arXiv:2602.01310v1 [hep-th] 1 Feb 2026

量子场论中的经典相互作用

Dimitrios Metaxas

雅典国立技术大学物理系，佐格拉富校区，*GR 15773* 希腊雅典
metaxas@mail.ntua.gr

摘要

我回顾了相关形式体系、费曼规则和组合学，它们约束一个场以“经典”的方式传播，严格来说仅通过树图传播；该场既可以独立传播，也可以与其他纯量子场相互作用。

通过引入经由拉格朗日乘子施加约束的线性项，微扰理论得以重新组织；这种做法推广了从二次项开始的标准方法，并给出了标准方法无法得到的结果。

我将该形式体系应用于一个具有 $O(N)$ 对称性的量子场理论：该量子场在六个时空维度中通过三次相互作用与一个“经典”标量场相互作用。利用重整化群，我考察有效势、包含辐射修正的对称性破缺、$d = 6 - \epsilon$ 维中的不动点，并与其他研究成果进行比较。

同时还讨论了这一形式体系的其他可能推广和应用。

1 引言

在先前的一项工作中 [1] ，我推导了相关的费曼规则：当标量场受到拉格朗日乘子 λ的约束，只沿经典路径传播（即在树图中传播）时，这些规则适用。约束的线性性质使微扰理论得以重新组织，本文将在第2节回顾这一点。我以四时空维度中具有四次相互作用的标量场为例，并讨论在线性项至关重要时计算有效作用量的方法。

在第3节中，我将这一形式体系应用于一种理论：该理论包含一个具有 $O(N)$ 对称性的量子场，它通过六维时空中的三次相互作用与一个“经典”标量场相互作用。其他研究曾探讨过该理论中的维度嬗变和 ϵ 展开，本文也将对此进行考察。如今，与低维共形场论（共形场论）的匹配在 $\frac{1}{N}$ 展开的领先阶以上不再精确，但红外（ IR ）不动点出现在小得多的 N 值处。本文还涉及通过量子场的辐射修正导致经典场的对称性破缺，以及维度嬗变。

在第4节中，我将自己的形式体系与其他声称描述经典行为的研究进行比较。在第5节中，我讨论其他可能的推广和应用，以及它们与测量概念问题之间可能存在的联系，并以几点评论作结。

2 传播内线图

量子场论中标量场 ϕ 的教科书示例，其作用量为 $S_1(\phi) = \int d^4x\, \mathcal{L}$，拉格朗日量为 $\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m_1^2\phi^2 - \frac{g}{4!}\phi^4$可以用路径积分简洁地描述

$$Z(J) = e^{iW(J)} = \int [d\phi] e^{iS_1(\phi,J)}, \tag{1}$$

其中 $S_1(\phi, J) = \int d^4x(\mathcal{L}_1 + J\phi)$。这里， m和 g分别是四维时空中的质量和耦合常数参数，度规为洛伦兹度规，符号约定为负号占多数。 $Z[J]$是量子理论所有关联函数的生成泛函，而 $W[J]$则是连通关联函数的生成泛函。

人们在 [1] 中发现，可以约束场，使其严格只沿树图传播，

$$\int [d\phi\, d\lambda\, dc\, d\bar{c}] e^{i\tilde{S}_1} \tag{2}$$

使用修正作用量

$$\tilde{S}_1(\phi, \lambda, c, \bar{c}, J, \Lambda) = \int d^4x \left(\mathcal{L} + \lambda \frac{\delta S_1}{\delta \phi} + \bar{c} \frac{\delta^2 S_1}{\delta \phi^2} c + J\phi + \Lambda\lambda \right) \tag{3}$$

它在路径积分中通过 δ函数 $\delta(\phi - \phi_c)$ 插入约束（其中 ϕ_c 是 $\delta S/\delta\phi = 0$ 的解），这是对 [4] 先前工作的推广和改进。

