(c_{i,1})\big) \\ &= (2n-5) + \sum_{i=1}^{n-3} i + \sum_{i=1}^{l} 2\eta_i \\ &= 2n - 5 + \frac{(n-3)(n-2)}{2} + (2k+2) \\ &= \frac{1}{2}(n^2-n) + 2k \\ &= \frac{1}{2}(n^2+n) - n + 2k \\ &= T_{n,n-2k}.\end{aligned}$$

□

4.2.1. 不可细分性的证明。 为证明 λ 是不可细化的，我们仿照三角形情形进行。按逆否命题，假设一个钩 s_α 位于第一列之外且不属于$\lambda = S^c_{2\eta^*}$，我们证明它要么满足命题 2.9（3b）的条件，要么其存在会导致矛盾。为此，我们区分图的两个区域：主方块内部的钩，以及位于该正方形下方或右侧的钩。为继续进行，我们需要如下中间结果。

引理 4.10. 设 $c_{i,\ j}$ 为 Y_{η^*} 中满足 i、$j \geq 2$ 的任意单元格。则

$$h_{i,j} < n-2.$$

证明。 对于 $i,\ j \geq 2$，我们有

$$\eta_{l-(i-2)} = h_{i,i} = \lambda_{n-2} - 2s_{i-1}. \tag{15}$$

特别地，左上角内部单元格的钩满足 $h_{2,\ 2} = \eta_l \leq 2k+2 < n-2$，其中我们用到 $2k < n-2$。钩长的单调性，即 $h_{i,\ j} > h_{i+1,\ j}$ 与 $h_{i,\ j} > h_{i,\ j+1}$，蕴含每个满足 $i,\ j \geq 2$ 的内部单元格 $(i,\ j)$ 也满足 $h_{i,\ j} < n-2$。□

在接下来的引理中，我们将分别分析各个区域，用 s_α 表示其中一个钩$h_{i,\ j}$ 的 Y_{η^*}。

引理 4.11. 设 $2 \leq i, j \leq l+1$ 满足 $i \neq j$，且 s_α 是第一列之外的一个钩长。那么，这样一个 s_α 的存在会导致矛盾。

证明. 我们分两种不同的情况进行考察。第一种情况下，假设 $\alpha \neq i-1,\ j-1$。我们有 $s_\alpha = h_{i,\ j} = \lambda_{n-2} - s_{i-1} - s_{j-1}$，或

$$\lambda_{n-2} = s_{i-1} + s_{j-1} + s_\alpha. \tag{16}$$

由方程（15）在引理 4.10 中，我们得到

$$s_\alpha = \frac{\lambda_{n-2} - \eta_{l-(\alpha-1)}}{2}.$$

此外， s_{i-1}， $s_{j-1} < n-2$，由于 i， $j \le l+1$。因此

$$s_{i-1} = \frac{\lambda_{n-2} - \eta_{l-(i-2)}}{2},$$
$$s_{i-j} = \frac{\lambda_{n-2} - \eta_{l-(j-2)}}{2}.$$

由方程 (16)，我们得到

$$\lambda_{n-2} = \frac{3}{2}\lambda_{n-2} - \frac{1}{2}(\eta_{l-(i-2)} + \eta_{l-(j-2)} + \eta_{l-(\alpha-1)}).$$

化简后，得到

$$2n-5 = \eta_{l-(i-2)} + \eta_{l-(j-2)} + \eta_{l-(\alpha-1)} \le 2k+2 \le n-2,$$

对于 $n \le 3$，该结论成立，这就产生了矛盾。

不失一般性，我们现在假设 $\alpha = i-1$。方程 (16) 变为

$$\lambda_{n-2} = s_{j-1} + 2s_{i-1},$$

由此我们得到

$$s_{j-1} = \lambda_{n-2} - 2s_{i-1} = h_{i,i} = \eta_{l-(i-2)}.$$

由于 $s_{j-1} < n-2$，我们有

$$\lambda_{n-2} = \eta_{l-(j-2)} + 2s_{j-1} = \eta_{l-(j-2)} + 2\eta_{l-(i-2)}.$$

最终可以计算出

$$\eta_{l-(i-2)} + \eta_{l-(j-2)} = \frac{\lambda_{n-2} - \eta_{l-(j-2)}}{2} + \eta_{l-(j-2)} = n-2 + \frac{\eta_{l-(j-2)} - 1}{2}. \tag{17}$$

