arXiv:2602.01315v1 [math.NA] 1 Feb 2026

带非线性 Neumann 边界反馈控制的黏性 Burgers 方程的有限元 θ 格式

Shishu Pal Singh*和 Sudeep Kundu†

2026年2月3日

摘要

本文针对带非线性 Neumann 边界反馈控制的一维（1D）和二维（2D）黏性 Burgers 方程，建立了一种全离散数值格式。时间离散采用 θ格式，空间逼近则采用协调有限元法。证明了全离散解的存在性与唯一性。进一步证明，该格式对 $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$是无条件指数稳定的，从而确保连续模型的稳定化性质在离散层面得以保持。此外，在一维和二维框架下，对状态变量和边界控制输入均得到了最优误差估计。最后，给出若干数值实验，以验证理论结果，并展示所提出的稳定化策略在不同模型参数下的有效性。

1 引言。

我们考虑 $1D$ 黏　　性 Burgers 方程，其 Neumann 边界反馈控制形式如下　　：

$$y_t - \nu y_{xx} + y y_x = 0, \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty), \tag{1.1}$$

$$y_x(0,t) = u_0(t), \quad t \in (0,\infty), \tag{1.2}$$

$$y_x(1,t) = u_1(t), \quad t \in (0,\infty), \tag{1.3}$$

$$y(x,0) = y_0(x), \quad x \in (0,1), \tag{1.4}$$

其中， $\nu > 0$ 为黏性系数； $u_0(t)$ 和 $u_1(t)$ 为控制输入。

黏性 Burgers 方程是一种半线性抛物型偏微分方程（PDE）。当黏性项（$\nu = 0$）不存在时，它就变为双曲型偏微分方程。因此，这种形式是可能产生激波的守恒方程的原型。在这种情况下，它也称为无黏 Burgers 方程。

过去几十年来，带控制问题的黏性 Burgers 方程因其在湍流建模、浅水理论、气体动力学和交通流等多个领域的应用而受到广泛关注。针对满足某些初始条件的该方程，其局部稳定化结果见[7, 10, 13, 14]。在 [22], Ly 等人的研究中，他们取消了这些限制。他们讨论了任意初始数据下，具有 Dirichlet 边界和 Neumann 边界的黏性 Burgers 方程的存在性、唯一性和正则性结果 L^2。对于 $2D$ 黏性 Burgers 方程，文献 [3, 9, 34]建立了局部稳定化结果。在 [3], Wasim 等人的研究中，他们证明了通过围绕零稳态解采用分布式反馈控制，可以实现带记忆项的黏性 Burgers 方程的局部稳定化。此外，文献 [9] 和 [34],分别采用了 Dirichlet 边界控制和 Neumann 边界控制。

利用控制 Lyapunov 泛函， [20], Krstic 已证明，通过 Neumann 边界和 Dirichlet 边界反馈控制律，可以实现该方程的全局稳定化。接下来， H^1 稳定性与正则性

*拉吉夫·甘地石油技术学院数学科学系。电子邮件：shishups@rgipt.ac.in
†拉吉夫·甘地石油技术学院数学科学系。电子邮件：sudeep.kundu@rgipt.ac.in

结果在 [6]中得以确立。文献 [23, 29, 30]展示了广义黏性 Burgers 方程在自适应情形（当 ν 未知时）和非自适应情形（当 ν 已知时）下的稳定化。此外，分别有文献 [24] 和 [15]研究了采用反步法和自适应反步边界控制的稳定化。最后，文献 [19], 利用控制 Lyapunov 泛函，证明了采用 Neumann 边界反馈控制的 $2D$ 黏性 Burgers 方程的全局稳定化。此外，文献 [21, 25, 31, 36, 37]分析了与最优控制问题相关的结果。

无控制 Burgers 方程的数值解已得到广泛研究。文献 [16] 采用三层分裂技术和三次样条法，求解了具有非线性 Neumann 边界的该方程。针对 Neumann 边界和混合边界条件，研究者采用多种方法对该方程进行数值求解，例如有限元方法 [27, 28], 、高阶分裂法[32], 、概率方法 [26], 、本征正交分解 [4], 以及第二代小波优化有限差分法 [33], 等。文献 [17], 中，作者展示了具有非线性 Neumann 边界条件时的解的行为。此外，还讨论了平稳解的稳定性与不稳定性。

关于受控黏性Burgers方程数值模拟的研究成果已相当成熟。文献 [6], 中，作者采用时间方向的三阶二次近似和空间方向的二阶有限差分法。他们表明，采用三次非线性边界反馈控制时，无控制系统（零 Neumann 边界）收敛到一个常数平稳解。文献 [13], 中，采用具有线性样条基函数的 Galerkin 近似，展示了具有 Dirichlet 边界条件的黏性 Burgers 方程的渐近行为。Smaoui 在文献 [29] 和 [30],中采用 Chebyshev 配点法进行空间离散，并在时间方向采用后向 Euler 法。他指出，在非自适应情形下，广义黏性 Burgers 方程的受控系统是指数稳定的；而在自适应情形下，该系统是渐近稳定的。Burns 在文献 [10]，中采用有限元方法，通过求得线性反馈增益泛函来稳定闭环非线性系统。

文献 [18] 讨论了该方程在 Neumann 边界反馈控制下的全局稳定化。此外，作者分析了空间方向上的 a C^0-协调有限元法，同时保持时间变量连续，并证明了半离散格式的全局稳定性。此外，还估计了状态变量在 $L^\infty(L^\infty)$、 $L^\infty(L^2)$ 和 $L^\infty(H^1)$-范数下的最优误差，并对反馈控制律进行了误差分析。在 $2D$ 情形下，该方程采用 C^0-协调有限元法 [19] 在空间方向上离散化。此外，还讨论了状态变量在 $L^\infty(L^2)$ 和 $L^\infty(H^1)$-范数下的误差，并证明了反馈控制律的收敛性结果。本文针对该方程采用 θ 格式进行时间离散，并在空间方向上保留 a C^0-协调有限元法。此外，还推导了全离散格式中状态变量和控制输入的误差估计。

本文的主要贡献如下:

- 对全离散格式采用θ格式，并建立了该格式的存在性与唯一性。
- 我们讨论全离散格式的指数稳定性。当 $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$时，该格式是无条件稳定的。
- 当$\theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$时，即包括克兰克－尼科尔森格式和后向欧拉格式，我们建立了全离散格式中状态变量和控制输入的误差分析。
- 最后，进行了一些数值实验以印证我们的理论结果。此外，我们讨论了不同参数下状态变量和控制输入的行为。

本文采用如下记号 [11]:

- 所有强可测函数 v: $[0,T] \to X$属于空间 $L^p((0,T)$; $X)$，其范数为:

$$\|v\|_{L^p((0,T);X)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|v\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, & \text{if } 1 \le p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{0 \le t \le T} (\|v(t)\|_X) < \infty, & \text{if } p = \infty. \end{cases}$$

这里， X 是赋予范数 $\|\cdot\|_X$ 的巴拿赫空间。记 $(.,.)$ 为 L^2-内积，并将相应的范数记为 $\|\cdot\|$。为便于使用，我们将 $L^p((0,T);\ X)$ 表示为 $L^p(X)$。此外，我们使用范数 $|||v||| := \sqrt{\|v\|^2 + v^2(0) + v^2(1)}$，它与 H^1-范数等价。

- 索об列夫空间定义为

$$H^m(0,1) = \{v \mid v \in L^2(0,1),\ \frac{\partial^j v}{\partial x^j} \in L^2(0,1),\ \text{for } j = 1,2,\ldots,m\}.$$

- **杨氏不等式：** 对所有 $c,\ d > 0$ 以及 $\epsilon > 0$,

$$cd \le \epsilon \frac{c^p}{p} + \frac{1}{\epsilon^{\frac{q}{p}}} \frac{d^q}{q}, \tag{1.5}$$

其中 $1 < p,\ q < \infty$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- **庞加莱´-维尔廷格不等式：** 对 $v \in H^1(0,\ 1)$，成立

$$\|v\|^2 \le \|v_x\|^2 + 2v^2(i), \quad i = 0, 1.$$

- **边界迹嵌入定理 [19]：** 存在一个有界线性映射

$$\gamma_1 : H^1(\Omega) \to L^q(\partial\Omega) \quad \text{for} \quad 2 \le q \le \infty,$$

使得

$$\|\gamma_1(v)\|_{L^q(\partial\Omega)} \le C \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

- **Friedrichs不等式：** 对于 $v \in H^1(\Omega)$，有

$$\|v\|^2 \le C_F \left(\|\nabla v\|^2 + \|v\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \right),$$

其中， C_F 是一个正常数。

- **离散格朗沃尔不等式 [12]**。设 $k,\ B$，以及 $a_j,\ b_j,\ c_j,\ l_j$ 是满足以下条件的非负数，其中整数 $j \ge 0$:

$$a_n + k\sum_{j=0}^{n} b_j \le k\sum_{j=0}^{n} l_j a_j + k\sum_{j=0}^{n} c_j + B \quad \text{for} \quad n \ge 0.$$

假设对于所有 $j,\ kl_j < 1$ 均成立，并令 $\alpha_j = (1 - kl_j)^{-1}$。则

$$a_n + k\sum_{j=0}^{n} b_j \le \exp\left(k\sum_{j=0}^{n} \alpha_j l_j\right)\left(k\sum_{j=0}^{n} c_j + B\right) \quad \text{for} \quad n \ge 0.$$

本文结构安排如下。第2节介绍 θ 格式的构造，并给出 $1D$ 中全离散解的指数衰减界，其中 $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$.。第3节讨论状态变量和控制输入相应的误差分析。第4节针对 $2D$⁻黏性 Burgers 方程，构造 θ 格式并估计全离散格式的指数界，同时给出 $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$. 条件下的存在唯一性结果。第5节分析状态变量和控制输入的误差估计。第6节通过数值实验验证理论结果。 _

具有零诺伊曼边界条件的 (1.1)-(1.4) 的平稳解是一个常数解（记为w_d）。更多详情请参见 [1, 2, 5, 8]。为简便起见，我们假设 $w_d \ge 0$ 。

为了证明该方程的稳定性，我们考虑 $w = y - w_d$，使得

$$\lim_{t\to\infty} y(t,x) = w_d \text{ for all } x \in [0,1],$$

并且 $w=0$，当 $t\to\infty$. 时，根据 (1.1)-(1.4)，我们可以写出如下系统

$$w_t-\nu w_{xx}+w_d w_x+ww_x=0,\quad (x,t)\in(0,1)\times(0,\infty), \tag{1.6}$$

$$w_x(0,t)=v_0(t),\quad t\in(0,\infty), \tag{1.7}$$

$$w_x(1,t)=v_1(t),\quad t\in(0,\infty), \tag{1.8}$$

$$w\,(x,0)=y_0(x)-w_d=:w_0(x)\ (say),\quad x\in(0,1), \tag{1.9}$$

其中 $v_0(t)$ 和 $v_1(t)$ 定义为如下形式的反馈控制律 [18]

$$v_0(t)=\frac{1}{\nu}\left((c_0+w_d)w(0,t)+\frac{2}{9c_0}w^3(0,t)\right),$$
$$v_1(t)=-\frac{1}{\nu}\left((c_1+w_d)w(1,t)+\frac{2}{9c_1}w^3(1,t)\right),$$

其中 c_0，c_1 为正常数。这些 Neumann 边界反馈控制是可逆函数，因此我们也可以将其应用于 Dirichlet 边界控制 [20]。

问题 (1.6)-(1.9) 的弱形式是求 $w(t)\in H^1(0,1)$，使得

$$(w_t,\phi)+\nu(w_x,\phi_x)+w_d(w_x,\phi)+(ww_x,\phi)+\left((c_0+w_d)w(0,t)+\frac{2}{9c_0}w^3(0,t)\right)\phi(0)$$
$$+\left((c_1+w_d)w(1,t)+\frac{2}{9c_1}w^3(1,t)\right)\phi(1)=0,\quad \forall\ \phi\in H^1, \tag{1.10}$$

其中 $w(x,0)=w_0(x)$。

以下　　定理在状态变量和控制输入的误差分析证明中很有用。

定理 1.1。假设 $w_0\in H^3(0,1)$。则存在 $0<\alpha\le\frac{1}{2}$ 最小值$\{\nu,(c_0+w_d),(c_1+w_d)\}$ 以及一个正常数 C，使得

$$\|w\|_2^2+\|w_t\|_1^2+\min\{1,\frac{1}{\nu}\}E_1(t)+E_3(t)+e^{-2\alpha t}\int_0^t e^{2\alpha s}\left\|w_{txx}(s)\right\|^2ds$$
$$+e^{-2\alpha t}\int_0^t e^{2\alpha s}\Big(\beta\left|\left|\left|w(s)\right|\right|\right|^2+\nu\left\|w_{xx}(s)\right\|^2+E_2(s)+\left\|w_t(s)\right\|_1^2\Big)ds$$
$$+e^{-2\alpha t}\int_0^t e^{2\alpha s}\Big(\left\|w_{tt}(s)\right\|_1^2+\left\|w_{ttt}(s)\right\|^2\Big)ds+\left\|w_{tt}\right\|_1^2$$
$$\le C(\left\|w_0\right\|_1,\left\|w_0\right\|_3)e^{-2\alpha t}\exp(C(\left\|w_0\right\|_2^2+\left\|w_0\right\|_1^4)),$$

其中

$$\beta=\min\{2(\nu-\alpha),(c_0+w_d-2\alpha),(c_1+w_d-2\alpha)\}>0,$$

$$E_1(t)=\Big((c_0+w_d)w^2(0,t)+(c_1+w_d)w^2(1,t)+\frac{1}{9c_0}w^4(0,t)+\frac{1}{9c_1}w^4(1,t)\Big),$$

$$E_2(t)=\Big((c_0+w_d)w_t^2(0,t)+(2c_1+3w_d)w_t^2(1,t)+\frac{4}{3c_0}w^2(0,t)w_t^2(0,t)+\frac{4}{3c_1}w^2(1,t)w_t^2(1,t)\Big),$$

and

$$E_3(t)=\Big((c_0+w_d)w_t^2(0,t)+(c_1+w_d)w_t^2(1,t)+\frac{2}{3c_0}w^2(0,t)w_t^2(0,t)+\frac{2}{3c_1}w^2(1,t)w_t^2(1,t)\Big).$$

证明。关于估计 $L^\infty(H^2)$ 的证明，请读者参阅 [18]。其余部分的证明见附录。

□

2 有限元分析。

对于任意正整数 N，令 $I=\{0=x_0<x_1<\cdots<x_N=1\}$ 为 $[0,1]$ 的一个划分，将其分为子区间（有限元）$I_j=(x_{j-1},x_j)\quad 1\le j\le N,$，区间长度为 $h_j=x_j-x_{j-1}$。令网格参数$h=\max_{1\le j\le N}h_j.$。我们构造 H^1 的一个有限维子空间 V_h，如下所示

$$V_h=\{v_h\in C^0([0,1]):v_h|_{I_j}\in P_1(I_j),1\le j\le N\},$$

w其中， P_1 是在每个单元 I_j， $j=1$，2，.....，N上次数至多为一的多项式 .

问题的弱 形式为：对于问题 (1.6)-(1.9)，半离散格式是求 $w_h(t)\in V_h$ 使得 t

$$\begin{aligned}(w_{ht},\phi)+\nu(w_{hx},\phi_x)+w_d(w_{hx},\phi)+(w_hw_{hx},\phi)+\left((c_0+w_d)w_h(0,t)+\frac{2}{9c_0}w_h^3(0,t)\right)\phi(0)\\ +\left((c_1+w_d)w_h(1,t)+\frac{2}{9c_1}w_h^3(1,t)\right)\phi(1)=0,\quad\forall\ \phi\in V_h.\end{aligned}\tag{2.1}$$

我们如下引入 $w(t)$的辅助投影 $\tilde{w}_h(t)\in V_h$

$$(w_x(t)-\tilde{w}_{hx}(t),\phi_x)+\lambda(w(t)-\tilde{w}_h(t),\phi)=0,\quad\forall\ \phi\in V_h,$$

其中， λ 是一个正常数。对于给定的 $w(t)$，由拉克斯-米尔格拉姆引理可知 $\tilde{w}_h(t)$的存在性与唯一性。令 $\eta:=w-\tilde{w}_h(t)$。以下估计成立：

$$\begin{cases}\|\eta(t)\|_i\le Ch^{2-i}\|w\|_2,\quad \|\eta_t(t)\|_i\le Ch^{2-i}\|w_t\|_2,\quad i=0,1,\\ |\eta(x,t)|\le Ch^2\|w\|_2,\quad |\eta_t(x,t)|\le Ch^2\|w_t\|_2,\quad x=0,1.\end{cases}\tag{2.2}$$

上述估计的证明见 [18, 35]。

下一个定理给出了状态变量和控制输入的半离散格式 (2.1) 的误差分析。

定理 2。 **1.** 设 $w_0\in H^3(0,1)$。则存在一个正常数 C，它与 h 无关，使得 t *hat*

$$\|w-w_h\|_i\le C(\|w_0\|_3)h^{2-i}e^{-\alpha t}\exp^{(C\|w_0\|_2)},\quad i=0,1,$$

and

$$\|v_j(t)-v_{jh}(t)\|\le C(\|w_0\|_3)h^2e^{-\alpha t}\exp^{(C\|w_0\|_2)},\quad j=0,1,$$

其中 $0<\alpha\le\frac{1}{2}\min\{\nu,(c_0+\frac{w_d}{2}-\frac{\nu}{2}),\ (c_1+w_d-\frac{\nu}{2})\}$，并且

$$\begin{aligned}v_{0h}(t)&=\frac{1}{\nu}\left((c_0+w_d)w_h(0,t)+\frac{2}{9c_0}w_h(0,t)^3\right),\\ v_{1h}(t)&=-\frac{1}{\nu}\left((c_1+w_d)w_h(1,t)+\frac{2}{9c_1}w_h(1,t)^3\right).\end{aligned}$$

注 2.1。 定理 *2.1* 的证明见 *[18]*。

2.1 $1D$ 黏性 Burgers 方程的全离散格式。

本节给出当 $\theta\in[\frac{1}{2},1]$ 时 θ格式的构造，以及状态变量的一些先验估计，这有助于状态变量和控制输入的误差分析证明。

我们为半离散格式 (2.1) 的时间离散构造一个 θ格式。对于定义在 $[0,T],$上的光滑函数 ϕ，令 $\phi^n=\phi(t_n)$，并且 $\delta_t^+\phi^n=\frac{\phi^{n+1}-\phi^n}{k}.$记 W^n为 $w(t_n)$ 和 $t_{n+\theta}:=\theta t_n+(1-\theta)t_{n-1}$，$\theta\in[0,1],$的全离散近似，其中 $t_n=nk,\ n=0,1,\ldots,M$，且 $k=\frac{T}{M}$为时间步长。

应用一个 t 对于半离散格式 (2.1) 的 θ格式，我们得到一个序列 $\{W^n\}_{n\geq 1}$，使得

$$
\begin{aligned}
&(\delta_t^+ W^n,\phi)+\nu(W_x^{n+\theta},\phi_x)+w_d(W_x^{n+\theta},\phi)+(W^{n+\theta}W_x^{n+\theta},\phi)+(c_0+w_d)W^{n+\theta}(0)\phi(0)\\
&\quad+\frac{2}{9c_0}(W^{n+\theta})^3(0)\phi(0)+\left((c_1+w_d)W^{n+\theta}(1)+\frac{2}{9c_1}(W^{n+\theta})^3(1)\right)\phi(1)=0,\quad \forall\phi\in V_h,
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

其中 $W^{n+\theta}:=\theta W^{n+1}+(1-\theta)W^n$.

