arXiv:2602.01292v1 [math.QA] 1 Feb 2026

广义性颇强的因子化代数

Clark Barwick

版本 2 – 2026年2月

这是对一个数学框架的初步尝试，借助它可以研究几何相当一般的时空上的量子场论。我们将通过这些理论的因子化代数来研究它们。

因子化代数刻画了量子场论的可观测量空间所具有的结构。粗略地说，若 M 是一个时空流形，那么其上的一个因子化代数 F会在 M的每个开子集 $U \subseteq M$上赋予空间 $F(U)$，其中包含可以在 U内进行的测量。给定互不相交的开集 U 和 V 以及一个包含关系 $U \sqcup V \subseteq W$，便可将这些测量组合起来，从而得到一个映射$F(U) \otimes F(V) \to F(W)$。相干地汇集这些运算，就得到了流形背景下因子化代数的定义，这一理论由 Costello–Gwilliam 研究 [18; 19]。

在全纯语境中，因子化代数刻画了全纯共形场论中算子乘积展开的形式性质。在这一理论中，时空流形 M 被（例如）黎曼曲面 X取代。于是，分解代数是一族定义在各种幂 X^n上的层（某种适当类型的层，通常是 D-模） A_n，并附有一些数据，以确保当 $x_1, \ldots, x_n \in X$ 是互不相同的点时，存在局部同构

$$(A_n)_{(x_1,\ldots,x_n)} = (A_1)_{x_1} \otimes \cdots \otimes (A_1)_{x_n} .$$

A_1 的茎是共形场论中局部算子的空间。由此得到的是 Beilinson–Drinfeld 意义下的因子化代数理论（[10]）。

在这一表述中，因子化代数已成为现代几何表示论的核心结构，尤其是在 Beilinson–Drinfeld 著作出版后的二十年间，围绕几何朗兰兹猜想所形成的宏大概念体系中。参见例如Francis–Gaitsgory 的工作 [21],Gaitsgory [25; 27; 26], Gaitsgory–Lysenko [28], Hennion–Kapranov [34], Ho [37; 38],Henriques [36], Raskin [40; 41]。

流形语境与全纯语境之间的关系似乎是一种对偶性。Costello–Gwillia m提出 [18]，拓扑意义下分解代数的余茎应当与附属于它的几何意义下分解代数的茎一致。他们通过与顶点算子代数进行比较，证明了在 $\boldsymbol{A}^1_C$ 上的这一结论。一般而言，这种比较究竟能在何处 进行，似乎并不明确。

流形 M 上的分解代数中，有一类是局部常值因子化代数，它们刻画了拓扑量子场

论的可观测量空间。 M 上的局部常值因子化代数也可以等价地描述为嵌入圆盘的某个适当拟 operad 上的代数。例如， $\boldsymbol{R}^n$ 上的局部常值因子化代数是 E_n-代数。正如这个例子所表明的，局部常值因子化代数依赖的不仅仅是 M 的同伦类型（与局部常值层不同）。尽管如此，我们仍希望将其视为因子化代数的同伦语境。

为了理解这些背景下的因子化代数，人们通常会利用所研究的几何对象的特殊性质，例如流形上的每个点都包含在一个嵌入的开圆盘中；或者构造 Ran 空间这样的大型对象，而其几何性质脆弱且技术复杂。然而，Raskin 提出 [40] ——Hennion–Kapranov 后来重新审视了 [34]——一种分解结构的形式体系，在很大程度上避开了这些特殊性和技术难题。与代数几何背景下的层论框架类似，这一形式体系更适合用层论框架中的因子化代数语言来表达。

我们不禁想看看这种方法能走多远——能否找到一种极简的形式体系，使因子化代数在任何几何背景下都有意义。目标并非为了追求一般性，而是揭示理论的骨架。

一方面，这使得在（至少）全纯和同伦语境中的因子化代数理论能够处于平等地位，从而可以进行有意义的比较。另一方面，这套形式体系将因子化代数的技术拓展到了许多新的语境中。各种算术语境中的因子化代数尤其值得关注。特别是，*算术量子场论* 的可观测量——Kim [39] 和 Ben-Zvi–Sakellaridis–Venkatesh[11] 曾预言其存在——应当在 Clausen–Scholze 的解析几何语境中构成因子化代数。

本文旨在顺应这一诱惑。

概要

我们的首要主张是：为了在某个几何对象 X 上定义观测量代数，我们必须借助其上的另一种结构 X ——一种常常被略去不提的*可隔离结构* 。 X 上的可隔离结构，是用来判定 X 中的两个点是否*相距甚远* 的数据——或者至少，能否使它们相距足够远，从而组合在这些点上进行的测量。

对这种结构的需要反映了量子场论中的*局部性*原理。实质上，该原理指出，一项实验的结果不应依赖于远处实验的结果。Haag 在 20 世纪 50 年代强调了这一原理的重要性，而它在可观测量代数的 Haag–Kastler 公理体系中起着关键作用 [30]。该原理稍经细化的版本——*簇分解原理*——指出，描述一对相距遥远的过程的散射矩阵会分解为各个单独过程的散射矩阵之积 [45, 第 4]章。Weinberg 论证 [44] ，这一原理、洛伦兹不变性与量子力学共同蕴含量子场论。

时空中的两点是否相距遥远，通常不是一个“是或否”的问题，也不预设 X 上已有距离概念，例如度量。相反， X 上的可隔离结构提供了一个*模空间* ，其中包含各种

将点对孤立的方式。我们要求这个模空间是与 X 同类型的几何对象。换言之，为了指定 X 上的可隔离结构，需要对每一对 T 点 $x,\ y\colon T \to X$ 指定一个高阶群胚（或空间）$\ulcorner x \nsim y \urcorner$。空间 $\ulcorner x \nsim y \urcorner$ 表示在不改变任何可能的量子场论中的任何可观测量的前提下，将 x 与 y 彼此孤立的各种方式。这些空间汇合成一个带有映射 $X^{1\oplus 1} \to X \times X$ 的单一对象 $X^{1\oplus 1}$。在 T 点上，$X^{1\oplus 1}(T) \to X(T) \times X(T)$ 在 (x, y) 上方的纤维是空间 $\ulcorner x \nsim y \urcorner$。因此，$X^{1\oplus 1}$ 是 X 中由孤立点对构成的构形空间。

可隔离对象理论与层叠理论互为补充。在叠 Y 中，两个 T-点 x、y 之间有路径空间 $\ulcorner x = y \urcorner$，它是使 x 与 y 成为“相同”的各种方式所构成的空间——或者至少，是我们用来连接 x 与 y 的各种路径所构成的空间。若 Y_1 是 Y 的路径空间，那么空间 $\ulcorner x = y \urcorner$ 就是端点映射 $Y_1(T) \to Y(T) \times Y(T)$ 在 (x, y) 上的纤维。叠实质上是一个图表 $Y_\bullet$，由高阶路径空间及其间的映射组成，并以某个组合范畴为索引，例如 Kan 的单形范畴 Δ。类似地，我们将把可隔离对象 $X^\bullet$ 定义为一个由构形空间 X^λ 及其间的映射组成的图表。例如，可隔离对象的结构将包含 $X^{2\oplus 3\oplus 2}$，它是 X 中点组成的七元组 $(x_1, \dots, x_7)$ 的空间，这些点分为三个“簇” $\{x_1, x_2\}$、$\{x_3, x_4, x_5\}$ 和 $\{x_6, x_7\}$。这个图表以某个由图构成的范畴 $\boldsymbol{D}$ 为索引，这类图称为余图，我们将在 §1 中详细研究。事实证明，余图范畴及其姊妹范畴 $\boldsymbol{E}$ 的形式性质对于我们的论述至关重要：一方面，我们将在 §2 中研究可隔离结构；另一方面，我们将研究二重对称幺半结构，这部分内容将在本引言后文中讨论，并在 §4 中详述。

在许多例子中，可隔离结构一直是隐含的，因为我们已经能够以集合论的方式描述 X，从而可以有意义地询问 X 中的两个点是否确实不同。例如，若 X 是流形，那么通常令 $X^{1\oplus 1}$ 为 $X \times X$ 中对角线的补集。

相比之下，假设我们想要考虑 局部常值的 定义在 X 上的因子化代数——也就是拓扑量子场论的可观测量。由于局部常值层只依赖于同伦类型 $\Pi(X)$，我们或许可以从这里着手，但我们已经看到，无法以一种仅涉及 X 的方式来定义定义在其上的局部常值因子化代数。那么还需要什么额外结构？一旦纳入各种（分层）同伦类型 $\Pi(X^\lambda)$ 及其之间的映射这些信息，我们就能恢复定义在 X 上的局部常值因子化代数。这正是一个 可隔离空间所包含的数据；我们将其视为对 X 的同伦类型的增强。可隔离空间是“同伦语境”中的基本对象，我们将在§3 中探讨这一语境。

例如，在附属于 $\boldsymbol{R}^n$ 的可隔离空间中，有一个点 x，它在可缩选择的意义下唯一；但空间 $\ulcorner x \nsim x \urcorner$ 是一个 $(n-1)$-球面。这种说法在记号上自相矛盾，但在这里，不妨将 $\ulcorner x \nsim x \urcorner$ 视为这样一个空间：它由所有将两份 x 彼此移开、同时不改变任何拓扑量子场论的可观测量的方式组成。正是这一特性使我们能够将 $\boldsymbol{R}^n$ 上的局部常值因子化代数与 E_n-代数联系起来。实际上，分解代数 F 只允许在孤立点对上发生测量时将其结合起来，因此我们得到一族由 S^{n-1} 参数化的乘法 $F_x \otimes F_x \to F_x$，这恰是 E_n-代数结构所要求的。

事实上，结果表明，附属于 $\boldsymbol{R}^n$ 的可隔离空间可以与一个组合定义的对象等同。我们也将在§3中证明这一点。我们将此与 Cepek 对 $\boldsymbol{R}^n$的 Ran 空间的组合描述联系起来，由此立即可得， $\boldsymbol{R}^n$ 上的局部常值因子化代数与 E_n-代数等同。

说到 Ran 空间，迄今为止我们的论述并未明确说明可隔离结构相较于通常的 Ran 空间究竟有什么优势（如果确实存在优势的话）。毕竟，Ran 空间的用途是参数化几何对象中互不相同的点所组成的元组。事实上，对于许多例子（即“2-骨架”可隔离空间），给出一个可隔离结构等价于将 Ran 空间作为跨中的交换幺半群给出。

然而，在许多量子场论的例子中，人们希望追踪的不仅是点处的可观测量，还包括沿着延拓对象的可观测量。因此，在许多情况下，实际需要具有可隔离结构的并不是 X 这个“时空对象”本身，而是我们称为观察者叠 $\mathcal{O}_X$的一个相关对象。观察者叠是一个额外的数据，可以极其一般；实际上，它是到 X中的映射（通常是嵌入）的某个模空间，用来表示一个可观测量可能具有的支撑形式。例如，如果 X 是复数上的一个簇，那么可以将 $\mathcal{O}_X$定义为 X的子簇所构成的希尔伯特栈。我们将在§2.7中讨论这一点。

在这类情形下，我们不知道有何种 Ran 空间的定义足以恢复这一点。Hennion、Melani 和 Vezzosi [35] 已在这一方向上迈出一步，他们研究的是 $\boldsymbol{C}$上的曲面；他们对分解结构的刻画，允许比我们在此所能做到的更复杂的可观测量组合。（不过，参见5.7，其中提出了一种旨在刻画此类组合的推测性策略。）

我们的第二个主张是：可隔离对象的几何由二重对称幺半结构控制，而分解结构则是用这些结构来定义的。要解释这一说法，我们必须说明，可隔离对象的“几何”以及“二重”对称幺半结构分别是什么意思。

20世纪中叶，法国代数几何学派认识到，为了在拓扑空间（或类似对象） X 上“做几何”，所需的结构是由局部环（或类似对象） $\mathcal{O}$ 构成的层。 $\mathcal{O}$ 的截面是函数。我们要求 $(X, \mathcal{O})$ 局部同构于某些基本对象（例如，带有光滑函数的欧几里得空间、带有全纯函数的复Stein流形、带有正则函数的仿射概形，或配有自身函数的仿射刚性空间）。环层会导出模范畴层：首先在基本对象上取适当的范畴 $\boldsymbol{A}(X)$，其中的对象是 $\mathcal{O}$-模，然后通过粘合将 $\boldsymbol{A}$ 扩展到所有几何对象上。例如，我们就是这样把赋值Spec $R \mapsto \mathbf{Mod}(R)$ 扩展为概形上的赋值 $S \mapsto \mathbf{QCoh}(S)$ 的。

在20世纪60年代代数几何的发展过程中，人们逐渐清楚地认识到，层 $X \mapsto \boldsymbol{A}(X)$ 才是真正承载几何内容的对象。例如， $\boldsymbol{A}(X)$ 中的 Ext-群是 X 的上同调群，而上同调的各种特征——结构、函子性和对偶性——也都得以用层 $\boldsymbol{A}$ 优雅地表达。 $\boldsymbol{A}(X)$ 是否恰好是一个关于其单位对象的模范畴，已不再那么重要。例如，我们可以通过 ℓ-进层的上同调来研究有限域上的簇，从而对它们的几何行为作出与拟凝聚层上同调截然不同的描述。

因此，将几何对象的概念范畴化是很自然的：我们不再考虑环化空间 $(X, \mathscr{O})$，而是考虑一对 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$，其中包括一个由几何对象构成的范畴 $\boldsymbol{X}$，以及一个对称幺半范畴的层 $\boldsymbol{A}$。[1] 我们将 $\boldsymbol{A}$ 视为对象 $\boldsymbol{X}$ 上的“层理论”。

对象 $X \in \boldsymbol{X}$ 上的可隔离结构如今在层的对称幺半范畴 $\boldsymbol{A}(X)$ 上造就了一种「视差」。事实上，考虑一下，如果我们只是将函子 $\boldsymbol{A}$ 应用于每个对象 X^λ，会发生什么。其结果是一个由组合范畴 $\boldsymbol{D}$ 索引的范畴图表 $\boldsymbol{A}(X^\bullet)$。这个图表在两种意义上具有乘法结构。举例来说，假设 $F,\ G \in \boldsymbol{A}(X)$。外部张量积 $F \boxtimes G$ 属于 $\boldsymbol{A}(X^2)$，其在 (x, y) 处的茎为 $F_x \otimes G_y$。$\boldsymbol{A}(X^\bullet)$ 上的两种乘法结构，分别来自将 $F \boxtimes G$ 限制到一方面的轨迹 $\{x = y\}$，或另一方面的轨迹 $\{x \neq y\}$。也就是说，沿对角线 $X^1 \hookrightarrow X^2$ 拉回 $F \boxtimes G$，便得到通常的张量积——记作 $F \otimes G$；对偶地，也可以沿「补集」 $X^{1 \oplus 1} \hookrightarrow X^2$ 拉回 $F \boxtimes G$，从而得到另一种张量积，记作 $F \otimes G$。这两种乘法结构之间的相互作用，正是使分解代数理论得以成立的代数特征。

—

我们的组合范畴为研究这种结构提供了一个合适的视角。范畴 $\boldsymbol{D}$ 具有两种对称幺半结构：一种是左侧对称幺半结构 $\underline{\oplus}$，即余图的不交并；另一种是右侧对称幺半结构 $\overline{\oplus}$，即余图的“连通和”或“联结”。右侧结构与左侧结构并非严格意义上的交织（否则它们就会根据 Eckmann–Hilton 定理而重合！）。相反，存在一个不可逆的交织映射

$$(A \mathbin{\overline{\oplus}} B) \mathbin{\underline{\oplus}} (C \mathbin{\overline{\oplus}} D) \to (A \mathbin{\underline{\oplus}} C) \mathbin{\overline{\oplus}} (B \mathbin{\underline{\oplus}} D)\,.$$

范畴论学家早已拥有描述这种结构的语言 [4; 5]：$\boldsymbol{D}$ 是一个二重对称幺半范畴。（此外，还有一个稍微一般化的概念，称为双幺半双范畴以及其中的双幺半对象 [3; 12]。）更早之前，Borcherds [13]早在20世纪90年代末就指出了双重幺半范畴的重要性（尽管当时没有使用这个名称）。大约在同一时期，Beilinson 和 Drinfeld 在他们关于手征代数的鸿篇巨著 [10]中运用了这种结构的一个变体，并将其称为“复合张量范畴”。有了余图范畴，我们不难建立一套关于一般二重对称幺半范畴的实用理论（§4）。

事实上，我们的范畴 $\boldsymbol{D}$ 是包含一个关于左张量积的交换幺半群的普遍二重对称幺半范畴。这意味着，对称幺半范畴可以不那么经济地描述为一个二重对称幺半函子 $\boldsymbol{D} \to \mathbf{Cat}$。这种不够经济的描述使我们能够引入所谓的视差。视差对称幺半范畴是一个松对称幺半函子 $\boldsymbol{D} \to \mathbf{Cat}$（或者等价地，是一个从 $\boldsymbol{D}$ 到对称幺半范畴的函子）。特别地，$\boldsymbol{A}(X^\bullet)$ 是一个视差对称幺半范畴。

现在，如果 $\boldsymbol{V}_\bullet$ 和 $\boldsymbol{W}_\bullet$ 是视差对称幺半范畴，那么我们可以要求函子 $\boldsymbol{V}_\bullet \to \boldsymbol{W}_\bullet$ 是左 对称幺半或右 对称幺半。因子化代数在 X 上、取值于层理论 $\boldsymbol{A}$ 的系数，是右对称幺半函子 $1_\bullet \to \boldsymbol{A}(X^\bullet)$。

[1] 当 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$ 属于一个六函子形式体系时，几何的全部工具便都可用。我们希望在未来工作中进一步探讨这一结构与分解代数理论之间的相互作用。

当 $X^\bullet$ 是可隔离空间，且 $\boldsymbol{A}$ 是可构造层理论时，我们得到（5.4）可构造与局部常值因子化代数的理论。这些因子化代数描述了拓扑量子场论。

分解叠（5.5）是最基本、结构最少的一类分解代数。不过，这并不意味着没有有趣的例子。我们将在相当广泛的一般性下给出一个简单的例子——*Beilinson–Drinfeld* 格拉斯曼量。对于对象 X 以及定义在 X 上的带点叠 B，我们在适当的观察者叠 5.6 上构造格拉斯曼分解叠 $O^\bullet_X$。当 X 是定义在 $\boldsymbol{C}$ 上的曲线时，$B = BG$ 是定义在 X 上的群概形，且 $G\ O_X = X$ 时，这个格拉斯曼量便还原为 Beilinson–Drinfeld 引入的格拉斯曼量。借助我们的形式体系，我们可以令 X 为 Fargues–Fontaine 曲线，并令 O_X 为“镜像曲线” Div^1；这相当于对 Scholze–Weinstein 的一个构造作分解增强 [42]。

局限性

我们描绘了一幅在相当广泛的一般性下适用的分解结构图景。不过，也只是相当广泛。我们的方法仍有若干缺陷，其中我们只着重指出四点。

1. 本文没有将流形 背景下的因子化代数——也就是，Costello–Gwilliam 意义下的因子化代数——纳入我们的框架。我们希望在后续工作中重新探讨这一点。2. 我们尚不清楚如何在我们的图景中发展一种或许可以称为‘ρ版本’的因子化代数。这样一来，我们就能以比本文所能做到的更复杂的方式组合扩展可观测量/算子。我们在本文末尾（5.7）对这种理论的代数形式作了一些推测。目前，我们还有许多未知之处。3. 本文没有尝试从手征代数的李代数描述这一 Koszul 对偶视角进行考察，我们目前也尚未完全理解如何将这套理论纳入我们的图景。这似乎是一条很有前景的研究方向。4. 或许我们这一图景最令人不满意之处在于，它目前还只是一个图景。我们的最终目标是理解算术量子场论，但本文只确定了这一形式体系的一些初步组成部分。此处研究的对象似乎在一种较弱的意义上是“正确的”：它们捕捉了某些类型的量子场论中观察到的结构，同时也是自然原则与简单形式体系共同作用的产物。

约定

本文采用“隐式 ∞”约定，因此默认所有代数结构（范畴、拓扑斯、操、交换代数，等等）都应按恰当的同伦意义（∞-范畴、 ∞-拓扑斯、 ∞-拟 operad、 E_∞-代数，等等）来理解。

我们使用“空间”一词来指代其他地方可能称为“anima”、“∞-群胚”或“同伦类型”的对象。

所有拓扑空间默认都应视为紧生成的；对拓扑空间进行的所有构造（积、映射空间、取子空间、等等）都应视需要进行 k 化。

致谢

由于这项工作历时甚久，如今我得以满怀欣喜地向许多人致谢。这里的想法于 2018 年在与 Tomer Schlank 的一次交谈中开始慢慢成形。感谢他耐心倾听我早期那些笨拙的尝试，让我得以理解算术量子场论。

此后，Willow Bevington、Malthe Sporring 和 Lucy Spouncer 更是表现出了极大的耐心；随着这个故事不断演进，他们包容了数十个版本。他们的意见对于帮助我理解本文中那些陌生的组合结构至关重要。尤其是 Malthe 帮助我厘清了二重对称幺半结构的定义，而我们也由此真正开始理解二重代数这个奇异的新世界。

我从 Maxwell 研究所 GRIFT 研讨会的参与者那里学到了很多。与 Tudor Dimofte、Jan Pulmann 和 Dominik Rist 的交流尤其有价值，也令我深受启发。

Behrang Noohi 和 Magnus Carlson 让我注意到这与 Borcherds 关于量子顶点代数的研究之间的联系 [13]。

Owen Gwilliam 和 Pavel Safronov 的见解贯穿本文。Owen 好心地读了本文的草稿，并提出许多改进建议，也给予了我鼓励。

Emily Roff 帮助我阐明了这个故事的诸多方面。在一次特别的交谈中，她坚持让我更加认真地看待从一重到二重对称幺半范畴的相对自由构造。这最终对我理解二重代数在这个故事中的真正作用至关重要。

特别感谢 Christine Barwick、RonBarwick、Scott Morgan（又名 Loscil）、Alex Sear、Paul Simeone、Lou Vaickus 和 Maggie。

目录

1 孤立的组合学 **8**

1.1 余图 .9 1.2 孤立范畴 .10 1.3 余图的和 .11 1.4 深度滤过 .13 1.5 弥散与增生的 .16 1.6 跨度 .17

1.7 评论与问题 .18

2 可分离性结构 19
2.1 基本示例 .19 2.2 可隔离对象 .21 2.3 正则性.21 2.4 可加性 .22

2.5 骨架性.22 2.6 乘积.23 2.7 观察者栈 .24 2.8 希尔伯特概形作为观察者栈 .25 2.9 Div^1 作为观察者栈 .25 2.10 评论与问题 .25

3 可分离性空间与同伦语境 26
3.1 分层 .26
3.2 可分离性空间 .27 3.3 拟可隔离性与包络 .28 3.4 1-余图 .29 3.5 可分离性直线与 1-余图 .31 3.6 同伦语境中的 Ran 空间 .32

