arXiv:2602.01314v1 [physics.plasm-ph] 1 Feb 2026

# 无碰撞等离子体中的不可逆性与熵排除

A. G.Tevzadze*Evgeni Kharadze*格鲁吉亚国家天体物理天文台，阿巴斯图马尼 *0301*，格鲁吉亚；以及贾瓦希什维利第比利斯国立大学精确与自然科学学院，第比利斯 *0179*，格鲁吉亚

我们研究了无碰撞等离子体约化描述中的熵产生。通过引入依赖于闭合的熵层级，我们表明，非守恒矩闭合会产生与不可逆信息损失相关的剩余熵，而不变闭合则保持可逆性。该剩余熵的单调增长对宏观等离子体状态施加了统计可实现性约束，排除了与动力学稳定性无关的相空间区域。对于各向异性等离子体，我们在二阶矩闭合框架内评估了熵产生，并确定了输运和磁场非均匀性所作的贡献。由此得到的熵排除边界与空间等离子体中观测到的各向异性分布总体一致。因此，统计可实现性成为无碰撞等离子体约化描述的一项组织原理。

无碰撞等离子体通常被描述为动力学可逆系统，其宏观行为主要受守恒定律和动力学稳定性约束。在这项工作中，我们指出这种图景并不完整。即使没有碰撞或线性不稳定性，无碰撞等离子体的约化描述通常也会因未分辨相空间结构的丢失而产生不可逆的熵。因此，仅凭动力学稳定性不足以刻画可达的等离子体状态：统计可实现性为宏观相空间提供了独立且互补的约束。

这种表面上的矛盾反映了形式上的微观可逆性与物理不可逆性之间的区别；在无碰撞等离子体湍流的统计描述中，这一区别早已受到强调 [1]。尽管 Vlasov动力学在形式上具有时间可逆性，无碰撞等离子体的物理演化通常是不可逆的，其原因包括相空间细丝化、粗粒化、微湍流以及其他非平衡效应；弱碰撞等离子体的动理学湍流研究也观察到了这些现象 [2]。在约化描述中，这种不可逆性无法消除，而是转移到无穷矩层级中更高且未分辨的阶次，这与早期关于无碰撞相位混合和约化动理学模型的分析一致 [3]。守恒闭合通过将熵产生推迟到更高阶矩，在给定阶次上保持可逆性；从这一角度看，非守恒闭合为在约化无碰撞等离子体模型中明确呈现熵产生提供了一个自洽框架。

受这一观点的启发，我们引入一种依赖于闭合的熵层级，用以区分可逆与不可逆的矩闭合，并展示熵产生如何在约化无碰撞等离子体模型中出现。我们聚焦于各向异性等离子体，推导二阶熵产生机制，并得出一项明确的可实现性约束，该约束会排除宏观相空间中的某些区域。我们通过与具有代表性的空间等离子体观测结果进行比较，阐明由此得到的排斥原理，最后讨论其对无碰撞等离子体流的约化描述所具有的意义。

为建立这些结果所依据的形式框架，我们从无碰撞等离子体的动理学描述入手。等离子体的动理学状态可以用单粒子分布函数 $f(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v},\ t)$ 来描述，为简洁起见省略了物种指标。无碰撞等离子体的动力学可以用 Vlasov 方程描述：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}}+\frac{\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}}}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}=0\,, \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}}=q\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}/c\right)$ 为洛伦兹力。通过对分布函数取不同阶的速度矩，可以得到流体描述。流体模型的体密度和速度可定义为：

$$\rho=m\int f\mathrm{d}^3v\,,\qquad u_i=\frac{m}{\rho}\int v_i f\mathrm{d}^3v\,. \tag{2}$$