拉格朗日乘子 λ 强制施加约束，并提供了分析中至关重要的线性项，而鬼场 c, $\bar{c}$ 则抵消了单圈贡献。由于线性项以及稍后将要介绍的组合学，不存在高圈项，传播在树图中是“经典的”。

对动能项求逆可得传播子

$$\int [d\phi d\lambda] e^{i\int (\frac{1}{2}\phi K\phi + \lambda K\phi + J\phi + \Lambda\lambda)} = N e^{-\frac{i}{2}\int (2JG\Lambda - \Lambda G\Lambda)} \tag{4}$$

其中 $K = -(\partial^2 + m^2)$ 是动能项， $G = 1/(k^2 - m_1^2 + i\epsilon)$ 是质量为 m 的标量场的费曼传播子。没有 $\phi - \phi$传播子，但在费曼图中可以用混合 $\lambda - \phi$ 传播子（等于 G）和 $\lambda - \lambda$ 传播子（等于 $-G$）将其重构出来。

来自 $\mathcal{L}$ 的每个顶点都有一个来自 $\lambda \frac{\delta S}{\delta \phi}$ 的对应顶点，其中一条 ϕ 腿被 λ 替换；然后按照图1所示，利用这些费曼规则重构“经典”树图。第一种形式的费曼图有奇数个，符号交替，它们相加后得到经典理论的第二种图（这里不存在这种图，因为没有 $\phi - \phi$ 传播子）。

迄今所述形式体系的一个重要优势是，它可以推广到与其他纯量子无约束场发生相互作用的情形。

作用量 $S_2 = \int d^4x (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_{\text{int}})$，其中 $\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \psi)^2 - \frac{1}{2} m_2^2 \psi^2 - \frac{g'}{4!} \psi^4$和 $\mathcal{L}_{\text{int}} = = \frac{g''}{2} \phi^2 \psi^2$ 也可以修改为

$$\tilde{S}_2 = S_2 + \int \lambda \frac{\delta S_2}{\delta \phi} + \bar{c} \frac{\delta^2 S_2}{\delta \phi^2} c + J\phi + J'\psi + \Lambda\lambda \tag{5}$$

以通常方式推导出的费曼规则会限制 ϕ 场如上所述以经典方式传播，同时还会与纯量子的 ψ 场相互作用，如图2所示。在该图中，代表 ϕ 场的实线沿着树状“骨架”以“经典”方式传播，同时与 ψ 场的波浪线发生相互作用，并呈现通常的量子行为。正如前文和图1所述，实线（$\phi-\phi$ 传播子）在该理论中并不存在，而是通过修改后理论的费曼规则重新构造出来的。

理论的有效作用量也可以通过这些规则得到，但这与量子场论通常的计算有所不同。 [1] 给出的结果是重整化之前有效势的单圈贡献：

$$\frac{i}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ln\left(\frac{(k^2-\tilde{m}_1^2)(k^2-\tilde{m}_2^2)+(g''\phi\psi)^2}{(k^2-\tilde{m}_1^2)}\right) \tag{6}$$

这个表达式的分子表示通常的单圈有效势，此时 ϕ 和 ψ 都是量子场，$\tilde{m}_1^2=m_1^2+\frac{1}{2}g\phi^2+g''\psi^2$、$\tilde{m}_2^2=m_2^2+\frac{1}{2}g'\psi^2+g''\phi^2$；分母则减去了 ϕ 场的单圈贡献，其中包含鬼场（$\bar{c}c$）的行列式。

单圈贡献无法通过量子场论的通常方法得到，因为这类方法使用二次项并围绕背景场展开，同时舍弃线性项；而现在，线性项对于施加约束至关重要。计算需要按照量子场论的原始方式进行，并且需要减除项。在高圈数下，计算则使用修饰传播子，通过相关的单粒子不可约图进行。这种形式体系的要点在于，所需的减除项能够以一致的方式完成。