4 二重对称幺半结构 33
4.1 余图纤维化与指标化和 .34 4.2 余图的部分映射 .35 二重对称幺半双范畴 .35 4.4 示例 .37 4.5 二重对称幺半范畴中的二重幺半群 . . . . . 38 4.6 二重 Day 卷积 .38 评论与问题 .38

5 因子化代数 39
5.1 Ran 空间上的层 .39 5.2 视差对称幺半范畴 .40 5.3 因子化代数 .42 5.4 可构造层中的因子化代数 .42 5.5 分解叠 .43 5.6 一般性相当广泛的 Beilinson–Drinfeld 格拉斯曼量 . . . 44 5.7 评论与问题 .46

参考文献 **47**

1 孤立的组合学

贯穿本文所有工作的组合结构，是一种称为余图 [17]的特殊图。一方面，余图的顶点为点的元组编索引；这些点位于某个空间中，其中某些点对——即图中由一条边相连的点对——必须彼此不同。这引出了可隔离对象的理论（§2）。另一方面，

余图还为具有两个以弱方式相互交织的张量积的范畴中的乘法律编索引。这些范畴称为双重幺半范畴（§4）。这些结构之间的相互作用，正是因子化代数理论产生的原因。

幸运的是，余图非常简单，因此我们可以对其进行完整分类。我们的方法是利用这一事实，深入理解这些组合学。

1.1 余图

对我们而言，图 $\langle\lambda\rangle = (V, E)$ 由一个集合 $V = V\langle\lambda\rangle$ 和一个顶点上的边的对称关系 $E = E\langle\lambda\rangle \subseteq V \times V$ 组成。我们不假设 E 是非自反的；换句话说，我们允许图包含自环。若要去除这些自环，可以取极大无自反子图 $\langle\lambda\rangle_{irr} \subseteq \langle\lambda\rangle$。若要使所有顶点都有自环，则可以取自反包 $\langle\lambda\rangle_{refl} \supseteq \langle\lambda\rangle$。

我们关注满足以下条件的图 $\langle\lambda\rangle = (V, E)$： (1.1.1)

$$\forall w, x, y, z \in V \quad \{(w, x), (y, x), (y, z)\} \subseteq E \implies \{(y, w), (w, z), (z, x)\} \cap E \neq \varnothing\,.$$

出于我们将要解释的原因，这类图（或者更常见地说，它们的极大非自反子图）称为“P_4自由图”或“补图可约图”；图论学家将后一个短语缩短为“余图”。这个术语简洁明了，其吸引力胜过我们对它不加区分地采用前缀“co”的不适。因此，我们将每个满足上述条件的图 Γ 称为余图。

集合 V 上的平凡余图结构是 $V_{triv} = (V, \varnothing)$，其中任意两个元素都不彼此孤立。对于每个 $n \geq 0$，我们定义：

$$\langle\underline{n}\rangle := \{1, \ldots, n\}_{triv}\,.$$

如果 $\langle\lambda\rangle = (V, E)$ 是一个余图，那么它的取反 $\neg\langle\lambda\rangle := (V, (V \times V) \smallsetminus E)$ 也同样是余图。因此，与平凡余图处于相反极端的是完全余图 $(V, V \times V)$，其中所有元素对中的元素都彼此孤立。对于每个 $n \geq 0$，我们定义：

$$\langle\overline{n}\rangle := \neg\langle\underline{n}\rangle\,.$$

例如，这里是 $\langle\overline{5}\rangle$：

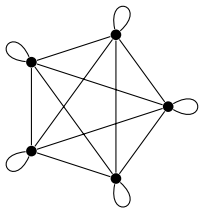
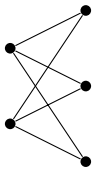


图 K_n 是极大无自反子图 $\langle n\rangle_{irr}$。

一个反例是图 P_4：。事实上，这是~~普适的~~反例。~~确实，完~~全可约性是一种遗传性质；也就是说，如果 $\langle\lambda\rangle = (V, E)$ 是余图，那么它的任意诱导子图 $\langle\mu\rangle = (W, E|W) \subseteq \langle\lambda\rangle$ 也都是余图。它

由此可知，图 $\langle\lambda\rangle$ 是余图，当且仅当 $\langle\lambda\rangle_{irr}$ 不包含图 P_4 作为诱导子图（因此余图也有另一个名称——“P_4-自由图”）。

每个等价关系都是一个余图。余图 $\langle\lambda\rangle$ 是一个相离关系当且仅当 $\neg\langle\lambda\rangle$ 是一个等价关系。相离关系也称为“不等价”关系。例如，考虑完全二部图



这是一个相离关系，通常记作 $K_{2,\,3}$。用下文讨论的记号（§1.3）表示，它是 $\langle 2 \oplus 3\rangle$。

更一般地，如果 $f : V \to W$ 是集合之间的一个映射，那么我们就得到一个相离关系 V_f，其顶点集为 V，其中 x 与 y 孤立，当且仅当 $f(x) \neq f(y)$。

本文使用无自反余图来阐释可隔离结构（§2），这类结构定义在几何对象上，使人们能够判断两个点是“不同”还是“有别”。随后，我们使用自反余图来阐释二重对称幺半结构（§4），即由交织映射关联起来的一对对称幺半结构。

1.2 孤立范畴

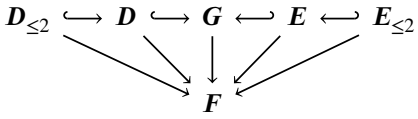
本文中将出现大量指标范畴。对我们来说，以下六个 1-范畴最为重要：

$\boldsymbol{F}$，有限集范畴；$\boldsymbol{G}$，有限余图及保关系映射范畴；$\boldsymbol{D}$，有限非自反余图及保关系映射范畴；$\boldsymbol{E}$，有限自反余图及保关系映射范畴；

$\boldsymbol{D}_{\leq 2}$，有限非交关系及保隔离映射范畴；

$\boldsymbol{E}_{\leq 2}$，有限等价关系及保等价映射范畴。

记忆口诀：$\boldsymbol{F}$ 表示“有限”，$\boldsymbol{G}$ 表示“图”，$\boldsymbol{D}$ 表示“不同”、“有区别”或“互不相交”，$\boldsymbol{E}$表示“等价”。数字2 的含义将在§1.4中变得更加明了。我们有一个图



到 $\boldsymbol{F}$ 的遗忘函子将图 $\langle\lambda\rangle$ 映射到其顶点集合 $V\langle\lambda\rangle$。这些都是笛卡尔纤维化；我们将顶行的五个范畴称为 纤维化

范畴 在 $\boldsymbol{F}$ 上。水平包含是全忠实的，并且保持和反映笛卡尔映射。

我们可以定义这些范畴的非幺变体：令 $\boldsymbol{F}_s \subset \boldsymbol{F}$ 为非空有限集与满射构成的子范畴，然后沿包含 $\boldsymbol{F}_s \hookrightarrow \boldsymbol{F}$ 拉回上面的图，从而定义 $\boldsymbol{G}_s$、 $\boldsymbol{D}_s$、 $\boldsymbol{E}_s$、 $\boldsymbol{D}_{s,\leq 2}$ 以及 $\boldsymbol{E}_{s,\leq 2}$。

取反运算 $\Gamma \mapsto \neg\Gamma$ 并不是 $\boldsymbol{G}$ 上的函子。不过，它是宽子范畴 $\imath\boldsymbol{G} \subset \boldsymbol{G}$ （由同构构成）上的函子，而且更好的是，它是 纤维化对范畴 中 $\boldsymbol{G}$ 在 $\boldsymbol{F}$ 之上的函子，正如我们将看到的（方程 (1.6.1)）。无论如何， $\neg$ 交换 $\boldsymbol{D}_{\leq 2}$ 与 $\boldsymbol{E}_{\leq 2}$ 的对象，并且交换 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的对象。

我们记 $\langle n\rangle \coloneqq \{1,\dots,n\} \in \boldsymbol{F}$。指派 $\langle n\rangle \mapsto \langle n\rangle$ 是到纤维范畴 $\boldsymbol{D}_{\leq 2}$、 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{G}$ 中的一个全忠实左伴随笛卡尔截面。对偶地，指派 $\langle n\rangle \mapsto \langle n\rangle$ 是到纤维范畴 $\boldsymbol{E}_{\leq 2}$、 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{G}$ 中的一个全忠实右伴随笛卡尔截面。

警告。 包含 $\boldsymbol{D}_{\leq 2} \subset \boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{G}$ 保留了 $\boldsymbol{D}_{\leq 2}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 中存在的所有余极限，但这些子范畴对有限余极限并不稳定。例如，假设映射 $\varphi\colon\langle\lambda'\rangle \to \langle\lambda\rangle$ 和 $f\colon\langle\lambda'\rangle \to \langle\mu'\rangle$ 在 $\boldsymbol{D}$ 中是不相容的，当且仅当存在 $i,j \in V\langle\lambda'\rangle$ 使得 $(\varphi(i),\varphi(j)) \in E\langle\lambda\rangle$，但 $f(i) = f(j)$ 在 $\langle\mu'\rangle$ 中。在这种情况下， φ 和 f 构成的跨无法在 $\boldsymbol{D}$ 中补成一个方形。不过，它在 $\boldsymbol{G}$ 中的推出是存在的。这个现象最简单的例子是：令 f 为映射 $\langle 2\rangle \to \langle 2\rangle_{irr}$，并令 φ 为唯一映射 $\langle 2\rangle \to \langle 1\rangle$；它们是不相容的，但在 $\boldsymbol{G}$ 中的推出是 $\langle 1\rangle$。

1.3 余图的和

若 $\langle\lambda\rangle = (V,E)$ 和 $\langle\mu\rangle = (W,F)$ 是余图，则令 $\langle\lambda \oplus \mu\rangle = \langle\lambda\rangle \oplus \langle\mu\rangle \coloneqq (V \sqcup W, R)$，其中 R 是满足以下条件的最大关系： $E = R|\langle\lambda\rangle$ 和 $F = R|\langle\mu\rangle$ —— 即， $\langle\lambda\rangle$ 和 $\langle\mu\rangle$ 是诱导子图。我们称其为 $\langle\lambda\rangle$ 和 $\langle\mu\rangle$ 的连通和。对偶地，令 $\langle\lambda \oplus \mu\rangle = \langle\lambda\rangle \oplus \langle\mu\rangle \coloneqq (V \sqcup W, S)$，其中 S 是满足 $\langle\lambda\rangle$ 和 $\langle\mu\rangle$ 为诱导子图的最小关系。我们称其为 $\langle\lambda\rangle$ 和 $\langle\mu\rangle$ 的不交并。

连通和 $\langle\lambda \oplus \mu\rangle$ 与不交并 $\langle\lambda \oplus \mu\rangle$ 都是余图。事实上，这两种运算在 $\boldsymbol{G}$ 上定义了两种不同的对称幺半结构，其公共单位元为 $\varnothing$。每一种对称幺半结构都分别限制为 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 上的对称幺半结构。连通和 $\oplus$ 限制为 $\boldsymbol{D}_{\leq 2}$ 上的对称幺半结构，而不交并 $\oplus$ 限制为 $\boldsymbol{E}_{\leq 2}$ 上的对称幺半结构。

不交并 $\oplus$ 与连通和 $\oplus$ 在取反下互为对偶： $\neg\langle\lambda \oplus \mu\rangle = \neg\langle\lambda\rangle \oplus \neg\langle\mu\rangle$。仔细思考这一点，就会发现两个自然变换。

首先，不交并 $V\langle\lambda\rangle \sqcup V\langle\mu\rangle$ 上的恒等映射可以视为一个态射 $\langle\lambda \oplus \mu\rangle \to \langle\lambda \oplus \mu\rangle$。更微妙的是，自然双射

$$V\langle\lambda\rangle \sqcup V\langle\mu\rangle \sqcup V\langle\nu\rangle \sqcup V\langle\xi\rangle \xrightarrow{\sim} V\langle\lambda\rangle \sqcup V\langle\nu\rangle \sqcup V\langle\mu\rangle \sqcup V\langle\xi\rangle$$

定义了一个自然态射

$$\langle(\lambda \oplus \mu) \oplus (\nu \oplus \xi)\rangle \to \langle(\lambda \oplus \nu) \oplus (\mu \oplus \xi)\rangle\,,$$

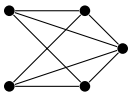
我们称之为交织子。

这个交织子不是同构，否则 Eckmann–Hilton 将意味着 $\oplus = \oplus$。相反，该交织子将 $\oplus$ 表现为关于 $\oplus$ 的正规 oplax 对称幺半函子，或者等价地，将 $\oplus$ 表现为关于 $\oplus$ 的正规 lax 对称幺半函子。数据 $(\boldsymbol{G}, \oplus, \oplus)$ 构成一个二重对称幺半范畴（在 Balteanu、Fiedorowicz、Schwänzl 和 Vogt 的意义下）[5]。我们将在下文（§4）描述这一结构的同伦相干版本。

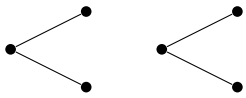
范畴 $\boldsymbol{F}$ 关于不交并 $\sqcup$ 是对称幺半的。遗忘函子 $\boldsymbol{G} \to \boldsymbol{F}$ 相对于 $\boldsymbol{G}$ 上的两种对称幺半结构都是对称幺半的。也就是说，$(\boldsymbol{G}, \oplus, \oplus) \to (\boldsymbol{F}, \sqcup, \sqcup)$ 是一个二重对称幺半函子。

这些和为余图提供了一种简洁好用的记法。我们已经介绍了平凡余图 $\langle n \rangle$ 和完全余图 $\langle n \rangle$。现在可以用这两种和将它们组合起来。

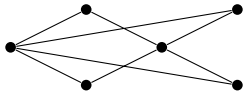
例如，我们用 $\langle 2 \oplus 2 \oplus 1 \rangle$ 表示 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上的等价关系，其等价类为 $\{1, 2\}$、$\{3, 4\}$ 和 $\{5\}$。它的取反是相离关系 $\langle 2 \oplus 2 \oplus 1 \rangle$：



再举一个例子。交织子 $\langle (1 \oplus 2) \oplus (1 \oplus 2) \rangle \to \langle (1 \oplus 1) \oplus (2 \oplus 2) \rangle = \langle 2 \oplus 4 \rangle$ 是对非连通图的包含



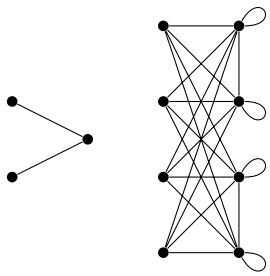
到完全二部图中



通过嵌套更多的和，我们可以表示越来越复杂的余图，例如

$$\langle (2 \oplus 1) \oplus (4 \oplus (2 \oplus 2)) \rangle ,$$

也就是



事实上，每个余图都可以用这种方式表示。也就是说，余图构成了包含单点图 $\langle 1\rangle$和 $\langle 1\rangle$ 且在两种和运算中的任意一种以及取反运算下封闭的最小图范畴。这就是“补可约性”一词的含义。图论学家们 [14], 对此早已熟知，不过让我们重新证明这一点，借此引入一种有趣的“深度”滤过。

1.4 深度滤过

本节将以两种对偶的方式对范畴 $\boldsymbol{G}$ 进行滤过：首先按深度：

$$\boldsymbol{G}_{\leq 1} \subset \boldsymbol{G}_{\leq 2} \subset \cdots \boldsymbol{G}\,,$$

然后按余深度：

$$\boldsymbol{G}^{\leq 1} \subset \boldsymbol{G}^{\leq 2} \subset \cdots \boldsymbol{G}\,.$$

这些滤过彼此对偶，但也相差一个移位。将这些滤过限制到 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$上，我们得到这些范畴的滤过 $\boldsymbol{D}_{\leq \bullet}$ 和 $\boldsymbol{E}^{\leq \bullet}$。（此外还有滤过 $\boldsymbol{D}^{\leq \bullet}$ 和 $\boldsymbol{E}_{\leq \bullet}$。事实证明，这些滤过与我们关系较小。）

对于每个图 $\Gamma = (V, E)$，令 $\underline{R}$ 为由 E生成的等价关系，并令 R 为由取反 $\neg E$ 生成的等价关系。若顶点 x 和 y 满足 $x R y$，则称它们连通；若 x 和 y 满足 $x R y$，则称它们余连通。注意，R并非不 R的取反：连通意味着在取反图中余连通；可能存在既连通又余连通的顶点对。[2] 由此定义连通 分支和余连通分支的集合：

$$\underline{\sigma}\Gamma \coloneqq V/\underline{R}\,, \quad \text{and} \quad \overline{\sigma}\Gamma \coloneqq V/\overline{R}\,.$$

如果 $\sigma\Gamma$ 是一个单元素集，那么 Γ 是连通的；如果 $\sigma\Gamma$ 是一个单元素集，那么 Γ 是余连通的。图 P_4 既连通又余连通。

反过来，如果 $\Gamma = (V, E)$ 是一个余图，那么顶点 x 和 y 连通，当且仅当存在 $w \in V$，使得 (x, w) 和 (w, y) 都是 Γ_{refl}的边。对偶地，x 和 y 余连通，当且仅当存在 $w \in V$，使得 (x, w) 和 (w, y) 都不是 Γ_{irr}的边。

引理 1.4.1. 每个余图要么连通，要么余连通。

证明。 假设 Γ 是一个不余连通的余图，并设 x 和 y 是两个不余连通的顶点；也就是说，对于每个顶点 w，(x, w) 或 (w, y)必定是 Γ_{irr}的一条边。特别地，(x, y) 是 Γ_{irr}的一条边。

现在令 u 和 v 为顶点；我们再次利用余图条件来证明它们是连通的。(u, x) 是边，或者 (u, y) 是边；并且 (v, x) 是边，或者 (v, y) 是边。因此，u 和 v 要么通过 x连通，要么通过 y连通，或者 它们是一个 P_4 副本的端点，其形式为 (u, x, y, v) 或 (u, y, x, v)。因此，P_4-无关性确保了 u与 v之间存在连接。 □

[2] 这种语言不太理想。有没有更好的术语?

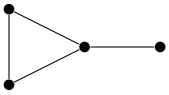
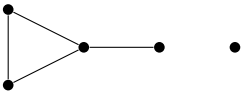
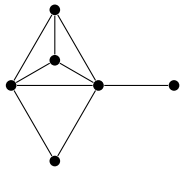
n	Paw_n
1	
2	
3	
4	
5	
6	

表1：前几个余图爪图$_n$

为了定义深度滤过，我们引入爪图余图[3]

$$\mathrm{Paw}_k \coloneqq \langle(((\underline{1} \overline{\oplus} \underline{1}) \underline{\oplus} \underline{1}) \overline{\oplus} \underline{1}) \underline{\oplus} \cdots \underline{1}\rangle \,.$$

换言之， $V(\text{爪图}_k)$ 是集合 $\{1, \ldots, k\}$，并且对任意 $1 \leq i < j \leq k$，当且仅当 j 为偶数时，我们有边 (i, j)。余图爪图$_{2n}$ 是连通的，余图爪图$_{2n-1}$是余连通的。

我们也可以有余爪余图

$$\mathrm{Paw}^k \coloneqq (\neg \mathrm{Paw}_k)_{irr} \,.$$

在爪图^{k}中，若 $i < j$，则当且仅当 j 为奇数时存在边 (i, j)。余图爪图$^{2n+1}$ 是连通的，余图爪图^{2n} 是余连通的。

图 Γ 中深度为 k 的爪图是将 x：爪图$_k \hookrightarrow \Gamma_{irr}$ 作为诱导子图的嵌入。换言之，它是顶点序列 x_1，…，x_k，使得 $x_1 \neq x_2$，并且若$i < j$，则当且仅当 j 为偶数时存在边 (x_i, x_j)。（注意，这些顶点自动两两不同。）顶点 w 的深度是那些存在深度为 k 且带有 $w = x_1$的爪图 x 的 k 的上确界（可能为 ∞）。 Γ 本身的深度是其顶点深度的上确界（可能为 ∞ 或0）。换言之， Γ的深度为 $\leq k$ ，当且仅当 Γ_{irr}是爪图$_{k+1}$自由的（即，它不包含深度为 $k+1$的爪图）。

对偶地， Γ 中的余深度 k 余爪是将 y：$\mathrm{Paw}^k \hookrightarrow \Gamma_{irr}$ 嵌入为诱导子图。换言之，它是一个顶点序列 y_1，…，y_k，满足 $y_1 \neq y_2$；若 $i < j$，则存在边 (y_i, y_j) 当且仅当 j 为奇数。顶点 w 的余深度 是满足存在深度为 k 且具有 $w = y_1$的爪图 y 的最大 k。 Γ的余深度 是其各顶点余深度的上确界。换言之， Γ的余深度为 $\leq k$ ，当且仅当它不包含深度为 $k+1$的余爪。因此， Γ的余深度就是 $\neg\Gamma$的深度。

[3]通常的爪图是 Paw_4。

空余图的深度和余深度均为 0。单元素集（即，$\langle 1\rangle$ 或 $\langle 1\rangle$）的深度和余深度均为 1。

深度为 ≤ 1 的余图中，任意两个不同顶点之间都没有边。对偶地，余深度为 ≤ 1 的有限余图中，任意一对不同顶点之间都有边。

余爪 Paw^k 的深度为 $k-1$，由对称性可知，深度与余深度相差不会超过 1。

引理 1.4.2. 设 Γ 是一个至少包含两个顶点的余图。它是连通的，当且仅当它的深度为偶数；当且仅当它的余深度为奇数。它是余连通的，当且仅当它的深度为奇数；当且仅当它的余深度为偶数。（我们认为 ∞ 既是偶数也是奇数。）

证明。设 Γ 是连通的，且 $x : \mathrm{Paw}_{2n+1} \hookrightarrow \Gamma$ 是一个深度为奇数的爪图。由连通性可知，存在一个顶点 x_{2n+2}，使得 (x_{2n}, x_{2n+2}) 和 (x_{2n+1}, x_{2n+2}) 都是 Γ_{refl} 的边。对于 $i \leq 2n-1$，我们现在会遇到一个 P_4，因为 $(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n}, x_i)$，这保证了每个 (x_i, x_{2n}) 都是一条边。这就将 x 扩展成了一个深度为 $2n+2$ 的爪图。

设 Γ 是余连通的，并设 $x : \mathrm{Paw}_{2n} \hookrightarrow \Gamma$ 是一个深度为偶数的爪图。余连通性保证存在一个顶点 x_{2n+1}，使得 (x_{2n-1}, x_{2n+1}) 和 (x_{2n}, x_{2n+1}) 都不是 Γ_{irr} 的边。此外，对于 $i \leq 2n-2$，也不存在边 (x_i, x_{2n+1})：否则，我们会遇到一个 P_4，因为 $(x_{2n-1}, x_{2n}, x_i, x_{2n+1})$。这将 x 扩展为一个深度为 $2n+1$ 的爪图。