现在我们区分两种子情况：

▷ 若 $2k+2 < n-2$，方程 (17) 变为

$$n-2 + \frac{\eta_{l-(j-2)} - 1}{2} < n-2,$$

显然这会导致矛盾；

▷ 若 $2k+2 = n-2$，由方程 (17) 可得

$$\eta_{l-(j-2)} + \eta_{l-(i-2)} = n-2 = 2k+2$$

因此

$$\eta_{l-(j-2)} = 1,$$
$$\eta_{l-(i-2)} = 2k+1,$$

而这被 $\mathbb{D}^{\circ}_{2k+2}$ 的定义所禁止。 □

引理 4.12. 设 $2 \le i = j \le l+1$，并设 s_α 为第一列之外的一个钩长。若这样的 s_α 存在，则它满足

$$h_{i,1} = 2\,h_{i,i} = 2\,s_\alpha.$$

证明。 我们区分两种情形。若 $\alpha \ne i-1$，则与引理 4.11 在 $\alpha = i-1$ 时的情形相同。若 $\alpha = i-1$，则我们得到

$$s_{i-1} = h_{i,i} = \lambda_{n-2} - 2s_{i-1},$$

并由该方程可得

$$h_{i,1} = h_{1,i} = \lambda_{n-2} - s_{i-1} = 2s_{i-1} = 2h_{i,i}.$$ □

引理 4.13. 设 $2 \le j \le l+1$ 和 $l+2 \le i \le n-2$，并假设 s_α 是第一列以外的一个钩长。那么这种 s_α 的存在会导致矛盾。

证明。 我们有

$$s_\alpha = h_{i,j} = \lambda_{n-2} - s_{i-1} - s_{j-1}.$$

根据引理4.10，我们有 $s_\alpha < n-2$，因此 $2 \le \alpha + 1 \le l + 1$。由于

$$n-2 > h_{\alpha+1,j} = \lambda_{n-2} - s_{j-1} - s_\alpha = s_{i-1},$$

我们满足引理4.11中的相同条件，这导致了矛盾。 □

前面的所有引理共同表明，位于 Y_{η^*} 第一列之外的任何钩长 s_α，要么与第一列中某个单元格的钩长相同，要么恰好是对应对角单元格钩长的一半。由于第一列之外所有可能的位置现已分析完毕，任何额外的钩都必然违反钩与奇数部件之间的明确关系。因此，第一列之外所有可能的细分都已被排除，我们可以在下述定理中总结这一结果。

定理 4.14。 设 $\eta \in \mathbb{D}^{o}_{2k+2}$，并令 $\lambda = S^{c}_{\eta^*}$ 为与（自共轭）杨图 Y_{η^*} 相关联的分拆，其中 $S_{\eta^*} = \mathrm{KN}^{-1}(Y_{\eta^*})$。那么 λ 不可细化。特别是，

$$\lambda \in \overline{\mathcal{U}}_{T_{n,n-2k}}.$$

证明。 根据前述引理，第一列之外的每个钩长要么对应第一列中的一个钩，要么必然与某个对角钩的一半相匹配；其他任何可能性都会导致矛盾。因此，根据命题 2.9，λ 不可细化。根据命题 4.9，分拆 λ 的权为 $T_{n,\ n-2k}$。推论 4.8 保证 λ 的最大部分为 $2n-5$，且恰有 $n-3$ 个缺失部分；这刻画了 $\mathcal{U}_{T_{n,\ n-2k}}$ 中的元素。□

最后，注意对于 $2 \le 2k \le n-4$，前述结果表明，$T_{n,\ n-2k}$ 的极大不可细分分拆数量与 $\#\mathbb{D}^{\mathrm{o}}_{2k+2}$，$2k+2$ 的奇异分拆数量相同。事实上，在 $2k = n-4$ 的情况下，我们有

$$\mathbb{D}^{\mathrm{o}}_{2k+2} = \overline{\mathbb{D}}^{\mathrm{o}}_{2k+2} \cup \{(1, 2k+1)\},$$

它与$\mathcal{U}_{T_{n,\ 4}} = \mathcal{U}_{T_{n,\ 4}} \cup \{\tilde{\tau}_n\}$一一对应，其中表 $\tilde{\tau}_n$ 2中的例外分拆（由于不能使缺失部分的数量达到最大，因此不允许出现在 U 中）被映射到$(1, 2k+1)$。数值例子表明，这个特定分拆在对应关系KN^{-1}下会产生不符合预期的行为：其对应的图不满足保证不可细化性的结构约束（与例3.26类似），因此必须从双射中移除。