3 六维中的三次相互作用

在本节中，我将把这一形式体系应用于一个理论：该理论描述一个具有 $O(N)$ 对称性的量子标量场，ψ^a, $a=1,...,N$，它与一个“经典”场 ϕ 在六维时空中相互作用，其中

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\psi^a)^2+\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2+\frac{g_1}{2}\phi\,\psi^a\psi^a+\frac{g_2}{6}\phi^3. \tag{7}$$

在 [2]中研究了完全量子理论，并发现当 $N>1038$取较大值时存在红外稳定不动点，这与低维

共形场论相符。在 [3]中还研究了辐射对称性破缺、维度嬗变、Coleman-Weinberg 机制及其相关的亚稳真空。

在此，我将关注这样一种情形：其中一个场被约束为以经典方式传播（它是在大 N 方法中由 Hubbard-Stratonovich 变换产生的场）。现在，匹配预计不会在 $1/N$ 展开的领头阶之外精确成立，但在重整化群分析中，稳定的红外不动点出现在 ϵ 展开中小得多的 N 取值处。我还考虑由六维时空中的量子场产生的 Coleman-Weinberg 机制，它为“经典”场产生一个亚稳真空。

作用量 $S = \int d^d x\, \mathcal{L}$以与之前相同的方式被修正，以便将 ϕ场按经典方式处理，并基本上抵消涉及它的标量圈图。

修正作用量 $\tilde{S} = S + \int d^d x (\lambda \frac{\delta S}{\delta \phi} + \bar{c} \frac{\delta^2 S}{\delta \phi^2} \underline{c} + J \underline{\phi} \pm J'_a \psi^a + \Lambda \lambda)$强制实现与之前相同的行为，并一致地抵消 ϕ场的圈图。在单圈层次，我们得到β函数

$$\beta_1 = -\frac{\epsilon}{2} g_1 + \frac{(N-8) g_1^3 - 12 g_1^2 g_2}{12 (4\pi)^3}, \tag{8}$$

$$\beta_2 = -\frac{\epsilon}{2} g_2 + \frac{N (g_1^2 g_2 - 4 g_1^3)}{4 (4\pi)^3}, \tag{9}$$

分别对应于 $d = 6 - \epsilon$ 维中的 g_1 和 g_2，以及

$$\gamma_\phi = \frac{1}{(4\pi)^3} \frac{N g_1^2}{12}, \quad \gamma_\psi = \frac{1}{(4\pi)^3} \frac{g_1^2}{6} \tag{10}$$

ϕ 和 ψ^a 的反常维数。

为了考察 ϵ 展开中的单圈不动点，我们令

$$g_1 = \sqrt{\frac{6\epsilon (4\pi)^3}{N}}\, x, \quad g_2 = \sqrt{\frac{6\epsilon (4\pi)^3}{N}}\, y, \tag{11}$$

并求解 β 函数的零点方程，

$$N x = (N-8) x^3 - 12 x^2 y, \tag{12}$$

$$N y = 3 N x^2 y - 12 N x^3. \tag{13}$$

这些方程很容易通过解析方法求解，得到

$$y = \frac{12x^3}{3x^2 - 1}, \tag{14}$$

$$x^2 = \frac{2(N-2) \pm \sqrt{N^2 + 152N + 16}}{3(N-56)}. \tag{15}$$

原点 $(x,\ y) = (0,\ 0)$ 对所有 N 都是紫外稳定不动点。对于 $N > 56$，存在四个实解，第一和第三象限中的两个解是红外稳定不动点，而第二和第四象限中的两个解是鞍点。对于 $N \leq 56$，两个稳定不动点消失（它们变为纯虚数解），只剩下两个实鞍点。

我在图 3 中展示了 β 函数在$N = 80$ 时的零点和流图，并在图 4 中展示了 $N = 40$ 时的情况；我们可以将这里的结果与 [2] 进行比较，并看到流图相似，且稳定不动点在更小的 N取值下出现。图中函数 $f(x,\ y)$ 和 $g(x,\ y)$ 分别对应于 β_1 和 β_2。如前所述，场的反常维数与低维 CFT 的匹配在 $1/N$ 展开的领头阶之后并不精确。这是预期之中的，因为理论发生了修改。然而，人们相信，通过这种方法获得的结果能够为紫外完备化的量子场论 [8, 9] 中可能出现的“经典”行为及其他有趣现象提供洞见。