对偶性给出了其余结论。 □

设 $\langle\lambda\rangle$ 和 $\langle\lambda'\rangle$ 是非空余图，其深度分别为 d 和 d'，余深度分别为 c 和 c'。若 $d > d'$，则 $\langle\lambda \oplus \lambda'\rangle$ 的深度为 $d+1$，当且仅当 $\langle\lambda\rangle$ 是连通的；否则为 d。若 $c > c'$，则 $\langle\lambda \oplus \lambda'\rangle$ 的余深度为 $c+1$，当且仅当 $\langle\lambda\rangle$ 是余连通的；否则为 c。

引理 1.4.3. 任何既连通又余连通的有限余图都是单点图。

证明。假设 Γ 是一个既连通又余连通的余图，并且假设 Γ 至少有两个不同的顶点。那么 Γ 的深度既是偶数也是奇数。 □

令 $\boldsymbol{G}_{\leq k} \subset \boldsymbol{G}$ 为深度为 $\leq k$ 的余图所构成的满子范畴，并令 $\boldsymbol{G}^{\leq k} \subset \boldsymbol{G}$ 为余深度为 $\leq k$ 的余图所构成的满子范畴。由此得到两个滤过 $\boldsymbol{G}_{\leq \bullet}$ 和 $\boldsymbol{G}^{\leq \bullet}$，它们彼此交错：[4]

$$\boldsymbol{G}_{\leq (k-1)} \subset \boldsymbol{G}^{\leq k} \subset \boldsymbol{G}_{\leq (k+1)} .$$

命题 1.4.4. 滤过 $\boldsymbol{G}_{\leq \bullet}$ 和 $\boldsymbol{G}^{\leq \bullet}$ 都是穷尽的。换言之，$\boldsymbol{G}$ 由单点图在 $\oplus$ 和 $\oplus$ 下生成——或者说，由 $\langle 1\rangle$ 在 $\neg$ 和这两种对称幺半结构中的任意一种下生成。

[4] 这种交错使滤过呈现出一种“条纹状”的特征，这似乎是二重代数结构的典型特点。

证明. 我们证明，每个有限余图 $\langle\lambda\rangle$ 都可以写成规范形式。我们将每个连通分支 $\langle\mu\rangle \in \sigma\langle\lambda\rangle$ 或余连通分支 $\langle\mu\rangle \in \sigma\langle\lambda\rangle$视为一个诱导子图 $\langle\mu\rangle \subseteq \langle\lambda\rangle$。因此，对每个 $\overline{k}$, 我们得到一个公式

$$\langle\lambda\rangle = \overline{\bigoplus_{\langle\lambda_1\rangle\in\overline{\sigma}\langle\lambda\rangle}} \underline{\bigoplus_{\langle\lambda_2\rangle\in\underline{\sigma}\langle\lambda_1\rangle}} \overline{\bigoplus_{\langle\lambda_3\rangle\in\overline{\sigma}\langle\lambda_2\rangle}} \cdots \underline{\bigoplus_{\langle\lambda_k\rangle\in\underline{\sigma}\langle\lambda_{k-1}\rangle}} \langle\lambda_k\rangle$$

对于 $\langle\lambda\rangle$ 连通的情况，以及

$$\langle\lambda\rangle = \underline{\bigoplus_{\langle\lambda_1\rangle\in\underline{\sigma}\langle\lambda\rangle}} \overline{\bigoplus_{\langle\lambda_2\rangle\in\overline{\sigma}\langle\lambda_1\rangle}} \underline{\bigoplus_{\langle\lambda_3\rangle\in\underline{\sigma}\langle\lambda_2\rangle}} \cdots \underline{\bigoplus_{\langle\lambda_k\rangle\in\overline{\sigma}\langle\lambda_{k-1}\rangle}} \langle\lambda_k\rangle$$

对于 $\langle\lambda\rangle$ 余连通的情况。若 $\langle\lambda\rangle$ 连通，那么除非它是单元素集，否则任何余连通分支的深度都严格更小；对偶地，若 $\langle\lambda\rangle$ 余连通，那么除非它是单元素集，否则任何连通分支的余深度都严格更小。因此，我们可以令 $k \geq 1$为最小整数，使得子图 $\langle\lambda_k\rangle$ 均连通且余连通，也就是说都是单点图。（若 $\langle\lambda_{k-1}\rangle$ 连通，那么 $\langle\lambda\rangle$ 的余深度为 k，深度为 $k+1$；若 $\langle\lambda_{k-1}\rangle$ 余连通，那么 $\langle\lambda\rangle$ 的深度为 k，余深度为 $k+1$。）由此便得到所需的公式。 □

我们将得到的表示称为 $\langle\lambda\rangle$的规范和表示。

我们可以将 $\boldsymbol{G}_{\underline{\leq}\bullet}$ 和 $\boldsymbol{G}^{\leq\bullet}$ 拉回到 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$，从而得到滤过 $\boldsymbol{D}_{\underline{\leq}\bullet}$ 和 $\boldsymbol{E}^{\leq\bullet}$。因此：

– $\boldsymbol{D}_{\leq 1}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{D}$ 中的副本，由平凡余图 $\langle n\rangle$组成； – $\boldsymbol{E}^{\underline{\leq}1}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{E}$ 中的副本，由完全余图 $\langle n\rangle$ 组成； – $\boldsymbol{D}_{\underline{\leq}2}$ 是 §1.2 中的有限相离关系范畴；以及 – $\boldsymbol{E}^{\leq 2}$ 是 §1.2中的有限等价关系范畴。

如果 k 是偶数（分别为奇数），那么 $\boldsymbol{D}_{\underline{\leq}k+1}$ 是 $\boldsymbol{D}_{\underline{\leq}k}$ 在 $\oplus$ 下（分别在 $\oplus$ 下）的闭包。如果 k 是偶数（分别为奇数），那么 $\boldsymbol{E}^{\leq k+1}$ 是 $\boldsymbol{E}^{\leq k}$ 在 $\oplus$ 下（分别在 $\oplus$ 下）的闭包。

1.5 弥散与增生

既然我们已经对余图范畴 $\boldsymbol{G}$ 的对象进行了分类，研究该范畴的态射便很有意义。首先，让我们确定一个分解系统。

我们的构造具有一般性。设 $u\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{F}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 上的一个纤维范畴。（回想一下，这意味着 u 是一个笛卡尔纤维化。）称 $\boldsymbol{A}$ 中的映射 弥散，当且仅当它是 u-反演的——也就是说，在 u 下被映为一个等价。称 $\boldsymbol{A}$ 中的映射 增生的，当且仅当它是u-笛卡尔的。弥散映射和增生映射构成宽子范畴 $\boldsymbol{A}^{disp}$, $\boldsymbol{A}_{accr} \subseteq \boldsymbol{A}$。它们在 $\boldsymbol{A}$ 上构成一个正交分解系统，其中每个映射 φ 都能唯一地写成 $\varphi = \alpha\delta$，其中 α 是增生映射，而 δ 是弥散映射。

我们将此应用于余图的纤维范畴 $\boldsymbol{G}$。如果 $\langle\lambda\rangle = (V, E)$ 和 $\langle\lambda'\rangle = (V, E')$ 是顶点集 V 相同的两个余图，并且如果 $E \subseteq E'$，那么恒等映射

作为映射 $\langle\lambda\rangle \to \langle\lambda'\rangle$ 是弥散的。除同构外，这些是仅有的弥散映射。平凡余图是弥散映射中的始对象；完全余图是弥散映射中的终对象。

若 $\langle\lambda\rangle = (V, E)$ 和 $\langle\mu\rangle = (W, F)$ 是余图，则映射 $f : \langle\lambda\rangle \to \langle\mu\rangle$ 是增生的，当且仅当 $E = f^{-1}(F)$。换言之，f 是增生的，当 $(x, y) \in E$ 当且仅当 $(f(x), f(y)) \in F$。

$\boldsymbol{G}$ 中的增积单射是某个诱导子图的包含。弥散/增生分解系统倾斜为一个分解系统，其中每个映射 φ 都可以写成 $\varphi = \iota\sigma$，其中 ι 是增积单射，而 σ 是满射。

纤维范畴 $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{F}$ 中的弥散/增生方块 是一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{I}' & \xrightarrow{f'} & \boldsymbol{J}' \\ {\scriptstyle\psi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ \boldsymbol{I} & \xrightarrow[f]{} & \boldsymbol{J} \end{array},$$

其中 φ 和 ψ 是弥散的，而 f 和 f' 是增生的。任何这样的方形自动是 $\boldsymbol{A}$中的一个拉回。

$\boldsymbol{G}$ 中最简单的非平凡例子是弥散/增生方块

$$\begin{array}{ccc} \langle\underline{3}\rangle & \xrightarrow{\quad f'\quad} & \langle\underline{2}\rangle \\ {\scriptstyle\psi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ \langle\underline{2} \mathbin{\overline{\oplus}} \underline{1}\rangle & \xrightarrow[f]{} & \langle\underline{1} \mathbin{\overline{\oplus}} \underline{1}\rangle \end{array}.$$

在 $\boldsymbol{G}$ 中，若弥散/增生方块里的增生映射都是满射，则它们自动构成推出。

如果 $f : \langle\lambda\rangle \to \langle\mu\rangle$ 是余图的增积映射，那么顶点上的同一映射就定义了一个作用于取反结果上的映射 $\neg\langle\lambda\rangle \to \neg\langle\mu\rangle$。另一方面，如果 $f : \langle\lambda\rangle \to \langle\lambda'\rangle$ 是弥散映射，那么集合映射的逆映射就定义了一个映射 $\neg\langle\lambda'\rangle \to \neg\langle\lambda\rangle$。这表明，$\neg$ 的函子性混合了协变函子性和反变函子性。要精确说明这一点，我们需要回顾一些关于跨范畴的基本事实。

1.6 跨

假设 $\boldsymbol{C}$ 是一个配备了两个宽子范畴 $\boldsymbol{C}_\dagger$，$\boldsymbol{C}^\dagger \subset \boldsymbol{C}$ 的范畴，我们分别将其中的态射称为 入向的 和 出向的。假设沿出向的映射对入向的映射作拉回后仍然存在且为入向的；对偶地，沿入向的映射对出向的映射作拉回后仍然存在且为出向的。由此得到的拉回方块称为 双向。

于是我们可以构造 跨范畴 $\mathrm{Span}(\boldsymbol{C}; \boldsymbol{C}_\dagger, \boldsymbol{C}^\dagger)$，为简便起见也记作 $\mathrm{Span}(\boldsymbol{C})$；其中对象是 $\boldsymbol{C}$ 的对象，而从 $X \in \boldsymbol{C}$ 到 $Y \in \boldsymbol{C}$ 的态射是一个跨

$$X \leftarrow U \to Y$$

其中后向映射 $U \to X$ 是出向的，前向映射 $U \to Y$ 是入向的。通过构造双向拉回方块来进行复合。在其他地方

[6], 我们将其称为有效伯恩赛德范畴 $\boldsymbol{A}^{\mathit{eff}}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}_{\dagger}, \boldsymbol{C}^{\dagger})$，在其他资料中则称为对应范畴。

跨度范畴的构造是扭曲箭头范畴构造的右伴随。更确切地说，对于任意范畴 A，我们考虑与函子对应的右纤维化

$$(s,t)\colon\ \mathbf{TwArr}(A) \to A \times A^{op}$$

Map : $A^{op} \times A \to \mathbf{An}$。若一个映射$\mathbf{TwArr}(A)$ 是 t-笛卡尔的，或等价地，是 s-反转的，则称其为出向的。对偶地，若映射$\mathbf{TwArr}(A)$是 s-笛卡尔的，或等价地，是 t-反转的，则称其为出向的。根据这些定义，在三元组中存在双向拉回

$$\mathbf{TwArr}(A) = (\mathbf{TwArr}(A), \mathbf{TwArr}(A)_{\dagger}, \mathbf{TwArr}(A)^{\dagger}) ,$$

并且范畴 $\mathrm{Span}(\mathbf{TwArr}(A))$ 是非扭曲箭头范畴$\mathbf{Arr}(A)$。若 $\boldsymbol{C}$ 是如上所述的三元组，则令

$$\mathrm{Fun}^{\mathit{trip}}(\mathbf{TwArr}(A), \boldsymbol{C})$$

表示保持双向方形的函子$\mathbf{TwArr}(A) \to \boldsymbol{C}$ 所构成的范畴。基本结果是

$$\mathrm{Fun}^{\mathit{trip}}(\mathbf{TwArr}(A), \boldsymbol{C}) = \mathrm{Fun}(A, \mathrm{Span}(\boldsymbol{C})) .$$

单位 $A \to \mathrm{Span}(\mathbf{TwArr}(A)) = \mathbf{Arr}(A)$是赋值 $a \mapsto \mathrm{id}_a$。

下面是跨度构造的一个具体应用示例。设 $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{F}$ 是一个纤维范畴。 $\boldsymbol{A}$的垂直对范畴是范畴

$$\boldsymbol{A}^{\mathit{vop}} = \mathrm{Span}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{A}_{\mathit{accr}}, \boldsymbol{A}^{\mathit{disp}}) ,$$

它是一个纤维化在 $\boldsymbol{F}$ 上的范畴，其在 $\langle n\rangle$ 上的纤维是纤维 $\boldsymbol{A}_n$ 的对偶。（这是一个通用技巧 [8]。）有了这一记法，我们现在可以回到取反所提供的对偶性。

命题 1.6.1. 运算 $\langle\lambda\rangle \mapsto \neg\langle\lambda\rangle$ 是一个在$\boldsymbol{F}$上的等价 $\boldsymbol{G}^{\mathit{vop}} \backsimeq \boldsymbol{G}$ 。这是二重对称幺半范畴的等价 $(\boldsymbol{G}^{\mathit{vop}}, \oplus, \oplus) \to (\boldsymbol{G}, \oplus, \oplus)$。对于每个 $k \geq 0$ （或 $k = \infty$），该等价限制为等价$\boldsymbol{G}^{\mathit{vop}}_{\leq k} \backsimeq \boldsymbol{G}^{\leq k}$ 和 $\boldsymbol{D}^{\mathit{vop}}_{\leq k} \backsimeq \boldsymbol{E}^{\leq k}$。

1.7 注释与问题

余图是一类特殊的图。它们可以用许多不同的方式刻画，其中一些我们已经见识过。下面还有一种我们觉得很引人注目的刻画：一个非自反图是余图，当且仅当在每个诱导子图中，每个极大团都与每个极大反团相交（且交点必然只有一个顶点）。

范畴 $\boldsymbol{D}_{\leq 2}$ 出现在 Richard Borcherds 关于量子顶点代数[13] 的工作中，其作用与在此处的作用非常相似。Borcherds 用它通过两个诱导的

关于 $\mathrm{Fun}(\boldsymbol{D}_{\leq 2}, \boldsymbol{V})$上的对称幺半结构。回过头来看，我们定义分解代数的框架似乎是对 Borcherds理论的一种范畴化。Emily Cliff [16] 运用 Borcherds 的范畴论工具，将顶点代数的信息转化为分解代数的信息，并分析这一过程的信息损失性。了解她的工作与本文工作的关系，将会很有意思。

我们简要提到了二重对称幺半范畴 $\boldsymbol{C}$理论，其中有一对张量积，$\otimes$ 和 $\underline{\otimes}$，一个公共单位元，以及一个交织子

$$(U \mathbin{\overline{\otimes}} V) \mathbin{\underline{\otimes}} (X \mathbin{\overline{\otimes}} Y) \to (U \mathbin{\underline{\otimes}} X) \mathbin{\overline{\otimes}} (V \mathbin{\underline{\otimes}} Y)\,.$$

这些结构在本文中发挥着重要作用。实际上，二重对称幺半范畴是对称幺半范畴及正规 oplax 对称幺半函子的 2-范畴$\mathbf{Mon}^{(\infty),\,{}^{oplax}\mathbf{Cat}}$ 中的一个交换幺半群。[5] 或者等价地说，它是对称幺半范畴及正规 lax 对称幺半函子的 2-范畴$\mathbf{Mon}^{(\infty),\,{}^{lax}\mathbf{Cat}}$ 中的一个交换幺半群。

在§4 中，我们发展了使用范畴 $\boldsymbol{E}$构建这类理论所需的基本要素，但由于我们在§4.7中讨论的原因，我们的框架并不完全令人满意。

无论如何，余图的组合学在我们的可隔离对象理论中发挥着核心作用，下面我们就来讨论这一理论。

2 可隔离结构

在本节中，我们确定一种结构，使我们能够理解定义在给定几何对象上的因子化代数。我们的目标是用不依赖于任何特定几何背景（例如光滑流形、复流形、超流形、簇，等等）的术语来实现这一点。我们所定义的这种结构——称为可隔离结构[6] ——使我们能够理解在一个空间上、以任何合理的层范畴为系数的因子化代数的定义。

2.1 基本示例

在给出一般定义之前，先看一个例子。令 X 为一个拓扑空间。（这里应当设想一个拓扑流形；无论如何，我们假设所有拓扑空间都是紧生成的，并在必要时对其进行 k 化。）对于每个余图 $\langle\lambda\rangle$，设映射 $x\colon V\langle\lambda\rangle \to X$ 在满足以下条件时称为分离的：对于每条边 $(a,b) \in E\langle\lambda\rangle$，都有$x(a) \neq x(b)$。换言之，分离映射会将 $\langle\lambda\rangle$ 的孤立顶点映射到 X 中彼此不同的点。我们用 $X^{\lambda} \subset \mathrm{Map}(V\langle\lambda\rangle, X)$ 表示由分离映射构成的子空间。

例如，子集 $X^{m\oplus n} \subset X^{m+n}$由那些 $(x_1,\dots,x_{m+n})$ 构成，其中集合 $\{x_1,\dots,x_m\}$ 与 $\{x_{m+1},\dots,x_{m+n}\}$ 互不相交。

如果 $\langle\lambda\rangle$不是非自反的，那么这个定义就是空的；不过，我们确实得到了一个有趣的函子 $X^{\bullet}\colon \boldsymbol{D}^{op} \to \mathbf{Top}$：

[5]此处的正规一词是指单位的像是一个单位。[6]作者注：有时我也将这些结构称为世界结构，但这一术语过分强调了某种特定的物理解释。在许多情况下，人们想要的可隔离结构并不位于“世界体对象”本身，而是位于一个辅助观察者叠（§2.7）上，其中的对象位于世界体之上。

– 吸积满射 $i\colon \langle\mu\rangle \to \langle\lambda\rangle$ 被映射为包含

$$ {}_{X}i\colon X^{\lambda} \hookrightarrow X^{\mu} $$

由方程 $x(a) = x(b)$给出，当 $i(a) = i(b)$时成立。若 X 是豪斯多夫的，则这是闭的。例如，增积映射 $\langle 2\rangle \to \langle 1\rangle$被映至对角线

$$ X^{\underline{1}} = \Delta_X \hookrightarrow X \times X = X^{\underline{2}}\,. $$

– 弥散映射 $j\colon \langle\lambda'\rangle \to \langle\lambda\rangle$ 被映至包含

$$ {}_{X}j\colon X^{\lambda} \hookrightarrow X^{\lambda'} $$

由不等式 $x(a) \neq x(b)$ 刻画，其中 $(a,b) \in E\langle\lambda\rangle$。若 X 是豪斯多夫的，则这是开的。例如，弥散映射 $\langle 2\rangle \to \langle 1 \oplus 1\rangle$被映至包含

$$ X^{\underline{1}\overline{\oplus}\underline{1}} = (X \times X) \smallsetminus \Delta_X \hookrightarrow X \times X = X^{\underline{2}}\,. $$

– 增积单射 $g\colon \langle\mu\rangle \to \langle\lambda\rangle$ 被映至限制

$$ {}_{X}g\colon X^{\lambda} \twoheadrightarrow X^{\mu} $$

投影 $X^{V\langle\lambda\rangle} \twoheadrightarrow X^{V\langle\mu\rangle}$的。当 X 是流形时，这是一个纤维化，有时称为 *Faddell–Neuwirth* 纤维化。例如，两个包含$\langle 1\rangle \hookrightarrow \langle 1 \oplus 1\rangle$ 被映至两个投影

$$ X^{\underline{1}\overline{\oplus}\underline{1}} = (X \times X) \smallsetminus \Delta_X \to X = X^{\underline{1}}\,. $$

所得图表 $X^{\bullet}\colon \boldsymbol{D}^{op} \to \mathbf{Top}$ 称为可隔离拓扑空间。它具有一些有趣的性质：

– 对于每个推出方块

$$ \begin{array}{ccc} \langle\lambda\rangle & \xrightarrow{\;i\;} & \langle\mu\rangle \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ \langle\lambda'\rangle & \xrightarrow[\;i'\;]{} & \langle\mu'\rangle \end{array} $$

在 $\boldsymbol{D}$ 中，其中 i 是满射，而 g 是增积单射，相应的方形

$$ \begin{array}{ccc} X^{\mu'} & \longrightarrow & X^{\lambda'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^{\mu} & \longrightarrow & X^{\lambda} \end{array} $$

是一个拉回。例如，$X^{1\oplus 1} = X^{1} \times_{X^2} X^{1\oplus 2}$。这就是正则性（§2.3）。

– 在豪斯多夫情形下，增积满射 i 被映为闭包含 ${}_{X}i$，弥散映射 j 被映为开浸入 ${}_{X}j$。

– 此外，由弥散映射 ${}_X j$诱导的开浸入 j 是由增生满射 ${}_X i$诱导的闭嵌入 i 的并集的补集；这些满射与 §1.2（按该节的含义）不相容 j。

– 图表 $X^\bullet$ 将不交并 $\oplus$ 映射为乘积。这就是可加性（§2.4）。这一条件对于 **Top** 这样的范畴是合理的，但对于其他感兴趣的范畴，例如分层空间（§3），可加性则过于严格。

– 我们的函子 $X^\bullet$ 是从子范畴 $\boldsymbol{D}_{\leq 2)}$左 Kan 延拓而来的：如果 $\langle\lambda\rangle$ 和 $\langle\mu\rangle$是两个无自反余图，那么空间 $X^{\lambda\oplus\mu} = X^\lambda \times X^\mu$ 可由空间 X^ν 覆盖，其中 $\langle\nu\rangle$ 是任意带有映射$\langle\lambda\rangle \to \langle\nu\rangle$ 和 $\langle\mu\rangle \to \langle\nu\rangle$的有限隔离结构。例如，我们得到

$$X^{\mathrm{Paw}_3} = X^{\underline{1}} \times X^{\underline{1}\overline{\oplus}\underline{1}} = X^{\underline{2}\overline{\oplus}\underline{1}} \cup^{X^{\underline{1}\overline{\oplus}\underline{1}\overline{\oplus}\underline{1}}} X^{\underline{1}\overline{\oplus}\underline{2}},$$