注 2.2. 当 $\theta=0$、$\theta=1$ 和 $\theta=\frac{1}{2}$ 时，全离散格式 (2.3)分别称为向前欧拉法、后向 *Euler* 法和 *Crank-Nicolson*格式。

在下面的引理中，我们讨论全离散格式 (2.3) 的近似解 $\{W^n\}_{n\geq 1}$ 的指数界。

引理 2.1. 设 $W^0\in H^1(0,1)$ 且 $0\leq\alpha\leq\frac{\theta^2}{2}\min\{\mu,\frac{c_0+w_d}{2},\frac{c_1+w_d}{2}\}$，其中 $\theta\in[\frac{1}{2},1]$.。假设 $k_0>0$，使得对于 $0<k\leq k_0$

$$
e^{2\alpha k}\leq 1+k\theta^2\min\{\nu,\frac{(c_i+w_d)}{2}\},\quad i=0,1.
\tag{2.4}
$$

那么，以下结论成立

$$
\begin{aligned}
\left\|W^M\right\|^2+ke^{-2\alpha t_M}\beta_1\sum_{n=0}^{M-1}\left(\left\|\hat{W}_x^{n+1}\right\|^2+\sum_{i=0}^{1}\left((\hat{W}^{n+1})^2(i)+e^{2\alpha t_n}(W^{n+1})^4(i)\right)\right)\\
\leq Ce^{-2\alpha t_M}\left\|W^0\right\|_1^2,
\end{aligned}
$$

其中 β_1 在下文的 (2.10) 中给出。

证明。 在 (2.3) 中令 $\phi=W^{n+\theta}$，得到

$$
\begin{aligned}
&(\delta_t^+ W^n,W^{n+\theta})+\nu\left\|W_x^{n+\theta}\right\|^2+\frac{w_d}{2}\left((W^{n+\theta})^2(1)-(W^{n+\theta})^2(0)\right)\\
&\quad+(c_0+w_d)(W^{n+\theta})^2(0)+\frac{2}{9c_0}(W^{n+\theta})^4(0)+(c_1+w_d)(W^{n+\theta})^2(1)\\
&\quad+\frac{2}{9c_1}(W^{n+\theta})^4(1)=\frac{1}{3}\left((W^{n+\theta})^3(0)-(W^{n+\theta})^3(1)\right).
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

对 (2.5) 的右端应用杨氏不等式，得到

$$
\frac{1}{3}(W^{n+\theta})^3(i)\leq\frac{c_i}{2}(W^{n+\theta})^2(i)+\frac{1}{18c_i}(W^{n+\theta})^4(i),\ i=0,1.
$$

注意到

$$
(\delta_t^+ W^n,W^{n+\theta})=\frac{1}{2}\delta_t^+\left\|W^n\right\|^2+k(\theta-\frac{1}{2})\left\|\delta_t^+ W^n\right\|^2,
$$

因此，由 (2.5) 可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\delta_t^+\left\|W^n\right\|^2+k(\theta-\frac{1}{2})\left\|\delta_t^+ W^n\right\|^2+\nu\left\|W_x^{n+\theta}\right\|^2+\frac{1}{2}\left((c_0+w_d)(W^{n+\theta})^2(0)+\frac{1}{3c_0}(W^{n+\theta})^4(0)\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}\left((c_1+3w_d)(W^{n+\theta})^2(1)+\frac{1}{3c_1}(W^{n+\theta})^4(1)\right)\leq 0.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

由于 $\theta\geq\frac{1}{2}$，由此可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\delta_t^+\left\|W^n\right\|^2+\nu\left\|W_x^{n+\theta}\right\|^2+\frac{1}{2}\left((c_0+w_d)(W^{n+\theta})^2(0)+\frac{1}{3c_0}(W^{n+\theta})^4(0)\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}\left((c_1+3w_d)(W^{n+\theta})^2(1)+\frac{1}{3c_1}(W^{n+\theta})^4(1)\right)\leq 0.
\end{aligned}
$$

乘以 $2e^{2\alpha t_{n+1}}$ 并应用

$$e^{\alpha t_{n+1}}\delta_t^+ W^n = e^{\alpha k}\delta_t^+ \hat{W}^n - \frac{(e^{\alpha k}-1)}{k}\hat{W}^{n+1}, \tag{2.7}$$

可得

$$\begin{aligned} &e^{2\alpha k}\delta_t^+ \left\|\hat{W}^n\right\|^2 - \frac{(e^{2\alpha k}-1)}{k}\left\|\hat{W}^{n+1}\right\|^2 + 2\nu e^{2\alpha t_{n+1}}\left\|W_x^{n+\theta}\right\|^2 + e^{2\alpha t_{n+1}}\left((c_0+w_d)(W^{n+\theta})^2(0)\right) \\ &+ \frac{e^{2\alpha t_{n+1}}}{3c_0}(W^{n+\theta})^4(0) + e^{2\alpha t_{n+1}}\left((c_1+3w_d)(W^{n+\theta})^2(1) + \frac{1}{3c_1}(W^{n+\theta})^4(1)\right) \le 0, \end{aligned} \tag{2.8}$$

其中 $\hat{}W^n := e^{\alpha t_n}W^n$。

注意到

$$\left\|W_x^{n+\theta}\right\|^2 = \theta^2\left\|W_x^{n+1}\right\|^2 + (1-\theta)^2\left\|W_x^n\right\|^2 + 2\theta(1-\theta)(W_x^{n+1}, W_x^n),$$

and

$$(W^{n+\theta})^2(i) = \theta^2(W^{n+1})^2(i) + (1-\theta)^2(W^n)^2(i) + 2\theta(1-\theta)W^{n+1}(i)W^n(i), \quad i=0,1.$$

Also

$$\begin{aligned} (W^{n+\theta})^4(i) &= \left(\theta^2(W^{n+1})^2(i) + (1-\theta)^2(W^n)^2(i) + 2\theta(1-\theta)(W^{n+1})(i)(W^n)(i)\right)^2, \\ &= \theta^4(W^{n+1})^4(i) + (1-\theta)^4(W^n)^4(i) + 6\theta^2(1-\theta)^2(W^{n+1})^2(i)(W^n)^2(i) \\ &\quad + 4\theta^3(1-\theta)(W^{n+1})^3(i)(W^n)(i) + 4\theta(1-\theta)^3(W^{n+1})(i)(W^n)^3(i), \quad i=0,1. \end{aligned}$$

将这些 估计代入 (2.8)，并在所得不等式中使用杨氏不等式，我们得到 at

$$\begin{aligned} &e^{2\alpha k}\delta_t^+ \left\|\hat{W}^n\right\|^2 - \frac{(e^{2\alpha k}-1)}{k}\left\|\hat{W}^{n+1}\right\|^2 + \nu\theta^2\left\|\hat{W}_x^{n+1}\right\|^2 + \sum_{i=0}^{1}\left(\frac{(c_i+w_d)}{2}\theta^2(\hat{W}^{n+1})^2(i)\right) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{1}\frac{\theta^4 e^{2\alpha t_{n+1}}}{6c_i}(W^{n+1})^4(i) \\ &\quad \le (1-\theta)^2 e^{2\alpha t_{n+1}}\Big(2\nu\left\|W_x^n\right\|^2 + \sum_{i=0}^{1}(c_i+w_d)W^n(i) + \sum_{i=0}^{1}C(1-\theta)^2(W^n)^4(i)\Big). \end{aligned} \tag{2.9}$$

利用庞加莱-维尔廷格不等式

$$\left\|\hat{W}^{n+1}\right\|^2 \le \left\|\hat{W}_x^{n+1}\right\|^2 + (\hat{W}^{n+1})^2(0) + (\hat{W}^{n+1})^2(1),$$

并将所得不等式两边乘以 $e^{-2\alpha k}$，由 (2.9) 可得

$$\begin{aligned} &\delta_t^+ \left\|\hat{W}^n\right\|^2 + \left(\nu\theta^2 e^{-2\alpha k} - \frac{(1-e^{-2\alpha k})}{k}\right)\left\|\hat{W}_x^{n+1}\right\|^2 + \sum_{i=0}^{1}\left(\frac{(c_i+w_d)}{2}\theta^2 e^{-2\alpha k} - \frac{(1-e^{-2\alpha k})}{k}\right)(\hat{W}^{n+1})^2(i) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{1}\left(\frac{\theta^4}{6c_i}e^{2\alpha t_n}\right)(W^{n+1})^4(i) \\ &\quad \le (1-\theta)^2 e^{2\alpha t_n}\Big(2\nu\left\|W_x^n\right\|^2 + \sum_{i=0}^{1}(c_i+w_d)W^n(i) + \sum_{i=0}^{1}C(1-\theta)^2(W^n)^4(i)\Big). \end{aligned}$$

乘以 k 并对 $n=0$ 到 $M-1$ 求和，得到

$$\begin{aligned} &\left\|\hat{W}^M\right\|^2 + k\beta_1\sum_{n=0}^{M-1}\left(\left\|\hat{W}_x^{n+1}\right\|^2 + \sum_{i=0}^{1}\left((\hat{W}^{n+1})^2(i) + e^{2\alpha t_n}(W^{n+1})^4(i)\right)\right) \\ &\qquad \le \left\|W^0\right\|^2 + C\left(\left\|W^0\right\|_1^2 + \sum_{i=0}^{1}\left((W^0)^2(i) + (W^0)^4(i)\right)\right), \end{aligned}$$

其中

$$\beta_1 = \min\{\Big(\nu\theta^2 e^{-2\alpha k} - \frac{(1-e^{-2\alpha k})}{k}\Big), \Big(\frac{(c_i+w_d)}{2}\theta^2 e^{-2\alpha k} - \frac{(1-e^{-2\alpha k})}{k}\Big), \frac{\theta^4}{6c_i}\}, \quad i=0,1. \tag{2.10}$$

选择 $k_0 > 0$，使得 (2.4) 对 $0 < k \le k_0$ 成立。

两边乘以 $e^{-2\alpha t_M}$ 后，即可完成证明。 □

在下面的引理中，我们讨论全离散格式在 H^1和 L^∞-范数下的先验指数界。

引理 2.2。假设 $W^0 \in H^1(0,\ 1)$和 $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$。则有以下结论

$$\begin{aligned}\nu \left\|W_x^M\right\|^2 + \sum_{i=0}^{1}\Big((c_i+w_d)\big(W^M\big)^2(i) + \frac{1}{18c_i}\big(W^M\big)^4(i)\Big) \\ + ke^{-2\alpha t_M}\sum_{n=0}^{M-1} e^{2\alpha t_n}\left\|\delta_t^+ W^n\right\|^2 \le Ce^{-2\alpha t_M}\left\|W^0\right\|_1^2 e^{C\|W^0\|^2},\end{aligned}$$

and

$$\|W^n\|_\infty^2 \le Ce^{-2\alpha t_M}\left\|W^0\right\|_1^2 e^{C\|W^0\|^2}, \quad 0 \le n \le M.$$

证明。将 $\phi = \delta_t^+ W^n$ 代入 (2.3)，得到

$$\begin{aligned}\nu(\delta_t^+ W_x^n, W_x^{n+\theta}) + \left\|\delta_t^+ W^n\right\|^2 + (c_0+w_d)W^{n+\theta}\delta_t^+ W^n(0) + (c_1+w_d)W^{n+\theta}\delta_t^+ W^n(1) \\ + \frac{2}{9c_0}(W^{n+\theta})^3(0)\delta_t^+ W^n(0) + \frac{2}{9c_1}(W^{n+\theta})^3(1)\delta_t^+ W^n(1) \\ = -w_d(W_x^{n+\theta}, \delta_t^+ W^n) - (W^{n+\theta}W_x^{n+\theta}, \delta_t^+ W^n).\end{aligned} \tag{2.11}$$

注意到

$$\begin{aligned}\delta_t^+ W^n(0)\Big(W^{n+\theta}\Big)^3(0) = k^3\Big(\theta-\frac{1}{2}\Big)^3(\delta_t^+ W^n)^4(0) + \frac{3k^2}{2}\Big(\theta-\frac{1}{2}\Big)^2(\delta_t^+ W^n)^3(0)\Big(W^{n+1}(0)+W^n(0)\Big) \\ + \frac{3k}{4}(\theta-\frac{1}{2})(\delta_t^+ W^n)^2(0)\Big(W^{n+1}(0)+W^n(0)\Big)^2 \\ + \frac{1}{8}\delta_t^+ W^n(0)\Big(W^{n+1}(0)+W^n(0)\Big)^3,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}W^{n+\theta}(0) &= (\theta-\frac{1}{2})\Big(W^{n+1}(0)-W^n(0)\Big) + \frac{1}{2}\Big(W^{n+1}(0)+W^n(0)\Big), \\ &= k(\theta-\frac{1}{2})\delta_t^+ W^n(0) + \frac{1}{2}\Big(W^{n+1}(0)+W^n(0)\Big).\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}\delta_t^+ W^n(0)\Big(W^{n+1}(0)+W^n(0)\Big)^3 &= \frac{1}{8}\delta_t^+\big(W^n\big)^4(0) + \frac{3}{8k}\Big(W^n(0)\big(W^{n+1}\big)^3(0) - W^{n+1}(0)\big(W^n\big)^3(0)\Big), \\ &= \frac{1}{8}\delta_t^+(W^n)^4(0) + \frac{3}{8}\delta_t^+(W^n)^2(0)W^{n+1}(0)W^n(0).\end{aligned}$$

利用柯西-施瓦茨不等式和杨氏不等式，由（2.11）可得

$$\begin{aligned}\nu(\delta_t^+ W_x^n, W_x^{n+\theta}) + \frac{1}{2}\left\|\delta_t^+ W^n\right\|^2 + (c_0+w_d)W^{n+\theta}\delta_t^+ W^n(0) + (c_1+w_d)W^{n+\theta}\delta_t^+ W^n(1)\\ + \sum_{i=0}^{1}\frac{k^3}{18c_i}(\theta-\frac{1}{2})^3(\delta_t^+ W^n)^4(i) + \frac{1}{36c_i}\delta_t^+(W^n)^4(i)\\ \le \frac{C}{k}\left\|W^n\right\|_\infty^2\Big((W^{n+1})^2(0)+(W^{n+1})^2(1)\Big)\\ + \frac{C}{k}\sum_{i=0}^{1}\Big((W^{n+1})^4(i)+(W^n)^4(i)\Big) + C\left\|W^{n+\theta}\right\|_1^2\\ + C\left\|W_x^{n+\theta}\right\|^2\left\|W^{n+\theta}\right\|_1^2.\end{aligned}$$

注意到

$$(\delta_t^+ W_x^n, W_x^{n+\theta}) = \frac{1}{2}\delta_t^+\left\|W_x^n\right\|^2 + k(\theta-\frac{1}{2})\left\|\delta_t^+ W_x^n\right\|^2,$$

and

$$W^{n+\theta}\delta_t^+ W^n(i) = \frac{1}{2}\delta_t^+(W^n)^2(i) + k(\theta-\frac{1}{2})\big(\delta_t^+ W^n\big)^2(i), \quad i=0,1.$$

由于 $\theta \ge \frac{1}{2}$，我们得到

$$\begin{aligned}\nu\delta_t^+\left\|W_x^n\right\|^2 + \sum_{i=0}^{1}\Big((c_i+w_d)\delta_t^+\big(W^n\big)^2(i) + \frac{1}{18c_i}\delta_t^+\big(W^n\big)^4(i)\Big) + \left\|\delta_t^+ W^n\right\|^2\\ \le \frac{C}{k}\left\|W^n\right\|_1^2\Big((W^{n+1})^2(0)+(W^{n+1})^2(1)\Big)\\ + \frac{C}{k}\sum_{i=0}^{1}\Big((W^{n+1})^4(i)+(W^n)^4(i)\Big) + C\left\|W^{n+\theta}\right\|_1^2\\ + C\left\|W_x^{n+\theta}\right\|^2\left\|W^{n+\theta}\right\|_1^2.\end{aligned}$$