高阶矩可用 $n$ 阶中心速度积分来描述：

$$M^{(n)}_{i_1\cdots i_n}=m\int c_{i_1}\cdots c_{i_n}f\mathrm{d}^3v\,, \tag{3}$$

其中，$c_i=\left(v_i-u_i\right)$。对 Vlasov 方程依次取速度矩，可得到一个无限的演化方程层级，其中第 $n$ 阶矩的方程与第 $(n+1)$ 阶矩耦合（参见 BBGKY层级 [4] 及其矩表述 [5]）。用紧凑的算子形式，该层级可示意性地写为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M^{(n)}+\mathcal{L}^{(n)}M^{(n)}+\mathcal{B}^{(n)}M^{(n)}=-\nabla\cdot M^{(n+1)}\,, \tag{4}$$

其中，$\mathcal{L}^{(n)}$ 表示由整体速度梯度（剪切、应变和压缩）引起的相空间形变，而 $\mathcal{B}^{(n)}$则描述磁场通过快速回旋运动产生的作用，其中 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t=\partial/\partial t+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)$。为了得到有限的方程组，必须对无穷矩层级进行闭合。相应地，闭合模型可根据其保留的速度矩数量进行分类。

矩闭合可分为两类结构。在下文中，我们将强制满足精确不变量或使高阶矩为零的闭合（$M^{(n+1)}=0$）称为硬闭合，而将规定高阶

矩但不对其进行动态演化的闭合称为软闭合。这一区分与基于熵和可实现性的矩闭合分类 [6], 以及降阶模型的哈密顿表述 [7]一致。

尽管Vlasov 方程严格时间可逆，真实的无碰撞等离子体却表现出不可逆的宏观行为。每一种矩闭合都通过规定未解析的动力学信息如何被保留或舍弃，隐式地选取一组不同的宏观等离子体状态统计系综。因此，硬闭合与软闭合之间的区别是结构性的而非定量的：即便任意精确的软闭合，通常也会允许不可逆的信息泄漏，除非所有高阶矩都以自洽方式演化。这并不与底层可逆动力学相矛盾。Vlasov演化通过细丝化将信息转移到越来越精细的相空间尺度。然而，在真实系统中，观测与模型受限于有限分辨率和约化可观测量。任何此类约化描述，无论经由粗粒化、有限分辨率还是矩闭合，都会不可逆地丢弃这些精细尺度信息，从而将形式上可逆的微观动力学转化为有效的宏观熵产生（参见例如 [8, 9]）。

在本框架中，不可逆性并非动力学不稳定性、混沌或耗散的结果，而是结构性地源于无碰撞等离子体的约化表示。软矩闭合允许未解析的动力学自由度在未被自洽演化的情况下影响动力学，从而导致不可逆的信息损失，尽管底层Vlasov动力学仍然保持时间可逆。因此，不可逆性是由闭合本身的结构所施加的，而非由微观运动方程所决定。

作为闭合与可逆性关系的一个示例，我们考虑一种硬一阶闭合，它对应于冷无压流体，且具有可逆性。相比之下，软一阶闭合引入了一个二阶速度矩——压力，这通常与碰撞效应相关，却不对其进行动态演化；尽管动力学是无碰撞的，仍会产生不可逆熵。同一机制可推广至高阶软闭合，其中熵增长源于未解析的（$n+1$）阶速度矩的显式驱动。

我们将 $f^{(n)}$ 定义为 $n$矩代表性分布，它能够再现所有满足 $k \leq n$ 的速度矩 $M^{(k)}$，并为流体模型提供闭合。$f^{(n)}$ 的具体形式反映了闭合在$n$阶的特定实现方式，一种自然的选择是最大熵实现。随后，我们将与给定闭合层级相关的 $n$阶熵定义为

$$S^{(n)} = -\int f^{(n)} \ln f^{(n)} \mathrm{d}^3 v \,. \tag{5}$$

注意， $n$阶熵序列满足熵排序不等式

$$S^{(n+1)} \leq S^{(n)} \,, \tag{6}$$

这反映了随着更高阶速度矩逐步得到解析，不确定性随之降低。在这些记号下，渐近极限中可恢复精确的吉布斯–玻尔兹曼熵:

$$S = \lim_{n\to\infty} S^{(n)} \,. \tag{7}$$

如果高阶速度矩会影响系统动力学，却不以自洽方式演化，从而允许不可逆信息从已解析的矩子空间流出，我们便将该系统称为软“泄漏矩”闭合。在固定的矩阶 $n$ 下，熵 $S^{(n)}$ 并非唯一确定，而是取决于所选的闭合方式。因此，我们区分可逆熵 $S_0^{(n)}$ 与不可逆熵 $S_1^{(n)}$ ：前者对应硬（不变量）闭合，后者对应软（非守恒）闭合；软闭合规定高阶矩，却不使其随动力学演化。虽然 $S_0^{(n)}$ 守恒，但由于信息不可逆地泄漏至未解析的动力学自由度中， $S_1^{(n)}$ 自然会表现出熵产生。下标 0 和 1 分别表示 $n$ 阶熵的硬实现和软实现:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S_0^{(n)} = 0 \,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S_1^{(n)} \geq 0 \,. \tag{8}$$

因此，我们引入一个剩余熵贡献，用以量化 $n$阶闭合中与不可逆性相关的信息:

$$R^{(n)} = S_1^{(n)} - S_0^{(n)} \,. \tag{9}$$

剩余熵的单调增长

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} R^{(n)} \geq 0 \tag{10}$$

带来一项重要后果：它对给定闭合所生成的宏观变量相空间施加了额外的可实现性约束。这项约束独立于标准的可实现性要求，同时与之互补，例如分布函数的正定性、压强张量的正定性，以及矩系统的动力学可实现性。由于$R^{(n)}$ 量化了未解析的动力学结构，只有那些能够通过信息单调损失而达到的宏观态，在动力学上才是允许的。因此，在约化描述中，需要 $R^{(n)}$ 减少的状态是禁止的。从这个意义上说，软闭合中的熵产生不仅表明存在不可逆性，还可能主动限制与特定闭合相关的可实现相空间区域。

作为一个示例，一阶磁流体力学闭合中的不可逆性可能与熵泛函相关

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} R^{(1)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln\left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right) \geq 0, \tag{11}$$

其中， $\gamma$ 是磁流体力学闭合中使用的绝热指数。这一极限是退化的，因为严格守恒的一阶闭合对应于压力为零的冷流体。

因此，相应的硬闭合熵 $S_0^{(1)}$ 是平凡且守恒的，这反映了内部动理学自由度的缺失。在一阶引入压力构成软闭合，因此残余熵增长条件简化为标准的熵产生约束，不会施加额外的可实现性限制。这种退化是一阶闭合特有的，对于高阶矩系统则预计不会持续存在，因为后者会出现真正全新的、基于熵的约束。

由于一阶情形是退化的，无法产生额外的可实现性约束，因此我们转而考虑二阶闭合，其中剩余熵的单调增长可能导致非平凡的熵排除条件。我们使用 Chew–Goldberger–Low（CGL）模型 [10]作为二阶硬闭合，并将热流作为软闭合修正纳入其中，以计算二阶剩余熵 $R^{(2)}$。此时，平行和垂直压力分量遵循以下软闭合模型方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{P_\parallel B^2}{\rho^3}\right) = -\frac{B^3}{\rho^3}\left[\nabla_\parallel\left(\frac{Q_\parallel}{B}\right) + \frac{2Q_\perp}{B^2}\nabla_\parallel B\right] , \quad (12)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{P_\perp}{\rho B}\right) = -\frac{B}{\rho}\nabla_\parallel\left(\frac{Q_\perp}{B^2}\right) , \quad (13)$$

其中， $Q_\parallel$ 和 $Q_\perp$ 分别为平行和垂直热流分量。为简洁起见，我们使用沿磁场方向的导数:

$$\nabla_\parallel \equiv \frac{1}{B}\left(\boldsymbol{B}\cdot\nabla\right) . \quad (14)$$