这表达了关系 $\neq$ 在 X上的余传递性。这就是2-骨架性（§2.5）。

2.2 可隔离对象

范畴 $\boldsymbol{X}$ 的一个可隔离对象 是一个函子 $W^\bullet\colon \boldsymbol{D}^{op} \to \boldsymbol{X}$。对象 W^1 是 $W^\bullet$的底层对象，而 $W^\bullet$ 是 W^1上的一个可隔离结构 。可隔离对象构成范畴 $\mathbf{Isol}(\boldsymbol{X}) \coloneqq \mathrm{Fun}(\boldsymbol{D}^{op}, \boldsymbol{X})$。

正如我们所见（§2.1），若 X 是一个拓扑空间，则 $\langle\lambda\rangle \mapsto X^\lambda$ 是一个可隔离拓扑空间。更一般地，若 $f\colon X \to Y$是拓扑空间之间的连续映射，则我们可以将 X^λ_f 定义为满足以下条件的映射集合 $x\colon V\langle\lambda\rangle \to X\colon\ \ f(x)$是分离的。这定义了一个函子 $\mathbf{TwArr}(\mathbf{Top}) \to \mathbf{Isol}(\mathbf{Top})$。等价地（§1.6），这一运算可以视为一个函子 $\mathbf{Top} \to \mathrm{Span}(\mathbf{Isol}(\mathbf{Top}))$，它将映射 $f\colon X \to Y$送到跨 $X^\bullet \leftarrow X^\bullet_f \to Y^\bullet$。

同样，赋值 $\langle\lambda\rangle \mapsto \Pi_\infty(X^\lambda)$ 是空间中的一个加性可隔离对象。然而，事实证明，这种结构对于我们的目的来说过于粗糙，因此我们需要引入分层，为 可分离性空间 建立一种适用于同伦语境 (§3)的理论。

2.3 正则性

我们称可隔离对象 $X^\bullet\colon \boldsymbol{D}^{op} \to \boldsymbol{X}$ 为正则的，当且仅当对于每个推出方块

$$\begin{array}{ccc} \langle\lambda\rangle & \xrightarrow{i} & \langle\mu\rangle \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ \langle\lambda'\rangle & \xrightarrow[i']{} & \langle\mu'\rangle \end{array}$$

在 $\boldsymbol{D}$ 中，其中 i 是满射，且 g 是增积单射，相应的方形

$$\begin{array}{ccc} X^{\mu'} & \longrightarrow & X^{\lambda'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^{\mu} & \longrightarrow & X^{\lambda} \end{array}$$

是一个拉回。

在正则可分离对象 $X^\bullet$ 中，由增积单射诱导的映射 $X^{\mu'} \to X^\mu$ 是从映射 $X^{V\langle\mu'\rangle} \to X^{V\langle\mu\rangle}$ 拉回的。若 $f : X \to Y$ 是拓扑空间之间的连续映射，则 $X^\bullet_f$ 是正则可分离对象。

我们遇到的大多数可分离对象示例都是正则的，因此这似乎是一个相当自然的条件。另一方面，对于建立良好的分解代数理论来说，这个条件似乎并非必需。

2.4 可加性

可分离对象 $W^\bullet : \boldsymbol{D}^{op} \to \boldsymbol{X}$ 是可加的，当且仅当它将不连通和（即，有限余积）映为乘积。可加可分离对象也可以简单地描述为范畴 $\boldsymbol{D}^{op}_{conn}$ 上的函子（不附加任何条件），其中该范畴由连通的非自反余图构成。

对于拓扑空间和簇中的可分离对象而言，这个条件是合理的，但它与分层的存在并不相容。例如，在同伦语境中（§3），我们将希望把 W^2 视为由对角线及其补集所作的分层。

2.5 骨架性

假设范畴 $\boldsymbol{X}$ 有有限余极限，并令 $k \geq 1$。我们可以将函子 $W^\bullet : \boldsymbol{D}^{op}_{\leq k} \to \boldsymbol{X}$ 作左 Kan 延拓为一个可隔离对象。对于对象 $\langle\lambda\rangle \in \boldsymbol{D}$，这个延拓由以下公式定义：

$$W^\lambda = \operatorname*{colim}_{\langle\mu\rangle \in (\boldsymbol{D}_{\leq k, \langle\lambda\rangle/})^{op}} W^\mu .$$

在 $\boldsymbol{D}_{\leq k,\ \langle\lambda\rangle/}$ 中，极限共终子范畴是由弥散映射 $\langle\lambda\rangle \to \langle\mu\rangle$ 构成的有限满子范畴。这就是该延拓只需有限余极限便能存在的原因。我们将以这种方式构造的可隔离对象称为 k-骨架的。

因此，若我们定义范畴 $\mathbf{Isol}_{\leq k}(\boldsymbol{X}) \coloneqq \mathrm{Fun}(\boldsymbol{D}^{op}_{\leq k}, \boldsymbol{X})$，那么左 Kan 延拓会将 $\mathbf{Isol}_{\leq k}(\boldsymbol{X})$ 与 $\mathbf{Isol}(\boldsymbol{X})$ 中由 k-骨架的可隔离对象构成的满子范畴等同起来。实际上，若 $W^\bullet$ 是 k-骨架的，那么 W^λ 就是对所有与 $\langle\lambda\rangle$ 具有相同顶点、且满足 $\langle\mu\rangle$ 为无爪图 $_{k+1}$ 的余图 $\langle\mu\rangle \supseteq \langle\lambda\rangle$ 取 W^μ 的并集。

因此，每个可隔离对象 $X^\bullet$ 都有一个骨架过滤

$$\mathrm{sk}_1 X^\bullet \to \mathrm{sk}_2 X^\bullet \to \cdots \to X^\bullet .$$

1-骨架就是可隔离对象

$$(\mathrm{sk}_1 X)^\lambda = \begin{cases} X^n & \text{if } \langle\lambda\rangle = \langle n\rangle , \\ \varnothing & \text{otherwise.} \end{cases}$$

2-骨架更为复杂；例如，我们有如下余传递公式：

$$(\mathrm{sk}_2 X)^{\mathrm{Paw}_3} = X^{\underline{1}\overline{\oplus}\underline{2}} \cup^{X^{\underline{1}\overline{\oplus}\underline{1}\overline{\oplus}\underline{1}}} X^{\underline{2}\overline{\oplus}\underline{1}} .$$

将§2.1 豪斯多夫拓扑空间 X 映射为一个2-骨架的可分离拓扑空间 $\langle\lambda\rangle \mapsto X^\lambda$。

反过来，假设 $\boldsymbol{X}$ 具有所有极限。于是可以将函子 $\boldsymbol{D}^{op}_{\leq n} \to \boldsymbol{X}$ 右 Kan 延拓为一个可隔离对象 $\boldsymbol{D}^{op} \to \boldsymbol{X}$。以这种方式得到的可隔离对象称为 n-余骨架的，而右 Kan 延拓将 $\mathbf{Isol}_{\leq n}(\boldsymbol{X})$识别为 $\mathbf{Isol}(\boldsymbol{X})$ 的满子范畴，其中包含所有 n-余骨架的可隔离对象。由此定义出一个余骨架塔

$$X^\bullet \to \cdots \to \mathrm{ck}_2(X)^\bullet \to \mathrm{ck}_1(X)^\bullet .$$

1-余骨架由以下公式给出

$$\mathrm{ck}_1(X)^\lambda = X^n ,$$

其中 $\langle n\rangle = V\langle\lambda\rangle$。1-余骨架的可隔离对象是指将弥散映射映为可逆映射的对象。实际上，1-余骨架的可隔离对象中的每个点，都以恰好一种方式与每个点（包括它自身）孤立开来。

2.6 乘积

从我们的角度来看，范畴 $\mathbf{Isol}(\boldsymbol{X})$ 中的范畴积并非合适的积：直观而言，$X^\lambda \times Y^\lambda$ 中的点是点的构形对 (x, y)，其中对于每个 $(a, b) \in E\langle\lambda\rangle$，两者 $x_a \neq x_b$ 和 $y_a \neq y_b$。我们真正想要的是满足以下条件的对 (x, y)：若 $(a, b) \in E\langle\lambda\rangle$，则或者 $x_a \neq x_b$，或者 $y_a \neq y_b$。也就是说，我们希望将 $(X \otimes Y)^\lambda$ 定义为对象 $X^{\mu_1} \times X^{\mu_2}$ 的并，其中 $\langle\mu_1\rangle$ 和 $\langle\mu_2\rangle$ 是具有与 $\langle\lambda\rangle$ 相同顶点的余图，且 $\langle\lambda\rangle$ 的每条边都属于 $\langle\mu_1\rangle$ 或 $\langle\mu_2\rangle$。因此，就我们的目的而言，正确的积是一种特定的卷积。

为此，我们在 $\boldsymbol{D}$ 上定义一个反拟 *operad* 结构（即，在$\boldsymbol{D}^{op}$ [9, Df. 1.2]上定义一个拟 operad 结构）。对于余图 $\langle\lambda\rangle, \langle\mu_1\rangle, \ldots \langle\mu_n\rangle$，我们将映射 $f : \langle\lambda\rangle \to \langle\mu_1\rangle \otimes \cdots \otimes \langle\mu_n\rangle$ 定义为映射 $f : V\langle\lambda\rangle \to V\langle\mu_1\rangle \times \cdots \times V\langle\mu_n\rangle$，使得若 $(a, b) \in E\langle\lambda\rangle$，则对于某个 i，存在一条边 $(f_i(a), f_i(b)) \in E\langle\mu_i\rangle$。这种记法容易引起误解，因为余图上并不存在能产生这一结果的运算 $\otimes$。不过，反拟 operad $\boldsymbol{D}_\otimes$ 是 $\boldsymbol{D}$上的一种对称促幺半 结构 [9, Df. 1.4]，这已足以满足我们的目的。

现在假设范畴 $\boldsymbol{X}$ 有积和有限余极限。那么范畴$\mathbf{Isol}(\boldsymbol{X})$ 具有与对称预幺半结构 $\boldsymbol{D}_\otimes$ [9, 1.6]相对应的 Day 卷积对称幺半结构 $\otimes$。我们称这种对称幺半结构为可隔离对象的张量积 。

为具体说明这一点，设 $X^\bullet$ 和 $Y^\bullet$ 是 $\boldsymbol{X}$中的可隔离对象。那么张量积由下式给出：

$$(X \otimes Y)^\lambda = \operatorname*{colim}_{\langle\lambda\rangle \to \langle\mu_1\rangle \otimes \langle\mu_2\rangle} X^{\mu_1} \times X^{\mu_2} ,$$

其中，余极限取遍三元组范畴 $(\langle\mu_1\rangle, \langle\mu_2\rangle, \varphi)$，其中 $\varphi : \langle\lambda\rangle \to \langle\mu_1\rangle \otimes \langle\mu_2\rangle$。在此范畴中，以下三元组构成共尾子范畴：其中两个映射 $V\langle\lambda\rangle \to V\langle\mu_1\rangle$ 和 $V\langle\lambda\rangle \to V\langle\mu_2\rangle$ 分别都是双射。

例如，有

$$(X \otimes Y)^{\underline{1}\overline{\oplus}\underline{1}} = (X^2 \times Y^{\underline{1}\overline{\oplus}\underline{1}}) \cup^{(X^{\underline{1}\overline{\oplus}\underline{1}} \times Y^{\underline{1}\overline{\oplus}\underline{1}})} (X^{\underline{1}\overline{\oplus}\underline{1}} \times Y^2) .$$

2.7 观察者栈

任何合理的几何对象范畴都可以嵌入某个拓扑斯中[7]，且这种嵌入会保留该范畴已有的特征，例如极限和粘合构造。我们把拓扑斯中的对象称为该拓扑斯上的层叠。例如，若我们考虑光滑流形范畴**Man**，就可以将其嵌入相对于光滑拓扑、定义在欧几里得空间上的层叠拓扑斯中。除去集合论方面的问题（都可以通过标准技巧解决），任何概形范畴都可以嵌入若干种不同拓扑之一所对应的层叠范畴中。甚至（紧生成）拓扑空间也可以嵌入凝聚（又称pyknotic）空间的拓扑斯中。

以这种方式扩充几何对象范畴的一大优势是，随后便能进行许多在较小范畴中无法进行的构造。历史上，第一个例子是形成商 X/G。通过注意到函子 $\boldsymbol{X}^{op} \to \mathbf{S}$ 可由一个栈表示，当且仅当它满足下降 ——也就是说，它将 $\boldsymbol{X}$ 的余极限映为极限——还可以进行更多构造。例如，可以将映射叠 $\mathrm{Map}(Y, X)$ 定义为表示函子 $T \mapsto \mathrm{Map}(T \times Y, X)$ 的栈。类似地，可以定义 Obj_X，即 X 上的对象栈：它是表示这样一个函子的栈，该函子将对象 T 映至上范畴的群胚核 $\iota(\boldsymbol{X}_{/T\times X})$；这是一个栈这一事实，是关于拓扑斯的基本事实，有时用格言“$\boldsymbol{X}$ 中的所有余极限都是范·坎彭”来表达。

这里我们重点介绍一种自然的方法，用于在 $\boldsymbol{X}$ 上的某些叠上定义可隔离结构。

设 $x \in X(S) = \mathrm{Map}(S, X)$ 和 $y \in X(T) = \mathrm{Map}(T, X)$ 是叠 X 的两个点。若路径叠 $S \times_X T$ 为空，我们称 x 和 y 不相交。

设 X 是一个叠，并考虑叠 O_X 在叠 Obj_X 上的情形。因此，O_X 的一个点是 X 上的一个对象，连同某些附加结构。我们认为，叠 O_X 告诉我们正在考虑哪类可观测量。例如，我们可以令 $O_X = X$ 本身如此，此时我们只考虑点可观测量。一个射影簇 X（例如）上的希尔伯特概形是一个更值得牢记的有趣例子；在这种情况下，我们考虑的是沿闭子簇的扩展可观测量。

为 O_X 配备可隔离结构的方法有很多。或许最简单的一种是：当两个 X 上的对象不相交时，称它们为孤立。更准确地说，对于每个余图 $\langle\lambda\rangle$ 和每个 $T \in \boldsymbol{X}$，定义

$$O_X^{\lambda}(T) \coloneqq \{Z \in O_X(T)^{V\langle\lambda\rangle} : (a,b) \in E\langle\lambda\rangle \implies Z_a \times_{T\times X} Z_b = \varnothing\}.$$

在这个公式中，我们隐式地应用遗忘映射 $O_X \to \mathrm{Obj}_X$ 到 Z_a 和 Z_b，以构造这个纤维积。由此得到的可分离性栈 $O_X^{\bullet}$ 既可加又是局部的。

当 $O_X = X$ 本身时，我们得到 X 上的一个可隔离结构，其中点x，$y \in X(T)$ 在该结构中是孤立的，当且仅当它们的等化子 $\ulcorner x = y \urcorner$ 为空。由此得到的可分离性栈 $X^{\bullet}$ 是 2-骨架的。然而，一般而言，O_X 上的这个可隔离结构完全不是骨架的。

[7]请回想，对我们而言，“拓扑斯”就是其他地方所称的“∞-拓扑斯” [HTT]。

2.8 希尔伯特概形作为观察者叠

设 k 是一个域，且设 X 是一个 k-簇。记 $\mathrm{Hilb}_{X/k}$ 为希尔伯特代数空间，其 T-点是 $T\times_k X$ 中适当且在 T 上为 fppf 的闭子簇。现在，我们可以按照 §2.7中的方法，将 $\mathrm{Hilb}^{\bullet}_{X/k}$ 定义为一个可分离性栈。因此，k-点 $\mathrm{Hilb}^{\lambda}_{X/k}$ 是 $(Z_a)_{a\in V\langle\lambda\rangle}$ 的子簇组成的元组，满足：若 $(a,b)\in E\langle\lambda\rangle$，则 Z_a 不与 Z_b相交。

当 X 是曲线时，这种可隔离结构是 2-骨架的，但一般而言并非如此。

2.9 Div^1 作为观察者叠

为了说明这项技术的适用范围，这里给出一个在 [42] 风格的 p-赋值几何中自然出现的可隔离空间。

用 **Perfd** 表示完美空间的范畴，用 **Perf** 表示特征为 p 的完美空间范畴。倾斜函子 $U\mapsto U^\flat$ 是一个函子 **Perfd** $\to$**Perf**。若 U $/U$ $\Rightarrow$ $/U^\flat$ [42, 是完美空间，则倾斜给出一个等价 **PerfdPerf**。.....因此，倾斜函子是一个具有离散纤维的右纤维化。特征为 p 的完美空间 T 上的纤维，是 T 的反倾斜 集合。

令 $\boldsymbol{X}$ 为 **Perf** 上 proétale 栈的拓扑斯。给定一个在 $\mathrm{Spa}\,\boldsymbol{Z}_p$ 上的解析赋值空间 V，右纤维化 **Perfd**$/V$ $\to$ **Perf** 直化为一个对象 $V^\diamond\in\boldsymbol{X}$。例如，有 $\mathrm{Spd}\,\boldsymbol{Q}_p:=(\mathrm{Spa}\,\boldsymbol{Q}_p)^\diamond$：若 T 是特征为 p 的完美空间，则 $\mathrm{Spd}\,\boldsymbol{Q}_p$ 的 T-点是 T 的特征零直到。我们通过构造 $Y^\diamond_S:=S\times\mathrm{Spd}\,\boldsymbol{Q}_p$，得到在 $S\in$**Perf** 上的相对版本，并由此构造商 $X^\diamond_S:=Y^\diamond_S/(\varphi^{\boldsymbol{Z}}\times\mathrm{id})$。对象 $X^\diamond_S$ 是作为“钻石”看待的 *Fargues–Fontaine* 曲线。

在 [20], 中，Fargues 与 Scholze 还定义了一条“镜像曲线” $\mathrm{Div}^1:=\mathrm{Spd}\,\boldsymbol{Q}_p/\varphi^{\boldsymbol{Z}}$。此处记号反映了如下事实：一个 S-点，作为 Div^1 的点，定义了一个次数为 1 的卡蒂埃除子 D_S，它位于 X_S 上。在他们对局部朗兰兹对应的几何化中，海克算子通过对 Fargues–Fontaine 曲线上的向量丛修改而产生，这些修改沿着此类除子发生，见 [20, 第六章]。因此，Fargues–Fontaine 曲线的自然观察者叠（§2.7）是 Div^1。

按照 §2.7 中的做法，我们得到可隔离对象 $\mathrm{Div}^\bullet$。具体而言，对于余图 $\langle\lambda\rangle$，T-点（属于 Div^λ）是集合 $(T_a^\sharp)_{a\in V\langle\lambda\rangle}$，它们由特征 0 的、$T$ 的反倾斜在弗罗贝尼乌斯意义下的等价类组成，并且若 $(a,b)\in E\langle\lambda\rangle$，则 $D_{T_a}\times_{X_T}D_{T_b}=\varnothing$。

2.10 评论与问题

一个自然的问题是，可隔离对象与其 Ran 空间之间是否存在显著差异。我们可以将可隔离空间视为构造 Ran 空间的一种合适的输入 。当然，在许多情况下，可隔离对象和 Ran 空间都试图汇集点的构形空间。而且，确实在这些情况下，可隔离空间的数据大致等价于其作为交换幺半群的 Ran 空间的数据。

另一方面，我们尚未能在很一般的情形下理解 Ran 空间的构造；本文只在同伦语境中考察 Ran 空间

(§3.6)。在那里，它被证明是可隔离空间全空间的某种扭曲形式的拉回。对于非 2-骨架的可隔离对象，Ran 空间所包含的信息要少得多。尝试为观察者可分离性层叠上的可隔离结构发展一种 Ran 空间的概念§2.7，或许会有所裨益。

另一个自然的问题是，我们应当如何理解局部性条件。我们无法从任何形式的第一性原理出发解释它，也不知道该在多大程度上认真对待它。我们只能指出，它在最有趣的例子中都成立。

关于 §2.6，人们不禁想知道，作为二重对称幺半范畴的 $\boldsymbol{D}^{op}$，其拟序结构是否（以及如何）仅由 $\boldsymbol{D}$ 的泛性质自然产生。

3 可分离性空间与同伦语境

一个拓扑 量子场论的可观测量构成一个局部常值因子化代数。这就是引言中讨论的同伦语境 。局部常值因子化代数恰好等同于定义在我们称为可分离性空间上的因子化代数。两者并不完全相同于空间中的可分离性对象，因为还需要纳入分层。

利用余图上的结构，我们为附属于实直线以及更一般的欧几里得空间的可分离性空间给出一个组合模型。

3.1 分层

分层在我们的论述中自然地出现。例如，在我们的动机性例子§2.1中，拓扑空间 X^n 具有一种自然分层，由各种弱对角线及其补集构成。为了描述分层与可隔离结构之间的相互作用，我们回顾一下这种语言的一些基本要素。

设 P 是一个偏序集。我们在 P 上赋予*Alexandroff* 拓扑，其中 $U \subseteq P$是开集当且仅当 $(p \leq q) \wedge (p \in U) \implies q \in U$。现在，若 X是一个拓扑空间，则 X的一个P-分层 是一个连续映射 $f\colon X \to P$；纤维 X_p是第 p 个层。此时，一个分层映射 $(f/\varphi)\colon (X/P) \to (Y/Q)$由一个连续映射 $f\colon X \to Y$和一个满足预期相容条件的单调映射 $\varphi\colon P \to Q$ 构成。

例如，区间 $I = [0,1]$ 通过上取整函数分层在偏序集 $\{0 < 1\}$ 上。各层为 $\{0\}$ 和半开区间 $(0,1]$。分层映射$I \to (X/P)$ 称为 (X/P)中的出口路径。更一般地，标准拓扑单形 $|\Delta^n| \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ 通过映射 $t \mapsto \max\{i \in [n] : t_i \neq 0\}$分层在偏序集 $[n] \coloneqq \{0 < \cdots < n\}$上。从这些单形出发的分层映射就是分层的（高阶）同伦。

这些对象具有良好的同伦理论。 P-分层空间是一个范畴 X，连同一个保守函子 $\varphi\colon X \to P$；也就是说，对于每个 $p \in P$， φ 在 p 上的纤维 X_p 都是一个空间。这个空间称为 X的第 p 个层。此外，给定 P中的 (p,q) 且满足 $p \leq q$，我们可以讨论 P在 (p,q) 上的 X 的链接，它是截面空间 $\{p \leq q\} \to X$；这也是一个空间。

分层拓扑空间具有同伦类型，我们称之为分层空间[31]：只要该分层拓扑空间 X/P 足够良好（在 Haine 的模型结构中是纤维化的，且 [31], 按照 Lurie 的意义是锥形分层的 [HA]），我们就可以

按以下方式定义一个范畴 $\Pi(X/P)$。对象是 X 的点，态射是出口路径，而高阶态射是分层同伦。也就是说，该范畴的定义使得函子 $[n] \mapsto \Pi(X/P)$ 恰好是一个分层映射 $(|\Delta^n|/[n]) \to (X/P)$。连续映射 $X \to P$ 诱导出一个保守函子 $\Pi(X/P) \to P$。