将上述不等式两边乘以 $e^{2\alpha t_{n+1}}$，并利用 (2.7)，可知再将所得不等式两边乘以 $e^{-2\alpha k}$ 后

$$\begin{aligned}\nu\delta_t^+\left\|\hat{W}_x^n\right\|^2 + \sum_{i=0}^{1}\Big((c_i+w_d)\delta_t^+\big(\hat{W}^n\big)^2(i) + \frac{e^{2\alpha t_{n+1}}}{18c_i}\delta_t^+\big(W^n\big)^4(i)\Big) + e^{2\alpha t_n}\left\|\delta_t^+ W^n\right\|^2\\ \le C(\alpha)\Big(\left\|\hat{W}_x^{n+1}\right\|^2 + \sum_{i=0}^{1}\big(\hat{W}^{n+1}\big)^2(i) + e^{2\alpha t_n}\big(W^{n+1}\big)^4(i)\Big)\\ + Ce^{2\alpha t_n}\left\|W^n\right\|_1^2\Big((W^{n+1})^2(0)+(W^{n+1})^2(1)\Big)\\ + Ce^{2\alpha t_n}\sum_{i=0}^{1}\Big((W^{n+1})^4(i)+(W^n)^4(i)\Big) + Cke^{2\alpha t_n}\left\|W^{n+\theta}\right\|_1^2\\ + Cke^{2\alpha t_n}\left\|W_x^{n+\theta}\right\|^2\left\|W^{n+\theta}\right\|_1^2.\end{aligned}$$

我们取 k 足够小，使得 $(\nu - Ck) > 0$。从 $n=0$ 到 $M-1$ 求和，并利用引理 2.1 和离散格朗沃尔不等式。再乘以 $e^{-2\alpha t_M}$ 后，我们完成了第一部分的证明。

由于

$$\left\|W^n\right\|_\infty^2 \le 2\Big(\left\|W_x^n\right\|^2 + (W^n)^2(0) + (W^n)^2(1)\Big), \quad 0 \le n \le M,$$

因此，利用第一部分，证明得以完成。 □

2.2 存在性和唯一性。

本小节借助布劳威尔不动点定理，证明全离散格式（2.3）的存在性与唯一性。

定理 2.2。 *(布劳威尔不动点定理。)* 设 H 为带有内积 $(.,.)$ 的有限维希尔伯特空间，且 $\|.\|$。设 $g:\ H \to H$ 为连续函数。若存在 $\alpha > 0$ 使得 $(g(x)\ x) \geq 0,\quad \forall x$ 且满足 $\|x\| = \alpha$，则存在 x^* 属于 H，使得 $\|x^*\| \leq \alpha$ 且 $g(x^*) = 0.$

引理 2.3。 给定 W^n，离散格式 (2.3) 的解存在。

证明。 我们将 H 视为 V_h， 并记 $V := W^{n+\theta}$. 定义函数 $g:\ H \to H$，使得

$$
\begin{aligned}
(g(V),\phi) &= \frac{1}{k\theta}(V - W^n,\phi) + \nu(V_x,\phi_x) + w_d(V_x,\phi) + (VV_x,\phi) \\
&\quad + \left((c_0 + w_d)V(0) + \frac{2}{9c_0}(V)^3(0)\right)\phi(0) + \left((c_1 + w_d)V(1) + \frac{2}{9c_1}(V)^3(1)\right)\phi(1),
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

其中 $\delta_t^+ W^n = \frac{1}{k\theta}(W^{n+\theta} - W^n)$， 对于 $\theta \neq 0.$

对于 $\theta = 0$， 离散格式是显式的。因此，我们知道每个时间层级 t_n.上的解。由于 g 是 V的多项式函数，因此 g 是连续函数。

取 $\phi = V$ in (2.12) 使其满足

$$
\begin{aligned}
(g(V),V) &= \frac{1}{k\theta}\left(\|V\|^2 - (W^n,V)\right) + \nu\|V_x\|^2 + \frac{w_d}{2}\left(V^2(1) - V^2(0)\right) + \frac{1}{3}\left(V^3(1) - V^3(0)\right) \\
&\quad + \left((c_0 + w_d)V^2(0) + \frac{2}{9c_0}(V)^4(0)\right) + \left((c_1 + w_d)V^2(1) + \frac{2}{9c_1}(V)^4(1)\right).
\end{aligned}
$$

利用杨氏不等式，可得

$$
\begin{aligned}
(g(V),V) &\geq \frac{\|V\|}{k\theta}\left(\|V\| - \|W^n\|\right) + \nu\|V_x\|^2 + \frac{1}{2}\left((c_0 + w_d)V^2(0) + \frac{1}{3c_0}(V)^4(0)\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left((c_1 + 3w_d)V^2(1) + \frac{1}{3c_1}(V)^4(1)\right).
\end{aligned}
$$

因此，对于 $\|V\| = 1 + \|W^n\|$，我们有 $(g(V)\ V) \geq 0.$ 于是，由定理 2.2 可得存在 $V^* \in H$ 使得 $g(V^*) = 0.$ □

下一个引理给出了全离散格式的唯一性。

引理 2.4。 格式 (2.3) 的近似解是唯一的。

证明。 证明过程遵循下文引理 4.4 的证明。 □

3 误差分析。

本节对全离散格式 (2.3) 对应的状态变量进行误差分析。通过以下形式定义 $w(t_n)$ 的辅助投影 $\tilde{w}_h(t_n) \in V_h$，对所有 $n \geq 0$

$$
(w_x(t_n) - \tilde{w}_{hx}(t_n),\phi_x) + \lambda\left(w(t_n) - \tilde{w}_h(t_n),\phi\right) = 0, \quad \forall\ \phi \in V_h. \tag{3.1}
$$

将误差 $e^n := w^n - W^n = (w^n - \tilde{w}_h^n)\ - (W^n - \tilde{w}_h^n)\ =:\ \eta^n - \xi^n$，其中 $\eta^n = (w^n - \tilde{w}_h^n)$，且 $\xi^n = (W^n - \tilde{w}_h^n)$。这里， $w^n := w(t_n)$ 是问题 (1.10) 在 $t = t_n$ 处的解，而 W^n 是全离散格式 (2.3) 的解。

将 $t=t_{n+\theta}$ 代入 (1.10)，并从 (2.3) 中减去，利用 (3.1) 可得

$$\begin{aligned}(\delta_t^+\xi^n,\phi)+\nu(\xi_x^{n+\theta},\phi_x)+w_d(\xi_x^{n+\theta},\phi)+(c_0+w_d)\xi^{n+\theta}(0)\phi(0)+(c_1+w_d)\xi^{n+\theta}(1)\phi(1)\\ =(\delta_t^+\eta^n-\nu\lambda\eta^{n+\theta},\phi)+(w^{n+\theta}w_x^{n+\theta}-W_x^{n+\theta}W^{n+\theta},\phi)\\ +w_d(\eta_x^{n+\theta},\phi)+(c_0+w_d)\eta^{n+\theta}(0)\phi(0)+(c_1+w_d)\eta^{n+\theta}(1)\phi(1)\\ +\frac{2}{9c_0}\left((w^{n+\theta})^3(0)-(W^{n+\theta})^3(0)\right)\phi(0)\\ +\frac{2}{9c_1}\left((w^{n+\theta})^3(1)-(W^{n+\theta})^3(1)\right)\phi(1)+(w_t^{n+\theta}-\delta_t^+w^n,\phi),\end{aligned}\tag{3.2}$$

其中

$$(w^n)^3(i)-(W^n)^3(i)=(\eta^n)^3(i)-(\xi^n)^3(i)+3w^n(i)\eta^n(i)\left(w^n(i)-\eta^n(i)\right)-3W^n(i)\xi^n(i)\left(W^n(i)-\xi^n(i)\right),$$

$i=0,\ 1$，并且

$$w^nw_x^n-W_x^nW^n=w_x^n(\eta^n-\xi^n)+W^n(\eta_x^n-\xi_x^n).$$

在下面的引理中，我们讨论与θ格式（2.3）对应的状态变量的误差分析。

引理3.1. 设 $w_0\in H^3(0,1)$ 且 $0\le\alpha\le\frac{\theta^2\beta_2}{4}$，其中 $\theta\in[\frac{1}{2},1]$。假设 $k_0>0$ 使得对于 $0<k\le k_0$

$$e^{2\alpha k}\le 1+\frac{k\theta^2\beta_2}{2},\tag{3.3}$$

其中 $\beta_2=\min\{\nu,(c_0+\frac{w_d}{2}-\frac{\nu}{2}),(c_1+w_d-\frac{\nu}{2})\}>0$。那么存在一个正常数 $C=C(\|w_0\|_3)$，它与 h 和 k 无关，使得

$$\begin{aligned}&\left\|\xi^M\right\|^2+ke^{-2\alpha t_M}\Big(\frac{\theta^2\beta_2}{2}e^{-2\alpha k}-\frac{(1-e^{-2\alpha k})}{k}\Big)\sum_{n=0}^{M-1}\Big(\left\|\hat{\xi}_x^{n+1}\right\|^2+(\hat{\xi}^{n+1})^2(0)+(\hat{\xi}^{n+1})^2(1)\Big)\\ &+ke^{-2\alpha t_M}\sum_{n=0}^{M-1}e^{2\alpha t_n}\sum_{i=0}^{1}\frac{\theta^4}{18c_i}(\xi^{n+1})^4(i)\le Ce^{-2\alpha t_M}\Big(h^4+k^2(\theta-\frac{1}{2})+k^4\Big).\end{aligned}$$

证明。 在 (3.2) 中取 $\phi=\xi^{n+\theta}$，得到

$$\begin{aligned}&(\delta_t^+\xi^n,\xi^{n+\theta})+\nu\left\|\xi_x^{n+\theta}\right\|^2+(c_0+\frac{w_d}{2})(\xi^{n+\theta})^2(0)+(c_1+\frac{3w_d}{2})(\xi^{n+\theta})^2(1)+\frac{2}{9c_0}(\xi^{n+\theta})^4(0)\\ &+\frac{2}{9c_1}(\xi^{n+\theta})^4(1)+\frac{2}{3c_0}(\xi^{n+\theta})^2(0)(W^{n+\theta})^2(0)+\frac{2}{3c_1}(\xi^{n+\theta})^2(1)(W^{n+\theta})^2(1)\\ &=(\delta_t^+\eta^n-\nu\lambda\eta^{n+\theta},\xi^{n+\theta})+w_d(\eta_x^{n+\theta},\xi^{n+\theta})+\sum_{i=0}^{1}(c_i+w_d)\eta^{n+\theta}(i)\xi^{n+\theta}(i)\\ &+\Big(w_x^{n+\theta}(\eta^{n+\theta}-\xi^{n+\theta}),\xi^{n+\theta}\Big)+\Big(W^{n+\theta}(\eta_x^{n+\theta}-\xi_x^{n+\theta}),\xi^{n+\theta}\Big)\\ &+\sum_{i=0}^{1}\frac{2}{9c_i}(\eta^{n+\theta})^3(i)\xi^{n+\theta}(i)+\sum_{i=0}^{1}\frac{2}{3c_i}\eta^{n+\theta}(i)w^{n+\theta}(i)\xi^{n+\theta}(i)\left(w^{n+\theta}(i)-\eta^{n+\theta}(i)\right)\\ &+\sum_{i=0}^{1}\frac{2}{9c_i}(\xi^{n+\theta})^3(i)W^{n+\theta}(i)+(w_t^{n+\theta}-\delta_t^+w^n,\xi^{n+\theta}),\\ &=\sum_{i=1}^{9}I_i.\end{aligned}\tag{3.4}$$

(3.4) 右端的第一项 I_1 有如下界

$$I_1 = (\delta_t^+ \eta^n - \nu\lambda\eta^{n+\theta}, \xi^{n+\theta}) \le C\left(\left\|\delta_t^+\eta^n\right\|^2 + \left\|\eta^{n+\theta}\right\|^2\right) + \frac{\nu}{16}\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2.$$

应用 杨氏不等式，(3.4) 右端的第二 I_2 项和第三 I_3 项得出 ld

$$\begin{aligned} I_2 = w_d(\eta_x^{n+\theta}, \xi^{n+\theta}) \le \frac{\nu}{12}\left\|\xi_x^{n+\theta}\right\|^2 + \frac{w_d}{4}(\xi^{n+\theta})^2(0) + w_d(\xi^{n+\theta})^2(1) \\ + C\left((\eta^{n+\theta})^2(0) + (\eta^{n+\theta})^2(1) + \left\|\eta^{n+\theta}\right\|^2\right), \end{aligned}$$

and

$$I_3 = (c_i + w_d)\eta^{n+\theta}(i)\xi^{n+\theta}(i) \le C(\eta^{n+\theta})^2(i) + \frac{c_i}{8}(\xi^{n+\theta})^2(i), \quad i = 0, 1.$$

在 (3.4) 的右端，第四项 I_4 给出

$$I_4 = \left(w_x^{n+\theta}(\eta^{n+\theta} - \xi^{n+\theta}), \xi^{n+\theta}\right) \le C\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^2 + C\left\|w_x^{n+\theta}\right\|_\infty^2\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2 + \frac{\nu}{16}\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2.$$

令 $W^{n+\theta} = \tilde{w}_h^{n+\theta}$ $+\xi^{n+\theta}$ 在右端 I_5 的第一项中，利用杨氏不等式可得

$$\begin{aligned} I_5 &= \left((\tilde{w}_h^{n+\theta} + \xi^{n+\theta})\eta_x^{n+\theta}, \xi^{n+\theta}\right) - (W^{n+\theta}\xi_x^{n+\theta}, \xi^{n+\theta}), \\ &\le C\Big((\tilde{w}_h^{n+\theta})^2(0)(\eta^{n+\theta})^2(0) + (\tilde{w}_h^{n+\theta})^2(1)(\eta^{n+\theta})^2(1) + \left(1 + \left\|\tilde{w}_h^{n+\theta}\right\|^2\right)\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^2\Big) \\ &\quad + \frac{\nu}{6}\left\|\xi_x^{n+\theta}\right\|^2 + C\Big(\left\|\eta_x^{n+\theta}\right\|^2 + \left\|\tilde{w}_{hx}^{n+\theta}\right\|_\infty^2 + \left\|W^{n+\theta}\right\|_\infty^2\Big)\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2 + \frac{\nu}{16}\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2 \\ &\quad + \frac{c_0}{8}(\xi^{n+\theta})^2(0) + + \frac{c_1}{8}(\xi^{n+\theta})^2(1). \end{aligned}$$

再次利用杨氏不等式，项 I_6 和 I_7 给出

$$I_6 = \frac{2}{9c_i}(\eta^{n+\theta})^3(i)\xi^{n+\theta}(i) \le C(\eta^{n+\theta})^6(i) + \frac{c_i}{8}(\xi^{n+\theta})^2(i),$$

and

$$\begin{aligned} \frac{2}{3c_i}\eta^{n+\theta}(i)w^{n+\theta}(i)\xi^{n+\theta}(i)\left(w^{n+\theta}(i) - \eta^{n+\theta}(i)\right) \le C\Big((\eta^{n+\theta})^2(i)(w^{n+\theta})^4(i) + (\eta^{n+\theta})^4(i)(w^{n+\theta})^2(i)\Big) \\ + \frac{c_i}{8}(\xi^{n+\theta})^2(i), \quad i = 0, 1. \end{aligned}$$

由倒数第二项 I_8，我们得到

$$\frac{2}{9c_i}(\xi^{n+\theta})^3(i)W^{n+\theta}(i) \le \frac{6}{36c_i}(\xi^{n+\theta})^4(i) + + \frac{2}{3c_i}(\xi^{n+\theta})^2(i)(W^{n+\theta})^2(i), \quad i = 0, 1.$$

应用杨氏不等式，最后一项 I_9 得到

$$I_9 = (w_t^{n+\theta} - \delta_t^+ w^n, \xi^{n+\theta}) \le C\left\|w_t^{n+\theta} - \delta_t^+ w^n\right\|^2 + \frac{\nu}{16}\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2.$$

将 I_j, $j = 1$, 2.....，9 代入 (3.4)，利用 $\|\tilde{w}_{hx}\|_\infty \le C\|w\|_2$，以及引理 2.1 和定理 1.1，并结合$\alpha = 0$，得到

$$\begin{aligned} &(\delta_t^+\xi^n, \xi^{n+\theta}) + \frac{3\nu}{4}\left\|\xi_x^{n+\theta}\right\|^2 + (\frac{c_0}{2} + \frac{w_d}{4})(\xi^{n+\theta})^2(0) + (\frac{c_1}{2} + \frac{w_d}{2})(\xi^{n+\theta})^2(1) + \sum_{i=0}^{1}\frac{1}{18c_i}(\xi^{n+\theta})^4(i) \\ &\le C\Big(\left\|\eta_x^{n+\theta}\right\|^2 + \left\|w^{n+\theta}\right\|_2^2 + \left\|W^{n+\theta}\right\|_1^2\Big)\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2 + \frac{\nu}{4}\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2 \\ &\quad + C\Big(\left\|\delta_t^+\eta^n\right\|^2 + \left\|\eta^{n+\theta}\right\|^2 + \sum_{i=0}^{1}\left((\eta^{n+\theta})^2(i) + (\eta^{n+\theta})^4(i) + (\eta^{n+\theta})^6(i)\right)\Big) \\ &\quad + C\left\|w_t^{n+\theta} - \delta_t^+ w^n\right\|^2. \end{aligned}$$