5. 最大部分为 $2n-4$ 的非三角权

在最后一种情形中，我们考虑非三角权为$T_{n,\ n-2k+1}$、最大部分等于 $2n-4$ 的极大不可细分分拆，并旨在证明，对于 $8 \le 2k \le n-2$，有

$$\#\widetilde{\mathcal{U}}_{T_{n,n-2k+1}} = 1 + \#\mathbb{D}^{\mathrm{e}}_{2k} = 1 + \#\mathbb{D}_k.$$

我们通过再次构造双重嵌入来建立这一对应关系，该构造将在随后的两个小节中给出。在此情形下，非三角情形中不可细化分拆集合的基数分析根据 d的取值分为两个子情形。两种情形都得出相同的组合结论，这些结论涉及与集合 $\mathbb{D}_k$ 的对应关系，而该集合由 k 的互异部分分拆构成：

▷ 情形 $d=3$ （或 $2k=n-2$）：在此设定下，分拆 $\widetilde{\sigma}_n$ 所在表2 中，属于$\widetilde{\mathcal{U}}$。为继续进行几何刻画，我们得到$\mathcal{U}$，办法是去掉该$\widetilde{\ }$分拆，即$\mathcal{U}=\overline{\mathcal{U}\setminus\{\widetilde{\sigma}_n\}}$。随后可证，所得集合$\mathcal{U}$ 等势于 $\mathbb{D}_k$。此处，“+1”项在不可细化分拆总数中，恰好由计入此前被去掉的分拆 $\widetilde{\sigma}_n$；

▷ 情形$\mathcal{U}$ 然而，在这种情况下，分拆k的互异部件，因此$\mathcal{U}$ 与杨结构之间的$\widetilde{\ }$正确双射，我们识别并移除一个特定分拆

$$\zeta_{n,k}\overset{\text{def}}{=}(1,2,\ldots,n-k-3,n-k-1,\ldots,n-3,n-2+k,2n-4)\in\overline{\mathcal{U}}.$$

由此可知，$\mathcal{U}\setminus\overline{\{\zeta_{n,k}\}}$ 与 $\mathbb{D}_k$等势。

与前述情形一样，我们通过两个步骤建立双重嵌入。需要注意的是，情形 $d=3$ 和 $d\neq 3$ 之间的区别在以下推导中将不再使用。尽管底层集合的定义不同，但几何步骤和证明逻辑在每种情况下仍然成立；如上文所述，计数论证有效地弥补了这些差异，从而确保两种情况下得到相同的数值结果。

设 $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_t)$为一个分拆，使得

$$\lambda\in\begin{cases}\overline{\mathcal{U}}_{T_{n,n-2k+1}} & \text{if } d=3,\\ \overline{\mathcal{U}}_{T_{n,n-2k+1}}\setminus\{\zeta_{n,k}\} & \text{if } d>3.\end{cases}$$

关于 Y_{S_λ} 的结构性质，可以很容易地发现，引理 3.1 至引理 3.8 中在三角形情形下证明的所有结果在此情形下也成立。因此，与上一节 3 一样，通过 KN 变换得到的杨图呈现出这样的几何图案：一个主正方形区域，以及紧邻其右侧的单个附加列（额外列）。与第 3 节所分析的三角形情形相比，唯一显著的区别在于主对角线上的权有所不同。以下结果将这一结构变化形式化。

命题5.1。 设 $\lambda\in\overline{U_{T_{n,\ n-2k+1}}}$。那么 Y_{S_λ} 中的格子总数为

$$\#Y_{S_\lambda}=2n-4+2k.$$

因此，主对角线上钩长之和为 $2n-4+2k$。

证明。 图中的格子总数可以通过对每一行的格子数求和来计算:

$$\begin{aligned}
\#Y_{S_\lambda} &= \sum_{i=1}^{n-2} \#R_i \\
&= \sum_{i=1}^{n-2} h_{i,1} - (\#C_1 - i) \\
&= \sum_{i=1}^{n-2} h_{i,1} - \sum_{i=1}^{n-2} \#C_1 + \sum_{i=1}^{n-2} i \\
&= T_{n,n-2k+1} - (n-2)(n-2) + T_{n-2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} - (n-2k+1) - (n-2)^2 + \frac{(n-2)(n-1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}(4n - 8 + 4k) \\
&= 2n - 4 + 2k.
\end{aligned}$$