换句话说，$\Pi(X/P)$ 是一个 P-分层空间。对于分层拓扑空间，赋予一种自然的弱等价概念后，赋值 $(X/P) \mapsto \Pi(X/P)$ 便是同伦理论之间的一个等价 [31]。

就本文而言，我们不希望把用于分层的偏序集作为额外结构随身携带。因此，我们简单地规定，分层是一个每个自同态都是等价的范畴。（在其他地方，这类范畴称为层状范畴或*EI*范畴。）每个这样的范畴 X 都保守地映射到偏序集 P_X，该偏序集由 X 的对象的等价类构成，其中 $x \le y$ 当且仅当存在一个态射 $x \to y$ 于 X 中。因此，按我们的定义，分层 X 是一个 P_X-分层空间，其层和链接都是连通的。

我们用**Str**表示**Cat** 中由分层构成的满子范畴。

某些范畴性质在分层同伦理论中有相应的解释。闭浸入是一个筛包含 $Z \hookrightarrow X$ ——即一个全忠实包含，并且对于 X 中的每条边 $x \to y$，若 $y \in Z$，则 $x \in Z$。对偶地，X 中的开浸入是一个余筛包含 $U \hookrightarrow X$。因此，开浸入有闭补，反之亦然。局部闭浸入是全忠实包含 $W \hookrightarrow X$，并满足：任何使 W 中的一个态射经由其分解的对象，本身都是 W 中的对象。所有这些条件都是从偏序集 P_X 层面的相应条件拉回而来的。

3.2 可分离性空间

一个可隔离空间 定义为一个函子 $\boldsymbol{D}^{op} \to \mathbf{Str}$。指定一个可隔离空间的一种方式，是取一个可隔离拓扑空间 $(X^\bullet/P^\bullet)$，它位于可分离性偏序集 $P^\bullet$ 之上，然后逐次构造其分层同伦型。

对我们而言，或许最重要的例子是典范可分离性偏序集

$$\langle\lambda\rangle \mapsto K^\lambda \coloneqq \boldsymbol{D}^{disp}_{\langle\lambda\rangle/}\,,$$

其中映射 $K^\lambda \to K^\mu$ 附属于 $\varphi : \langle\mu\rangle \to \langle\lambda\rangle$ 将弥散映射 $\delta : \langle\lambda\rangle \to \langle\lambda'\rangle$ 映到复合映射的弥散/增生分解中出现的弥散映射 $\delta\varphi$。§2.2 中的构造 为每个拓扑空间之间的连续映射 $f : X \to Y$ 给出一个可隔离拓扑空间 $X^\bullet_f$。当 Y 是豪斯多夫空间时，我们可以将每个 X^λ_f 在 K^λ 之上分层，方法是将 $x \in X^\lambda_f$ 映到弥散映射 $\langle\lambda\rangle \to \langle\lambda'\rangle$，其中 $(i,j) \in E\langle\lambda'\rangle$ 当且仅当 $f(x_i) \neq f(x_j)$。（这个映射实际上落在片段 $K^\lambda_{\le 2} \coloneqq \boldsymbol{D}^{disp}_{\langle\lambda\rangle/} \times_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{D}_{\le 2}$ 中。）

无论如何，我们逐次构造分层同伦型，从而得到一个可隔离空间

$$\langle\lambda\rangle \mapsto \Pi(X^\lambda_f/K^\lambda)\,.$$

指派 $f \mapsto \Pi(X^\bullet_f / K^\bullet)$ 是一个函子 **TwArr**(**Haus**) → **Isol**(**Str**) ——或者等价地说，是一个函子**Haus** → Span(**Isol**(**Str**))。

在可分离性分层 $\Pi(X^\bullet / K^\bullet)$ 上的分解代数，最终将证明与“局部常值因子化代数”相同。因此，可分离性空间是分解代数的同伦语境 中的基本“空间”。我们将 $\Pi(X^\bullet / K^\bullet)$ 视为附属于拓扑空间 X的可隔离性同伦类型。

可隔离空间 $X^\bullet$ 是豪斯多夫 的，当且仅当：

– 每个增生满射 i 都会映为分层空间的一个闭浸入 ${}_X i$，且 – 每个弥散映射 j 都会映为分层空间的一个开浸入 ${}_X j$。

进一步称其为分离的，当且仅当除此之外 n:

– 由弥散映射 j 诱导的开浸入 ${}_X j$，是由那些与 j不相容的增生满射 i 所诱导的所有闭浸入 ${}_X i$之并集的补集。

3.3 拟可隔离性与包络

为了指定一个可隔离对象 $X^\bullet$，人们需要指定对象 X^λ。从本质上说，T-点是一些 $x = (x_i)_{i \in V\langle\lambda\rangle}$的 T-点的集合 X，并且如果 (i, j)是一条边，那么 x_i 和 x_j 彼此“相距甚远”。这种情形很常见（例如，§3.4），指定满足以下条件的集合 x 往往更容易：当且仅当 x_i 和 x_j 彼此“相距甚远”时，(i, j) 才是一条边。我们有一种将这些数据转化为可隔离对象的方法。

现在，设 $p : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{D}$ 是一个函子，并假设 p 只是增生对象上的一个笛卡尔纤维化。也就是说，对于余图的每个增生态射 $g : \langle\lambda\rangle \to \langle\mu\rangle$，以及每个位于 μ之上的 y，都存在一个位于 g之上的 p-笛卡尔态射 $x \to y$。在这种情况下，我们可以称 $\boldsymbol{X}$ 为一个拟可隔离性范畴。这等价于一个从 $\boldsymbol{D}^{op}$ 到预函子的函子 X，且这些预函子在增生对象上是真正的函子。

从直观上说，X 的包络 是可隔离性范畴**Env**$(X) : \boldsymbol{D}^{op} \to$ **Cat**，它将 $\langle\lambda\rangle$ 映射到对的范畴 $(\varphi : \langle\lambda\rangle \to \langle\mu\rangle, x)$，其中 φ 是$\boldsymbol{D}$中的弥散映射，并且 $x \in X_\mu$。换句话说，**Env**(X) 会将 $\langle\lambda\rangle$ 映射到 $P^\lambda \times_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{X}$。函子性的运作方式如下：如果 $\eta : \langle\lambda'\rangle \to \langle\lambda\rangle$ 是 $\boldsymbol{D}$的任意映射，那么诱导出的函子**Env**$(\boldsymbol{D})^\lambda \to$**Env**$(\boldsymbol{D})^\mu$ 会将对象 (φ, x) 映射到 (ψ, y)，其中 $\varphi\eta = \psi\theta$ 对于 ψ 是弥散的，θ 是增生的，并且 $y = {}_X\theta(x)$。

为了使其更加精确，先介绍一条记号约定：如果 $f : A \to C$ 和 $g : B \to C$ 是函子，那么

$$A \vec{\times}_C B \coloneqq A \times_C \mathbf{Arr}(C) \times_C B .$$

这是范畴双范畴中的定向纤维积，出于某种原因有时也称为“逗号构造”。

现在，$\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{D}$ 的包络是子范畴

$$\mathbf{Env}(\boldsymbol{X}) \subset \boldsymbol{D} \vec{\times}_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{X}$$

其对象是满足 φ 为弥散的那些对 $(\varphi : \langle\mu\rangle \to \langle\lambda\rangle, x)$。我们称这样的对象为 $\boldsymbol{X}$的广义对象。

函子$\mathbf{Env}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{D}$将 $(\varphi : \langle\mu\rangle \to \langle\lambda\rangle, x)$映射到 μ，是一个笛卡尔纤维化。自然函子 $\boldsymbol{X} \to \mathbf{Env}(\boldsymbol{X})$是全忠实的；因此，其左伴随$\mathbf{Env}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{X}$（将 (φ, x) 映射到 x）是一个局部化。

包络$\mathbf{Env}(\boldsymbol{D})$ 是与典范可分离性偏序集 $\langle\lambda\rangle \mapsto K^{\lambda}$对应的笛卡尔纤维化 $\boldsymbol{K} \to \boldsymbol{D}$。因此，一般而言，$\mathbf{Env}(\boldsymbol{X})$ 位于 $\boldsymbol{K}$之上。特别地，当 p 的纤维是空间时，$\mathbf{Env}(\boldsymbol{X})$ 是位于可分离性偏序集 $K^{\bullet}$之上的可隔离空间。$\mathbf{Env}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{K}$ 沿 $\boldsymbol{D} \to \mathbf{Env}(\boldsymbol{D}) = \boldsymbol{K}$ 的拉回可恢复$\boldsymbol{X}$。

Malthe Sporring 指出，这一构造是 Haugseng & Kock 的一般构造的一个特例； [32] 该构造适用于存在任意分解系统的情形。

设 X 是一个豪斯多夫拓扑空间。存在一个拟可隔离性范畴 $\Pi^{para}(X)$，使得$\mathbf{Env}(\Pi^{para}(X)) = \Pi(X^{\bullet}/K^{\bullet})$。一个对象是一个对 $(\langle\lambda\rangle, x)$，由相离关系 $\langle\lambda\rangle$ 和一个映射 $x : V\langle\lambda\rangle \to X$ 组成；该映射按如下意义严格分离：$(a, b) \in E\langle\lambda\rangle$ 当且仅当 $x_a \neq x_b$。一个态射 $(\langle\lambda\rangle, x) \to (\langle\mu\rangle, y)$是一个映射 $\varphi : \langle\lambda\rangle \to \langle\mu\rangle$，并且对每个 $a \in V\langle\lambda\rangle$，还需选取一条从 x_a到 $y_{\varphi(a)}$的路径 $\gamma_a : [0,1] \to X$，满足：若 $t > 0$，则 $(\varphi(a), \varphi(b)) \in E\langle\mu\rangle$ 当且仅当 $\gamma_a(t) \neq \gamma_b(t)$。

更精确地说，$\Pi^{para}(X)$ 的一个 n-单形由一个 n-单形 $\Delta^n \to \boldsymbol{D}_{\leq 2}$构成，它是一个相离关系序列 $\langle\lambda_0\rangle \to \cdots \to \langle\lambda_n\rangle$，以及一个从几何实现映射 F

$$|\Delta^n \times_{\boldsymbol{F}} \boldsymbol{F}_*| = \bigcup_{i=0}^{n} \bigcup_{a \in V\langle\lambda_i\rangle} |\Delta^{n-i}|$$

到 X 且满足某个条件。为表述该条件，记 F_a 为 F在上述并集中与顶点 $a \in V\langle\lambda_i\rangle$ 对应的 $(n-i)$-单形上的限制。条件如下：设 $a, b \in V\langle\lambda_i\rangle$ 为顶点，设 $j \geq i$，并设 $t \in |\Delta^{n-i}|$ 满足 $t_j > 0$；则 $F_a(t) \neq F_b(t)$ 当且仅当 a 和 b 的像由$\langle\lambda_j\rangle$中的一条边相连。

3.4 1-余图

在 §1 中，我们着重讨论了无向图，但我们也将考察余图的有向版本，称为 1-余图。

一个1-余图 $\langle\gamma\rangle = (V, E)$ 由集合 V的顶点以及一个反对称的传递关系 E 构成，满足下述 P_4-无关条件的定向版本（1.1.1）：

(3.4.1)
$$\forall w, x, y, z \in V \quad \{(w,x),(y,x),(y,z)\} \subseteq E \implies \{(y,w),(w,z),(z,x)\} \cap E \neq \varnothing .$$

自反 1-余图特别地是偏序集，通常称为串并联偏序集。

理论1-余图的理论几乎完全对应于余图的理论。例如，正如§1.3中所述，结合两个1-余图有两种方式：$\langle\gamma\rangle$ 和 $\langle\delta\rangle$：一方面，可以取不交并 $\langle\gamma \oplus \delta\rangle$，其中 $\langle\gamma\rangle$ 的每个元素都与 $\langle\delta\rangle$的每个元素不可比较；另一方面，可以取有序连通和 $\langle\gamma \overrightarrow{\oplus} \delta\rangle$，其中对于顶点 (x, y) 中的每个顶点 x 以及 $\langle\gamma\rangle$ 中的每个顶点 y，两者之间都有一条边 $\langle\delta\rangle$。

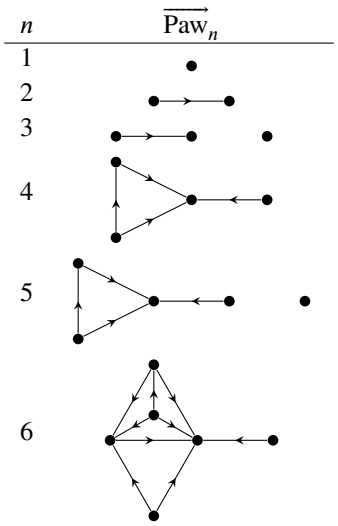


表 2：最初几个 1-余图 爪图$_n$

同样，有两个单点图——非自反的 $\langle 1\rangle$和自反的$\underline{\langle 1\rangle}$。对非自反单点集取不连通和，得到平凡的1-余图 $\langle n\rangle$；对自反单点集取有序连通和，得到全序有限集 $\langle\vec{n}\rangle$。所有1-余图构成的类，是包含单点图且对这两种和运算封闭的最小偏序集类（参见§1.4）。

例如，通过交替取定向的连通和与非连通和，我们可以构造爪图的 1-余图版本$_k$：

$$\overrightarrow{\text{Paw}}_k \coloneqq \langle(((\underline{1} \overrightarrow{\oplus} \underline{1}) \underline{\oplus} \underline{1}) \overrightarrow{\oplus} \underline{1}) \underline{\oplus} \cdots \underline{1}\rangle \,.$$

我们用 $\boldsymbol{G}^{[1]}$ 表示由 1-余图和保关系映射构成的范畴。现在，$(\boldsymbol{G}^{[1]}, \oplus, \overrightarrow{\oplus})$ 是一个双重幺半1-范畴，其中左侧的幺半结构是对称的。为简便起见，我们称这类范畴为 $\binom{\infty}{1}$-幺半1-范畴。$\boldsymbol{G}^{[1]}$ 中包含两个幺半全子范畴： $\boldsymbol{D}^{[1]}$ 由非自反 1-余图构成（特别地，它们是严格偏序），而 $\boldsymbol{E}^{[1]}$ 由自反 1-余图构成（特别地，它们是偏序集）。顶点函子 $V : \boldsymbol{G}^{[1]} \to \boldsymbol{F}$ 是一个笛卡尔纤维化，并且 $\boldsymbol{D}^{[1]}$ 和 $\boldsymbol{E}^{[1]}$是 $\boldsymbol{G}^{[1]}$的全纤维子范畴。

范畴 $\boldsymbol{F}$可等同于满子范畴 $\boldsymbol{D}^{[1]}_{\leq 1} \subset \boldsymbol{D}^{[1]}$，后者由平凡1-余图 $\langle n\rangle$构成。全序有限集的范畴 $\boldsymbol{O}$ 可等同于满子范畴 $\boldsymbol{E}^{[1],\leq 1} \subset \boldsymbol{E}^{[1]}$，后者由全序有限集 $\langle\vec{n}\rangle$构成。

交替这两种求和，我们构造穷尽滤过

$$\boldsymbol{G}^{[1]}_{\leq\bullet} \subset \boldsymbol{G}^{[1]}\,, \quad \boldsymbol{G}^{[1],\leq\bullet} \subset \boldsymbol{G}^{[1]}\,, \quad \boldsymbol{D}^{[1]}_{\leq\bullet} \subset \boldsymbol{D}^{[1]}\,, \quad \text{and} \quad \boldsymbol{E}^{[1],\leq\bullet} \subset \boldsymbol{E}^{[1]}$$

由纤维化于 $\boldsymbol{F}$ (参见§1.4）的全子范畴。例如， $\boldsymbol{D}^{[1]}_{\leq 2}$ 的对象是定向非邻接关系，其形式为 $\langle n_1 \overrightarrow{\oplus} \cdots \overrightarrow{\oplus} n_k\rangle$。

这与 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 有一些不同。最重要的是，请注意， $\boldsymbol{D}^{[1]}$ 和 $\boldsymbol{E}^{[1]}$ 并非垂直对立。相反，要得到 $\boldsymbol{D}^{[1],\,vop}$ 的显式模型，可以取一个由双色完全图构成的范畴，其中一种颜色（例如“红色”）构成自反余图，另一种颜色（例如“蓝色”）构成非自反1-余图。这一观察及其各种推广归功于 Willow Bevington 和 Malthe Sporring。

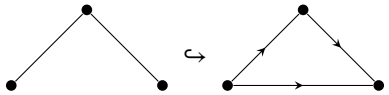
对于1-余图，我们可以做的一件新事情是构造1-余图$\langle\gamma\rangle$的对偶 $\langle\gamma\rangle^{op}$。该运算定义了一个自同构 $\boldsymbol{G}^{[1]} \to \boldsymbol{G}^{[1]}$，它保持两个单点图不变，与 $\oplus$相容，并在 $\langle\gamma \mathbin{\overrightarrow{\oplus}} \delta\rangle^{op} = \langle\delta\rangle^{op} \mathbin{\overrightarrow{\oplus}} \langle\gamma\rangle^{op}$的意义下反转 $\overrightarrow{\oplus}$的次序。

我们有一个遗忘函子 $S : \boldsymbol{G}^{[1]} \to \boldsymbol{G}$。若 $\langle\gamma\rangle$ 是带有 $\langle n\rangle = V\langle\gamma\rangle$的1-余图，则

$$S\langle\gamma\rangle = \langle\gamma\rangle \cup^{\langle n\rangle} \langle\gamma\rangle^{op} .$$

注意，该遗忘函子关于 $\oplus$ 是对称幺半的，关于 $\overrightarrow{\oplus}$是幺半的。若 $\underline{\langle\lambda\rangle} = S\langle\gamma\rangle$，则我们称 $\langle\gamma\rangle$ 是 $\langle\lambda\rangle$上的1-结构。 $\langle\lambda\rangle$ 上所有1-结构的集合——即 S 在 $\langle\lambda\rangle$ 上的纤维 $\boldsymbol{G}^{[1]}_{\langle\lambda\rangle}$ ——是一个集合。

遗忘函子 $\boldsymbol{S}$ 并不完全是右纤维化。换言之，将余图 $\langle\lambda\rangle$ 对应到其1-结构集合 $\boldsymbol{G}^{[1]}_{\langle\lambda\rangle}$ 的指派并不是函子。例如，当过渡到某个1-余图的无向子余图时，传递性可能会丧失。例如， $\langle 1 \underline{\oplus} 2\rangle$ 包含于 $S\langle 1 \overrightarrow{\oplus} 1 \overrightarrow{\oplus} 1\rangle$:



实际上，这是唯一可能出错之处。函子 $\boldsymbol{S}$ 确实限制为增积态射上的右纤维化。更精确地说，对每一个增积态射 $f : \langle\lambda\rangle \to \langle\mu\rangle$ （属于 $\boldsymbol{G}$ ）以及每一个1-结构 $\langle\delta\rangle$ （在 $\langle\mu\rangle$上），存在 $\boldsymbol{S}$-笛卡尔提升$\langle\gamma\rangle \to \langle\delta\rangle$ （即 f的提升）。特别地， $\boldsymbol{D}^{[1]}$ 是准可隔离空间，其意义见§3.3。

因此，可以构造 $\boldsymbol{D}^{[1]}$ 的包络，从而得到可分离性分层

$$\mathbf{Env}(\boldsymbol{D}^{[1]}) \to \boldsymbol{D} ,$$

它位于典范可分离性偏序集 $\boldsymbol{K}^{\bullet}$之上。

$\mathbf{Env}(\boldsymbol{D}^{[1]})$ 的对象是广义1-余图，也就是由一个 1-余图 $\langle\gamma\rangle$ 和一个具有相同顶点的子余图 $\langle\lambda\rangle \subseteq S\langle\gamma\rangle$ 组成的对 $(\langle\lambda\rangle, \langle\gamma\rangle)$ 。

包络$\mathbf{Env}(\boldsymbol{D}^{[1]})$ 的 2-骨架等价于附属于实直线的可分离性分层，正如下文将要证明的那样。

3.5 可分离性直线与1-余图

可隔离空间 $\Pi(\boldsymbol{R}^{\bullet}/\boldsymbol{K}^{\bullet})$ 就是我们所说的可分离性直线。余图 $\langle\lambda\rangle$ 上的取值是分离函数 $x : V\langle\lambda\rangle \to \boldsymbol{R}$所构成的分层空间。这里我们给出可分离性直线的一种更具组合性的描述。

回顾（§3.4），非自反 1-余图构成一个拟可隔离空间 $\boldsymbol{D}^{[1]}$；但我们实际上只关注其中由定向非邻接关系构成的部分 $\boldsymbol{D}^{[1]}_{\leq 2}$。的包络（§3.3）是可隔离空间 $L^{\bullet}$，其中每个 $\langle\lambda\rangle$ 都被映射到 $L^{\lambda} \coloneqq K^{\lambda} \times_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{D}^{[1]}_{\leq 2}$。换言之，$L^{\lambda}$ 是弥散映射的偏序集 $j : \langle\lambda\rangle \to S\langle\gamma\rangle$，其中 $\langle\gamma\rangle$ 是一个定向非邻接关系。

拓扑空间 $\boldsymbol{R}^{\lambda}$ 自然地按偏序集 L^{λ}分层：对于每个分离函数 $x : V\langle\lambda\rangle \to \boldsymbol{R}$，我们都赋予相应的弥散映射 $\langle\lambda\rangle \to S\langle\gamma_x\rangle$，其中 $\langle\gamma_x\rangle$ 是一个与 $\langle\lambda\rangle$具有相同顶点的 1-余图，但现在 $(a,b) \in E\langle\gamma_x\rangle$ 当且仅当 $x_a < x_b$。此外，E^{λ}-分层拓扑空间 $\boldsymbol{R}^{\lambda}$ 的各层及其链接都是可缩的。因此：

命题 3.5.1. $\Pi(\boldsymbol{R}^{\bullet}/K^{\bullet}) = L^{\bullet}$。

利用§2.6中的张量积，我们可以将可隔离拓扑空间$(\boldsymbol{R}^{n})^{\bullet}$ 按可分离性偏序集 $(K^{\otimes n})^{\bullet} \coloneqq (K \otimes \cdots \otimes K)^{\bullet}$进行分层。我们得到：

推论 3.5.2。 $\Pi((\boldsymbol{R}^{n})^{\bullet}/(K^{\otimes n})^{\bullet}) = (L^{\otimes n})^{\bullet}$。

沿着 $K^{\otimes n} \to K$ 改变分层后，这就成为一种用组合术语描述 $\Pi((\boldsymbol{R}^{n})^{\bullet}/K^{\bullet})$ 的方式。（对于这个可隔离空间，还有一种更直接的理解方式，我们将在未来与 Malthe Sporring 合作时探讨。）