根据幂次计数，六维时空中的三次相互作用也预期会导致辐射对称性破缺，但此时形成的真空是亚稳态，因为能量没有下界。对于完全量子理论， [3], 中已证明了这一点；而当只有 ψ 场产生圈贡献、 ϕ 场按上述方式作经典处理时，也预期会有类似结果。 ϕ 的有效势可写为

$$V_{\rm eff}(\phi) = \frac{1}{6} g_2\, \phi^3\, F(g_1, g_2, \ln \frac{\phi^2}{\mu^2}), \tag{16}$$

并在尺度 μ [7, 10]下用重整化群方法处理

$$(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_1 \frac{\partial}{\partial g_1} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial g_2} + \gamma_\phi \frac{\delta}{\delta \phi})\, V_{\rm eff}(\phi) = 0. \tag{17}$$

在六维中使用（8、9、10）中的相关表达式（其中 $\epsilon = 0$）后，我们在主导对数近似下得到：

$$V_{\text{eff}}(\phi) = \frac{1}{6}\phi^3 \left(g_2 + \frac{N(g_1^2 g_2 - 2g_1^3)}{256\pi^3} (\ln \frac{\phi^2}{\mu^2} - \frac{11}{3}) \right) \tag{18}$$

通过重整化，如 [7], $V'''_{\text{有效}}(\phi)|_{|\phi|=\mu} = g_2$。

现在，我们可以像前人的工作那样考察维度嬗变，因为对于 ϕ，我们有一个定义良好的（尽管是亚稳态的）真空（有效势的极小值），它完全由 ψ-圈产生，并采用了本文所述的组合学。

施加 $V'_{\text{有效}}(\phi)|_{\phi=-\mu} = 0$ 后，我们得到 $g_2 = 3Nc(g_1^2 g_2 - 2g_1^3)$，其中常数为 $c = 1/(256\pi^3)$，接着可以按照维度嬗变的一贯思路，—从初始耦合常数 g_1 和 g_2“转换参数”，得到 g_1 以及在亚稳极小值处生成的 ϕ 场的质量， $V''_{\text{有效}}(\phi)|_{\phi=-\mu} = 2cNg_1^3\mu$.

本文考虑了对称相中的量子场 ψ^a ，尽管也可以进行推广；所得结果与 [3], 一致，同时考虑了对经典场所做的修正。

4 与其他工作的比较

本文介绍的工作最初发表于 [1], ，是对 [4], 等团队工作的推广，也有所改进；这些团队研究的是作用量

$$\bar{S} = \lambda \frac{\delta S}{\delta \phi} + \bar{c} \frac{\delta^2 S}{\delta \phi^2} c, \tag{19}$$

而非作用量

$$\tilde{S} = S + \lambda \frac{\delta S}{\delta \phi} + \bar{c} \frac{\delta^2 S}{\delta \phi^2} c, \tag{20}$$

（由 [1] 提出）。

很容易从（19）推导出费曼规则，其中包含混合的$\lambda - \phi$ 传播子，但不包含 $\lambda - \lambda$ 传播子；后者会产生负贡献，并导出图1所示的经典图。这些简单的经典散射图以及许多其他图，

在这里描述的这些图无法通过 [4]的方法得到。有人曾试图通过修改费曼规则的推导方式，使他们的工作与可视为“经典”的内容相协调 [11],，但从路径积分推导传播子的通常方法 [12] 并不一致。

更重要的是，基于 (20) 的 [1], 形式体系允许推广到这样一种情形：存在“经典”场（无论如何，这都是一种人为设定，需要加以论证）与自然界中通常存在的量子场之间的相互作用。