将庞加莱-维尔廷格不等式应用于上述不等式可得

$$
\begin{aligned}
(\delta_t^+\xi^n,\xi^{n+\theta})+\frac{\nu}{2}\left\|\xi_x^{n+\theta}\right\|^2+(\frac{c_0}{2}+\frac{w_d}{4}-\frac{\nu}{4})(\xi^{n+\theta})^2(0)+(\frac{c_1}{2}+\frac{w_d}{2}-\frac{\nu}{4})(\xi^{n+\theta})^2(1)+\sum_{i=0}^{1}\frac{1}{18c_i}(\xi^{n+\theta})^4(i)\\
\le C\Big(\left\|\eta_x^{n+\theta}\right\|^2+\left\|w^{n+\theta}\right\|_2^2+\left\|W^{n+\theta}\right\|_1^2\Big)\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2+C\left\|w_t^{n+\theta}-\delta_t^+w^n\right\|^2\\
+C\Big(\left\|\delta_t^+\eta^n\right\|^2+\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^2+\sum_{i=0}^{1}\big((\eta^{n+\theta})^2(i)+(\eta^{n+\theta})^4(i)+(\eta^{n+\theta})^6(i)\big)\Big).
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

注意到

$$
(\delta_t^+\xi^n,\xi^{n+\theta})=\frac{1}{2}\delta_t^+\left\|\xi^n\right\|^2+k(\theta-\frac{1}{2})\left\|\delta_t^+\xi^n\right\|^2.
$$

由 (3.5) 可得

$$
\begin{aligned}
\delta_t^+\left\|\xi^n\right\|^2+2k(\theta-\frac{1}{2})\left\|\delta_t^+\xi^n\right\|^2+\beta_2\Big(\left\|\xi_x^{n+\theta}\right\|^2+(\xi^{n+\theta})^2(0)+(\xi^{n+\theta})^2(1)\Big)+\sum_{i=0}^{1}\frac{1}{9c_i}(\xi^{n+\theta})^4(i)\\
\le C\Big(\left\|\eta_x^{n+\theta}\right\|^2+\left\|w^{n+\theta}\right\|_2^2+\left\|W^{n+\theta}\right\|_1^2\Big)\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2+C\left\|w_t^{n+\theta}-\delta_t^+w^n\right\|^2\\
+C\Big(\left\|\delta_t^+\eta^n\right\|^2+\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^2+\sum_{i=0}^{1}\big((\eta^{n+\theta})^2(i)+(\eta^{n+\theta})^4(i)+(\eta^{n+\theta})^6(i)\big)\Big),
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

其中 $\beta_2=\min\{\nu,(c_0+\frac{w_d}{2}-\frac{\nu}{2}),(c_1+w_d-\frac{\nu}{2})\}>0$。

对于 $\theta\ge\frac{1}{2}$，由 (3.6) 可得

$$
\begin{aligned}
\delta_t^+\left\|\xi^n\right\|^2+\beta_2\Big(\left\|\xi_x^{n+\theta}\right\|^2+(\xi^{n+\theta})^2(0)+(\xi^{n+\theta})^2(1)\Big)+\sum_{i=0}^{1}\frac{1}{9c_i}(\xi^{n+\theta})^4(i)\\
\le C\Big(\left\|\eta_x^{n+\theta}\right\|^2+\left\|w^{n+\theta}\right\|_2^2+\left\|W^{n+\theta}\right\|_1^2\Big)\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2+C\left\|w_t^{n+\theta}-\delta_t^+w^n\right\|^2\\
+C\Big(\left\|\delta_t^+\eta^n\right\|^2+\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^2+\sum_{i=0}^{1}\big((\eta^{n+\theta})^2(i)+(\eta^{n+\theta})^4(i)+(\eta^{n+\theta})^6(i)\big)\Big).
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

在区间 (t_n,t_{n+1}), 内，将 w^n 在点 $t_{n+\theta}$ 处作泰勒级数展开，可得

$$
\begin{aligned}
w_t^{n+\theta}-\delta_t^+w^n=-\frac{((1-\theta)^2-\theta^2)}{2k}\left(\int_{t_n}^{t_{n+\theta}}(t_{n+\theta}-s)w_{tt}(s)ds+\int_{t_{n+\theta}}^{t_{n+1}}(t_{n+1}-s)w_{tt}(s)ds\right),\\
+k\frac{((1-\theta)^3+\theta^3)}{6}\left(\int_{t_n}^{t_{n+\theta}}(t_{n+\theta}-s)w_{ttt}(s)ds+\int_{t_{n+\theta}}^{t_{n+1}}(t_{n+1}-s)w_{ttt}(s)ds\right).
\end{aligned}
$$

因此，借助 H¨older 不等式，我们得到

$$
\begin{aligned}
\left\|w_t^{n+\theta}-\delta_t^+w^n\right\|^2&\le\frac{k\theta^3\left((1-\theta)^2-\theta^2\right)^2}{3}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left\|w_{tt}(s)\right\|^2ds+\frac{k^3\theta^3\left((1-\theta)^3+\theta^3\right)^2}{12}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left\|w_{ttt}(s)\right\|^2ds\\
&=:T^{n+\theta}.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

由 (3.7) 和 (3.8)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\delta_t^+ \left\|\xi^n\right\|^2 + \beta_2\Big(\left\|\xi_x^{n+\theta}\right\|^2 + (\xi^{n+\theta})^2(0) + (\xi^{n+\theta})^2(1)\Big) + \sum_{i=0}^{1} \frac{1}{9c_i}(\xi^{n+\theta})^4(i) \\
&\quad \le C\Big(\left\|\eta_x^{n+\theta}\right\|^2 + \left\|w^{n+\theta}\right\|_2^2 + \left\|W^{n+\theta}\right\|_1^2 \Big) \left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2 + CT^{n+\theta} \\
&\quad + C\Big(\left\|\delta_t^+\eta^n\right\|^2 + \left\|\eta^{n+\theta}\right\|^2 + \sum_{i=0}^{1} \big((\eta^{n+\theta})^2(i) + (\eta^{n+\theta})^4(i) + (\eta^{n+\theta})^6(i)\big)\Big).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

将 (3.9) 乘以 $e^{2\alpha t_{n+1}}$，并按照引理 2.1 的证明结合 (2.7)，对 (3.9) 应用 Poincar´e-Wirtinger 不等式可得

$$\begin{aligned}
&\delta_t^+ \left\|\hat{\xi}^n\right\|^2 + \Big(\frac{\theta^2\beta_2 e^{-2\alpha k}}{2} - \frac{(1-e^{-2\alpha k})}{k}\Big)\Big(\left\|\hat{\xi}_x^{n+1}\right\|^2 + (\hat{\xi}^{n+1})^2(0) + (\hat{\xi}^{n+1})^2(1)\Big) + e^{2\alpha t_n}\sum_{i=0}^{1}\frac{\theta^4}{18c_i}(\xi^{n+1})^4(i) \\
&\quad \le (1-\theta)^2 e^{2\alpha t_n}\beta_2\Big(\left\|\xi_x^n\right\|^2 + (\xi^n)^2(0) + (\xi^n)^2(1)\Big) + e^{2\alpha t_n}\sum_{i=0}^{1} C(1-\theta)^4(\xi^n)^4(i) \\
&\quad + Ce^{2\alpha t_n}\Big(\left\|\eta_x^{n+\theta}\right\|^2 + \left\|w^{n+\theta}\right\|_2^2 + \left\|W^{n+\theta}\right\|_1^2 \Big) \left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2 + Ce^{2\alpha t_n}T^{n+\theta} \\
&\quad + Ce^{2\alpha t_n}\Big(\left\|\delta_t^+\eta^n\right\|^2 + \left\|\eta^{n+\theta}\right\|^2 + \sum_{i=0}^{1} \big((\eta^{n+\theta})^2(i) + (\eta^{n+\theta})^4(i) + (\eta^{n+\theta})^6(i)\big)\Big).
\end{aligned}$$

两边乘以 k，并从 $n=0$ 到 $M-1$ 求和，我们观察到

$$\begin{aligned}
&\left\|\hat{\xi}^M\right\|^2 + k\Big(\frac{\theta^2\beta_2}{2}e^{-2\alpha k} - \frac{(1-e^{-2\alpha k})}{k}\Big)\sum_{n=0}^{M-1}\Big(\left\|\hat{\xi}_x^{n+1}\right\|^2 + (\hat{\xi}^{n+1})^2(0) + (\hat{\xi}^{n+1})^2(1)\Big) \\
&\quad + k\sum_{n=0}^{M-1} e^{2\alpha t_n}\sum_{i=0}^{1}\frac{\theta^4}{18c_i}(\xi^{n+1})^4(i) \\
&\quad \le Ck\sum_{n=0}^{M-1} e^{2\alpha t_n}\Big(\left\|\eta_x^{n+\theta}\right\|^2 + \left\|w^{n+\theta}\right\|_2^2 + \left\|W^{n+\theta}\right\|_1^2 \Big) \left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2 + Ck\sum_{n=0}^{M-1} e^{2\alpha t_n}T^{n+\theta} \\
&\quad + Ck\sum_{n=0}^{M-1} e^{2\alpha t_n}\Big(\left\|\delta_t^+\eta^n\right\|^2 + \left\|\eta^{n+\theta}\right\|^2 + \sum_{i=0}^{1} \big((\eta^{n+\theta})^2(i) + (\eta^{n+\theta})^4(i) + (\eta^{n+\theta})^6(i)\big)\Big),
\end{aligned}$$

其中 $\xi^0 = 0$。选取 $k_0 > 0$，使得对 $0 < k \le k_0$ 满足 (3.3)。

注意到

$$\left\|\delta_t^+\eta^n\right\|^2 \le \frac{1}{k}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\|\eta_t\right\|^2 ds.$$

我们选取充分小的 k，使得 $\big(1 - Ck\theta^2\big) > 0$。利用离散格朗沃尔不等式、取 $\alpha = 0$ 的定理 1.1，以及带有估计 (2.2) 的引理 2.1。在所得不等式中乘以 $e^{-2\alpha t_M}$ 后，证明即告完成。

□

定理 3.1. 假设引理*3.1*的假设成立。那么，存在一个正常数 C，它与 h和 k 无关，使得

$$\left\|w^n - W^n\right\| \le Ce^{-2\alpha t_M}\Big(h^2 + k(\theta - \frac{1}{2}) + k^2\Big),$$

and

$$|v_i^n - V_i^n| \le Ce^{-2\alpha t_M}\Big(h^2 + k(\theta - \frac{1}{2}) + k^2\Big), \quad i = 0, 1,$$

其中 $v_i^n := v_i(t_n)$，且 V_i^n由下式给出

$$V_i^n = (c_i + w_d)W_i^n + \frac{2}{9c_i}(W_i^n)^3, \quad i = 0, 1.$$

证明。第一部分由估计 (2.2) 和引理 3.1，利用三角不等式即可得出。第二部分的证明接下来给出

$$v_i^n - V_i^n = (c_i + w_d)(\eta^n - \xi^n) + \frac{2}{9c_i}(\eta^n - \xi^n)\big((w^n)^2 + (W^n)^2 + w^n W^n\big).$$

Henc出：利用定理 1.1 和 $\alpha = 0$、引理 2.2 与引理 3.1 以及估计 (2.2)，我们有 e

$$|v_i^n - V_i^n| \le Ce^{-2\alpha t_M}(h^2 + k\left((1-\theta)^2 - \theta^2\right) + k^2\left((1-\theta)^3 + \theta^3\right)), \quad i = 0, 1.$$

证毕。 □

4 二维黏性 Burgers 方程。

本节讨论带有非线性 Neumann 边界反馈控制的 $2D$ 黏性 Burgers 方程的全离散格式，并证明该全离散格式的存在性与唯一性。此外，还讨论了关于状态变量和控制输入的 θ格式误差分析。

我们考虑以下带有非线性 Neumann 边界反馈控制的 $2D$ 黏性 Burgers 方程问题

$$y_t - \nu\Delta y + y(\nabla y \cdot \mathbf{1}) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial y}{\partial n}(x,t) = v_2(x,t), \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \tag{4.2}$$

$$y(x,0) = y_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{4.3}$$

其中， $\nu > 0$ 为扩散常数， $v_2(x,t)$ 为标量控制输入， $\mathbf{1} = (1,1)$ $y(\nabla y \cdot \mathbf{1}) = y\big(\sum_{i=1}^2 y_{x_i}\big)$ 为非线性项， $y_0(x)$ 为给定函数，并设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为边界光滑的有界区域 $\partial\Omega$。与 (4.1)-(4.3) 对应的稳态问题为

$$\nu\Delta y^\infty - y^\infty(\nabla y^\infty \cdot \mathbf{1}) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial y^\infty(x)}{\partial n} = 0, \quad \text{on } \partial\Omega. \tag{4.5}$$

任意常数都是稳态问题 (4.4)-(4.5) 的解（例如 w_d）（更多详情见 [19]）。为简单起见，我们假设 $w_d \ge 0$。我们的目标是求出

$$\lim_{t\to\infty} y(x,t) = w_d, \quad \forall x \in \Omega. \tag{4.6}$$

我们考虑满足 $\lim_{t\to\infty} w = 0.$ 的 $w = y - w_d$。于是， w 满足以下形式

$$w_t - \nu\Delta w + w_d(\nabla w \cdot \mathbf{1}) + w(\nabla w \cdot \mathbf{1}) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial w}{\partial n}(x,t) = v_2(x,t) \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \tag{4.8}$$

$$w(x,0) = y_0 - w_d = w_0(x)(\text{say}), \quad x \in \Omega, \tag{4.9}$$

其中， v_2 定义为边界反馈控制律 [19]，其形式如下

$$v_2(x,t) = -\frac{1}{\nu}\Big(2(c_2 + w_d)w + \frac{2}{9c_2}w^3\Big),$$

且 c_2 是一个正常数。

(4.7)-(4.9) 的弱形式要求求得 $w \in H^1(\Omega)$，使得

$$(w_t,\chi)+\nu(\nabla w,\nabla\chi)+w_d(\nabla w\cdot\mathbf{1},\chi)+(w(\nabla w\cdot\mathbf{1}),\chi) + \int_{\partial\Omega}\left(2(c_2+w_d)w+\frac{2}{9c_2}w^3\right)\chi d\Gamma=0,\quad \chi\in H^1. \tag{4.10}$$

以下引理的证明见 [19]。

引理 4.1. 设 $w_0 \in H^3(\Omega)$。则存在一个衰减率 $0 \le \alpha \le \frac{1}{C_F}\min\{\nu,(c_2+w_d)\}$ 以及一个正常数 C，使得

$$\begin{aligned}\|w\|_2^2+\|w_t\|_1^2+2(c_2+w_d)\Big(\|w\|_{L^2(\partial\Omega)}^2+\|w_t\|_{L^2(\partial\Omega)}\Big)+\min\{\frac{1}{9c_2},\frac{2}{3c_2}\}\Big(\|w\|_{L^4(\partial\Omega)}^4+\|w_t\|_{L^4(\partial\Omega)}^4\Big)\\ +\gamma e^{-2\alpha t}\int_0^t e^{2\alpha s}\Big(\|\nabla w(s)\|^2+\|w(s)\|_{L^2(\partial\Omega)}^2+\frac{1}{3\gamma c_2}\|w(s)\|_{L^4(\partial\Omega)}^4\Big)ds\\ +C_1e^{-2\alpha t}\int_0^t e^{2\alpha s}\Big(\|\Delta w(s)\|^2+\|w_t(s)\|_2^2+\|w(s)w_t(s)\|_{L^2(\partial\Omega)}^2+\|w_t(s)\|_{L^2(\partial\Omega)}^2\Big)ds\\ \le C(\|w_0\|_3)e^{C(\|w_0\|_2)}e^{-2\alpha t}.\end{aligned}$$

其中 $0<\gamma=2\min\{v-\alpha C_F, c_2+w_d-\alpha C_F\}$、$C_1=\min\{\nu,2(c_2+w_d)\frac{2}{3c_2}\}>0$，且 $C_F>0$ 为 *Friedrich* 不等式常数。

注 4.1. 如 $1D$ 情形所示，我们已经得到了 $\|w_{tt}\|$ 和 $\|w_{ttt}\|$的界。等价地，对于 $2D$ 情形中的 $\|w_{tt}\|$ 和 $\|w_{ttt}\|$，也可以推导出类似的界。

4.1 有限元方法。

本小节给出了式 (4.10) 的半离散格式，以及针对状态变量和控制输入的半离散格式误差估计。

定义 V_h 的有限维子空间 H^1，使得

$$V_h=\{\phi_h\in C^0(\bar\Omega):\phi_h|_K\in P_1(K)\ \forall\ K\in T_h\},$$

其中，T_h 是正则三角剖分，由有限个内部两两不相交的三角形组成，这些三角形的并集确定了一个多边形区域 $\Omega_h\subset\Omega$，其边界顶点位于 $\partial\Omega$上。令 $h=\max_{K\in T_h}h_K$，其中 $h_K=diam(K)\ \forall\ K\in T_h$。

我们考虑 问题 (4.7)-(4.9) 的以下半离散近似：求 $w_h\in V_h$ 使得

$$(w_{ht},\chi)+\nu(\nabla w_h,\nabla\chi)+w_d(\nabla w_h\cdot\mathbf{1},\chi)+(w_h(\nabla w_h\cdot\mathbf{1}),\chi) + \int_{\partial\Omega}\left(2(c_2+w_d)w_h+\frac{2}{9c_2}w_h^3\right)\chi d\Gamma=0,\quad \chi\in V_h, \tag{4.11}$$

其中 $w_h(0)=P_hy_0-w_d=w_{0h}$（例如），是 w_0的一个近似，而 P_hy_0 是将 y_0 投影到 V_h上的 H^1 投影，使得

$$\|y_0-y_{0h}\|_j\le Ch^{2-j}\|y_0\|,\quad j=0,1. \tag{4.12}$$

更多详情请参见 [19]。

下面的定理给出了半离散格式 (4.11) 中状态变量和控制输入的误差估计。

定理 4.1 定理。令 $w_0\in H^3(\Omega)$。则存在一个正常数 C，它独立于 h，使得 t

$$\|w-w_h\|_{L^\infty(H^i)}\le C(\|w_0\|_3)e^{-\alpha t}h^{2-i}\exp(\|w_0\|_2),\quad i=0,1$$

and

$$\|v_2(t)-v_{2h}(t)\|_{L^\infty(L^2(\partial\Omega))}\le C(\|w_0\|_3)e^{-\alpha t}h^{\frac{3}{2}}\exp(\|w_0\|_2),$$

