arXiv:2602.01309v1 [math.RA] 1 Feb 2026

Krasner超环的谱超空间

阿马蒂亚·戈斯瓦米

摘要。本文旨在证明 Krasner 超环的真超理想的超空间是谱的。

1. 引言与预备知识

多值代数结构的早期探索可追溯至 [10], , 先驱性工作将超群引入为群的推广，以容纳多值二元运算。随后，在 [8], 中，超环的概念得以确立。自诞生以来，超环已在代数和几何领域得到广泛研究。关于超环各种代数性质（包括其推广形式）的全面考察，见 [5]（另见 [4]）。关于超环的几何应用，请参阅 [2, 1, 3, 7]。此外， [9], 探讨了乘法 Krasner 超模的拓扑方面。

据作者所知，此前尚未研究过 Krasner 超环上的谱空间。本文旨在给出超环语境下谱空间的一个例子。为此，我们改用了一种替代方法（见引理 1.3），从而无需验证存在一个对有限交封闭的拟紧开基。为使本文内容自足，我们给出了所有必要的定义和证明。

设 R 是一个非空集合， $\mathscr{P}^*(R)$ 是 R 的所有非空子集构成的集合。一个交换 *Krasner*超环是一个系统$(R,+,\cdot,-,0)$，满足

(I) $(R,+,0)$是一个典范超群，也就是说， $+: R\times R\to \mathscr{P}^*(R)$是 A上的一个超运算，并满足以下性质，其中$a,b,c\in R$:

(1) $a+b=b+a$；(2) $a+(b+c)=(a+b)+c$；(3) 存在 $0\in R$，使得 $a+0=\{a\}$；(4) 对每个 a，都存在唯一的 $-a\in R$，使得 $0\in a-a$；(5) 若 $a\in b+c$，则 $c\in -b+a$ 且 $a\in c-b$,

(II) $(R,\cdot)$ 是一个交换半群,

(III) $a\cdot 0=0$，且

(IV) 对所有 $a,b,c\in R$，$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$。若超环 R 存在乘法单位元，即存在 $1\in R$，使得对所有 $a\in R$，$a\cdot 1=a$，则称 R 为含幺超环。我们用 ab 表示 $a\cdot b$。凡是提到 Krasner 超环，均指交换含幺 Krasner超环。若超环 R 的子超群 I 满足对所有 $r\in R$、$a\in I$，有 $ra\in I$，则称 I 为 R 的超理想。我们用 $\mathscr{I}_R$ 表示 R 的所有超理想构成的集合。以下结果是众所周知的。

2020数学学科分类。16Y99。关键词及短语。
Krasner超环；谱空间。

Lem引理 1.1。 设R 为一个超环。若 $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是R 的非空超理想族，则

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = \left\{ x \mid x \in \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda, a_\lambda \in I_\lambda \right\}$$

也是一个超 环R的理想，其中求和的每一项都取自指标集的一个有限子集 Λ.

若超环R的超理想I满足$I \neq R$，则称其为真超理想。我们用 $\mathscr{I}^+{}_R$表示R的真超理想集合。若超环R 的真超理想M 是R 中包含M 的超理想中唯一不同于R的一个（即M 本身），则称M 为极大超理想。下面的结果与环的相应结果类似。

引理 1.2。 超环R 的每个真超理想I 都包含于R的某个极大超理想中。

现在我们回顾一些拓扑学中的相关术语。设L 是一个完备格，且$x \in L$。x 的覆盖是一个由$\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 组成的族，其中各元素属于L，并满足$x \leqslant \bigvee_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda$。若$L$ 中的元素x的每个覆盖都有有限子覆盖，则称x为紧。若一个格是完备的，且每个元素都是紧元素的最小上界，则称该格为代数格。容易看出，完备格$\mathscr{I}_R$ 是代数格，因为R的每个超理想都是有限生成（因此也是紧）超理想之和。 $\mathscr{I}_R$ 的这一性质将在主要结果的证明中发挥关键作用。

如果一个空间的每个开覆盖都有有限子覆盖，则称该空间为拟紧，或者等价地说，该空间满足有限交性质。在拟紧性的定义中，我们不假设该空间是T_2。 空间X 的闭子集S 称为不可约，如果S 不能表示为X中两个真包含于它的闭子集之并。若每个非空不可约闭子集 $\mathscr{K}$ 都具有如下形式： $\mathscr{K} = \mathscr{C}_{\{x\}}$，即某个唯一单点集$\{x\}$的闭包，则称空间$X$ 为素性空间。