这里，各向异性压力分量 $P_\parallel$ 和 $P_\perp$ 由二阶速度矩导出，其演化通过热流 $Q_\parallel$和 $Q_\perp$与三阶矩耦合。在经典的 CGL 硬闭合（$Q_\parallel = Q_\perp = 0$）中，方程（12）和（13）化为两个 CGL 绝热不变量的守恒形式。利用 CGL 熵形式

$$S_{\mathrm{CGL}} = \frac{1}{3}\ln\!\left(\frac{P_\parallel P_\perp^2}{\rho^5}\right) , \quad (15)$$

在硬 CGL 闭合中，这种形式的导数为零（$S_0^{(2)} = S_{\mathrm{CGL}}$）；而在使用相同流体变量的软闭合中，我们可以将不可逆熵的时间导数定义如下:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S_1^{(2)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\!\left(\frac{P_\parallel P_\perp^2}{\rho^5}\right)^{1/3} . \quad (16)$$

现在，利用方程（8）、（9）、（12）和（13），我们可以推导出二阶熵残差形式的动力学方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R^{(2)} = \Sigma_\parallel + 2\Sigma_\perp + 2\Sigma_B , \quad (17)$$

with

$$\Sigma_\parallel = -U_\parallel\nabla_\parallel\ln\left(\frac{Q_\parallel}{B}\right)^{1/3} , \quad (18)$$

$$\Sigma_\perp = -U_\perp\nabla_\parallel\ln\left(\frac{Q_\perp}{B^2}\right)^{1/3} , \quad (19)$$

$$\Sigma_B = -U_\perp\frac{P_\perp}{P_\parallel}\nabla_\parallel\ln(B)^{1/3} , \quad (20)$$

其中，我们引入了特征性的各向异性热流输运速度:

$$U_\parallel = Q_\parallel/P_\parallel , \qquad U_\perp = Q_\perp/P_\perp . \quad (21)$$

重要的是，方程（17）的形式不依赖于软闭合的具体实现；只有对排除边界的显式评估才需要闭合规定。它揭示了熵传递源的物理图像，这些熵传递源共同促成系统中的熵产生，包括平行热流（$\Sigma_\parallel$）、垂直热流（$\Sigma_\perp$）以及沿磁场方向的磁场强度梯度（$\Sigma_B$）所作的贡献。有趣的是，磁场非均匀性直接进入熵收支，因而成为宏观信息的有效汇，而非仅仅通过压力各向异性或输运影响熵产生。因此，方程（17）给出了相空间中的可实现性条件:

$$\Sigma_\parallel + 2\Sigma_\perp + 2\Sigma_B \geq 0 . \quad (22)$$

为了由式（22）导出具体的相空间约束，必须指定相关的相空间变量，并采用软闭合规定，即规定平行热流与垂直热流 $Q_\parallel$ 和 $Q_\perp$ 如何确定。为此，我们引入压力各向异性 $\alpha$ 和等离子体-$\beta$ 参数，它们被广泛用于量化由观测推断的无碰撞等离子体流的热力学状态:

$$\alpha = P_\perp/P_\parallel , \ \beta_\parallel = 8\pi P_\parallel/B^2 . \quad (23)$$

为进一步计算，我们采用各向异性限流闭合：其中平行热流受平行热（声）速限制，与无碰撞自由流论证 [11]，一致；而垂直热流受Alfv´en速度限制，反映了磁场对跨磁场输运的约束 [12]:

$$U_\parallel = \chi\left(\frac{P_\parallel}{\rho}\right)^{1/2} , \ U_\perp = \chi\left(\frac{B^2}{4\pi\rho}\right)^{1/2} , \quad (24)$$