其中 $0\le\alpha\le\frac{1}{C_F}\min\{\frac{3\nu}{4},(\frac{c_2}{2}+w_d)\}$ 且 $v_{2h}(t)=-\frac{1}{\nu}\Big(2(c_2+w_d)w_h+\frac{2}{9c_2}w_h^3\Big)$。记 $H^0(\Omega)=L^2(\Omega)$。证明。证明见 [19]。

□

4.2 全离散格式。

本小节中，我们使用 θ格式讨论问题 (4.7)-(4.9) 的全离散格式，其中 $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$。

应用 $\bar{-}$ 将 θ 格式应用于半离散格式 (4.11)，可得到一个序列 $\{W^n\}_{n\geq 1}$，使得

$$\begin{aligned}(\delta_t^+ W^n, \chi) + \nu(\nabla W^{n+\theta}, \nabla\chi) + w_d(\nabla W^{n+\theta}\cdot\mathbf{1}, \chi) + (W^{n+\theta}(\nabla W^{n+\theta}\cdot\mathbf{1}), \chi)\\ + \int_{\partial\Omega}\left(2(c_2+w_d)W^{n+\theta} + \frac{2}{9c_2}(W^{n+\theta})^3\right)\chi d\Gamma = 0, \quad \chi \in V_h.\end{aligned} \tag{4.13}$$

在以下引理中，我们推导出全离散格式 (4.13)的先验界。

引理 4.2。令 $W_0 \in H^1(\Omega)$ 和 $0 \leq \alpha \leq \frac{\theta^2}{2C_F}\min\{\nu, (c_2+w_d)\}$，其中 $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$。假设 $k_0 > 0$，使得对于 $0 < k \leq k_0$

$$e^{2\alpha k} \leq 1 + \frac{k\theta^2}{C_F}\min\{\nu, (c_2+w_d)\}. \tag{4.14}$$

于是，以下结论成立：

$$\begin{aligned}\left\|W^M\right\|^2 + ke^{-2\alpha t_M}\beta_3\sum_{n=0}^{M-1}\left(\left\|\nabla\hat{W}^{n+1}\right\|^2 + \left\|\hat{W}^{n+1}\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\right) + \frac{k\theta^4}{6c_2}e^{-2\alpha t_M}\sum_{n=0}^{M-1}e^{2\alpha t_n}\left\|W^{n+1}\right\|^4_{L^4(\partial\Omega)}\\ \leq Ce^{-2\alpha t_M}\left\|W^0\right\|_1^2,\end{aligned}$$

其中，β_3 见下文(4.17)。

证明。在 (4.13) 中取 $\chi = W^{n+\theta},$，可得

$$\begin{aligned}(\delta_t^+ W^n, W^{n+\theta}) + \nu\left\|\nabla W^{n+\theta}\right\|^2 + \int_{\partial\Omega}\left(2(c_2+w_d)W^{n+\theta} + \frac{2}{9c_2}(W^{n+\theta})^3\right)W^{n+\theta}d\Gamma\\ = -w_d(\nabla W^{n+\theta}\cdot\mathbf{1}, W^{n+\theta}) - \left(W^{n+\theta}(\nabla W^{n+\theta}\cdot\mathbf{1}), W^{n+\theta}\right).\end{aligned} \tag{4.15}$$

(4.15) 右端的第一项有如下界

$$\begin{aligned}-w_d(\nabla W^{n+\theta}\cdot\mathbf{1}, W^{n+\theta}) &= -\frac{w_d}{2}\int_\Omega\left((W^{n+\theta})^2_{x_1} + (W^{n+\theta})^2_{x_2}\right)dX = -\frac{w_d}{2}\sum_{j=1}^{2}\int_{\partial\Omega}(W_j^{n+\theta})^2\cdot n_j d\Gamma,\\ &\leq \frac{w_d}{\sqrt{2}}\int_{\partial\Omega}(W^{n+\theta})^2 d\Gamma \leq w_d\int_{\partial\Omega}(W^{n+\theta})^2 d\Gamma.\end{aligned}$$

利用杨氏不等式，(4.15) 右端的第二项可得

$$\left(W^{n+\theta}(\nabla W^{n+\theta}\cdot\mathbf{1}), W^{n+\theta}\right) \leq \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{2}\int_{\partial\Omega}(W_j^{n+\theta})^3\cdot n_j d\Gamma \leq c_2\int_{\partial\Omega}(W^{n+\theta})^2 d\Gamma + \frac{1}{18c_2}\int_{\partial\Omega}(W^{n+\theta})^4 d\Gamma.$$

注意到

$$(\delta_t^+ W^n, W^{n+\theta}) = \frac{1}{2}\delta_t^+\left\|W^n\right\|^2 + k(\theta - \frac{1}{2})\left\|\delta_t^+ W^n\right\|^2.$$

由（4.15）可得

$$\frac{1}{2}\delta_t^+\left\|W^n\right\|^2 + k(\theta-\frac{1}{2})\left\|\delta_t^+ W^n\right\|^2 + \nu\left\|\nabla W^{n+\theta}\right\|^2 + \int_{\partial\Omega}\left((c_2+w_d)(W^{n+\theta})^2 + \frac{1}{6c_2}(W^{n+\theta})^4\right)d\Gamma \leq 0. \tag{4.16}$$

因此，对于 $\theta \geq \frac{1}{2}$，我们可以将（4.16）写为

$$\delta_t^+ \|W^n\|^2 + 2\nu \left\|\nabla W^{n+\theta}\right\|^2 + 2\int_{\partial\Omega} \left((c_2+w_d)(W^{n+\theta})^2 + \frac{1}{6c_2}(W^{n+\theta})^4\right) d\Gamma \leq 0.$$

两边乘以 $e^{2\alpha t_{n+1}}$，并仿照引理 2.1 的证明，我们得到

$$\begin{aligned} e^{2\alpha k}\delta_t^+ \left\|\hat{W}^n\right\|^2 - \Big(\frac{e^{2\alpha k}-1}{k}\Big)\left\|\hat{W}^{n+1}\right\|^2 + \nu\theta^2\left\|\nabla\hat{W}^{n+1}\right\|^2 + (c_2+w_d)\theta^2\left\|\hat{W}^{n+1}\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \frac{\theta^4}{6c_2}e^{2\alpha t_{n+1}}\left\|W^{n+1}\right\|^4_{L^4(\partial\Omega)} \\ \leq (1-\theta)^2 e^{2\alpha t_{n+1}}\Big(2\nu\|\nabla W^n\|^2 + 2(c_2+w_d)\|W^n\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + C(1-\theta)^2\|W^n\|^4_{L^4(\partial\Omega)}\Big). \end{aligned}$$

由Friedrichs不等式，并在所得不等式两边乘以 $e^{-2\alpha k}$，可得

$$\begin{aligned} &\delta_t^+ \left\|\hat{W}^n\right\|^2 + \Big(\nu\theta^2 e^{-2\alpha k} - C_F\Big(\frac{1-e^{-2\alpha k}}{k}\Big)\Big)\left\|\nabla\hat{W}^{n+1}\right\|^2 + \Big((c_2+w_d)\theta^2 e^{-2\alpha k} - C_F\Big(\frac{1-e^{-2\alpha k}}{k}\Big)\Big)\left\|\hat{W}^{n+1}\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\quad + \frac{\theta^4}{6c_2}e^{2\alpha t_n}\left\|W^{n+1}\right\|^4_{L^4(\partial\Omega)} \\ &\quad \leq (1-\theta)^2 e^{2\alpha t_n}\Big(2\nu\|\nabla W^n\|^2 + 2(c_2+w_d)\|W^n\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + C(1-\theta)^2\|W^n\|^4_{L^4(\partial\Omega)}\Big). \end{aligned}$$

两边乘以 k，并从 $n=0$ 到 $M-1$求和，我们得到

$$\begin{aligned} \left\|\hat{W}^M\right\|^2 + k\beta_3\sum_{n=0}^{M-1}\Big(\left\|\nabla\hat{W}^{n+1}\right\|^2 + \left\|\hat{W}^{n+1}\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\Big) + \frac{k\theta^4}{6c_2}\sum_{n=0}^{M-1} e^{2\alpha t_n}\left\|W^{n+1}\right\|^4_{L^4(\partial\Omega)} \\ \leq C\Big(\left\|\nabla W^0\right\|^2 + \left\|W^0\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \left\|W^0\right\|^4_{L^4(\partial\Omega)}\Big). \end{aligned}$$

其中

$$0 < \beta_3 = \min\{\nu\theta^2 e^{-2\alpha k} - C_F\Big(\frac{1-e^{-2\alpha k}}{k}\Big), (c_2+w_d)\theta^2 e^{-2\alpha k} - C_F\Big(\frac{1-e^{-2\alpha k}}{k}\Big)\}. \tag{4.17}$$

选取 $k_0 > 0$，使得对 $0 < k \leq k_0$满足(4.14)。再乘以$e^{-2\alpha t_M}$后，证明即告完成。

□

4.3 ThetaScheme的存在性与唯一性。

本小节讨论全离散格式 (4.13) 的存在性与唯一性。

引理 4.3. 给定 W^n，则离散格式 (4.13) 存在一个解。

证明。 给定 W^n，并记 $U := W^{n+\theta}$，其中 $W^{n+\theta} = \theta W^{n+1} + (1-\theta)W^n$。定义函数 $f\colon V_h \to V_h$，使得

$$\begin{aligned} (f(U),\chi) = \frac{1}{\theta}(U-W^n,\chi) + k\nu(\nabla U,\nabla\chi) + kw_d(\nabla U\cdot\mathbf{1},\chi) + k\Big(U(\nabla U\cdot\mathbf{1}),\chi\Big) \\ + k\int_{\partial\Omega}\left(2(c_2+w_d)U + \frac{2}{9c_2}(U)^3\right)\chi d\Gamma, \quad \chi\in S_h, \text{ and } \quad \theta\neq 0. \end{aligned} \tag{4.18}$$

由于 f 是关于 U的多项式函数，因此 f 是连续的。

将 (4.18) 中的 $\chi = U$ 代入可得

$$\begin{aligned} (f(U),U) = \frac{1}{\theta}(U-W^n,U) + k\nu\|\nabla U\|^2 + kw_d(\nabla U\cdot\mathbf{1},U) + k(U(\nabla U\cdot\mathbf{1}),U) \\ + k\int_{\partial\Omega}\left(2(c_2+w_d)U^2 + \frac{2}{9c_2}(U)^4\right)d\Gamma. \end{aligned}$$

对上式应用杨氏不等式可得

$$(f(U),U) \geq \frac{1}{\theta}\|U\|\left(\|U\|-\|W^n\|\right)+k\nu\|\nabla U\|^2+k\int_{\partial\Omega}\left(3(c_2+w_d)U^2+\frac{5}{9c_2}(U)^4\right)d\Gamma.$$

因此，对于 $\|U\|=1+\|W^n\|$，我们有 $(f(U)\ U)\geq 0.$因此，利用定理（2.2），存在 v^*属于 S_h和$\alpha>0$，使得 $f(v^*)=0$ 和 $\|v^*\|\leq\alpha.$ □

下面的引理讨论全离散格式 (4.13)的唯一性。

引理 4.4. 离散格式 (4.13) 的近似解是唯一的。

证明. 设 W_1^n和 W_2^n是 **(4.13)** 的两个解。令 $Z^n=W_1^n-W_2^n$，其中 Z^n满足

$$\begin{aligned}(\delta_t^+Z^n,\chi)+\nu(\nabla Z^{n+\theta},\nabla\chi)+w_d(\nabla Z^{n+\theta}\cdot\mathbf{1},\chi)+(W_1^{n+\theta}(\nabla W_1^{n+\theta}\cdot\mathbf{1}),\chi)-(W_2^{n+\theta}(\nabla W_2^{n+\theta}\cdot\mathbf{1}),\chi)\\ +\int_{\partial\Omega}\left(2(c_2+w_d)Z^{n+\theta}+\frac{2}{9c_2}\left((W_1^{n+\theta})^3-(W_2^{n+\theta})^3\right)\right)\chi d\Gamma=0,\ \ \forall\ \chi\in S_h.\end{aligned}$$

在上述方程中选取 $\chi=Z^{n+\theta}$，可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\delta_t^+\|Z^n\|^2+k(\theta-\frac{1}{2})\left\|\delta_t^+Z^n\right\|^2+\nu\left\|\nabla Z^{n+\theta}\right\|^2+\int_{\partial\Omega}2(c_2+w_d)(Z^{n+\theta})^2d\Gamma\\ &\quad+\frac{2}{9c_2}\int_{\partial\Omega}\left((W_1^{n+\theta})^3-(W_2^{n+\theta})^3\right)Z^{n+\theta}d\Gamma\\ &\quad=-w_d(\nabla Z^{n+\theta}\cdot\mathbf{1},Z^{n+\theta})-\left((W_1^{n+\theta}(\nabla W_1^{n+\theta}\cdot\mathbf{1}),Z^{n+\theta})-(W_2^{n+\theta}(\nabla W_2^{n+\theta}\cdot\mathbf{1}),Z^{n+\theta})\right).\end{aligned}\tag{4.19}$$

(4.19) 左端的最后一项可写为

$$\left((W_1^n)^3-(W_2^n)^3\right)Z^n=\frac{(Z^n)^2}{2}\Big((W_1^n+W_2^n)^2+(W_1^n)^2+(W_2^n)^2\Big).$$

(4.19) 右端的最后一项有如下界

$$\begin{aligned}&\Big((W_1^{n+\theta}\big(\nabla W_1^{n+\theta}\cdot\mathbf{1}),Z^{n+\theta}\big)-\big(W_2^{n+\theta}(\nabla W_2^{n+\theta}\cdot\mathbf{1}),Z^{n+\theta}\big)\Big)\\ &\qquad\leq\left\|Z^{n+\theta}\right\|\left\|\nabla W_1^{n+\theta}\right\|\left\|\nabla Z^{n+\theta}\right\|+\left\|W_2^{n+\theta}\right\|_\infty\left\|\nabla Z^{n+\theta}\right\|\left\|Z^{n+\theta}\right\|.\end{aligned}$$

将这些值代入 **(4.19)**，并利用杨氏不等式，可得

$$\frac{1}{2}\delta_t^+\|Z^n\|^2+k(\theta-\frac{1}{2})\left\|\delta_t^+Z^n\right\|^2+\frac{\nu}{2}\left\|\nabla Z^{n+\theta}\right\|^2+\int_{\partial\Omega}(c_2+w_d)(Z^{n+\theta})^2d\Gamma\leq C\Big(\left\|W_1^{n+\theta}\right\|_1^2+\left\|W_2^{n+\theta}\right\|_1^2\Big)\left\|Z^{n+\theta}\right\|^2.$$

对于情形 $\theta\geq\frac{1}{2}$,– 我们可推得

$$\begin{aligned}\left\|Z^{n+1}\right\|^2+\nu k\left\|\nabla Z^{n+\theta}\right\|^2+k\int_{\partial\Omega}(c_2+w_d)(Z^{n+\theta})^2d\Gamma\leq kC\Big(\left\|W_1^{n+\theta}\right\|_1^2+\left\|W_2^{n+\theta}\right\|_1^2\Big)\theta^2\left\|Z^{n+1}\right\|^2\\ +\Big(1+kC\big(\left\|W_1^{n+\theta}\right\|_1^2+\left\|W_2^{n+\theta}\right\|_1^2\big)(1-\theta)^2\Big)\left\|Z^n\right\|^2.\end{aligned}$$

假设 k 足够小，使得 $(1-kC\theta^2)>0.$。从 $n=0$ 求和至 $M-1$，并结合引理 4.2 使用离散格朗沃尔不等式，可得

$$\left\|Z^M\right\|^2+\nu k\sum_{n=0}^{M-1}\left\|\nabla Z^{n+\theta}\right\|^2+k\sum_{n=0}^{M-1}\int_{\partial\Omega}(c_2+w_d)(Z^{n+\theta})^2d\Gamma\leq 0,$$

由于 $Z^0=0.$ 由此可知，离散格式（4.13）有唯一解。 □

5 误差分析。

本节讨论状态变量和控制输入对应的全离散格式（4.13）的误差分析。

引入 $\tilde{w}_h \in V_h$ 关于 w 的辅助投影，其形式如下

$$\Big(\nabla(w-\tilde{w}_h),\nabla\chi\Big)+\lambda(w-\tilde{w}_h,\chi)=0,\quad \chi\in V_h, \tag{5.1}$$

其中， λ 为正常数。对于给定的 w，由拉克斯-米尔格拉姆引理可知， $\tilde{w}_h$ 的存在性与唯一性成立。令 $\eta=w-\tilde{w}_h$，则有以下估计

$$\|\eta(t)\|_i \le Ch^{2-i}\|w\|_2,\quad \|\eta_t(t)\|_i \le Ch^{2-i}\|w_t\|_2,\quad i=0,1. \tag{5.2}$$

上述估计的证明见 *[35]*。

以下引理的证明见 *[19]*。

引理 5.1。 假设 Ω 的边界是光滑的。则有

$$\|\eta\|_{L^2(\partial\Omega)} \le Ch^{\frac{3}{2}}\|w\|_2,\quad \|\eta\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \le Ch^2\|w\|_2,\quad \|\eta\|_{L^p(\partial\Omega)} \le Ch\|w\|_2,$$

其中 $2\le p<\infty$.