根据 [6], ，谱空间是一个拟紧、素性拓扑空间，并具有由拟紧开子集构成的基，且该基在有限交下封闭。我们将在主要结果的证明中使用以下拓扑引理。

引理1.3。 谱空间的拟紧、素性开子空间是谱的。

证明。 设S 是谱空间X的拟紧、素性开子空间。由于S 拟紧且素性，只需证明S 的紧开子集 $\mathscr{O}_S$ 构成一个拓扑的基，且该基在有限交下封闭。显然， S 的子集T 在S 中开，当且仅当T 在X中开；因此， S 的子集T 属于 $\mathscr{O}_S$ ，当且仅当T属于 $\mathscr{O}_X$。 利用这些事实，我们作如下论证。

令U为S的一个开子集。由于U在X中也是开集，因此$U = \cup\mathscr{U}$, 其中 $\mathscr{U}$是 $\mathscr{O}_X$. 的某个子集。但 $\mathscr{U}$中的每个元素都是U的子集，因此也是S的子集，并且属于 $\mathscr{O}_S$. 因此， S 的每个开子集都可以表示为S的紧开子集之并。现在只需证明 $\mathscr{O}_S$ 对有限交封闭，而这立即由 $\mathscr{O}_X$对有限交封闭这一事实得出。□

令R 为一个 Krasner 超环。 $\mathscr{I}^+{}_R$ 上的下拓扑是指满足以下形式的集合构成闭集子基的拓扑：

$$\mathscr{V}_J = \{ I \in \mathscr{I}_R^+ \mid J \subseteq I \}, \qquad (J \in \mathscr{I}_R);$$

这些集合构成闭集子基；此外，我们也用 $\mathscr{I}^+{}_R$表示这个拓扑空间，称为超空间。

定理1.4。 令R 为一个 *Krasner* 超环。则超空间 $\mathscr{I}^+{}_R$ 是谱的。

证明。 取 $X = \mathscr{I}_R$和 $S = \mathscr{I}^+{}_R$于引理 1.3，只需证明以下各点：

(1) $\mathscr{I}_R$ 是谱超空间；(2) $\mathscr{I}^+{}_R$ 是拟紧的；(3) $\mathscr{I}^+{}_R$ 具有素性。(4) $\mathscr{I}^+{}_R$ 是超空间 $\mathscr{I}_R$ 的开子超空间。

我们在 $\mathscr{I}_R$ 上赋予下拓扑，方法是将族 $\{I \in \mathscr{I}_R \mid J \subseteq I\}_{J \in \mathscr{I}_R}$ 视为闭子基。为证明(1)，注意到 $\mathscr{I}_R$ 是一个代数格，因此超空间 $\mathscr{I}_R$ 的谱性由 [11, 定理 4.2]。

尽管(2)的证明中的论证类似于赋予扎里斯基拓扑的Spec(R)（其中R 为含幺交换环）的拟紧性证明，但我们仍需考虑以下两个事实：

- 为证明拟紧性，我们必须确认如下事实：若 $\mathscr{V}_I = \emptyset$，则 $I = R$。这一事实等价于 R 的极大超理想之集包含于 $\mathscr{I}^+{}_R$。现在，引理 1.2 保证该极大超理想集合非空。
- 请注意，我们的论证必须针对子基闭集进行（这是由拓扑的性质决定的），因此需要依赖亚历山大子基定理。

有了这些说明，现在来证明（2）。设 $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是超空间 $\mathscr{I}^+{}_R$ 中的一族子基闭集，使得 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda = \emptyset$. 取 $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in \mathscr{I}_R$，使得 $\forall \lambda \in \Lambda, K_\lambda = \mathscr{V}_{I_\lambda}$. 由于

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{V}_{I_\lambda} = \mathscr{V}_{\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda},$$

可得 $\mathscr{V}_{\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda} = \emptyset$. 由引理 1.1可知，该和存在。这意味着超理想 $\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ 必等于 R。于是，特别地，我们得到 $1 = n_{\lambda_1} + \cdots + n^{\lambda_n}$, 其中 $n_{\lambda_i} \in I^{\lambda_i}$，对 $i = 1, \ldots, n$ 均成立。这意味着 $R = \sum^n{}_{i=1} I^{\lambda_i}$. 因此，$\bigcap^n{}_{i=1} K_{\lambda_i} = \emptyset$, 并且由亚历山大子基定理，$R$ 是拟紧的。