基于 (19) 的 [4], 研究对经典力学，尤其是对称性，提出了一些有趣的见解，但无法推广到量子处理。

另有一些研究探讨了具有经典行为的场与量子场之间的相互作用 [13]。这些研究通常考察尺度分离，这对于许多物理情形都很重要且实用。然而，一般而言，从形式上看，尺度分离在物理上并非严格成立，因此需要“手动”进行调整。此处更详细介绍的 [1], 研究，则通过费曼规则提供了一种形式上严谨一致的处理方式，并且可以轻松、一致地推广到更多场，无论是量子场还是经典场，也可推广到更高圈数等情形。

另一方面，纯粹的经典场在自然界中并不存在，因此要将此处所述技术应用于相关问题，必须有物理上的理由加以论证。

5 评论与应用

此处及 [1] 中所给出的形式体系，其结果、评论与应用较为分散，因为主要结果是技术性的和组合性的，因而可应用于各种问题。其主要重要性在于对微扰展开中线性项的处理。这些项通常会被舍弃，而且理由充分、正当，因为大多数问题涉及围绕泛函稳定极小值的微扰，并使用谐振子及其推广来描述这些涨落。在这些情形下， [5], [6], 的通常方法被一贯地加以应用，而可能因场平移而产生的“蝌蚪”项可以一贯地设为零。

这里讨论的线性项与不同效应有关，无法以一致的方式将其设为零。这类线性项的一种表现

是用于描述约束的拉格朗日乘子；其最初的应用是将一种相互作用作为“经典”相互作用来处理，并使其在树图中传播。

需要指出的是，为了重构完整的经典理论，并解决一致性和幺正性问题，应考虑全部树图。或许，更有用且更切题的研究方向是探讨引力或其他相互作用能否以有效的经典理论或部分经典理论的形式涌现。

后续研究还探索了另一项应用 [14, 15],：处理非阿贝尔规范理论中的约束，并由此描述强相互作用真空，且有诸多应用。

一个概念性问题，也是最初研究的动机之一，是量子力学各种诠释中的测量问题。有人认为，测量过程涉及量子系统（被测对象）与经典系统（探测器）之间的相互作用，人们希望本文提出的形式体系有助于描述这一过程。事实上，本文以及 [1] 中的简单例子可以这样理解：经典场（代表测量装置）与纯量子场相互作用，并由此产生真空期望值（对应于一次测量）。这还只是非常初步的设想，尚未通过更实用的例子加以阐述。此外，其他研究的结果揭示了与测量问题的另一种可能联系，这将在一篇相关研究 [16]中讨论。

最后，关于其他可能的应用，需要指出的是，可以将这一形式体系扩展到费米子和高自旋场，并研究不可重整化相互作用，以及按上述方式重新组织微扰理论时发散的结构。

Note

关于这项工作，没有其他数据，也不存在利益冲突。费曼图使用 Jaxodraw [17], 绘制，图表则使用 Google Gemini 免费版生成。

参考文献

[1] D. Metaxas, 《物理评论D》**75**, 065023（2007）[2] L. Fei、S. Giombi 和 I. R. Klebanov, 《物理评论D》**90**, 第2期, 025018（2014）[3] H. Souza、L. Ibiapina Bevilaqua 和 A. C. Lehum, 《物理评论D》**102**, 第4期, 045004（2020）[4] E. Gozzi、M. Reuter 和 W. D. Thacker, 《物理评论D》**40**, 3363（1989）[5] R. Jackiw, 《物理评论D》**9**, 1686（1974）[6] L. F. Abbott, 《波兰物理学报B辑》**13**, 33（1982）[7] S. R. Coleman 和 E. J. Weinberg, 《物理评论D》**7**, 1888-1910（1973）[8] G. Dvali、G. F. Giudice、C. Gomez 和 A. Kehagias, 《高能物理学杂志》**08**, 108（2011）[9] N. Irges 和 F. Koutroulis, 《欧洲物理学杂志C辑》**81**, 第2期, 187（2021）[10] C. Ford、D. R. T. Jones、P. W. Stephenson 和 M. B. Einhorn, 《核物理B辑》**395**, 17-34（1993）[11] E. Cattaruzza、E. Gozzi 和 A.FranciscoNeto, 《物理年鉴》**326**, 2377- 2430（2011）[12] A. Zee, 《量子场论简明教程》[13] A. H. Mueller 和 D. T. Son, 《物理快报B辑》**582**, 279-287（2004）S. Jeon, 《物理评论C》**72**, 014907（2005）[14] D. Metaxas, 《欧洲物理学杂志C辑》**82**, 第8期, 735（2022）[15] D. Metaxas, Universe**9**, 第9期, 423（2023）[16] D. Metaxas, [arXiv:2409.01168 [hep-th]].[17] D. Binosi 和 L. Theußl, 《计算机物理通讯》**161**, 76-86（2004）