3.6 同伦语境中的 Ranspace 空间

回顾一下，纤维范畴 $u : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{F}$给出一个分解系统 $(\boldsymbol{A}^{disp}, \boldsymbol{A}_{accr})$，其中 $\boldsymbol{A}^{disp}$ 由弥散的——即，u-反转——映射构成，而 $\boldsymbol{A}_{accr}$ 由增生的—— 即，u-笛卡尔——映射构成。利用这个分解系统，我们在 §1.6 中引入了纤维范畴 的垂直对范畴 A^{vop} $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{F}$，即 $\boldsymbol{A}$ 中的跨度范畴，其中后向映射是弥散的，前向映射是增生的。现在，水平对范畴则是跨度范畴

$$\boldsymbol{A}^{hop} \coloneqq \boldsymbol{A}^{vop,op} = \mathrm{Span}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{A}^{disp}, \boldsymbol{A}_{accr})$$

其中前向映射是弥散的，后向映射是增生的。

例如，$\boldsymbol{D}^{hop} = \boldsymbol{E}^{op}$（经由取反）。考虑截面 $\boldsymbol{F} \hookrightarrow \boldsymbol{E}$，它将$\langle n\rangle$ 映到 $\langle n\rangle_{refl} = \langle n \cdot 1\rangle = \langle 1 \oplus \cdots \oplus 1\rangle$；若施加水平对偶，则它变为$\boldsymbol{F}^{op} \hookrightarrow \boldsymbol{D}^{hop}$，将 $\langle n\rangle$ 映到 $\langle n\rangle_{irr} = \langle n \cdot 1\rangle = \langle 1 \oplus \cdots \oplus 1\rangle$。

我们来考虑一个表示为笛卡尔纤维化 $\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{D}$的可隔离空间 $X^{\bullet}$。通过复合，我们将 $\boldsymbol{X}$ 视为纤维化于 $\boldsymbol{F}$之上。现在，$X^{\bullet}$ 的含幺 *Ran* 空间 是范畴

$$\mathrm{Ran}^{u}(X^{\bullet}) \coloneqq \boldsymbol{X}^{hop} \times_{\boldsymbol{D}^{hop}} \boldsymbol{F}^{op}$$

在 $\boldsymbol{F}^{op}$之上。$X^{\bullet}$ 的*Ran* 空间 是进一步的拉回

$$\mathrm{Ran}(X^{\bullet}) \coloneqq \boldsymbol{X}^{hop} \times_{\boldsymbol{D}^{hop}} \boldsymbol{F}_{s}^{op}\,.$$

如果 $\langle\lambda\rangle$ 是容许增积映射 $\langle\lambda\rangle \to \langle n \cdot 1\rangle$ 的无自反余图，则必然 $\langle\lambda\rangle \in \boldsymbol{D}_{\leq 2}$。这意味着截面 $\boldsymbol{F}^{op} \hookrightarrow \boldsymbol{D}^{hop}$ 通过

$\boldsymbol{D}^{hop}_{\leq 2} \subset \boldsymbol{D}^{hop}$. 因此，Ran 空间附属于 $X^\bullet$ 者仅依赖于 2-骨架 $\mathrm{sk}_2(X^\bullet)$(§2.5)。

让我们考虑 $\mathrm{Ran}(\Pi(X^\bullet/K^\bullet))$ 的特殊情形。对象 $(\langle n\rangle, x)$ 由有限集 $\langle n\rangle$ 和一个点 $x \in X^{n\cdot}$ 组成。这个 x 是由 X 中 n 个互不相同的点构成的一个构型。映射 $(\langle n\rangle, x) \to (\langle m\rangle, y)$ 现在是有限集的映射 $f : \langle m\rangle \to \langle n\rangle$，并且对于仅在 x_j 处相交的每个 $f(i) = j$，还包含一条从 x_j 到 y_i 的路径。

更具体地说，如果 X 是一个流形，那么这个 Ran 空间等价于 Cepek 构造的含幺 Ran 空间的出射路径范畴 [15, Df. 1.0.4], ，而 Ran 空间 $\mathrm{Ran}(\Pi(X^\bullet/K^\bullet))$ 是通常（非含幺）Ran 空间[15, Df. 1.0.10]的出射路径范畴。

我们对可分离性直线和可分离性 n-空间（§3.5）现在线性复述了 Cepek 定理的一个变体：

命题 3.6.1。 $\mathrm{Ran}^u(\Pi((\boldsymbol{R}^n)^\bullet/(K^{\otimes n})^\bullet)) = \boldsymbol{O}^n$，其中 $\boldsymbol{O}^n$ 是范畴 $\boldsymbol{O}$ 的 n 重积，而 $\boldsymbol{O}$ 是全序有限集的范畴。

通过沿 $(K^{\otimes n})^\bullet \to K^\bullet$ 改变分层，我们得到 Cepek 对 [15, 的识别（定理 1.2）： 1]

$$\mathrm{Ran}^u(\Pi((\boldsymbol{R}^n)^\bullet/K^\bullet)) = \boldsymbol{O}^{(n)},$$

其中 $\boldsymbol{O}^{(n)}$ 是由一个 n-幺半体生成的自由 n-幺半范畴——或者等价地，是 $\boldsymbol{O}$ 与自身的 n 重花环积，并将双射 [7] 逆化。

4 二重对称幺半结构

设 $\langle\lambda\rangle \mapsto X^\lambda$ 是一个可隔离空间。设想我们所关注的是“层”的理论，这些层组织成对称幺半范畴 $T \mapsto \boldsymbol{A}(T)$ 的图表。那么，可隔离空间 X 上的可隔离结构会在对称幺半范畴 $\boldsymbol{A}(X)$ 上诱导出什么结构?

简单的回答是，我们有一个对称幺半范畴的图表 $\langle\lambda\rangle \mapsto \boldsymbol{A}(X^\lambda)$。这一结构来自右外张量积

$$\overline{\boxtimes} : \boldsymbol{A}(X^\lambda) \times \boldsymbol{A}(X^\mu) \to \boldsymbol{A}(X^{\lambda \overline{\oplus} \mu});$$

$\boldsymbol{A}(X^\lambda)$ 上的内张量积来自将右外积沿对角线 $X^\lambda \to X^{\lambda\oplus\lambda}$加以限制。

但这一结构把另一种结构悄悄带入了我们的叙述：通过沿我们的映射 $X^{\lambda\oplus\mu} \to X^{\lambda\overline{\oplus}\mu}$进行限制，我们得到左外张量积

$$\underline{\boxtimes} : \boldsymbol{A}(X^\lambda) \times \boldsymbol{A}(X^\mu) \to \boldsymbol{A}(X^{\lambda\overline{\oplus}\mu}).$$

因子化代数是相对于这些左外张量积来定义的。

为了解释这两种外积如何相互作用，我们将它们理解为图表 $\langle\lambda\rangle \mapsto \boldsymbol{A}(X^\lambda)$上的一种“二重对称幺半结构”。

粗略地说，范畴上的二重对称幺半结构 C 是指一对对称幺半结构 $\otimes$，$\underline{\otimes}$ 它们必须共享同一个单位，并且具有交织映射

$$(U \,\overline{\otimes}\, V) \,\underline{\otimes}\, (X \,\overline{\otimes}\, Y) \to (U \,\underline{\otimes}\, X) \,\overline{\otimes}\, (V \,\underline{\otimes}\, Y),$$

在 U、 V、 X和 Y中自然。在 1-范畴语境中，这些结构由 Balteanu、Fiedorowicz、Schwänzl 和 Vogt 定义 [5]。它们是 双幺半 1-范畴[12], 的特殊情形，其中幺半结构的单位不要求相同。Takeshi Torii [29] 描述了双幺半范畴的完全同伦理论。

就我们的目的而言，给出一个一般而直接的定义在技术上更为方便。我们强调，这里只是概述二重代数理论的某些方面；更完整的发展将在别处给出。

4.1 余图的纤维化与指标化和

在讨论二重对称幺半结构的一般理论之前，让我们先看看余图范畴本身如何提供一个例子。

设 $\langle\lambda\rangle$ 为一个自反余图，并对每个顶点 $a \in V\langle\lambda\rangle$，设 $\langle\mu_a\rangle$ 为一个余图。我们可以定义一个指标化和

$$\langle\mu\rangle = \bigoplus_{a\in\langle\lambda\rangle} \langle\mu_a\rangle$$

按余图深度归纳地定义：若 $\langle\lambda\rangle = \langle 1\rangle$, $\overline{\ }$则令 $\langle\mu\rangle = \langle\mu_1\rangle$；若 $\langle\lambda\rangle = \langle\lambda_1 \oplus \lambda_2\rangle$, $\underline{\ }$则令

$$\langle\mu\rangle = \bigoplus_{a\in\langle\lambda_1\rangle} \langle\mu_a\rangle \underline{\oplus} \bigoplus_{b\in\langle\lambda_2\rangle} \langle\mu_b\rangle\,;$$

并且如果 $\langle\lambda\rangle = \langle\lambda_1 \overline{\oplus}\, \lambda_2\rangle$，那么我们令

$$\langle\mu\rangle = \bigoplus_{a\in\langle\lambda_1\rangle} \langle\mu_a\rangle \overline{\oplus} \bigoplus_{b\in\langle\lambda_2\rangle} \langle\mu_b\rangle\,.$$

因此，余图上的两个不同的和 $\overline{\oplus}$ 和 $\oplus$ 可以看作这个单一指标化和的特例。这为我们一般性地定义二重对称幺半范畴提供了范本：我们不指定两个不同的对称幺半结构及其相容性，而是用单一的指标直和来刻画二重结构。

在有限集范畴中，映射 $\langle m\rangle \to \langle n\rangle$ 将 $\langle m\rangle$ 表示为余积

$$\langle m\rangle = \coprod_{i\in\langle n\rangle} \langle m_i\rangle$$

各个纤维的余积。余图的指标化和的类似陈述并不完全正确（考虑弥散映射 $\langle 1\oplus 1\rangle \to \langle 2\rangle$），但要明确指定使其成立的映射并不困难。

称余图之间的映射 $\langle\mu\rangle \to \langle\lambda\rangle$ 为纤维化，当且仅当将其拉回到极大非自反子余图

$$\langle\mu\rangle \times_{\langle\lambda\rangle} \langle\lambda\rangle_{irr} \to \langle\lambda\rangle_{irr}$$

是增生的。如果 $\langle\lambda\rangle$ 是自反的，那么每个纤维化 $\langle\mu\rangle \to \langle\lambda\rangle$都将 $\langle\mu\rangle$ 表示为指标和

$$\langle\mu\rangle = \bigoplus_{a\in\langle\lambda\rangle} \langle\mu_a\rangle\,.$$

4.2 余图的部分映射

为了定义二重对称幺半结构的指标范畴，我们需要通过纳入并非处处定义的余图映射来扩充余图范畴。这里的类比是从有限集范畴 $\boldsymbol{F}$转向带基点有限集范畴 $\Lambda(\boldsymbol{F})$——或者等价地说，转向有限集与部分定义映射所构成的范畴。

令 $\Lambda(\boldsymbol{G})$ 为如下范畴：其对象是余图，态射是一个部分映射 $\langle\lambda\rangle \rightharpoonup \langle\mu\rangle$，其定义域是一个诱导子图 $\langle\lambda'\rangle \subseteq \langle\lambda\rangle$。也就是说，若 $\boldsymbol{G}^\dagger \subset \boldsymbol{G}$ 是由余图的增生单射组成的宽子范畴，那么$\Lambda(\boldsymbol{G})$ 就是跨度范畴 $\mathrm{Span}(\boldsymbol{G}; \boldsymbol{G}, \boldsymbol{G}^\dagger)$。等价地， $\Lambda(\boldsymbol{G})$ 是 $\boldsymbol{G}$ 上的单子所对应的 Kleisli 范畴 $\langle\mu\rangle \mapsto \langle\mu \oplus 1\rangle$。 ~~（~~在 [7]的意义下，它是完美算子范畴的“Leinster 范畴”的一个例子。）

同样地，我们定义由增生单射组成的宽子范畴 $\boldsymbol{D}^\dagger$ 和 $\boldsymbol{E}^\dagger$，并且有部分映射范畴

$$\Lambda(\boldsymbol{D}) = \mathrm{Span}(\boldsymbol{D}; \boldsymbol{D}, \boldsymbol{D}^\dagger) \qquad \text{and} \qquad \Lambda(\boldsymbol{E}) = \mathrm{Span}(\boldsymbol{E}; \boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}^\dagger)\,.$$

这些是 $\Lambda(\boldsymbol{G})$ 的全子范畴。

如果余图的部分映射 是惰性的，即它属于 $\boldsymbol{G}^{\dagger,\,op} \subset \Lambda(\boldsymbol{G})$，我们就称之为惰性部分映射。例如，给定一个自反余图 $\langle\lambda\rangle$ 和一个顶点 $a \in V\langle\lambda\rangle$，我们得到一个惰性部分映射$\chi_a : \langle\lambda\rangle \to \langle 1\rangle$；这些映射会出现在下一小节对二重交换结构的定义中。如果部分映射属于 $\boldsymbol{G} \subset \Lambda(\boldsymbol{G})$，我们就称之为主动 。这些映射在 $\Lambda(\boldsymbol{G})$ 上构成一个正交分解系统。

范畴 $\Lambda(\boldsymbol{D})$、 $\Lambda(\boldsymbol{E})$ 和 $\Lambda(\boldsymbol{G})$ 都位于有限集及部分映射范畴 $\Lambda(\boldsymbol{F})$ 之上。 $\boldsymbol{D}$、 $\boldsymbol{E}$、 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 之间各种位于 $\boldsymbol{F}$ 之上的自然函子，会在它们各自的“部分”变体之间诱导出函子。

例如，我们有两个完全忠实函子 $\boldsymbol{F} \hookrightarrow \boldsymbol{E}$。第一个是包含$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{D}_{\leq 1} \hookrightarrow \boldsymbol{G}$ 后再取自反包： $\langle n\rangle \mapsto \langle n\rangle_{refl}$。第二个是包含 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E}^{\leq 1} \hookrightarrow \boldsymbol{E}$，由赋值 $\langle n\rangle \mapsto \langle n\rangle$ 给出。它们扩张为函子 $\Lambda(\boldsymbol{E}) \to \Lambda(\boldsymbol{F})$的完全忠实左伴随和右伴随。这两个函子将在下文（§4.3）中出现；在我们下面的框架中，它们用于从二重对称幺半结构中提取底层对称幺半结构。

4.3 对称幺半双范畴

为处理由此产生的相容性问题，需要稍微借助一些双范畴理论。[8]我们沿用以下参考文献中的术语和构造： [22； 23； 2； 24； 1]。以下是一些与我们相关的双范畴示例：

Cat，即范畴构成的双范畴，

biCat，即双范畴构成的双范畴，

$\mathbf{Pr}^L$，可呈示范畴的双范畴，

[8]按照我们的约定，‘双范畴’指的是‘$(\infty, 2)$-范畴’。

$\mathbf{Mod}(\boldsymbol{A})$，相对于 Lurie 张量积的幺半可呈范畴 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{A}$-模的双范畴。

基本策略是先相对于笛卡尔积定义二重交换结构，再以此为基础将其推广到更一般的情形。因此，对于具有有限乘积的双范畴 $\boldsymbol{M}$，例如 **Cat** 或 **biCat**，我们定义$\boldsymbol{M}$中的“二重交换幺半群”。这使我们能够讨论“二重对称幺半范畴”和“二重对称幺半双范畴”。每个对称幺半（双）范畴都自动是一个二重对称幺半（双）范畴，其中两个张量积重合。接下来，给定一个二重对称幺半双范畴 $\boldsymbol{C}^{\underline{\otimes},\overline{\otimes}}$，我们将定义一个“二重交换幺半群”。例如，“二重对称幺半可呈示范畴”是 $\mathbf{Pr}^{L,\underline{\otimes},\overline{\otimes}}$中的一个二重交换幺半群。

设 $\boldsymbol{M}$ 是一个具有有限乘积的双范畴。 $\boldsymbol{M}$的一个二重交换幺半群将是一个归一化 oplax 函子

$$C^{\underline{\otimes},\overline{\otimes}} : \Lambda(\boldsymbol{E}) \to \boldsymbol{M}$$

满足某些条件。我们将用 C 表示这个归一化 oplax 函子在单元素集 $\langle 1\rangle$上的取值。注意， $C^{\underline{\otimes},\overline{\otimes}}$通过两个包含 $i,\ j : \Lambda(\boldsymbol{F}) \hookrightarrow \Lambda(\boldsymbol{E})$限制为两个归一化 oplax 函子

$$C^{\underline{\otimes}} \coloneqq i^* C^{\underline{\otimes},\overline{\otimes}} : \Lambda(\boldsymbol{F}) \to \boldsymbol{M} \qquad \text{and} \qquad C^{\overline{\otimes}} \coloneqq j^* C^{\underline{\otimes},\overline{\otimes}} : \Lambda(\boldsymbol{F}) \to \boldsymbol{M} ,$$

它们由一个自然变换 $C^{\underline{\otimes}} \to C^{\overline{\otimes}}$连接。

我们对归一化 oplax 函子 $C^{\underline{\otimes},\overline{\otimes}}$施加两个条件；其中一个是通常的 Segal 条件，另一个则更为微妙。要求 $C^{\underline{\otimes},\overline{\otimes}}$ 将 $\Lambda(\boldsymbol{E})$ 中的某些 2-单形映为 $\boldsymbol{M}$中的可逆 2-态射。现在我们需要确定这些 2-单形。

设 σ是 $\Lambda(\boldsymbol{E})$的一个 2-单形，由一个部分映射 $\langle\lambda\rangle \supseteq \langle\lambda'\rangle \to \langle\mu\rangle$、一个部分映射 $\langle\mu\rangle \supseteq \langle\mu'\rangle \rightharpoonup \langle\nu\rangle$及它们的复合 $\langle\lambda\rangle \supseteq \langle\lambda''\rangle \to \langle\nu\rangle$构成。现在我们称 σ 为薄，当且仅当诱导映射 $\langle\lambda''\rangle \to \langle\mu'\rangle$是一个纤维化。

现在，归一化 oplax 函子 $C^{\underline{\otimes},\overline{\otimes}}$是一个二重交换幺半群 $\boldsymbol{M}$，当且仅当它满足以下条件：

1. $\Lambda(\boldsymbol{E})$ 的每个薄 2-单形都被映射为 $\boldsymbol{M}$ 中的可逆 2-态射。
2. 对于每个自反余图 $\langle\lambda\rangle$，Segal 映射

$$C^{\underline{\otimes},\overline{\otimes}}_{\lambda} \to \prod_{a \in V\langle\lambda\rangle} C = C^{V\langle\lambda\rangle}$$

由惰性偏映射 $\chi_a : \langle\lambda\rangle \rightharpoonup \langle 1\rangle$ 诱导，是一个等价。

$C^{\underline{\otimes}}$ 和 $C^{\overline{\otimes}}$ 于是是 $\overline{\boldsymbol{M}}$中的交换幺半群对象，我们称之为$\boldsymbol{C}$上的左交换幺半群结构和右交换幺半群结构。这些结构配有一个交织子自然变换

$$\nu : (U \mathbin{\overline{\otimes}} V) \mathbin{\underline{\otimes}} (X \mathbin{\overline{\otimes}} Y) \to (U \mathbin{\underline{\otimes}} X) \mathbin{\overline{\otimes}} (V \mathbin{\underline{\otimes}} Y) .$$

由余图的活跃映射诱导

$$\langle(\bar{1}\,\overline{\oplus}\,\bar{1})\,\underline{\oplus}\,(\bar{1}\,\overline{\oplus}\,\bar{1})\rangle \to \langle(\bar{1}\,\underline{\oplus}\,\bar{1})\,\overline{\oplus}\,(\bar{1}\,\underline{\oplus}\,\bar{1})\rangle\,.$$

它们还共享一个单位，由函子 $\{1\} = C^{\otimes}_{,0}{}^{\otimes} \to C$ 给出；该函子由从空余图到单元素集的唯一活跃映射诱导。因此我们也有一个交换幺半群映射 $C^{\otimes} \to C^{\otimes}$。同理，该理论的所有相容性都可从范畴 $\boldsymbol{E}$中的图表中提取。

4.4 示例

我们将双范畴 $\boldsymbol{M} = \mathbf{Cat}$ 二重对称幺半范畴中的二重交换幺半群称为二重对称幺半范畴。在这种情况下，将归一化 oplax 函子$_{C^{\otimes},}{}^{\otimes}$ 重新表述为局部余笛卡尔纤维化会很有帮助

$$C^{\underline{\otimes},\overline{\otimes}} \to \Lambda(\boldsymbol{E})\,.$$

那么我们的条件变为：

1. 对于每个方形

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{\{0,1\}} & \xrightarrow{f} & C^{\underline{\otimes},\overline{\otimes}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^2 & \xrightarrow[\sigma]{} & \Lambda(\boldsymbol{E}) \end{array}$$

其中 σ 是薄的，态射 f 在 $C^{\otimes,\otimes} \times_{\Lambda(\boldsymbol{E})} \Delta^2$中是余笛卡尔的。

2. Segal 映射 $C^{\otimes}_{,\ \lambda^{\otimes}} \to C^{u\langle\lambda\rangle}$ 是等价。

类似地，二重对称幺半双范畴是 biCat 中的二重交换幺半群对象。**biCat**得益于 Fernando Abellán 的直化/反直化等价 [1], ，这些可以表示为在 $(0,1)$ 上的局部 $\Lambda(\boldsymbol{E})$ -纤维化，并满足上述三个条件。

若 $A^{\otimes}$ 是一个对称幺半范畴，我们可以沿遗忘函子 $u\colon \Lambda(\boldsymbol{E}) \to \Lambda(\boldsymbol{F})$ 将其拉回，从而得到一个二重对称幺半范畴 $A^{\otimes,\ \otimes}$。

按照 [5] 的定义，二重对称幺半 1-范畴自动就是二重对称幺半范畴。因此，范畴 $\boldsymbol{G}$、 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 都是例子。

让我们明确描述 $\overline{G}^{\oplus,\ \oplus} \to \Lambda(\boldsymbol{E})$ 。令 $\mathbf{Fib}(\boldsymbol{G})$ 为$\mathbf{Arr}(\boldsymbol{G})$ 的满子范畴，其对象是纤维化 $\langle\nu\rangle \twoheadrightarrow \langle\lambda\rangle$，且 $\langle\lambda\rangle$ 自反。现在

$$G^{\underline{\oplus},\overline{\oplus}} = \mathrm{Span}(\mathbf{Fib}(\boldsymbol{G}), \mathbf{Fib}(\boldsymbol{G}), \mathbf{Fib}(\boldsymbol{G})^{\dagger})\,,$$

其中$\mathbf{Fib}(\boldsymbol{G})^{\dagger}$ 由拉回方块组成

$$\begin{array}{ccc} \langle\nu'\rangle & \xrightarrow{f'} & \langle\nu\rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ \langle\lambda'\rangle & \xrightarrow[f]{} & \langle\lambda\rangle \end{array}$$