其中 $\chi < 1$ 是一个无量纲限流参数，用于描述无碰撞等离子体动力学对热通量输运的调节。为进行定性估算，我们采用弱变化的沿磁场剖面 $\nabla_\parallel P_\parallel \approx 0$和 $\nabla_\parallel\rho \approx 0$。这将式（22）化为一个定义排除边界函数 $\alpha = \alpha(\beta)$的包络条件:

$$\frac{\mathrm{d}\ln\alpha}{\mathrm{d}\ln\beta_\parallel} + \frac{1}{2}\left[1 - \alpha + \left(\frac{\beta_\parallel}{8}\right)^{1/2}\right] \leq 0 . \quad (25)$$

该条件在（$\alpha$，$\beta$）平面上构成一个微分不等式。该不等式限制了约化动力学所生成的相空间轨迹的允许方向。等号情形定义了一个可实现轨迹无法越过的包络：位于此边界下方的宏观态需要负熵产生，因此在约化描述中无法通过动力学到达。我们将这一约束称为相空间限制原理，或称熵排除，它禁止到达某些宏观态。

对方程（25）进行数值求解，可在（$\beta_{\parallel}$，$\alpha$）平面上得到与太阳风代表性参数相对应的熵排斥包络。如图1所示，由此得到的熵排除区域与观测到的各向异性分布高度吻合，尤其是在低$\beta_{\parallel}$ 区域。考虑到软闭合形式极为简约，这种一致性尤为显著，并表明熵排除为低 $\beta_{\parallel}$处系统性缺乏涨落提供了一种自然解释。熵排斥边界应被理解为不可逆演化下宏观轨迹渐近趋近的包络，而不是动力学上被穿越或反弹的锐利阈值。

我们已证明，无碰撞等离子体中的不可逆性与熵产生意味着相空间中存在被排除的宏观态。在当前框架中，不可逆性具有结构性：它源于等离子体的约化表述，而非底层Vlasov动力学中的动力学不稳定性或耗散。借助二阶软矩闭合，我们证明，向未解析的动力学尺度发生的不可逆信息损失会产生残余熵，而其单调增长则确立了一种排斥原理。因此，即使在动力学上稳定的无碰撞等离子体状态，也可能在统计意义上被禁止。

这一约束并非纯粹的热力学约束。磁场非均匀性明确地体现在熵收支中，使磁结构与压强各向异性和输运处于同等地位。因此，熵产生不仅是不可逆性的诊断指标，也是一种主动机制，限制着对宏观相空间的访问。此处识别出的排斥态并非与线性微观不稳定性或边际稳定性阈值相关。相反，统计排斥施加了一种全局累积约束，源自不可逆信息损失。失稳阈值通过局部增长率限制等离子体状态，而统计可实现性则限制了约化描述中可允许宏观态的存在本身，提供了一种较弱但更普适的判据，用以支配无碰撞等离子体流可访问构型的范围。

全面分析所有闭合和高阶矩系统中的剩余熵产生，超出了本研究的范围。我们的目标则是在概念层面确立：剩余熵的单调增长通常会对无碰撞等离子体宏观相空间施加熵排除约束。通过以一个具体的二阶闭合为例展示这一机制，并说明它与代表性观测结果相符，我们阐明了这种研究方法，但并未试图穷尽所有闭合模型。本研究的主要创新在于，将熵排除确立为无碰撞等离子体约化描述的一项组织原理。

更广泛地说，这些结果表明，熵驱动的统计可实现性对无碰撞系统的约化描述施加了一种普遍约束，并对模型验证、湍流和宏观稳定性具有重要意义。在湍流等离子体中，统计排斥可能充当一项全局约束，塑造长时间尺度上的宏观态，而不受局部级联动力学或不稳定性驱动饱和的影响。更一般而言，只要舍弃了精细尺度的相空间信息，这类约束就可能是无碰撞哈密顿系统约化描述所固有的。