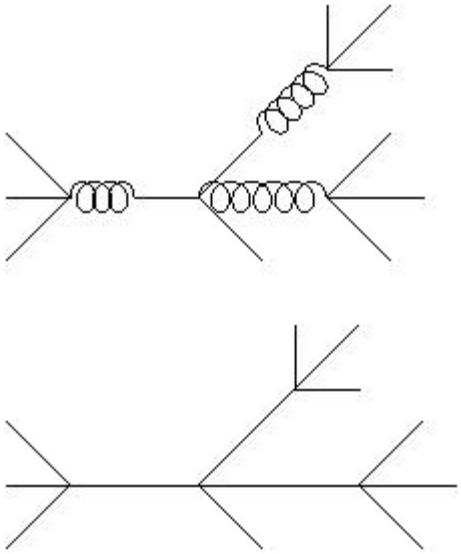

图1：顶部的图是根据文中所述费曼规则可以构造出的许多具有相同线结构的图之一。可以构造出奇数个这样的图，符号交替；它们的总和给出底部的“经典”理论树图（实线表示 ϕ ，波浪线表示 λ）。

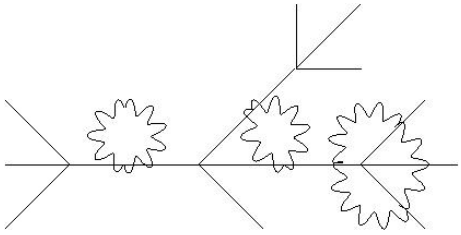