定义误差 $e^n := w(t_n) - W^n = (w(t_n) - \tilde{w}_h(t_n)) - (W^n - \tilde{w}_h(t_n)) =: \eta^n - \xi^n$ 其中 $\eta^n = w(t_n) - \tilde{w}_h(t_n)$ $\xi^n = W^n - \tilde{w}_h(t_n)$，其中 W^n 是全离散格式（*4.13*）的一个解，而 $w(t_n)(= w^n)$ 是问题（*4.10*）在 $t=t_n$ 处的一个解。

将 $t=t_{n+\theta}$ 代入（4.10）并从（4.13）中减去，由（5.1）可得，在 $t=t_{n+\theta}$

$$\begin{aligned}
&(\delta_t^+\xi^n,\chi)+\nu(\nabla\xi^{n+\theta},\nabla\chi)+\int_{\partial\Omega}2(c_2+w_d)\xi^{n+\theta}\chi d\Gamma+\int_{\partial\Omega}\frac{2}{9c_2}(\xi^{n+\theta})^3\chi d\Gamma+\int_{\partial\Omega}\frac{2}{3c_2}(W^{n+\theta})^2\xi^{n+\theta}\chi d\Gamma\\
&\quad=(\delta_t^+\eta^n-\lambda\nu\eta^{n+\theta},\chi)+w_d\big(\nabla(\xi^{n+\theta}-\eta^{n+\theta})\cdot\mathbf{1},\chi\big)+\int_{\partial\Omega}2(c_2+w_d)\eta^{n+\theta}\chi d\Gamma\\
&\qquad+\big((\eta^{n+\theta}-\xi^{n+\theta})(\nabla w^{n+\theta}\cdot\mathbf{1})+W^{n+\theta}\big(\nabla(\eta^{n+\theta}-\xi^{n+\theta})\cdot\mathbf{1}\big),\chi\big)\\
&\qquad+\frac{2}{9c_2}\int_{\partial\Omega}\big((\eta^{n+\theta})^3+3w^{n+\theta}\eta^{n+\theta}(w^{n+\theta}-\eta^{n+\theta})+3W^{n+\theta}(\xi^{n+\theta})^2\big)\chi d\Gamma+(w_t^{n+\theta}-\delta_t^+w^n,\chi).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

引理 5.2。 设 $w_0\in H^3(\Omega)$ 且 $0\le\alpha\le\frac{\beta_4\theta^2}{8C_F}$ 其中 $\theta\in[\frac{1}{2},1]$。假设 $k_0>0$ 使得

$$e^{2\alpha k}\le 1+k\frac{\beta_4\theta^2}{4C_F} \tag{5.4}$$

对 $0<k\le k_0$ 成立，其中 $\beta_4=$ 最小值$\{\nu,2(c_2+2w_d)\}>0$。那么，存在一个正常数 C，它独立于 h 和 k，使得

$$\begin{aligned}
&\big\|\xi^M\big\|^2+ke^{-2\alpha t_M}\Big(\frac{\beta_4}{4}e^{-2\alpha k}-C_F\Big(\frac{1-e^{-2\alpha k}}{k}\Big)\Big)\sum_{n=0}^{M-1}\Big(\big\|\nabla\hat{\xi}^{n+1}\big\|^2+\big\|\hat{\xi}^{n+1}\big\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\Big)\\
&\qquad+\frac{k\theta^4}{54c_2}e^{-2\alpha t_M}\sum_{n=0}^{M-1}e^{2\alpha t_n}\big\|\xi^{n+1}\big\|^4_{L^4(\partial\Omega)}\\
&\qquad\le e^{-2\alpha t_M}C(\|w_0\|_3)(h^4+k^2(\theta-\frac{1}{2})+k^4).
\end{aligned}$$

证明。在 (5.3) 中取 $\chi = \xi^{n+\theta}$，得到

$$
\begin{aligned}
&(\delta_t^+\xi^n, \xi^{n+\theta}) + \nu\left\|\nabla\xi^{n+\theta}\right\|^2 + \int_{\partial\Omega} 2(c_2+w_d)(\xi^{n+\theta})^2 d\Gamma + \frac{2}{9c_2}\int_{\partial\Omega}(\xi^{n+\theta})^4 d\Gamma \\
&\quad + \frac{2}{3c_2}\int_{\partial\Omega}(W^{n+\theta})^2(\xi^{n+\theta})^2 d\Gamma \\
&\quad = (\delta_t^+\eta^n - \lambda\nu\eta^{n+\theta}, \xi^{n+\theta}) + w_d\Big(\nabla(\eta^{n+\theta}-\xi^{n+\theta})\cdot\mathbf{1}, \xi^{n+\theta}\Big) \\
&\qquad + \int_{\partial\Omega} 2(c_2+w_d)\eta^{n+\theta}\xi^{n+\theta} d\Gamma \\
&\qquad + \Big((\eta^{n+\theta}-\xi^{n+\theta})(\nabla w^{n+\theta}\cdot\mathbf{1}), \xi^{n+\theta}\Big) + \Big(W^{n+\theta}\big(\nabla(\eta^{n+\theta}-\xi^{n+\theta})\cdot\mathbf{1}\big), \xi^{n+\theta}\Big) \\
&\qquad + \frac{2}{9c_2}\int_{\partial\Omega}\Big((\eta^{n+\theta})^3 + 3w^{n+\theta}\eta^{n+\theta}(w^{n+\theta}-\eta^{n+\theta}) + 3W^{n+\theta}(\xi^{n+\theta})^2\Big)\xi^{n+\theta} d\Gamma \\
&\qquad + (w_t^{n+\theta} - \delta_t^+ w^n, \xi^{n+\theta}), \\
&\quad = \sum_{i=1}^{7} I_i. \qquad (5.5)
\end{aligned}
$$

对于 (5.5) 右端的第一项 I_1，可得

$$
I_1 = (\delta_t^+\eta^n - \lambda\nu\eta^{n+\theta}, \xi^{n+\theta}) \le C\Big(\left\|\delta_t^+\eta^n\right\|^2 + \left\|\eta^{n+\theta}\right\|^2\Big) + \frac{\epsilon}{18}\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2,
$$

其中 $\epsilon > 0$，我们将在后面选取。

利用杨氏　　不等式，由 (5.5) 的第二项 I_2 可得，其中 $\left\|\xi^{n+\theta}\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \le C\left\|\xi^{n+\theta}\right\|_H$ [1]

$$
\begin{aligned}
I_2 &= w_d\left(\nabla(\eta^{n+\theta}-\xi^{n+\theta})\cdot\mathbf{1}, \xi^{n+\theta}\right), \\
&= -w_d(\eta^{n+\theta}, \nabla\xi^{n+\theta}\cdot\mathbf{1}) + \frac{w_d}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{\partial\Omega}\eta^{n+\theta}\nu_i\xi^{n+\theta}d\Gamma - \frac{w_d}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{\partial\Omega}(\xi^{n+\theta})^2\nu_i d\Gamma, \\
&\le C\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^2 + \frac{\nu}{16}\left\|\nabla\xi^{n+\theta}\right\|^2 + C\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \frac{\epsilon}{18}\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2 + w_d\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)}.
\end{aligned}
$$

由第三项 I_3，我们推得

$$
I_3 = \int_{\partial\Omega} 2(c_2+w_d)\eta^{n+\theta}\xi^{n+\theta}d\Gamma \le C\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \frac{\nu}{16}\left\|\nabla\xi^{n+\theta}\right\|^2 + \frac{\epsilon}{18}\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2.
$$

借助 H¨older 不等式和加利亚尔多-尼伦伯格不等式，(5.5) 右端的第四项 I_4 有界于

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \left((\eta^{n+\theta}-\xi^{n+\theta})\nabla w^{n+\theta}\cdot\mathbf{1}, \xi^{n+\theta}\right), \\
&\le \left\|\eta^{n+\theta}\right\|\left\|\nabla w^{n+\theta}\right\|_{L^4(\Omega)}\left\|\xi^{n+\theta}\right\|_{L^4(\Omega)} + \left\|\xi^{n+\theta}\right\|\left\|\nabla w^{n+\theta}\right\|_{L^4(\Omega)}\left\|\xi^{n+\theta}\right\|_{L^4(\Omega)}, \\
&\le \frac{\nu}{16}\left\|\nabla\xi^{n+\theta}\right\|^2 + \frac{\epsilon}{18}\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2 + C\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2\left\|w^{n+\theta}\right\|_2^2 + C\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^2\Big(1 + \left\|w^{n+\theta}\right\|^2 + \left\|\Delta w^{n+\theta}\right\|^2\Big).
\end{aligned}
$$

令 $W^n = \xi^n + \tilde{w}_h^n$，并利用 $\left\|\tilde{w}_h^n\xi^{n+\theta}\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \le C\left\|w^n\right\|_2\left\|\xi^{n+\theta}\right\|_1$ 以及索伯列夫不等式 $\left\|\xi^{n+\theta}\right\|_{L^4} \le$

$\left\|\xi^{n+\theta}\right\|_1$， I_5 的第一项估计为

$$\begin{aligned}
I_5 &= \left(W^{n+\theta}\nabla\eta^{n+\theta}\cdot\mathbf{1},\xi^{n+\theta}\right),\\
&= (\xi^{n+\theta}\nabla\eta^{n+\theta}\cdot\mathbf{1},\xi^{n+\theta}) - (\tilde{w}^{n+\theta}\nabla\xi^{n+\theta}\cdot\mathbf{1},\eta^{n+\theta}) - (\eta^{n+\theta}\nabla\tilde{w}_h^{n+\theta}\cdot\mathbf{1},\xi^{n+\theta})\\
&\quad+\sum_{i=1}^{2}\int_{\partial\Omega}\tilde{w}_h^{n+\theta}\eta^{n+\theta}\nu_i\xi^{n+\theta}d\Gamma,\\
&\le \left\|\xi^{n+\theta}\right\|\left\|\nabla\eta^{n+\theta}\right\|_{L^4}\left\|\xi^{n+\theta}\right\|_{L^4} + \left\|\eta^{n+\theta}\right\|\left\|\nabla\xi^{n+\theta}\right\|\left\|\tilde{w}^{n+\theta}\right\|_\infty + \left\|\eta^{n+\theta}\right\|\left\|\nabla\tilde{w}_h^{n+\theta}\right\|_{L^4}\left\|\xi^{n+\theta}\right\|_{L^4}\\
&\quad+\left\|\eta^{n+\theta}\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\left\|\tilde{w}_h^{n+\theta}\xi^{n+\theta}\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)},\\
&\le \frac{\nu}{16}\left\|\nabla\xi^{n+\theta}\right\|^2 + \frac{\epsilon}{18}\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2 + C\Big(\left\|w^{n+\theta}\right\|_2^2\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^2 + \left\|\eta^{n+\theta}\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2\Big)\\
&\quad+C\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2\left(\left\|w^{n+\theta}\right\|^2 + \left\|\nabla\eta^{n+\theta}\right\|_{L^4}^2\right).
\end{aligned}$$

利用 $\|\tilde{w}_h^n\|_\infty \le C\|w^n\|_2$ 和杨氏不等式， I_5 的第二项可得

$$\begin{aligned}
I_5 = -\left(W^{n+\theta}\nabla\xi^{n+\theta}\cdot\mathbf{1},\xi^{n+\theta}\right) &= \left((\xi^{n+\theta}+\tilde{w}_h^{n+\theta})\nabla\xi^{n+\theta}\cdot\mathbf{1},\xi^{n+\theta}\right)\\
&\le \frac{3c_2}{2}\left\|\xi^{n+\theta}\right\|_{L^2(\partial\Omega)} + \frac{1}{27c_2}\left\|\xi^{n+\theta}\right\|_{L^4(\partial\Omega)} + \frac{\nu}{16}\left\|\nabla\xi^{n+\theta}\right\|^2\\
&\quad+C\left\|w^{n+\theta}\right\|_2^2\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2.
\end{aligned}$$

对于 I_6，由此可得，在$\|\xi^n\|_{L^2(\partial\Omega)} \le C\|\xi^n\|_1$

$$\frac{2}{9c_2}\int_{\partial\Omega}(\eta^{n+\theta})^3\xi^{n+\theta}d\Gamma \le C\left\|\eta^{n+\theta}\right\|_{L^6(\partial\Omega)}^6 + \frac{\nu}{16}\left\|\nabla\xi^{n+\theta}\right\|^2 + \frac{\epsilon}{18}\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2,$$

$$\begin{aligned}
\frac{2}{9c_2}\int_{\partial\Omega}3(w^{n+\theta})^2\eta^{n+\theta}\xi^{n+\theta}d\Gamma &\le C\left\|\eta^{n+\theta}\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\left\|(w^{n+\theta})^2\xi^{n+\theta}\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)},\\
&\le C\left\|\eta^{n+\theta}\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\left\|w^{n+\theta}\right\|^2\left\|\xi^{n+\theta}\right\|_1,\\
&\le C\left\|\eta^{n+\theta}\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2\left\|w^{n+\theta}\right\|^4 + \frac{\nu}{16}\left\|\nabla\xi^{n+\theta}\right\|^2 + \frac{\epsilon}{18}\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2,
\end{aligned}$$

$$-\frac{2}{9c_2}\int_{\partial\Omega}3w^{n+\theta}(\eta^{n+\theta})^2\xi^{n+\theta}d\Gamma \le C\left\|w^{n+\theta}\right\|_{L^4(\partial\Omega)}^2\left\|\eta^{n+\theta}\right\|_{L^4(\partial\Omega)}^4 + \frac{\nu}{16}\left\|\nabla\xi^{n+\theta}\right\|^2 + \frac{\epsilon}{18}\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2,$$

and

$$\frac{2}{3c_2}\int_{\partial\Omega}W^{n+\theta}(\xi^{n+\theta})^3d\Gamma \le \frac{2}{3c_2}\int_{\partial\Omega}(W^{n+\theta})^2(\xi^{n+\theta})^2 + \frac{2}{12c_2}\left\|\xi^{n+\theta}\right\|_{L^4(\partial\Omega)}^4.$$

最后，最后一项 I_7 的上界为

$$I_7 = (w_t^{n+\theta}-\delta_t^+w^n,\xi^{n+\theta}) \le C\left\|w_t^{n+\theta}-\delta_t^+w^n\right\|^2 + \frac{\epsilon}{18}\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2.$$

将 $I_j, j=1,2,\ldots,7$的估计代入(5.5)，我们得到

$$\begin{aligned}
(\delta_t^+\xi^n,\xi^{n+\theta}) + \frac{\nu}{2}\left\|\nabla\xi^{n+\theta}\right\|^2 + \int_{\partial\Omega}(c_2+2w_d)(\xi^{n+\theta})^2d\Gamma + \frac{1}{54c_2}\int_{\partial\Omega}(\xi^{n+\theta})^4d\Gamma&\\
\le \epsilon\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2 + C\Big(\left\|\delta_t^+\eta^n\right\|^2 + \left\|\eta^{n+\theta}\right\|_{L^6(\partial\Omega)}^6\Big) + C\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^2\left(1+\left\|w^{n+\theta}\right\|^2+\left\|\Delta w^{n+\theta}\right\|^2\right)&\\
+C\Big(\left\|\eta^{n+\theta}\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 + \left\|\eta^{n+\theta}\right\|_{L^4(\partial\Omega)}^4\Big)\left(1+\left\|w^{n+\theta}\right\|_2^2+\left\|w^{n+\theta}\right\|_{L^4(\partial\Omega)}^4\right)&\\
+C\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2\left(\left\|w^{n+\theta}\right\|^2+\left\|w^{n+\theta}\right\|_2^2+\left\|\eta^{n+\theta}\right\|_{L^4}^4\right) + C\left\|w_t^{n+\theta}-\delta_t^+w^n\right\|^2.&
\end{aligned}\tag{5.6}$$

注意到

$$(\delta_t^+\xi^n,\xi^{n+\theta})=\frac{1}{2}\delta_t^+\left\|\xi^n\right\|^2+k(\theta-\frac{1}{2})\left\|\delta_t^+\xi^n\right\|^2.$$

由 (5.6) 和 (3.8)，可得

$$\begin{aligned}
&\delta_t^+\left\|\xi^n\right\|^2+2k(\theta-\frac{1}{2})\left\|\delta_t^+\xi^n\right\|^2+\beta_4\Big(\left\|\nabla\xi^{n+\theta}\right\|^2+\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\Big)+\frac{1}{27c_2}\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^4_{L^4(\partial\Omega)}\\
&\quad\le 2\epsilon\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2+C\Big(\left\|\delta_t^+\eta^n\right\|^2+\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^6_{L^6(\partial\Omega)}\Big)+C\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^2\Big(1+\left\|w^{n+\theta}\right\|^2+\left\|\Delta w^{n+\theta}\right\|^2\Big)\\
&\qquad+C\Big(\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}+\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^4_{L^4(\partial\Omega)}\Big)\Big(1+\left\|w^{n+\theta}\right\|^2_2+\left\|w^{n+\theta}\right\|^4_{L^4(\partial\Omega)}\Big)\\
&\qquad+C\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2\Big(\left\|w^{n+\theta}\right\|^2+\left\|w^{n+\theta}\right\|^2_2+\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^4_{L^4}\Big)+CT^{n+\theta},
\end{aligned}\tag{5.7}$$

其中 $\beta_4=\min\{\nu,2(c_2+2w_d)\}$。

由于 $\theta\ge\frac{1}{2}$，利用带有 $\epsilon=\frac{\beta_4}{4C_F}$ 的 Friedrichs不等式，我们由 (5.7) 得到 ——

$$\begin{aligned}
&\delta_t^+\left\|\xi^n\right\|^2+\frac{\beta_4}{2}\Big(\left\|\nabla\xi^{n+\theta}\right\|^2+\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\Big)+\frac{1}{27c_2}\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^4_{L^4(\partial\Omega)}\\
&\quad\le C\Big(\left\|\delta_t^+\eta^n\right\|^2+\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^6_{L^6(\partial\Omega)}\Big)+C\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^2\Big(1+\left\|w^{n+\theta}\right\|^2+\left\|\Delta w^{n+\theta}\right\|^2\Big)\\
&\qquad+C\Big(\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}+\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^4_{L^4(\partial\Omega)}\Big)\Big(1+\left\|w^{n+\theta}\right\|^2_2+\left\|w^{n+\theta}\right\|^4_{L^4(\partial\Omega)}\Big)\\
&\qquad+C\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2\Big(\left\|w^{n+\theta}\right\|^2+\left\|w^{n+\theta}\right\|^2_2+\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^4_{L^4}\Big)+CT^{n+\theta}.
\end{aligned}$$