其中 f 和（因此） f' 是增生注入。局部余笛卡尔纤维化 $G^{\oplus,\oplus} \to \Lambda(E)$ 由目标函子 $\mathbf{Fib}(G) \to E$ 诱导。现在， $D^{\oplus,\oplus}$ 和 $E^{\oplus,\oplus}$ 分别是由源 ν 为非自反和自反的纤维化 $\langle \nu \rangle \twoheadrightarrow \langle \lambda \rangle$ 张成的全子范畴。

4.5 二重对称幺半范畴中的二重幺半群

设 $C^{\otimes,\otimes} \to \Lambda(E)$是一个二重对称幺半双范畴，以局部$(0,1)$-纤维化的形式呈现。$C^{\otimes,\otimes}$ 中的一个二重交换幺半群 是一个截面 $\Lambda(E) \to C^{\otimes,\otimes}$，它将惰性偏映射映到余笛卡尔态射。

$C^{\otimes,\otimes}$ 中的一个二重交换幺半群因此是一个对象 $X = X_1 \in C$，连同两个交换幺半群结构 $\otimes\colon X \otimes X \to X$ 和 $\otimes\colon X \otimes X \to X$，它们具有一个公共单位元 $\iota\colon \mathbf{1}_C \to X$。这两个结构通过交织映射$\nu$相容。

我们将$\mathbf{CAlg}^{(2)}(C^{\otimes,\otimes})$ 记作$C^{\otimes,\otimes}$中二重交换幺半群所成的双范畴。

若 M 是具有有限乘积的双范畴，那么按照通常的方法可以证明，二重对称幺半范畴 $M^{\times,\times}$ 中的二重交换幺半群，本质上等同于 M 意义下的二重交换幺半群§4.3。

4.6 二重 Day 卷积

设 $A^{\otimes,\otimes}$是一个二重对称幺半范畴。在 $\mathrm{Fun}(A,\mathbf{Cat})$上有一个二重对称幺半结构，其中两种对称幺半结构$\otimes$ 和 $\otimes$ 分别是关于 $\otimes$ 和 $\otimes$ 在 A上的 Day 卷积（注意顺序相反！）所得到的。为精确构造这个二重对称幺半结构，我们采用 Hadrian Heine 的巧妙策略 [33,§6.1]。

考虑由范畴的余笛卡尔纤维化构成的双范畴 **Cocart** 。它在积下是对称幺半的，并且有一个对称幺半函子 $\mathbf{Cocart}^{\times} \to \mathbf{Cat}^{\times}$，由取目标给出。于是，我们可以将其拉回，得到一个二重对称幺半函子 $\mathbf{Cocart}^{\times,\times} \to \mathbf{Cat}^{\times,\times}$，它是一个局部 $(0,1)$-纤维化。随后，二重对称幺半范畴 $A^{\otimes,\otimes}$ 可以表示为一个截面 $\Lambda(E) \to \mathbf{Cat}^{\times,\times}$。沿此截面拉回 $\mathbf{Cocart}^{\times,\times} \to \mathbf{Cat}^{\times,\times}$，得到一个局部 $(0,1)$-纤维化

$$\mathrm{Fun}(A, \mathbf{Cat})^{\otimes,\otimes} := \Lambda(E) \times_{\mathbf{Cat}^{\times,\times}} \mathbf{Cocart}^{\times,\times} \to \Lambda(E)\,,$$

这是一个二重对称幺半双范畴。

由 Heine 的工作可知， $\mathrm{Fun}(A,\mathbf{Cat})$ 上的两种对称幺半结构 $\otimes$ 和 $\otimes$由 Day 卷积给出。

4.7 评论与问题

以下是一些基本陈述:

– $\boldsymbol{E}$ 是支持一个二重交换幺半群的自由双重对称幺半范畴。– $\boldsymbol{D}$ 是支持关于左张量积 $\oplus$ 的交换幺半群的自由双重对称幺半范畴。– $\boldsymbol{D}^{disp}$，它等价于 $\boldsymbol{E}^{disp}$（通过函子 $\langle\lambda\rangle \mapsto \langle\lambda\rangle_{refl}$），也等价于 $\boldsymbol{D}^{disp,\ op}$ 和 $\boldsymbol{E}^{disp,\ op}$（通过取反），是由单个对象生成的自由双重对称幺半范畴。（这一观察归功于 Malthe Sporring。）

这些陈述当然可以用我们在此给出的定义加以证明，但这并不令人意外：我们的定义或多或少已经将这些断言内置于理论之中了。

对这些结构作出更令人满意的阐述，将发展出一套甚至关于“$\binom{m}{n}$-幺半范畴”的理论——即，E_m-幺半对象于2-范畴$\mathbf{Mon}^{(n)}$、$^{oplax}\mathbf{Cat}$ 中的 n-幺半范畴与正规 oplax n-幺半函子——从第一性原理出发，而不直接依赖余图的组合学。对于 1-范畴，我们已经有 Balteanu、Fiedorowicz、Schwänzl 和 Vogt 的工作 [5]。对于一般范畴，Takeshi Torii 发展出了更一般的双幺半范畴 [43], 概念，而我们预期 $\binom{1}{1}$-幺半范畴正是单位相重合的双幺半范畴。如何调整 Torii 的定义以给出合理的 $\binom{m}{n}$-幺半范畴定义，大体上是清楚的。在这一背景下，对我们所提出的泛性质加以确认，将意味着确认我们的理论是正确的。

将这一叙述进一步推进，算子范畴 [7] 的理论能否扩展，以处理像 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 这样的范畴？一种双重算子范畴理论——它进而可以为各种各样的双重幺半结构提供索引——似乎特别有趣。人们猜想，范畴 $\boldsymbol{E}$ 应当是终端双重算子范畴。人们甚至可以设想更一般的迭代幺半结构，以及与之相伴的迭代算子范畴理论。

我们已经看到余图理论的非交换变体。在§3.4 我们定义了1-余图，即余图的有向版本。范畴 $\boldsymbol{D}^{[1]}$（非自反1-余图）将是自由 $\binom{\infty}{1}$-幺半范畴，由一个交换幺半群对左张量积生成。Willow Bevington与Malthe Sporring的工作试图构造各种万有 $\binom{m}{n}$-幺半范畴，采用类似的组合术语。

5 因子化代数

我们来到主要构造。我们描述一种用以定义因子化代数范畴的相当一般的方案，并给出两个例子。

不过，在此之前，我们先采用同样的做法，只少用一个对称幺半结构；所得结果恰好就是 Ran 空间上的层范畴。

5.1 Ran 空间上的层

对称幺半范畴就是一个到$\mathbf{Cat}$的对称幺半函子 $\boldsymbol{F} \to$。因此，我们将松对称幺半范畴[9]定义为一个松对称

[9]这与文献中该短语的其他用法并不一致。

幺半函子 $F \to \mathbf{Cat}$。等价地，松对称幺半范畴就是一个函子 $F \to \mathbf{CAlg}(\mathbf{Cat})$。这些构成一个双范畴$\mathbf{CAlg}^{lax}(\mathbf{Cat})$，其中包含$\mathbf{CAlg}(\mathbf{Cat})$。

我们可以赋予 $\mathrm{Fun}(F, \mathbf{Cat})$ Day 卷积对称幺半结构$\otimes$。该对称幺半结构的单位是取值为平凡范畴 $1_\bullet$ 的常值图表。对于这一对称幺半结构，交换代数恰好就是松对称幺半范畴：

$$\mathbf{CAlg}^{lax}(\mathbf{Cat}) = \mathbf{CAlg}(\mathrm{Fun}(F, \mathbf{Cat})) .$$

每个松对称幺半范畴 $V_\bullet$ 都限制为一个函子 $V_{s,\bullet} : F_s \to \mathbf{Cat}$。松对称幺半范畴 $V_\bullet$ 的整体截面是一个自然变换$1_{s,\bullet} \to V_{s,\bullet}$。这些构成一个对称幺半范畴

$$\Gamma(V_\bullet) \coloneqq \mathrm{HOM}_{\mathrm{Fun}(F_s,\mathbf{Cat})}(1_{s,\bullet}, V_{s,\bullet}) = \lim_{\langle n\rangle \in F_s} V_n .$$

设 X 是一个具有有限乘积的范畴，我们将其中的对象在某种意义上视为几何对象。通常，X 会是——或者可以扩充为——一个拓扑斯。我们还设想某种层理论，将其赋予一个松对称幺半函子 $A : X^{op} \to \mathbf{Cat}$，或者等价地，一个函子 $A : X^{op} \to \mathbf{CAlg}(\mathbf{Cat})$。

考虑一个函子 $X^\bullet : F^{op} \to X$，对于 F 上的余积和 X 上的积，它自动是宽松对称幺半的。如果 $X^\bullet$ 实际上是对称幺半的，那么它由 $X = X^1$唯一确定，而后者自动构成一个交换余幺半群。无论如何，我们现在得到一个松对称幺半范畴 $A(X^\bullet)$。其整体截面现在恰好是 Ran 空间上的层

$$\Gamma(A(X^\bullet)) = A(\mathrm{Ran}\, X) ,$$

其中 $\mathrm{Ran}\, X = \mathrm{colim}_{\langle n\rangle \in F_s} X^n$ 按需以形式方式定义。

要在含单位的Ran 空间上得到层，可以在本讨论中用非空有限集范畴 $F_{>0}$ 替换 F_s 。

5.2 视差对称幺半范畴

将 $\mathbf{Cat}$ 视为二重对称幺半范畴 $\mathbf{Cat}^{\times,\times}$ 其对角二重结构由积给出。对称幺半范畴现在等同于二重对称幺半函子 $D^{\oplus,\oplus} \to \mathbf{Cat}^{\times,\times}$。相应地，我们将视差对称幺半范畴定义为松二重对称幺半函子$D^{\oplus,\oplus} \nrightarrow \mathbf{Cat}^{\times,\times}$。这等同于松对称幺半函子 $D^{\oplus} \to \mathbf{Cat}^{\times}$，也等同于函子 $D \to \mathbf{CAlg}(\mathbf{Cat})$。这些对象构成一个双范畴 $\mathbf{CAlg}_{parallax}(\mathbf{Cat})$。

由于 D 是一个二重对称幺半范畴，双范畴 $\mathrm{Fun}(D,\mathbf{Cat})$ 具有其二重 Day 卷积对称幺半结构。左对称幺半结构由 Day 卷积给出

$$(V \mathbin{\underline{\otimes}} W)_\lambda = \operatorname*{colim}_{\langle \mu \oplus \nu\rangle \to \langle \lambda\rangle} V_\mu \times W_\nu ,$$

并且由于不交并 $\oplus$ 是 $\boldsymbol{D}$中的余积，右对称幺半结构由逐点张量积给出

$$(\boldsymbol{V} \mathbin{\overline{\otimes}} \boldsymbol{W})_\lambda = \boldsymbol{V}_\lambda \times \boldsymbol{W}_\lambda \,.$$

Fun($\boldsymbol{D}$,**Cat**) 中的单位是取值为可缩范畴的常值函子 $1_\bullet$。

因此，视差对称幺半范畴恰好等同于 $\otimes$的交换幺半群；而后者又恰好等同于 Fun($\boldsymbol{D}$,**Cat**)$^{\otimes,\otimes}$中的二重交换幺半群：

$$\mathbf{CAlg}^{parallax}(\mathbf{Cat}) = \mathbf{CAlg}(\mathrm{Fun}(\boldsymbol{D}, \mathbf{Cat})^{\overline{\otimes}}) = \mathbf{CAlg}^{(2)}(\mathrm{Fun}(\boldsymbol{D}, \mathbf{Cat})^{\underline{\otimes},\overline{\otimes}}) \,.$$

因此，视差对称幺半范畴 $\boldsymbol{V}_\bullet \colon \boldsymbol{D} \to \mathbf{Cat}$ 带有乘积

$$\overline{\boxtimes} \colon \boldsymbol{V}_\lambda \times \boldsymbol{V}_\mu \to \boldsymbol{V}_{\lambda \underline{\oplus} \mu} \,,$$

由此又诱导出乘积

$$\underline{\boxtimes} \colon \boldsymbol{V}_\lambda \times \boldsymbol{V}_\mu \to \boldsymbol{V}_{\lambda \overline{\oplus} \mu} \,.$$

换句话说，若将 $\boldsymbol{V}_\bullet$ 视为 Fun($\boldsymbol{D}$,**Cat**)$^{\otimes,\otimes} \to \Lambda(\boldsymbol{E})$的一个截面，那么我们可以沿着两个函子 $i, j \colon \Lambda(\boldsymbol{F}) \hookrightarrow \Lambda(\boldsymbol{E})$ 拉回，从而得到两个松对称幺半函子

$$\underline{\boldsymbol{V}}_\bullet \colon \boldsymbol{D}^{\overline{\oplus}} \to \mathbf{Cat}^\times \qquad \text{and} \qquad \overline{\boldsymbol{V}}_\bullet \colon \boldsymbol{D}^{\underline{\oplus}} \to \mathbf{Cat}^\times \,.$$

当然，$\boldsymbol{V}_\bullet^{\otimes}$包含了 $\boldsymbol{V}_\bullet$的全部数据，但赋值 $\boldsymbol{V}_\bullet \mapsto \boldsymbol{V}_\bullet^{\otimes}$ 是一个非平凡的遗忘函子

$$\mathbf{CAlg}^{parallax}(\mathbf{Cat}) \to \mathbf{CAlg}(\mathrm{Fun}(\boldsymbol{D}, \mathbf{Cat})^{\underline{\otimes}}) \,.$$

视差对称幺半范畴 $\boldsymbol{V}_\bullet$ 是可呈示的，当且仅当 $\boldsymbol{V}_\bullet$ 提升为函子$\boldsymbol{D} \to \mathbf{Pr}^L$，并且 $\underline{\boxtimes}$ 和 $\overline{\boxtimes}$ 分别在每个变量中保持余极限。在此情况下，$\boldsymbol{V}_\bullet$ 也可以描述为带有二重 Day 卷积的 Fun($\boldsymbol{D}$,$\mathbf{Pr}^L$) 中的二重交换幺半群。[10]

设 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$ 是一对由一个具有有限乘积的范畴 $\boldsymbol{X}$ 以及一个层理论 $\boldsymbol{A} \colon \boldsymbol{X}^{op} \to \mathbf{Cat}$组成，如§5.1所述。现在令 $X^\bullet$ 为 $\boldsymbol{X}$的一个可隔离对象。于是我们得到一个视差对称幺半范畴

$$\boldsymbol{A}(X^\bullet) \colon \boldsymbol{D} \to \mathbf{Cat} \,.$$

两种不同的对称幺半结构：

$$\underline{\boxtimes} \colon \boldsymbol{A}(X^\lambda) \times \boldsymbol{A}(X^\mu) \to \boldsymbol{A}(X^{\lambda \overline{\oplus} \mu}) \qquad \text{and} \qquad \overline{\boxtimes} \colon \boldsymbol{A}(X^\lambda) \times \boldsymbol{A}(X^\mu) \to \boldsymbol{A}(X^{\lambda \underline{\oplus} \mu})$$

是通常外积 $\boxtimes \colon \boldsymbol{A}(X^\lambda) \times \boldsymbol{A}(X^\mu) \to \boldsymbol{A}(X^\lambda \times X^\mu)$ 的限制。

[10]严格来说，在此情况下我们尚未构造二重 Day 卷积，因为我们想要使用 Heine 的技巧。

5.3 因子化代数

设 $\boldsymbol{V}_\bullet : \boldsymbol{D} \to \mathbf{Cat}$ 是一个视差对称幺半范畴。要理解分解结构，关键在于不再考虑关于 $\oplus$ 的松对称幺半性，而只保留关于 $\oplus$ 的松对称幺半性。因此，$\boldsymbol{V}_\bullet$ 限制为函子 $\boldsymbol{V}_{s,\bullet} : \boldsymbol{D}_s \to \mathbf{Cat}$，我们将其视为一个非幺松对称幺半函子 $\boldsymbol{D}_s^{\oplus} \to \mathbf{Cat}^{\times}$ ——或者等价地，视为 $\mathrm{Fun}(\boldsymbol{D}_s, \mathbf{Cat})^{\otimes}$ 中的非幺交换幺半群。赋值 $\boldsymbol{V}_\bullet \mapsto \boldsymbol{V}_{s,\bullet}$ 是一个函子

$$\mathbf{CAlg}^{(2)}(\mathrm{Fun}(\boldsymbol{D}, \mathbf{Cat})^{\otimes, \overline{\otimes}}) \to \mathbf{CAlg}^{nu}(\mathrm{Fun}(\boldsymbol{D}_s, \mathbf{Cat})^{\otimes}) .$$

一个整体截面 现在是一个 $\boldsymbol{V}_\bullet$ 的非幺交换代数映射

$$F_\bullet : 1_{s,\bullet} \to \underline{\boldsymbol{V}}_{s,\bullet} .$$

这些构成一个对称幺半范畴

$$\Gamma(\boldsymbol{V}_\bullet) = \mathrm{HOM}_{\mathbf{CAlg}^{nu}(\mathrm{Fun}(\boldsymbol{D}_s, \mathbf{Cat})^{\otimes})}(1_{s,\bullet}, \underline{\boldsymbol{V}}_{s,\bullet}) .$$

因此，整体截面指定了：

– 对每个非空余图 $\langle\lambda\rangle$，一个对象 $F_\lambda \in \boldsymbol{V}_\lambda$；– 对每个满射 $i : \langle\lambda\rangle \to \langle\mu\rangle$，一个同一化 $i^* F_\lambda = F_\mu$；以及 – 对每对余图 $\langle\lambda\rangle$ 和 $\langle\mu\rangle$，一个在 $\boldsymbol{V}_{\lambda\oplus\mu}$ 中的同一化 $F_{\lambda\oplus\mu} = F_\lambda \boxtimes F_\mu$。

若将 $\boldsymbol{V}_\bullet$ 表示为一个对称幺半余笛卡尔纤维化 $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{D}$，那么分解代数恰好等同于一个非幺对称幺半余笛卡尔截面 $F_\bullet : \boldsymbol{D}_s \to \boldsymbol{V}$。

视差对称幺半范畴的整体截面 $\boldsymbol{V}_\bullet$ 与松对称幺半范畴的整体截面（§5.1）相关联，后者由限制 $\boldsymbol{V}_\bullet|\boldsymbol{F}$ 通过对称幺半函子 $\Gamma(\boldsymbol{V}_\bullet) \to \Gamma(\boldsymbol{V}_\bullet|\boldsymbol{F})$ 给出。一般而言，这个函子并非保守函子。

设 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$ 是一个由范畴 $\boldsymbol{X}$ （具有有限积）与层理论 $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{X}^{op} \to \mathbf{Cat}$ 组成的对，如§5.2所述。设 $X^\bullet$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的一个可隔离对象。那么，$\boldsymbol{A}(X^\bullet)$ 的整体截面称为分解代数，其定义在 $X^\bullet$ 上，系数取自 $\boldsymbol{A}$。

5.4 可构造层中的因子化代数

设 $\boldsymbol{C}$ 是一个对称幺半范畴。这为分层空间范畴上的层理论 $X \mapsto \mathbf{Cnstr}(X; \boldsymbol{A}) = \mathrm{Fun}(X, \boldsymbol{C})$ 提供了自然的结构。

对于每个可隔离空间 $X^\bullet$，我们都有视差对称幺半范畴 $\mathbf{Cnstr}(X^\bullet; \boldsymbol{C})$。一个定义在上的可构造分解代数，其 $X^\bullet$ 系数取自 $\boldsymbol{C}$，于是是中的一个因子化代数 $\mathbf{Cnstr}(X^\bullet; \boldsymbol{C})$。在 $X^\bullet$ 是分层在典范可分离性偏序集 $K^\bullet$ (§3.2)上的特殊情形下，这些代数称为局部常值因子化代数。

让我们从纤维化的角度刻画可构造分解代数。设$\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{D}$是与可分离性空间$X^{\bullet}$对应的笛卡尔纤维化。我们可以沿着非幺算畴映射$\boldsymbol{D}_s^{\oplus} \to \boldsymbol{D}^{\oplus}$，将$\boldsymbol{X}_s \coloneqq \boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{D}_s$上的余笛卡尔算畴结构拉回，从而得到一个拟 operad：

$$\boldsymbol{X}_s^{\overline{\oplus}} \coloneqq \boldsymbol{X}^{\sqcup} \times_{\boldsymbol{D}^{\oplus}} \boldsymbol{D}_s^{\overline{\oplus}} .$$

因此，$x_1 \oplus \cdots \oplus x_n \to y$中的一个“映射”是由一组$x_i \to y$的映射组成的，这些映射属于$\boldsymbol{X}$，对应于$1 \le i \le n$，并且位于一组$\langle \lambda_i \rangle \to \langle \mu \rangle$之上；这组$\langle \lambda_i \rangle \to \langle \mu \rangle$属于$\boldsymbol{D}$，且彼此相容，形成一个满射$\langle \lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n \rangle \to \langle \mu \rangle$。我们称这样的“映射”为笛卡尔的，当且仅当每个映射$x_i \to y$都是笛卡尔的。

现在，带有$\boldsymbol{C}$系数、定义在$X^{\bullet}$上的可构造分解代数可以描述为一个拟 operad 映射$F : \boldsymbol{X}_s^{\oplus} \to \boldsymbol{C}$，使得对每个笛卡尔“映射”$x_1 \oplus \cdots \oplus x_n \to y$，所诱导的映射

$$F(x_1) \otimes \cdots \otimes F(x_n) \to F(y)$$

是一个等价。

5.5 分解叠

设$\boldsymbol{X}$是一个拓扑斯，并考虑预几何背景$X \mapsto \boldsymbol{X}_{/X}$。这是我们可以考察这些构造的最原始、结构最少的设定。

设$X^{\bullet} : \boldsymbol{D}^{op} \to \boldsymbol{X}$是一个可隔离对象。可将可隔离对象$X^{\bullet}$提升为一个可孤立拓扑斯$\langle \lambda \rangle \mapsto \boldsymbol{X}_{/X^{\lambda}}$，其中所有结构映射都是拓扑斯之间的平展态射。利用这些拓扑斯之间态射的拉回函子，便定义了一个视差对称幺半范畴。该视差对称幺半范畴中的分解代数，称为$X^{\bullet}$上的 分解叠 。

下面介绍一种描述分解叠的另一种便捷方式。称非空余图之间的映射$\langle \lambda \rangle \to \langle \mu \rangle$附着，若其像中的每个顶点都与像外的每个顶点由一条边相连。因此，余图之间的满射都是附着的，而包含$\langle \lambda \rangle \hookrightarrow \langle \lambda \oplus \mu \rangle$也是附着的。令$\boldsymbol{D}_{att} \subset \boldsymbol{D}$为非空无自反余图及附着映射构成的子范畴。可隔离对象$X^{\bullet}$限制为函子$X^{\bullet}_{att} : \boldsymbol{D}^{op}_{\text{附着}} \to \boldsymbol{X}$。