图2：相互作用的量子-经典理论的示意图，其中经典场沿树图传播，并伴有量子场（波浪线）的任意圈图。经典树骨架由混合传播子的求和构成，如图1所示。

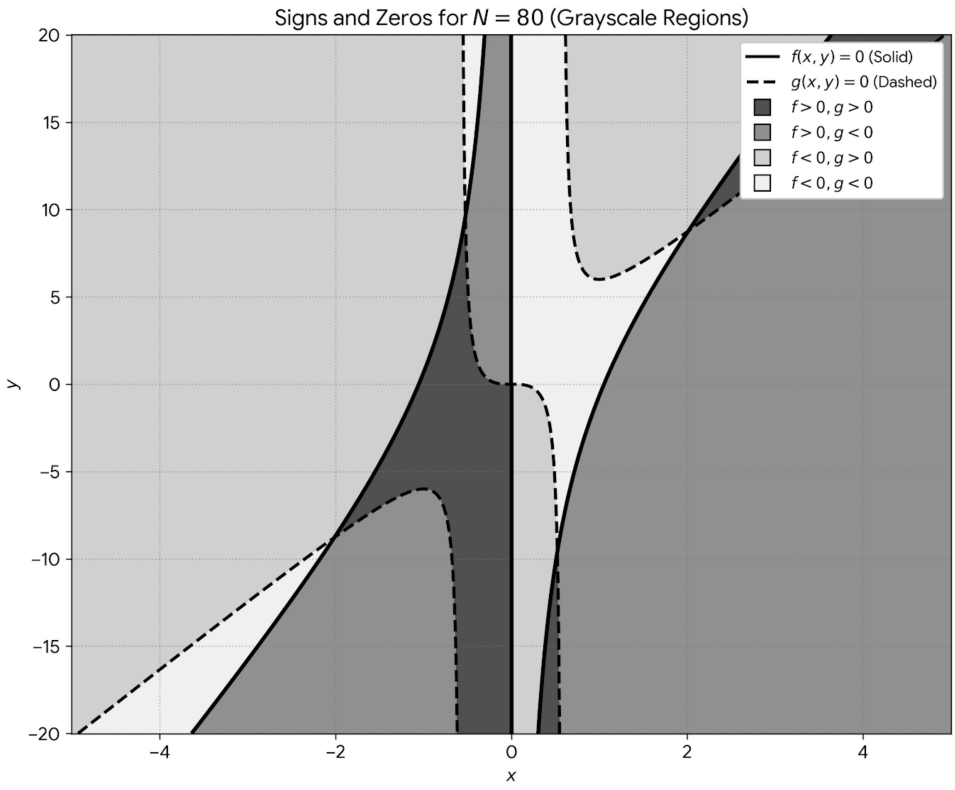

图3： $N = 80$ 的 β函数符号与零点。

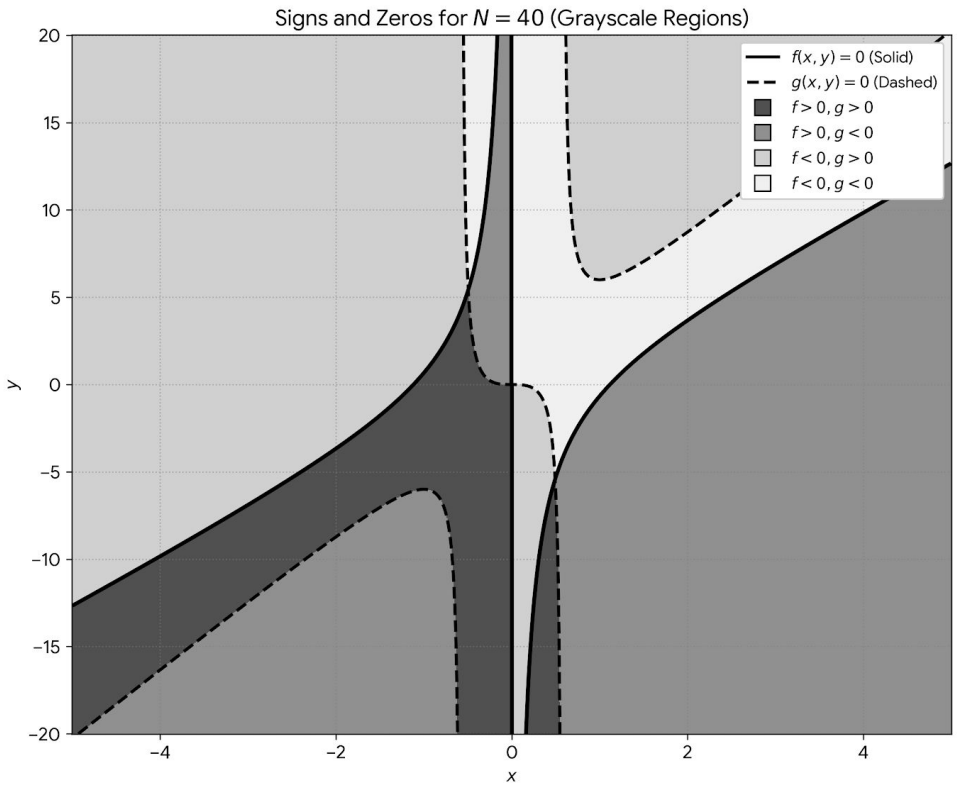

图 4: $N = 40$ 的 β函数的符号和零点。