将其乘以 $e^{2\alpha t_{n+1}}$，并按照引理 4.2 的证明过程，可得

$$\begin{aligned}
&e^{2\alpha k}\delta_t^+\left\|\hat\xi^n\right\|^2-\Big(\frac{e^{2\alpha k}-1}{k}\Big)\left\|\hat\xi^{n+1}\right\|^2+\frac{\beta_4}{4}\theta^2\Big(\left\|\nabla\hat\xi^{n+1}\right\|^2+\left\|\hat\xi^{n+1}\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\Big)+e^{2\alpha t_{n+1}}\frac{\theta^4}{54c_2}\left\|\xi^{n+1}\right\|^4_{L^4(\partial\Omega)}\\
&\quad\le e^{2\alpha t_{n+1}}(1-\theta)^2\Big(\frac{\beta_4}{2}\Big(\left\|\nabla\xi^n\right\|^2+\left\|\xi^n\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\Big)+C(1-\theta)^2\left\|\xi^n\right\|^4_{L^4(\partial\Omega)}\Big)\\
&\qquad+Ce^{2\alpha t_{n+1}}\Big(\left\|\delta_t^+\eta^n\right\|^2+\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^6_{L^6(\partial\Omega)}\Big)+C\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^2\Big(1+\left\|w^{n+\theta}\right\|^2+\left\|\Delta w^{n+\theta}\right\|^2\Big)\\
&\qquad+Ce^{2\alpha t_{n+1}}\Big(\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}+\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^4_{L^4(\partial\Omega)}\Big)\Big(1+\left\|w^{n+\theta}\right\|^2_2+\left\|w^{n+\theta}\right\|^4_{L^4(\partial\Omega)}\Big)\\
&\qquad+Ce^{2\alpha t_{n+1}}\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2\Big(\left\|w^{n+\theta}\right\|^2+\left\|w^{n+\theta}\right\|^2_2+\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^4_{L^4}\Big)+Ce^{2\alpha t_{n+1}}T^{n+\theta}.
\end{aligned}$$

再次应用 Friedrichs不等式，并将所得不等式乘以 $e^{-2\alpha k}$，得到

$$\begin{aligned}
&\delta_t^+\left\|\hat\xi^n\right\|^2+\Big(\frac{\beta_4\theta^2}{4}e^{-2\alpha k}-C_F\Big(\frac{1-e^{-2\alpha k}}{k}\Big)\Big)\Big(\left\|\nabla\hat\xi^{n+1}\right\|^2+\left\|\hat\xi^{n+1}\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\Big)+e^{2\alpha t_n}\frac{\theta^4}{54c_2}\left\|\xi^{n+1}\right\|^4_{L^4(\partial\Omega)}\\
&\quad\le e^{2\alpha t_n}(1-\theta)^2\Big(\frac{\beta_4}{2}\Big(\left\|\nabla\xi^n\right\|^2+\left\|\xi^n\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\Big)+C(1-\theta)^2\left\|\xi^n\right\|^4_{L^4(\partial\Omega)}\Big)\\
&\qquad+Ce^{2\alpha t_n}\Big(\left\|\delta_t^+\eta^n\right\|^2+\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^6_{L^6(\partial\Omega)}\Big)+C\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^2\Big(1+\left\|w^{n+\theta}\right\|^2+\left\|\Delta w^{n+\theta}\right\|^2\Big)\\
&\qquad+Ce^{2\alpha t_n}\Big(\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}+\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^4_{L^4(\partial\Omega)}\Big)\Big(1+\left\|w^{n+\theta}\right\|^2_2+\left\|w^{n+\theta}\right\|^4_{L^4(\partial\Omega)}\Big)\\
&\qquad+Ce^{2\alpha t_n}\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^2\Big(\left\|w^{n+\theta}\right\|^2+\left\|w^{n+\theta}\right\|^2_2+\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^4_{L^4}\Big)+Ce^{2\alpha t_n}T^{n+\theta}.
\end{aligned}$$

选取 $k_0>0$，使得对于 $0<k\le k_0$，式 (5.4) 成立。

乘法　乘以 k，并将上述不等式从 $n=0$ 求和至 $M-1$，可得

$$\begin{aligned}
&\left\|\hat{\xi}^{M}\right\|^{2}+k\Big(\frac{\beta_4\theta^2}{4}e^{-2\alpha k}-C_F\Big(\frac{1-e^{-2\alpha k}}{k}\Big)\Big)\sum_{n=0}^{M-1}\Big(\left\|\nabla\hat{\xi}^{n+1}\right\|^{2}+\left\|\hat{\xi}^{n+1}\right\|^{2}_{L^2(\partial\Omega)}\Big)+\frac{k\theta^4}{54c_2}\sum_{n=0}^{M-1}e^{2\alpha t_n}\left\|\xi^{n+1}\right\|^{4}_{L^4(\partial\Omega)}\\
&\quad\le Ck\sum_{n=0}^{M-1}e^{2\alpha t_n}\Big(\left\|\delta_t^{+}\eta^{n}\right\|^{2}+\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^{6}_{L^6(\partial\Omega)}\Big)+Ck\sum_{n=0}^{M-1}e^{2\alpha t_n}\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^{2}\Big(1+\left\|w^{n+\theta}\right\|^{2}+\left\|\Delta w^{n+\theta}\right\|^{2}\Big)\\
&\quad+Ck\sum_{n=0}^{M-1}e^{2\alpha t_n}\Big(\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^{2}_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}+\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^{4}_{L^4(\partial\Omega)}\Big)\Big(1+\left\|w^{n+\theta}\right\|^{2}_{2}+\left\|w^{n+\theta}\right\|^{4}_{L^4(\partial\Omega)}\Big)\\
&\quad+Ck\sum_{n=0}^{M-1}e^{2\alpha t_n}\left\|\xi^{n+\theta}\right\|^{2}\Big(\left\|w^{n+\theta}\right\|^{2}+\left\|w^{n+\theta}\right\|^{2}_{2}+\left\|\eta^{n+\theta}\right\|^{4}_{L^4}\Big)+Ck\sum_{n=0}^{M-1}e^{2\alpha t_n}T^{n+\theta},
\end{aligned}$$

由于 $\xi^0=0.$

Also

$$\left\|\delta_t^{+}\eta^{n}\right\|^{2}\le\frac{1}{k}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left\|\eta_t\right\|^{2}ds.$$

我们选择 k 充分小，使得 $1-Ck\theta^2>0$。然后利用 (5.2) 和离散格朗沃尔不等式，并结合 $\alpha=0$ 引理 4.1 以及引理 5.1，最后乘以 $e^{-2\alpha t_M}$即可完成证明。

□

在下面的定　　理中，我们讨论 $\theta\in[\frac{1}{2},1]$的状态变量和控制输入的误差估计　　-　.

定理 5.1。设 $w_0\in H^3(\Omega)$，并假设引理 *5.2* 的条件成立。则存在一个与 h 和 k 无关的正常数 C，使得

$$\|w^n-W^n\|\le C(\|w_0\|_3)e^{-\alpha t_M}\Big(h^2+k(\theta-\frac{1}{2})+k^2\Big),$$

and

$$\|v_2(t_n)-V_2^n\|_{L^2(\partial\Omega)}\le C(\|w_0\|_3)e^{-\alpha t_M}\Big(h^{\frac{3}{2}}+k(\theta-\frac{1}{2})+k^2\Big),$$

其中 $V_2^n=-\frac{1}{\nu}\Big(2(c_2+w_d)W^n+\frac{2}{9c_2}(W^n)^3\Big)$。

证明。该证明与定理 3.1 类似，应用引理 5.1 和引理 5.2。　□

6 数值模拟。

接下来，我们讨论一些例子，以验证 $1D$ 和 $2D$ 两种情形下的理论结果。我们研究状态变量和控制输入在 $\theta\in[\frac{1}{2},1]$取不同值时的行为。此外，我们表明近似解随时间收敛到平衡解，并研究状态变量和控制输入的收敛阶。为求解当前时刻未知解的非线性方程组，我们采用牛顿法，并以前一解作为初始猜测。记 w^n 为状态变量的加密网格解，v_0^n 和 v_1^n为控制输入的加密网格解。

在以下示例中，我们讨论 $1D$ 黏性 *Burgers* 方程的状态变量和控制输入的行为。我们研究了不同 c_0 和 c_1 取值下，未受控（零 *Neumann* 边界）解与受控解的行为。此外，我们还考察了状态变量和控制输入关于空间和时间的收敛阶。

例6.1。在本例中，我们考虑初始条件 $(t=0)$ $w_0(x)=\sin(\pi x)-w_d$，$x\in[0,1]$，其中 $w_d=1.$。令扩散参数为 $\nu=0.1$，且 $c_0=0.1$，$c_1=0.1$。

我们考虑带零 *Neumann* 边界的 $1D$ 黏性 *Burgers* 方程 (1.1)-(1.4)（无控制解），以及采用非线性 *Neumann* 边界反馈控制律的系统 (1.6)-(1.9) 。我们求解全离散格式 (2.3)，其中 $\theta = 1.$ 。图*1(i)*展示了标记为“无控制解”的无控制解和受控解；从中可以观察到， c_0 和 c_1 取值较大时， L^2-范数衰减得更快。因此，模拟结果证实，对于不同的 c_0 和 c_1取值，采用控制律的 (1.1)-(1.4) 的解均收敛到平衡解。

图*1*（*iv*）和（*v*）展示了控制输入 $v_0(t)$ 和 $v_1(t)$ 。我们可以看到，当 c_0 和 c_1取较大值时，控制输入随时间更快地趋于零。从图*1*（*ii*）中可以观察到，对于 $\nu = 1$，状态变量的 L^2范数迅速衰减。对于 $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$，状态变量如图*1*（*iii*）所示。

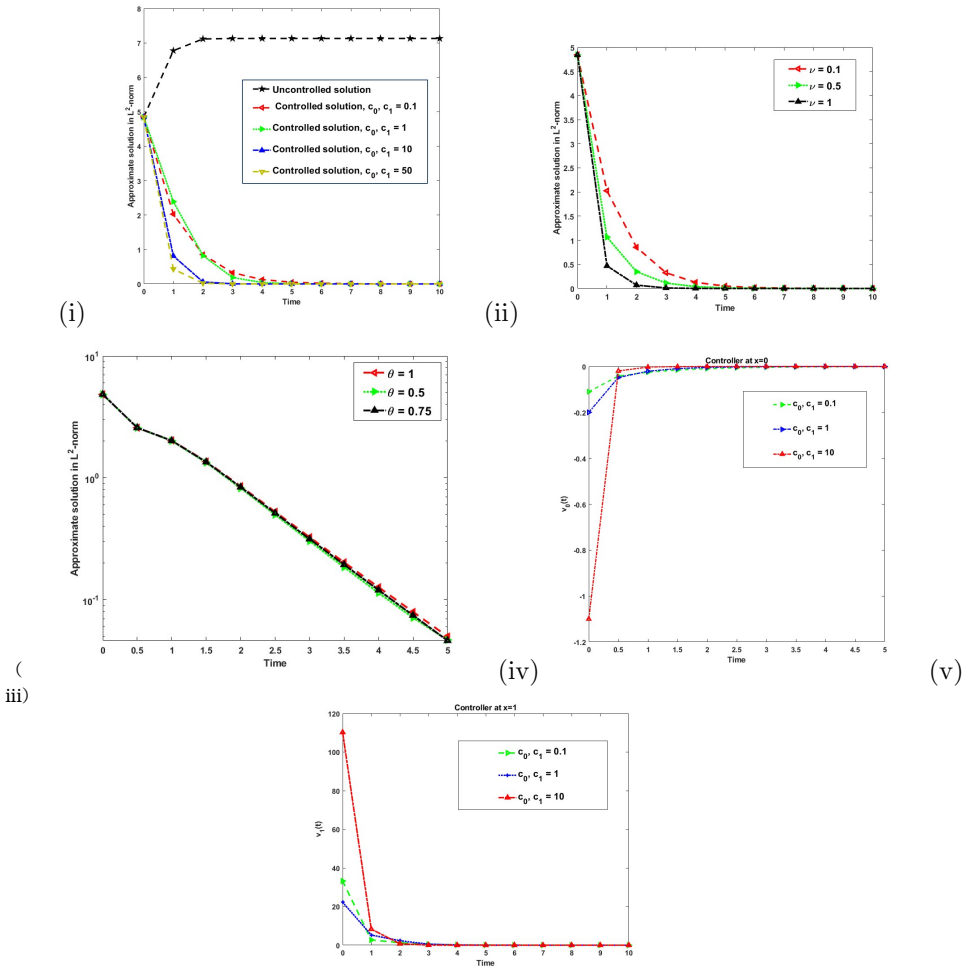


图1：例6.1： **（i）**受控解和无控制解的 L^2范数。 **（ii）**不同 ν取值下受控解的 L^2–范数。 **（iii）**半对数坐标下，不同 θ取值时受控解的 L^2–范数。 **（iv）**左边界 $x = 0$处， c_0 和 c_1 取多个不同值时的控制输入。 **（v）**右边界 $x = 1$处， c_0 和 c_1 取多个不同值时的控制输入。

当 ν 取较大值时，控制输入 $v_0(t)$ 和 $v_1(t)$ 衰减得更快，如图 *2(i)* 和 *(ii)* 所示。在图 *2(iii)* 和 *(iv)* 中，对于 $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$，控制输入随时间衰减并趋近于零。

接下来，我们考察时间区间 $[0, 1]$内状态变量和控制输入的收敛阶。从表*1*可以看出，对于不同的 h 取值且 k固定时，状态变量在 L^2 范数和 L^∞范数下的误差均有所减小，收敛阶为二。对于收敛阶，

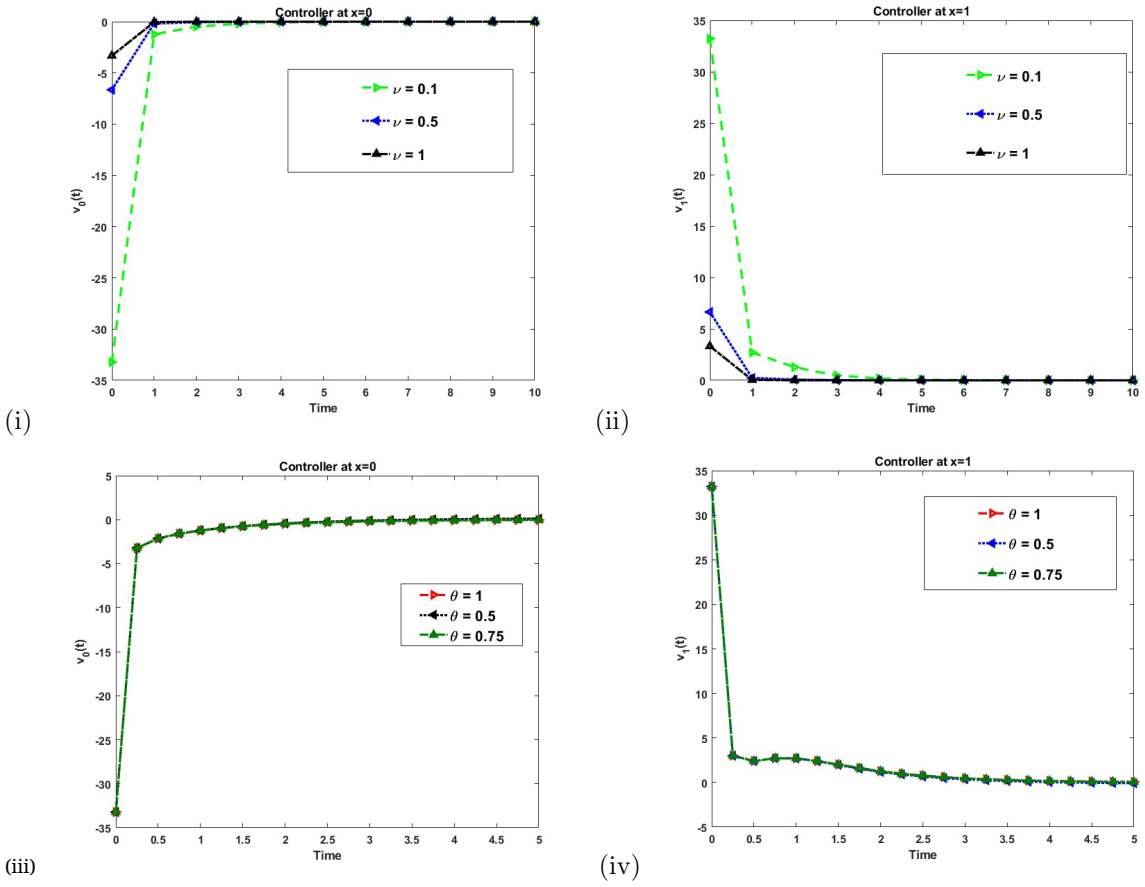


图2：例6.1：**(i)** 左边界 $x = 0$处 ν 取多个值时的控制输入。**(ii)** 右边界 $x = 1$处 ν 取不同值时的控制输入。**(iii)** 左边界 $x = 0$处 θ 取各种值时的控制输入。**(iv)** 右边界 $x = 1$处 θ 取各种值时的控制输入。

由于该方程的精确解未知，因此将加密网格解视为精确解。表*2*给出了两种控制输入的空间误差和收敛阶，其在 L^∞范数下的收敛阶为二。

表*3*给出了在固定 h. 值的情况下，不同 k 取值对应的状态变量关于时间的收敛阶。我们注意到，对于 $\theta = 1$，收敛阶为*1*；而对于 $\theta = \frac{1}{2}$，在 L^∞-范数下的收敛阶为*2*，这印证了引理*3.1*的理论结果。控制输入 $v_0(t)$ 和 $v_1(t)$ 的收敛阶分别见表*4*和表*5*。其收敛阶与表*3*中的结果相似。此外，我们观察到，对于 $\theta \in (1\,2,$ $1)$，关于时间的收敛阶为*1*。