现在，$X^{\bullet}$上的因子化叠是一个函子$Y^{\bullet} : \boldsymbol{D}^{op}{}_{att} \to \boldsymbol{X}$，并配有一个态射$Y^{\bullet} \to X^{\bullet}_{att}$，使得

1. 对每个满射$\langle \lambda \rangle \to \langle \mu \rangle$，典范映射

$$Y^{\mu} \to Y^{\lambda} \times_{X^{\lambda}} X^{\mu}$$

是一个等价，并且

2. 对于余图$\langle \lambda \rangle$和$\langle \mu \rangle$，映射

$$Y^{\lambda \overline{\oplus} \mu} \to (Y^{\lambda} \times Y^{\mu}) \times_{X^{\lambda} \times X^{\mu}} X^{\lambda \overline{\oplus} \mu}$$

是一个等价。

（要看出这是一个等价的描述，可取目标笛卡尔纤维化 $\mathbf{Arr}(\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{X}$，构造其对偶余笛卡尔纤维化 [8],，并沿着 $X^{\bullet}$将其拉回。现在，分解叠是该纤维化在 $\boldsymbol{D}_s$ 上的对称幺半余笛卡尔截面，而展开这一点便得到这里的描述。）

特别地，如果 $X^{\bullet}$ 是可加的，且 $Y^{\bullet}$ 是可加可隔离对象的限制，那么 $Y^{\bullet}$ 自动就是一个分解叠。正如我们将在下一小节中看到的，这并不是分解叠产生的唯一方式。

现在我们可以对此稍作推广。如果 $U \in \boldsymbol{X}$ 是一个对象，那么带有对象叠 S 的<style id='2'>分解广群 是一个函子 $Y^{\bullet}\colon \boldsymbol{D}^{op}{}_{att} \to \boldsymbol{X}$，以及一个态射$Y^{\bullet} \to X^{\bullet}_{att} \times U \times U$，使得

1. 对于每个满射 $\langle\lambda\rangle \to \langle\mu\rangle$，典范映射

$$Y^{\mu} \to Y^{\lambda} \times_{X^{\lambda}} X^{\mu}$$

是一个等价，并且

2. 对于余图 $\langle\lambda\rangle$ 和 $\langle\mu\rangle$，映射

$$Y^{\lambda \overline{\oplus} \mu} \to (Y^{\lambda} \times_{U} Y^{\mu}) \times_{X^{\lambda} \times X^{\mu}} X^{\lambda \overline{\oplus} \mu}$$

是一个等价，其中 $Y^{\lambda} \to U$ 是到 U 的第一份拷贝上的投影，而 $Y^{\mu} \to U$ 是到第二份拷贝上的投影。

5.6 相当一般情形下的 Beilinson–Drinfeld 格拉斯曼量

再次设 $\boldsymbol{X}$ 为一个拓扑斯，并设 $X \in \boldsymbol{X}$ 为一个对象。设 $O^{\bullet}_{X}\colon \boldsymbol{D}^{op} \to \boldsymbol{X}$ 为一个带有 §2.7 中所述可隔离结构的观察者叠§2.7。因此， O_X 是正则的（§2.3）且可加的（§2.4）。此外，假设典范映射 $X \to \mathrm{Obj}_X$ 经由O_X分解。

设 $B \in \boldsymbol{X}_{/X}$ 为 X上的任意一个叠。我们可以设想， $B = BG$ 是 X上的一个群，而 G，此时 $B \to X$ 的截面就是 X上的 G-丛。因此，我们将 X上的 $B \to X$ 丛的（局部或全局）截面称为.....它们组织成模叠

$$\mathrm{Bun} \coloneqq \underline{\mathrm{Map}}_{X}(X, B)\,.$$

我们将定义一个在 $\mathrm{Bun} \times O^{\bullet}_{X}$ 上的因子化叠，其对象为 B的截面的修正。

事实证明，将修正的模叠视为“拉推”表达式是自然的。具体来说，设 $p\colon U \to X$ 和 $q\colon U \to Y$。与之相伴的是右伴随函子

$$H_U \coloneqq q_* p^*\colon \boldsymbol{X}_{/X} \to \boldsymbol{X}_{/Y}\,,$$

它将叠 B 上 X 的叠映射到 Y 上的叠，其定义为

$$T \mapsto \mathrm{Map}_{X}(U \times_{Y} T, B)\,.$$

这是拉回-推出构造通过 U。

由于沿 étale 几何态射的拉回满足基变换，构造 $X \mapsto \boldsymbol{X}_{/X}$ 定义了一个函子 $H\colon \mathrm{Span}(\boldsymbol{X}) \to \mathbf{Pr}^R$，其中跨度被送至相应的拉回-推前构造。事实上，这可以增强为一个双范畴函子，而且所诱导的函子

$$H\colon (\boldsymbol{X}_{/X\times Y})^{op} \to \mathrm{Fun}^R(\boldsymbol{X}_{/X}, \boldsymbol{X}_{/Y})$$

将余极限映为极限。

现在，我们利用 O_X 上的可隔离结构来定义一个位于 O_X 之上的叠 $X \odot O_X$，使得从直观上说，$Z \in O_X$ 上方的纤维 X 是带有 Z 双重化的空间——也称为“意式饺子空间”$X \cup^{X\smallsetminus Z} X$。随后，Hecke 层叠可以看作是经由 $X \odot O_X$ 的拉回-推出构造的结果。

事实上，我们定义一个可分离性栈

$$X \odot O_X^{\bullet}\colon \boldsymbol{D}^{op} \to \boldsymbol{X}\ ,$$

它将 $\langle\lambda\rangle$ 映为

$$X \odot O_X^{\lambda} \coloneqq X \times_{O_X} (O_X^{1\underline{\oplus}\lambda} \cup^{O_X^{1\overline{\oplus}\lambda}} O_X^{1\underline{\oplus}\lambda})\ .$$

我们有一个投影 $(p, q^{\lambda})\colon X \odot O_X^{\lambda} \to X \times O_X^{\lambda}$；它在点 (x, Z) 上的纤维是对象 $\ulcorner x \cap Z = \varnothing \urcorner$ 的（未约化）悬挂。

对于叠 $B \in \boldsymbol{X}_{/X}$ 和无自反余图 $\langle\lambda\rangle$，我们通过经由 $X \odot O_X^{\bullet}$ 的拉回-推出构造来定义 *Hecke* 层叠：

$$\mathrm{Hecke}^{\lambda} = \mathrm{Hecke}^{\lambda}(X, O_X; B) \coloneqq H_{X\odot O_X^{\lambda}}(B) = q_*^{\lambda} p^* B \in \boldsymbol{X}_{/O_X^{\lambda}}\ .$$

因此，Hecke^{λ} 的一个 T-点就是一个 $Z \in O_X^{\lambda}(T)$，以及一个 T-点 $Z \in O_X^{\lambda}(T)$，还有一个映射 $T \times_{O_X^{\lambda}} (X \odot O_X^{\lambda}) \to B$。$X \odot O_X^{\lambda}$ 定义中的推出变成了一个拉回：

$$\mathrm{Hecke}^{\lambda} = H_{X\times_{O_X} O_X^{1\underline{\oplus}\lambda}}(B) \times_{H_{X\times_{O_X} O_X^{1\overline{\oplus}\lambda}}(B)} H_{X\times O_X^{1\underline{\oplus}\lambda}}(B)\ .$$

由于 $O_X^{\bullet}$ 是可加的，$H_{X\times_{O_X} \Theta_X^{1\oplus\lambda}}(B)$ 就是积 $\mathrm{Bun} \times O_X^{\lambda}$。由此得到一个更符合直觉的公式：

$$\mathrm{Map}_{O_X^{\lambda}}(T, \mathrm{Hecke}^{\lambda}) = \mathrm{Map}_X(X \times T, B) \times_{\mathrm{Map}_X(X\times_{O_X} O_X^{1\overline{\oplus}\lambda}\times_{O_X^{\lambda}} T, B)} \mathrm{Map}_X(X \times T, B)\ .$$

换句话说，我们有一个投影

$$\mathrm{Hecke}^{\lambda} \to O_X^{\lambda} \times \mathrm{Bun} \times \mathrm{Bun}\ ,$$

其在一个 T-点 (Z, E_1, E_2) 上的纤维——它由一个点 $Z \in O_X^{\lambda}(T)$ 和一对 (E_1, E_2) 个 T-丛族组成——是对 Z 的图的“补集”（形式上为 $X \times_{O_X} O_X^{1\underline{\oplus}\lambda} \times_{O_X^{\lambda}} T$）上的限制进行的一个识别。从这个意义上说，$\mathrm{Hecke}^{\lambda} \to O_X^{\lambda}$ 在 Z 上的纤维是位于 Z 处的丛的 修正 的模叠。

投影 $\mathrm{Hecke}^{\lambda} \to O_X^{\lambda}$ 关于附着映射是自然的。 $O_X^{\bullet}$ 的正则性意味着，若 $\langle\lambda\rangle \to \langle\mu\rangle$ 是满射，则

$$\mathrm{Hecke}^{\lambda} \times_{O_X^{\lambda}} O_X^{\mu} = \mathrm{Hecke}^{\mu} \ .$$

此外，粘合给出了如下同一：

$$\mathrm{Hecke}^{\lambda \overline{\oplus} \mu} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Hecke}^{\lambda} \times_{\mathrm{Bun}} \mathrm{Hecke}^{\mu}) \times_{O_X^{\lambda \overline{\oplus} \mu}} O_X^{\lambda \overline{\oplus} \mu} \ .$$

因此， $\mathrm{Hecke}^{\bullet}$ 是一个以 $O_X^{\bullet}$ 为底空间、对象叠为 Bun的分解广群。

如果叠 B 带有一个全局基点 $P \in \mathrm{Map}_X(X, B)$，那么$\mathrm{Hecke}^{\bullet} \to \mathrm{Bun}$ 在 P上的纤维就是相对于 P、定义在 $O_X^{\bullet}$ 上的 B 的*Beilinson–Drinfeld* 格拉斯曼量 $\mathrm{Grass}_{\bullet}(X, O_X; B, P)$。

如果我们在§2.9的语境下工作，那么只有转而考虑满足亚纯性条件的这些叠的更小版本，才能得到正确的对象。

5.7 评论与问题

设 $\boldsymbol{X}$ 是一个具有有限积的范畴，并设 $\boldsymbol{A}$ 是定义在 $\boldsymbol{X}$上的对称幺半范畴层。设 X 是 $\boldsymbol{X}$中的一个对象。正如我们所发现的（5.1），利用幂 $\boldsymbol{A}(X)$ 对 X^n 的对称幺半结构进行宽松化，会得到一个宽松对称幺半函子 $\boldsymbol{F}_s \to \mathbf{Cat}$。于是，这个函子的非乘性整体截面恰好就是 Ran 空间上的层。

这里的主要构造借助 X 上的可隔离结构，将对称幺半结构进一步松化为视差对称幺半结构。在舍弃单位之后，我们得到一个松二重对称幺半函子 $\boldsymbol{D}_s \to \mathbf{Cat}$。于是，因子化代数是该函子的整体截面，且仅相对于第二对称幺半结构具有乘性。

这现在提示了一种建立具有不同维数的“扩展可观测量”的因子化代数理论的策略：

1. 我们考虑 $(1+n)$ 重对称幺半范畴，它们具有张量积

$$\otimes_0 \to \otimes_1 \to \cdots \to \otimes_n \ .$$

2. 自由 $(1+n)$ 重对称幺半范畴由最左侧张量积 $\otimes_0$ 的交换幺半群生成，它是某个范畴 $\boldsymbol{D}(n)$ ，即n-余图的范畴，这些图的每条边以 n 种颜色之一着色，并满足类似于我们在 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(1)$ 中所见的条件。

3. n-可隔离对象于是是一个函子 $X^{\bullet} : \boldsymbol{D}(n)^{op} \to \boldsymbol{X}$。

4. 应用 $\boldsymbol{A}$ 后，我们便得到一个 n-视差对称幺半范畴 $\boldsymbol{A}(X^{\bullet})$，它是一个 $(1+n)$ 重宽松对称幺半函子 $\boldsymbol{D}(n) \to \mathbf{Cat}$。这些是对称幺半范畴的一种宽松化。

5. 现在， n维分解代数应当是非幺的 n重对称幺半函子 $1_{\bullet} \to \boldsymbol{A}(X^{\bullet})$，且仅相对于张量积 $\otimes_1$， …， $\otimes_n$而言。当然，现在也可以考虑其他变体。

当然，这只是推测。我们还不知道如何构造具有物理意义的 n-可隔离对象示例。

参考文献

HTT J. Lurie，《高阶拓扑斯理论》（《数学年刊研究》）。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2009 年，第 170 卷，第 xviii 页+925，ISBN：978-0-691-14049-0；0-691-14049-9。DOI：10.1515/9781400830558HA J. Lurie，《高阶代数》，https://www.math.ias.edu/ lurie/papers/HA2012.pdf，2017。1. F.Abellán，关于 $(\infty,2)$-范畴的局部纤维化，https://arxiv.org/abs/2305.00947 [math.AT]，2023。arXiv：2305.00947 [math.AT]。2. F. Abellán García 和 W. Stern，《2-笛卡尔纤维化 I：∞-双范畴中纤维化的一个模型》，《应用范畴结构》，第 30 卷，第 6 期，1341–1392 页，2022 年。DOI：10.1007/s10485-022-09693-x 3. M. Aguiar 和 S. Mahajan，《幺半函子、物种与霍普夫代数》（CRM 专著丛书）。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2010 年，第 29 卷，第 lii+784 页，前言由 Kenneth Brown、Stephen Chase 和 André Joyal 撰写，ISBN：978-0-8218-4776-3。DOI：10.1090/crmm/029 4. C. Balteanu 和 Z. Fiedorowicz，二重幺半范畴的相干定理，《蒂米什瓦拉大学数学与信息学系列年刊》，第 34 卷，第 1 期，29–48 页，1996 年。5. C. Balteanu 、 Z. Fiedorowicz 、 R. Schwänzl 和 R. Vogt，迭代幺半范畴，《Adv. Math.》，第 176 卷，第 2 期，277–349 页，2003 年。DOI：10.1016/S0001-8708(03)00065-3 6. C. Barwick，谱麦基函子与等变代数 K理论（I），《Adv. Math.》，第 304 卷，646–727 页，2017 年。DOI：10.1016/j.aim.2016.08.043 7. C. Barwick，从算子范畴到高阶运算子，《几何与拓扑》，第 22 卷，第 4 期，1893–1959 页，2018 年。DOI：10.2140/gt.2018.22.1893 8. C. Barwick、S. Glasman 和 D. Nardin，笛卡尔纤维化与余笛卡尔纤维化的对偶化，《范畴论及其应用》，第 33 卷，论文第 4 号，67–94 页，2018 年。9. C. Barwick、S. Glasman 和 J. Shah，谱麦基函子与等变代数 K理论，II，《突尼斯数学杂志》，第 2 卷，第 1 期，97–146 页，2020 年。DOI：10.2140/tunis.2020.2.97 10. A. Beilinson 和 V. Drinfeld，《手征代数》（美国数学会专题讲座丛书）。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2004 年，第 51 卷，第 vi+375 页，ISBN：0-8218-3528-9。DOI：10.1090/coll/051 11. D. Ben-Zvi、Y. Sakellaridis 和 A. Venkatesh，相对朗兰兹对偶，https://arxiv.org/abs/2102.13459，2024. arXiv: 2409.04677 [math.RT]. 12. T. Booker 和 R. Street，双幺半范畴的 *Tannaka* 对偶性与卷积，《范畴论及其应用》，第 28 卷，第 6 期，166–205，2013。13. R. Borcherds，量子顶点代数，载于*1998* 年奈良谷口数学会议，《纯数学进展研究》，第 31 卷，日本数学会，东京，2001，51–74，ISBN：4-931469-13-2。DOI：10.2969/aspm/03110051

14. A. Brandstädt、V. B. Le 和 J. Spinrad，《图类：综述》（SIAM 离散数学与应用专著）。工业与应用数学学会（SIAM），费城，宾夕法尼亚州，1999，第 xii +304 页，ISBN：0-89871-432-X。DOI：10. 1137/1.9780898719796 15. A. Cepek，欧几里得空间构形空间的高范畴组合学，https://arxiv.org/abs/1910.11980，2024。arXiv：1910.11980 [math.AT]。16. E. Cliff，手征代数、因子化代数与 Borcherds 的“奇异交换环”顶点代数方法，《数学物理通讯》，第 392 卷，426，2022 2，399 10 1007 00220 021 04307 4 第 – 期。DOI：. /s - - - 17. D. Corneil、H. Lerchs 和 L. S. Burlingham，补可约图，《离散应用数学》，第 3 卷，第 3 期，163–174，1981。DOI：10.1016/0166-218X(81)90013-5 18. K. Costello 和 O. Gwilliam，《量子场论中的因子化代数》第 1 卷（新数学专著）。剑桥大学出版社，剑桥，2017，第 31 卷，第 ix+387 页，ISBN：978-1-107-16310-2。DOI：10.1017/9781316678626 19. K. Costello 和 O. Gwilliam，《量子场论中的因子化代数》第 2 卷（新数学专著）。剑桥大学出版社，剑桥，2021，第 41 卷，第 xiii+402 页，ISBN：978-1-107-16315-7；978-1-009-00616-3。DOI：10.1017/9781316678664 20. L. Fargues 和 P. Scholze，局部朗兰兹对应的几何化，https://arxiv.org/abs/2102.13459，2024。arXiv：2102.13459 [math.RT]。21. J. Francis 和 D. Gaitsgory，手性 Koszul 对偶，《Selecta Math.》（新版），第 18 卷，第 1 期，27–87，2012。DOI：. /s - - -z 22. A. Gagna、Y. Harpaz 和 E. Lanari，$(\infty,2)$-范畴的 Gray 张量积与 Lax 函子，《Adv. Math.》，第 391 卷，论文编号 107986，32，2021。DOI：10.1016/j.aim. 2021.107986 23. A. Gagna、Y. Harpaz 和 E. Lanari，关于 $(\infty,2)$-范畴所有模型的等价性，《J. Lond. Math. Soc.》（第 2 辑），第 106 卷，第 3 期，1920–1982，2022。DOI：10.1112/ jlms.12614 24. A. Gagna、Y. Harpaz 和 E. Lanari，$(\infty,2)$-范畴的笛卡尔纤维化，《代数几何与拓扑》，第 24 卷，第 9 期，4731–4778，2024。DOI：10.2140/agt.2024.24.4731 25. D. Gaitsgory，扭曲 Whittaker 模型与可因子化层，《Selecta Math.》（新版），第 13 卷，第 4 期，617–659，2008。DOI：10.1007/s00029-008-0053-0 26. D. Gaitsgory，基于 K-理论与动机上同调的可因子化线丛参数化，《Selecta Math.》（新版），第 26 卷，第 3 期，论文编号 44，50，2020。DOI：10. 1007/s00029-020-00565-7 27. D. Gaitsgory，Whittaker 范畴的局部与整体版本，《纯粹与应用数学季刊》，第 16 卷，第 3 期，775–904，2020。DOI：10.4310/PAMQ.2020.v16.n3.a14 28. D. Gaitsgory 和 S. Lysenko，元辛几何朗兰兹理论中的参数与对偶性，《Selecta Math.》（新版），第 24 卷，第 1 期，227–301，2018。DOI：10.1007/ s00029-017-0360-4 29. N. Garner 和 B. Williams，Raviolo 顶点代数，《Selecta Math.》（新版），第 31 卷，第 3 期，论文编号 46，2025。DOI：10.1007/s00029-025-01042-9 30. R. Haag 和 D. Kastler，量子场论的代数方法，《数学物理杂志》，第 5 卷，848–861，1964。DOI：10.1063/1.1704187

31. P. Haine，关于分层空间的同伦理论，Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)，第 57 卷，第 2 期，351–384，2024。32. R. Haugseng 和 J. Kock，∞-拟 *operad* 作为对称幺半 ∞-范畴，Publ. Mat.，第 68 卷，第 1 期，111–137，2024。DOI：10.5565/publmat6812406 33. H. Heine，受限 L_∞-代数，博士论文，奥斯纳布吕克大学，https://osna docs.ub.uni-osnabrueck.de/hand 2018。34. B. Hennion 和 M. Kapranov，代数几何与因子化代数中的 *Gelfand-Fuchs* 上同调，J. Amer. Math. Soc.，第 36 卷，第 2 期，311–396，2023。DOI：10.1090/jams/1001 35. B. Hennion、V. Melani 和 G. Vezzosi，曲面上 *Beilinson–Drinfeld Grassman- nian* 的旗版本，https://arxiv.org/abs. 2210 04798, 2023 2210 04798 。. [ ] arXiv：.math.AG。36. A. Henriques，共形网是因子化代数，载于*String-Math 2016*，Proc. Sympos. Pure Math. 第 98 卷，Amer. Math. Soc.，普罗维登斯，罗得岛，2018，229–239，ISBN：978-1-4704-3515-8。DOI：10.1090/pspum/098/01749 37. Q. Ho，代数几何中构形空间的自由因子化代数与同调。ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，2017，79 页，博士论文——芝加哥大学，ISBN：978-0355-07687-5。38. Q. Ho，代数几何中构形空间的自由因子化代数与同调，Selecta Math. (N.S.)，第 23 卷，第 4 期，2437–2489，2017。DOI：10.1007/s00029-017-0339-1 39. M. Kim，算术 *Chern-Simons* 理论 *I*，载于伽罗瓦覆盖、*Grothendieck-Teichmüller* 理论与儿童画，Springer Proc. Math. Stat. 第 330 卷，施普林格，查姆，[2020] ©2020，155–180，ISBN：978-3-030-51795-3；978-3-030-51794-6。DOI：10.1007/978-3-030-51795-3_8 40. S. Raskin，手征主系列范畴。ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，2014，340 页，博士论文——哈佛大学，ISBN：978-1321-02173-8。41. S. Raskin，手征主系列范畴 *I*：有限维计算，Adv. Math.，第 388 卷，论文编号 107856，共 96 页，2021。DOI：10.1016/j.aim.2021.107856 42. P. Scholze 和 J. Weinstein，伯克利讲座：*p-adic* 几何（Annals of Mathematics Studies）。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2020，第 207 卷，第 x+250 页，ISBN：978-0-691-20209-9；978-0-691-20208-2；978-0-691-20215-0。43. T. Torii，关于双幺半 ∞ 20, 1, 125 162, -范畴，2025 10 1007 40062 025 00364 J. Homotopy Relat. Struct.，卷号、期号及页码缺失。DOI：./s---x 44. S. Weinberg，什么是量子场论？我们曾认为它是什么？载于量子场论的概念基础（波士顿，马萨诸塞州，*1996*），剑桥大学出版社，剑桥，1999，241–251，ISBN：0-521-63152-1。DOI：10.1017/CBO9780511470813.020 45. S. Weinberg，场的量子理论。第一卷。剑桥大学出版社，剑桥，2005，第 xxvi+609 页，基础丛书，ISBN：0-521-55001-7；978-0-521-67053-1；0-521-67053-5。