□

注意，这证明了嵌入的第一部分，即对于上文定义的$\mathcal{U}$ 的每个分拆 λ ，都对应一个权为 k的不同部件分拆。

最后，我们通过考虑 $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_l) \in \mathbb{D}_k$ 并定义$\eta^* = (\eta_1, \ldots, \eta_l, n-2)$ 和 $2\eta^* = (2\eta_1, \ldots, 2\eta_l, 2n-4)$，来证明逆命题。在这些定义下，满足以下条件的杨图 $Y_{2\eta^*}$

$$\begin{aligned}
h_{1,1} &= 2n-4, \\
h_{i,i} &= 2\eta_{l-(i-2)}, \qquad 2 \le i \le l+1, \\
a(c_{i,i}) &= l(c_{i,i}) + 1, \qquad 1 \le i \le l+1,
\end{aligned}$$

定义了一个权为$T_{n,n-2k+1}$的不可细化分拆。

如上所述，许多结果与第 3 节中的结果相同。特别是，引理 3.13至引理3.18 中的性质在此情形下仍然成立。因此，我们只需证明以下关于权计算的命题。

命题 5.2. 设 $\eta \in \mathbb{D}_k$ ，并令 $\lambda = S^c_{2\eta^*}$ 为与杨图 $Y_{2\eta^*}$ 相关联的分拆，其中 $S_{2\eta^*} = \mathrm{KN}^{-1}(Y_{2\eta^*})$。则 λ 满足

$$\lambda \vdash T_{n,n-2k+1},$$

其中 $8 \le 2k \le n-2$。

证明。 λ的权等于 Y_{η^*}第一列中钩长之和。因此，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-2} h_{i,1} &= h_{1,1} + \sum_{i=2}^{n-2} h_{i,1} \\ &= (2n-4) + \sum_{i=2}^{n-2} \big(l(c_{i,1}) + 1 + a(c_{i,1})\big) \\ &= (2n-4) + \sum_{i=1}^{n-3} i + \sum_{i=1}^{l} 2\eta_i \\ &= 2n - 4 + \frac{(n-3)(n-2)}{2} + 2k \\ &= T_{n,n-2k+1}.\end{aligned}$$

□

为完成对 λ不可细化性的证明，我们沿用第3.2.1节中提出的相同思路，具体依赖引理3.21、3.22、3.23和3.24。引理3.23 和引理3.24 的证明完全相同。另一方面，引理3.21和引理3.22的证明只需针对当前情形作简单调整，现列出如下以求完整。

证明（引理*3.21*）。我们沿用第3.2.1节中引理3.21的证明方法，得到:

$$s_\alpha = \eta_{l-(i-2)} + \eta_{l-(j-2)}.$$

现在，假设 $\alpha + 1 \neq i,\ j$。那么，由于 $\eta \vdash k$，我们有 $s_\alpha = \eta_{l-(i-2)} + \eta_{l-(j-2)} \leq k < n-2$。现在，由于 $s_\alpha = n - 2 - \eta_{l-(\alpha-1)}$，因此

$$n - 2 = \eta_{l-(i-2)} + \eta_{l-(j-2)} + \eta_{l-(\alpha-1)} \leq k < n-2,$$

矛盾。
不失一般性，现在假设 $\alpha = i - 1$。于是我们有

$$n - 2 = \eta_{l-(j-2)} + 2\eta_{l-(i-2)}.$$

计算

$$\eta_{l-(j-2)} + \eta_{l-(i-2)} = \eta_{l-(j-2)} + \frac{n-2-\eta_{l-(j-2)}}{2} = \frac{n-2+\eta_{l-(j-2)}}{2},$$

由于 $\eta \vdash k$，我们得到

$$n - 2 + \eta_{l-(j-2)} \leq 2k \leq n-2,$$

这又导出了矛盾。 □

证明（引理 *3.22*）。 根据这些假设，我们有

$$s_\alpha = h_{i,i} = 2\eta_{l-(i-2)}.$$

与原证明一样，我们通过区分以下三种可能的情形来进行： $s_\alpha < n-2$、$s_\alpha = n-2$或 $s_\alpha > n-2$。

在第一种情形下，我们按照原证明中的相同方法进行，并得到完全相同的结论。假设 $s_\alpha = n-2$，由方程（12）可得

$$2\eta_{l-(i-2)} = s_\alpha = n - 2 \geq 2k,$$

这就产生了矛盾，因为 η 中没有任何一部分可以大于 k。最后，假设 $s_\alpha > n-2$，于是 $s_\alpha \geq n-1 > 2k$。因此， $\eta_{l-(i-2)} \geq k$，再次产生矛盾。□