为了得到 (3)，我们首先证明超空间 $\mathscr{I}^+{}_R$ 的不可约闭子集的泛点的存在性；为此，只需证明每当 $I \in \mathscr{V}_I$ 时有 $\mathscr{V}_I = \mathscr{C}_I$。由于 $\mathscr{C}_I$ 是包含 I 的最小闭集，并且由于 $\mathscr{V}_I$ 是包含 I 的闭集，显然此时 $\mathscr{C}_I \subseteq \mathscr{V}_I$。对于反向包含，若 $\mathscr{C}_I = \mathscr{I}^+{}_R$，则

$$\mathscr{I}_R^+ = \mathscr{C}_I \subseteq \mathscr{V}_I \subseteq \mathscr{I}_R^+.$$

这证明了 $\mathscr{V}_I = \mathscr{C}_I$。假设 $\mathscr{C}_I \neq \mathscr{I}^+{}_R$。由于 $\mathscr{C}_I$ 是一个闭集，存在一个指标集Λ，使得对每个 $\lambda \in \Lambda$，存在一个正整数 n_λ 以及超理想 $I_{\lambda 1}, \ldots, I^{\lambda n_\lambda}$ 属于 R，使得

$$\mathscr{C}_I = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \left(\bigcup_{i=1}^{n_\lambda} \mathscr{V}_{I_{\lambda i}} \right).$$

由于 $\mathscr{C}_I \neq \mathscr{I}^+{}_R$, 我们假设 $\bigcup^{n_\lambda}{}_{i=1} \mathscr{V}_{I_{\lambda i}}$ 对每个 λ 非空。因此，$I \in \bigcup^{n_\lambda}{}_{i=1} \mathscr{V}_{I_{\lambda i}}$ 对每个λ成立，从而

$$\mathscr{V}_I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_\lambda} \mathscr{V}_{I_{\lambda i}},$$

也就是说，$\mathscr{V}_I \subseteq \mathscr{C}_I$ 正如所求。要证明泛点的唯一性，只需证明 $\mathscr{I}^+{}_R$ 是一个 T_0-空间。设I和I'是 $\mathscr{I}^+{}_R$ 中的两个不同元素。那么，不失一般性，我们可以假设 $I \not\subseteq I'$。因此，$\mathscr{V}_I$ 是一个包含I但不包含$I_\prime$的闭集。

最后，为证明 (4)，注意到通过考虑 $\mathscr{I}_R$ 上的下拓扑，我们立即得到 $\{R\} = \mathscr{V}_R = \mathscr{C}_R$, 从而 $\mathscr{I}_R \backslash \mathscr{I}^+{}_R$ 是闭的。因此 $\mathscr{I}^+{}_R$ 是超空间 $\mathscr{I}_R$ 的一个开超子空间。 □

参考文献

[1] A. Connes 与 C. Consani，《阿黛尔类超环》，《数论杂志》 **131**(2) (2011)，159–194.[2] P. Corsini，从 Krasner 超环到超结构：探寻绝对算术，载于：卡西米尔力，卡西米尔算子与黎曼猜想，德古意特，(2010)，147–198.[3] 与 V. Leoreanu-Fotea，超结构理论的应用，第5卷，施普林格，2003.[4] 与 A. Salasi，超环的实现，《代数通讯》 **34**(12) (2006) 4389–4400.[5] 与 V. Leoreanu-Fotea，超环理论及其应用，国际学术出版社，2007.[6] M. Hochster，交换环中的素理想结构，《美国数学会汇刊》，**142** (1969)，43–60.[7] J. Jun，超环上的代数几何，《数学进展》，**323**(2018)，142–192.[8] M. Krasner，一类超环与超域，《国际数学与数学科学杂志》，**6**(2) (1983)，307–311.[9] Ö. Kulak 与 B. N. Türkmen，乘法 Krasner 超模上的扎里斯基拓扑，《乌克兰数学杂志》，**74**(4) (2022)，597–607.[10] F. Marty，论群概念的一种推广，载于：第*8*届斯堪的纳维亚数学大会，斯德哥尔摩，(1934)，45–49.[11] H.A. Priestley，内蕴谱拓扑，载于：一般拓扑与应用论文集 （纽约州法拉盛，1992），**728**，78–95，纽约科学院，纽约，1994.

[1] 约翰内斯堡大学数学与应用数学系，南非； [2] 国家理论与计算科学研究所（NITHECS），南非。电子邮箱：agoswami@uj.ac.za