[1] J. A. Krommes，物理评论快报 **70**，3067（1993）。[2] G. G. Howes、S. C. Cowley、W. Dorland、G. W. Hammett、E. Quataert 和 A. A. Schekochihin，物理评论快报 **100**，065004（2008）。[3] W. Dorland 和 G. W. Hammett，流体物理B **5**，812（1993）。[4] N. N. Bogoliubov，苏联物理学杂志 **10**，256（1946）。[5] H. Grad，纯粹与应用数学通讯 **2**，331（1949）。[6] C. D. Levermore，统计物理杂志 **83**，1021（1996）。[7] P. J. Morrison，物理评论快报 **80**，415（1998）。[8] G. L. Eyink 和 K. R. Sreenivasan，物理评论快报 **97**，100601（2006）。[9] A. A. Schekochihin、S. C. Cowley、W. Dorland、G. W. Hammett、G. G. Howes、E. Quataert 和 T. Tatsuno，物理评论快报 **100**，081301（2008）。[10] G. F. Chew、M. L. Goldberger 和 F. E. Low，伦敦皇家学会会刊A辑 **236**，112（1956）。[11] G. W. Hammett 和 F. W. Perkins，物理评论快报 **64**，3019（1990）。[12] E. N. Parker，流体物理 **8**，1770（1965）。[13] K. G. Klein、G. G. Howes 和 J. M. TenBarge，计算天体物理动态评论 **5**，1（2019）。

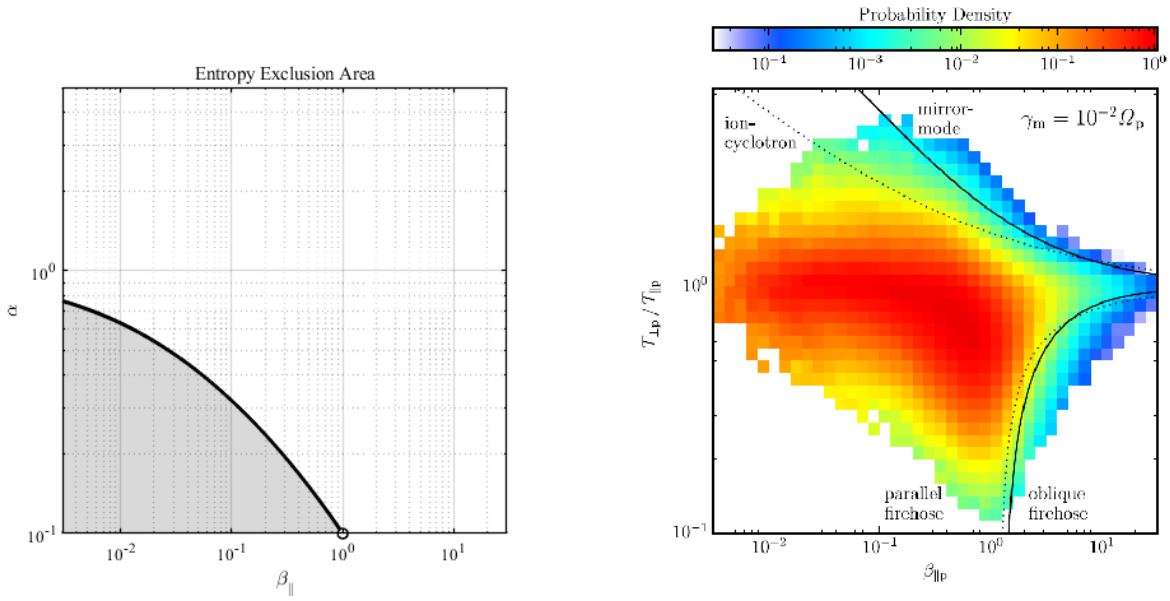



图 1. 各向异性等离子体状态中的熵可容许集。左图：$(\beta_\parallel, \alpha)$ 中熵排除区域的边界。阴影区域被剩余熵增长论证所设定的约束排除。右图：改编自参考文献 [13]（知识共享署名 4.0 国际许可协议）的 $(\beta_{\parallel p}, T_{\perp p}/T_{\parallel p})$ 中的太阳风分布。