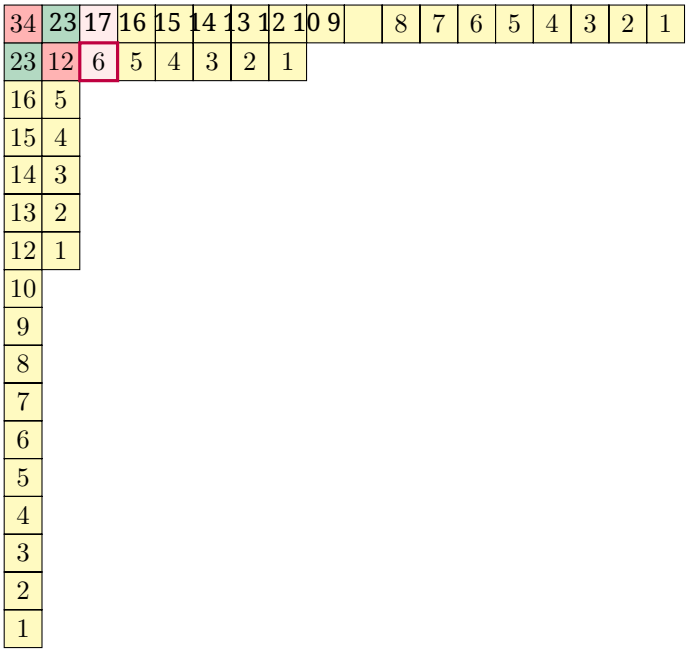


图 9. 分拆 $\zeta_{19,6}$ 的杨图，用以说明 KN^{-1} 的非一致性行为。

根据前面的讨论，我们得到了本文最后一项主要贡献。

定理 5.3. 设 $\eta \in \mathbb{D}_k$，并设 $\lambda = S^c_{\eta^*}$ 为与杨图 Y_{η^*} 相关联的分拆，其中 $S_{\eta^*} = \mathrm{KN}^{-1}(Y_{\eta^*})$。则 λ 是不可细化的。特别地，

$$\lambda \in \begin{cases} \overline{\mathcal{U}}_{T_{n,n-2k+1}} & \text{if } d = 3, \\ \overline{\mathcal{U}}_{T_{n,n-2k+1}} \setminus \{\zeta_{n,k}\} & \text{if } d > 3. \end{cases}$$

前述结果表明，对于 $8 \le 2k \le n-2$，$T_{n,n-2k+1}$ 的极大不可细分分拆的个数与 $1+\#\mathbb{D}_k$ 一致。如前所述，在处理例外情形之后，这一对应关系是一个双射。在情形 $d=3$ 中，“+1”项由分拆 $\tilde{\sigma}_n$ 来解释，该分拆是不可细化的，但位于主族$\mathcal{U}$之外。相反，对于 $d>3$，“+1”项由分拆 $\zeta_{n,k} \in \mathcal{U}$ 表示，必须将其排除，以便建立剩余集合与 $\mathbb{D}_k$ 之间的等势。

上述双射恰有一个障碍，由分拆表示为$\zeta_{n,\ k}$，其在 KN 下的像是单部分分拆(k)，根据定义（如第 2.1节所述要求）予以排除。最后，我们通过一个例子说明，当 $d>3$ 时，省略这一项的必要性。

例5.4。 考虑分拆

$$\zeta_{19,6} = (1, 2, \ldots, 10, 12, 13, \ldots, 16, 23, 34) \in \overline{\mathcal{U}}_{T_{19,8}}.$$

图中所示的杨图9 用红色标出了这样一个单元格：根据 Keith–Nath 对应关系，其钩长对应于分拆(6)。由于(6) 不是互异部件分拆，因此分拆$\zeta_{19,6}$ 必须排除在定理5.3所述的对应关系之外。

	三角形情形	非三角情形 $\lambda_t = 2n-5$	非三角情形 $\lambda_t = 2n-4$
权	T_n	$T_{n,n-2k}$	$T_{n,n-2k+1}$
左上区域图的	正方形 + 额外的一列	正方形	正方形 + 额外的一列
对称性	准对称	自共轭	准对称
对角线编码	互异偶数部分	互异奇数部分	互异偶数部分
目标分拆	$\mathbb{D}_k = \mathbb{D}^{e}_{2k}$	$\mathbb{D}^{o}_{2k+2}$	$\mathbb{D}_k = \mathbb{D}^{e}_{2k}$

表4. 三角形情形与非三角情形的比较。

结论

本文基于数值集与杨图之间的 Keith–Nath 对应关系，采用几何方法研究不可细化分拆。核心结果基于一种钩长判据，该判据以纯组合和图示术语刻画不可细化性，无须借助计数论证。运用这一框架，我们重新考察并统一了若干已知的极大不可细分拆与互异部件分拆之间的对应关系。

尽管三角形情形和非三角形情形分别处理，但二者遵循的结构却极为平行。为方便读者，我们在表4 中总结了这两种情形的主要特征，并突显它们之间的紧密类比关系。

本文提出的几何视角为未来研究指明了若干方向。可能的拓展包括研究非极大不可细分分拆、图在受控形变下的可细分现象，以及钩长对称性与其他类别受约束分拆之间的相互作用。更一般地说，研究结果表明，杨图的几何性质为理解分拆的细分性质提供了一种自然且灵活的语言。

声明与陈述

作者没有需要披露的相关财务或非财务利益。R. Aragona、L. Campioni 和 R. Civino 撰写了论文的主要正文。所有作者均审阅了稿件。数据可用性声明：本研究未生成或分析任何数据集，因此没有可供共享的数据。

参考文献

[ACC26] R. Aragona、L. Campioni 和 R. Civino，极大不可细分分拆的数量，即将在《拉马努金杂志》上发表（2026）；预印本 arXiv: 2206.04261。可见于 https://arxiv.org/abs/2206.04261。[ACCL22] R. Aragona、L. Campioni、R. Civino 和 M. Lauria，三角数的不可细化分拆中的最大部分，《数学方程》**96**（2022），第 6 期，1339–1363。[ACCL23] ，不可细化分拆的验证与生成，《信息处理快报》**181**（2023），106361。[ACGS22] R. Aragona、R. Civino、N. Gavioli 和 C. M. Scoppola，正规化子链中的互异部分不可细化分拆，《离散数学快报》**8** 2022 72 77 4370061（），–。MR AN [20]

G. E. Andrews 和 D. Newman，整数分拆中的最小排除数，《整数序列杂志》**23**（2020），第 2 期，文章 20.2.3，11。[And98] G. E. Andrews，分拆理论，第 2 版，剑桥大学出版社，1998。[BM20] C. Ballantine 和 M. Merca，最小排除数与彩色分拆，《洛塔尔·科姆宾研讨会》**84B**（2020），文章 23，12。

[BNST23] H. E. Burson、H. Nam 和 S. Sisneros-Thiry，关于与数值半群对应的整数分拆，《数学研究成果》78（2023），第 5 期，193。[Cam26] L. Campioni，互异部分不可细化分拆与数值半群，即将在《意大利数学联合会通报》上发表（2026），预印本 arXiv:2601.10227，见 https://arxiv.org/abs/2601.10227。[CHEK15] H. Constantin、B. Houston-Edwards 和 N. Kaplan，数值集、核分拆与多胞体中的整数点，《组合与加法数论》，纽约数论研讨会，施普林格，2015，第 99–127 页。[FP15] A. S. Fraenkel 和 U. Peled，驾驭难以处理的最小排除值函数，《无机会游戏》第 4 卷，数学科学研究所出版物，第 63 卷，剑桥大学出版社，纽约，2015，第 77–94 页。[HSS22] B. Hopkins、J. A. Sellers 和 D. Stanton，Dyson 的 crank 与整数分拆的 mex，《组合理论杂志 A 辑》185（2022），论文编号 105523，10。[KBEM22] P. S. Kaur、S. C. Bhoria、P. Eyyunni 和 B. Maji，互异部分分拆中的最小排除数，《国际数论杂志》18（2022），第 09 期，2015–2028。[KN11] W. J. Keith 和 R. Nath，具有指定钩集的分拆，《组合学与数论杂志》3（2011），第 1 期，39。[OEI] 在线整数数列百科全书，电子版发布于 https://oeis.org/，访问日期：--。[SY21] M. Suer 和 M. Yeşil，通过杨图及其半群环研究对称与伪对称数值半群，《韩国数学会杂志》58 6，1367 2021 1383（），第 – 期。[TKG19] N. Tutaş、H. İ. Karakaş 和 N. Gümüşbaş，杨表与 Arf 分拆，《土耳其数学杂志》43（2019），第 1 期，448–459。[Yeş25] M. Yeşil，几乎对称数值半群的杨图分解，《数学研究成果》80（2025），第 7 期，论文编号 217，23。MR 4968362

A179009　　2025 12 30