表1：在例6.1中，固定 $M=100$ 的值并改变 h 的值时，状态变量相对于空间的收敛阶。

h	$\|W^n-w^n\|$	收敛阶	$\|W^n-w^n\|_\infty$	收敛阶
$\frac{1}{4}$	$7.6454e-04$	$--$	$8.3202e-04$	$--$
$\frac{1}{8}$	$1.7592e-04$	2.12	$1.9793e-04$	2.07
$\frac{1}{32}$	$4.2590e-05$	2.04	$4.8198e-05$	2.03
$\frac{1}{16}$	$1.0484e-06$	2.02	$1.1964e-05$	2.01
$\frac{1}{32}$	$2.5779e-06$	2.02	$2.9595e-06$	2.01

表2：在例6.1中，固定 $M=100$ 的值并改变 h 的值时，控制输入相对于空间的收敛阶。

h	$\|V_0^n-v_0^n\|_\infty$	收敛阶	$\|V_1^n-v_1^n\|_\infty$	收敛阶
$\frac{1}{8}$	$5.2e-03$	$--$	0.0071	$--$
$\frac{1}{16}$	$1.2e-03$	2.13	0.0018	2.01
$\frac{1}{32}$	$2.937e-04$	2.03	$4.3809e-04$	2.00
$\frac{1}{64}$	$7.2843e-05$	2.01	$1.0979e-04$	1.99
$\frac{1}{128}$	$1.7971e-05$	2.01	$2.7447e-05$	2.00

表3：例6.1中状态变量关于时间的收敛阶（O.C.），其中 k 取不同值， $h=\frac{1}{30}$取固定值。

k	$\|W^n-w^n\|_\infty$，对于 $\theta=1$	收敛阶	k	$\|W^n-w^n\|_\infty$，对于 $\theta=\frac{1}{2}$	收敛阶
$\frac{1}{8}$	$4.7821e-04$	$--$	$\frac{1}{40}$	$1.9935e-06$	$--$
$\frac{1}{16}$	$2.6903e-04$	0.84	$\frac{1}{80}$	$4.3275e-07$	2.20
$\frac{1}{32}$	$1.4173e-04$	0.92	$\frac{1}{160}$	$1.0806e-07$	2.00
$\frac{1}{64}$	$7.2224e-05$	0.97	$\frac{1}{320}$	$2.692e-08$	2.00
$\frac{1}{128}$	$3.6072e-05$	1.00	$\frac{1}{640}$	$6.6423e-09$	2.01
$\frac{1}{256}$	$1.7663e-05$	1.03	$\frac{1}{1280}$	$1.5746e-09$	2.07

表4：在例6.1中，考虑 k 取不同值、$h=\frac{1}{30}$ 固定时，左边界处控制输入 ($x=0$) 关于时间的收敛阶。

k	$\|V_0^n-v_0^n\|_\infty$，$\theta=1$	收敛阶	k	$\|V_0^n-v_0^n\|_\infty$，$\theta=\frac{1}{2}$	收敛阶
$\frac{1}{8}$	0.0016	$--$	$\frac{1}{40}$	$5.5338e-07$	$--$
$\frac{1}{16}$	$8.1063e-04$	0.99	$\frac{1}{80}$	$4.3754e-07$	0.34
$\frac{1}{32}$	$4.0617e-04$	0.99	$\frac{1}{160}$	$1.0952e-07$	1.99
$\frac{1}{64}$	$2.0223e-04$	1.00	$\frac{1}{320}$	$2.7315e-08$	2.00
$\frac{1}{128}$	$1.00e-04$	1.01	$\frac{1}{640}$	$6.7527e-09$	2.01
$\frac{1}{256}$	$4.8729e-05$	1.03	$\frac{1}{1280}$	$1.6184e-09$	2.06

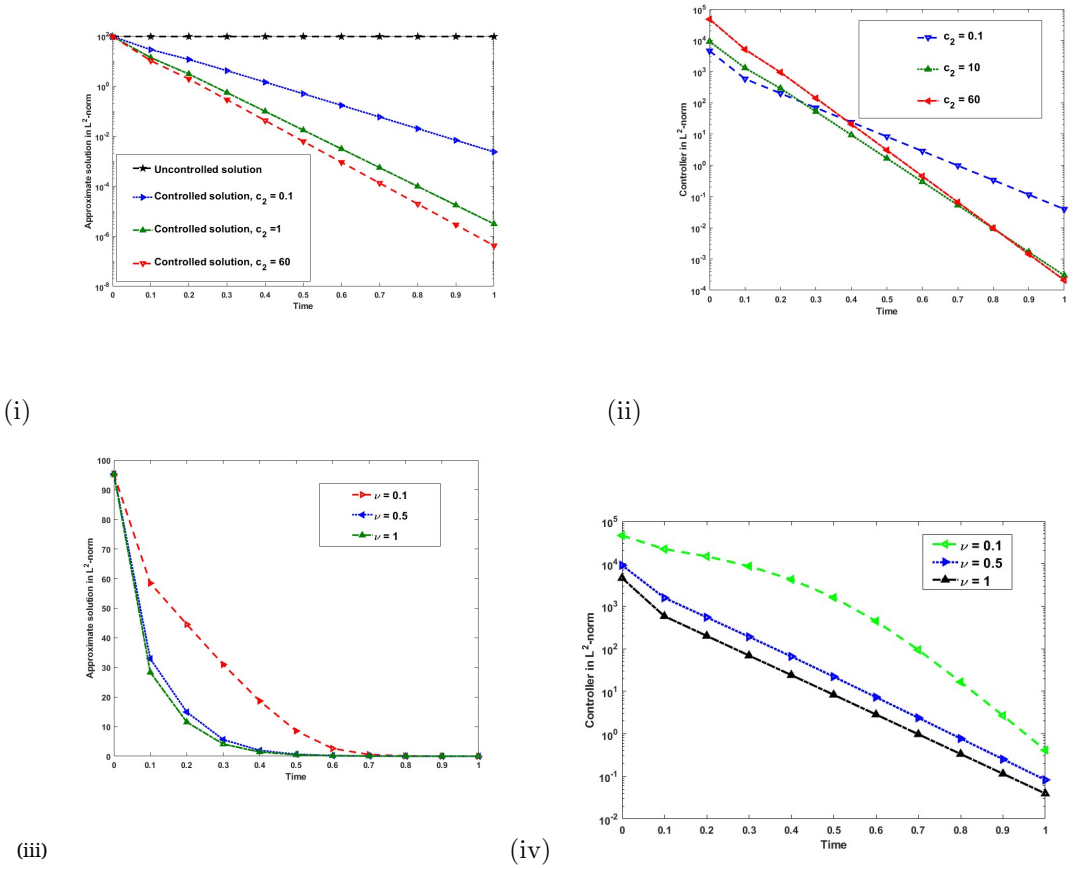
表5：在例6.1中，取定 $h=\frac{1}{30}$，考察 k 的不同取值时，右边界处控制输入（$x=1$）相对于时间的收敛阶（O.C.）。

k	$\|V_1^n-v_1^n\|_\infty$，对于 $\theta=1$	收敛阶	k	$\|V_1^n-v_1^n\|_\infty$，对于 $\theta=\frac{1}{2}$	收敛阶
$\frac{1}{8}$	0.0052	$--$	$\frac{1}{40}$	$2.1931e-05$	$--$
$\frac{1}{16}$	0.0029	0.83	$\frac{1}{80}$	$4.6023e-06$	2.25
$\frac{1}{32}$	0.0015	0.92	$\frac{1}{160}$	$1.1491e-06$	2.00
$\frac{1}{64}$	$7.8265e-04$	0.97	$\frac{1}{320}$	$2.8627e-07$	2.00
$\frac{1}{128}$	$3.9104e-04$	1.00	$\frac{1}{640}$	$7.0633e-08$	2.01
$\frac{1}{256}$	$1.9152e-04$	1.03	$\frac{1}{1280}$	$1.6745e-08$	2.07

在下一个例子中，我们将说明对于不同的 c_2 和 ν取值， $2D$ 黏性 *Burgers* 方程对状态变量和控制输入的影响。

例 6.2。 这里，我们选取初始条件 $w_0(x_1, x_2) = 5x_1(1-x_1)x_2(1-x_2) - w_d, (x_1, x_2) \in [0,1] \times [0,1]$，其中 $w_d = 2$。令扩散系数为 $\nu = 1$，时间区间为 $t = [0,1]$。

我们考虑带有非线性 *Neumann* 边界反馈控制输入的 $2D$ 无控制黏性 *Burgers* 方程 $(v_2(t) = 0)$ (4.1)-(4.3) 以及系统 (4.7)-(4.9) 。我们求解 (4.13)，其中 $\theta = 1.$。在图 ***3(i)*** 中，我们注意到无控制解（零 *Neumann* 边界）不会趋于零，记为“无控制解”。但在采用反馈控制律的情况下，对于 c_2 的不同取值，受控解在 L^2-范数下趋于零，如同一图所示。因此，对于 $c_2 > 0$，带有控制输入 $v_2(x,t)$ 的系统 (4.7)-(4.9) 是可稳定化的。此外，仿真证实，*Burgers* 方程 (4.1)-(4.3) 随时间趋于系统 (4.4)-(4.5) 的稳态解。在图 ***3(ii)*** 中，我们展示了 c_2 的多个取值下控制输入在 L^2-范数中的变化。图 ***3(iii)*** 和 ***(iv)*** 分别展示了在 $c_2 = 0.1$ 条件下，ν 取不同值时的状态变量和控制输入。



(i) (ii)

(iii) (iv)

图 3：示例 6.2：**(i)** 在半对数坐标下， L^2–范数中的非受控解和受控解。**(ii)** 在半对数坐标下，对于不同的 c_2 值，在 L^2范数中且 $\nu = 1$ 时的控制输入。**(iii)** 对于不同的 ν 值且 $c_2 = 0.1$时， L^2范数中的受控解。**(iv)** 在半对数坐标下，对于不同的 ν值，在 L^2–范数中且 $c_2 = 0.1$时的控制输入。

致谢

Sudeep Kundu 衷心感谢印度政府科学与工程研究委员会（*SERB*）通过启动研究基金对项目（编号：*SRG/2022/000360*）提供的支持。

声明

利益冲突。

作者声明不存在利益冲突。

7 附录。

定理 *1.1* 的其余证明分为以下几个部分：

第 ***1*** 部分。 在这一部分中，我们证明 $w_{tx} \in L^\infty(0,T;\ L^2(0,1))$ 以及 $w_{tt} \in L^2(0,T;\ L^2(0,1))$

$$\nu \|w_{tx}\|^2 + E_3(t) + e^{-2\alpha t}\int_0^t e^{2\alpha s}\|w_{tt}(s)\|^2 ds \le e^{-2\alpha t}C(\|w_0\|_3)\exp(C\|w_0\|_2^2).$$

证明。 对 (1.10) 关于时间求导，并令 $\phi = w_{tt}$，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\nu\|w_{tx}\|^2 + E_3(t)\right) + \|w_{tt}\|^2 = &\frac{2}{3c_0}w(0,t)w_t^3(0,t) + \frac{2}{3c_1}w(1,t)w_{ht}^3(1,t)\\ &-(w_t w_x + w w_{tx}, w_{tt}) - w_d(w_{tx},\phi).\end{aligned} \tag{7.1}$$

对 (7.1) 右端前两项应用杨氏不等式，得到

$$\frac{2}{3c_i}w(i,t)w_t^3(i,t) \le \frac{2}{3c_i}w^2(i,t)w_t^2(i,t) + \frac{1}{6c_i}w_t^4(i,t), \quad i=0,1.$$

借助柯西-施瓦茨不等式，(7.1) 右端最后两项可估计为

$$\begin{aligned}-(w_t w_x + w w_{tx}, w_{tt}) - w_d(w_{tx},w_{tt}) &\le \|w_t\|_\infty \|w_x\|\|w_{tt}\| + \|w\|_\infty\|w_{tx}\|\|w_{tt}\| + w_d\|w_{tx}\|\|w_{tt}\|,\\ &\le Cw_t^2(0,t) + C\||w|\|^2\|w_{tx}\|^2 + C\|w_{tx}\|^2 + \frac{1}{2}\|w_{tt}\|^2.\end{aligned}$$

将这些估计代入 (7.1)，并将所得不等式两边乘以 $2e^{2\alpha t}$，得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\nu e^{2\alpha t}\|w_{tx}\|^2 + e^{2\alpha t}E_3(t)\right) + e^{2\alpha t}\|w_{tt}\|^2 \le\ & Ce^{2\alpha t}w_t^2(0,t) + Ce^{2\alpha t}\||w|\|^2\|w_{tx}\|^2\\ &+ \frac{2}{3c_0}w^2(0,t)w_t^2(0,t) + \frac{1}{6c_0}w_t^4(0,t)\\ &+ \frac{2}{3c_1}w^2(1,t)w_t^2(1,t) + \frac{1}{6c_1}w_t^4(1,t)\\ &+ Ce^{2\alpha t}\|w_{tx}\|^2 + 2\alpha e^{2\alpha t}\left(\nu\|w_{tx}\|^2 + E_3(t)\right).\end{aligned}$$

对 $[0,t]$ 关于时间积分，并利用定理 1.1，可得

$$\begin{aligned}\nu e^{2\alpha t}\|w_{tx}\|^2 + e^{2\alpha t}E_3(t) + \int_0^t e^{2\alpha s}\|w_{tt}(s)\|^2 ds \le\ & C(\|w_0\|_3)\exp(C\|w_0\|_2^2)\\ &+ \|w_{tx}(0)\|^2.\end{aligned}$$

由 (1.6)，令 $t=0$ 后可写为

$$\|w_{tx}(0)\| \le C\left(\|w_0\|_3 + \|w_0\|_1\|w_0\|_2\right).$$

因此，将所得不等式两边乘以 $e^{-2\alpha t}$ 后，证明完成。 □

第 ***2*** 部分。 这里，我们给出以下指数界

$$\|w_{tt}\|^2 + e^{-2\alpha t}\int_0^t e^{2\alpha s}\Big(\nu\|w_{ttx}\|^2 + E_4(s)\Big)ds \le e^{-2\alpha t}C(\|w_0\|_3)\exp(C\|w_0\|_2^2),$$

其中

$$E_4(t) = (c_0+2w_d)w_{tt}^2(0,t) + 2(c_1+w_d)w_{tt}^2(1,t) + \frac{2}{3c_0}w^2(0,t)w_{tt}^2(0,t) + \frac{2}{3c_1}w^2(1,t)w_{tt}^2(1,t).$$

证明。 对 (1.10) 关于时间求导，并选择 $\phi = w_{tt}$，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|w_{tt}\right\|^2 + \nu\left\|w_{ttx}\right\|^2 &+ (c_0+w_d)w_{tt}^2(0,t) + (c_1+w_d)w_{tt}^2(1,t)\\ &+ \frac{2}{3c_0}w^2(0,t)w_{tt}^2(0,t) + \frac{2}{3c_1}w^2(1,t)w_{tt}^2(1,t)\\ &= -\frac{4}{3c_0}w(0,t)w_t^2(0,t)w_{tt}(0,t) - \frac{4}{3c_1}w(1,t)w_t^2(1,t)w_{tt}(1,t)\\ &\quad - (w_{tt}w_x + 2w_{ht}w_{tx} + ww_{ttx}, w_{tt}) - w_d(w_{ttx}, w_{tt}).\end{aligned} \tag{7.2}$$

(7.2) 右端的前两项估计为

$$\frac{4}{3c_i}w(i,t)w_t^2(i,t)w_{tt}(i,t) \le \frac{2}{6c_i}w^2(i,t)w_{tt}^2(i,t) + \frac{4}{3c_i}w_t^4(i,t), \quad i = 0,1.$$

(7.2) 右端的第三项给出

$$\begin{aligned}-(w_{tt}w_x + 2w_tw_{tx} + ww_{ttx}, w_{tt}) &\le \left\|w_{tt}\right\|_\infty \left\|w_x\right\| \left\|w_{tt}\right\| + 2\left\|w_t\right\|_\infty \left\|w_{tx}\right\| \left\|w_{tt}\right\| + \left\|w\right\|_\infty \left\|w_{ttx}\right\| \left\|w_{tt}\right\|,\\ &\le \left(w_{tt}(0,t) + \left\|\left\|w_{ttx}\right\|\right\|\right)\left\|w_x\right\|\left\|w_{tt}\right\|\\ &\quad + 2\left(w_t(0,t) + \left\|w_{tx}\right\|\right)\left\|w_{tx}\right\|\left\|w_{tt}\right\| + \sqrt{2}\left\|\left|w\right|\right\|\left\|w_{ttx}\right\|\left\|w_{tt}\right\|.\end{aligned}$$

利用杨氏不等式，可将上述不等式写为

$$\begin{aligned}&-(w_{tt}w_x + 2w_tw_{tx} + ww_{ttx}, w_{tt})\\ &\qquad \le \frac{c_0}{2}w_{tt}^2(0,t) + \frac{\nu}{4}\left\|w_{ttx}\right\|^2 + C\left\|\left|w\right|\right\|^2\left\|w_{tt}\right\|^2 + Cw_t^2(0,t)\left\|w_{tx}\right\|^2.\end{aligned}$$

(7.2) 右端的最后一项给出

$$-w_d(w_{ttx}, w_{tt}) \le C\left\|w_{tt}\right\|^2 + \frac{\nu}{4}\left\|w_{ttx}\right\|^2.$$

因此，由 (7.2) 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|w_{tt}\right\|^2 + \frac{\nu}{2}\left\|w_{ttx}\right\|^2 &+ (\frac{c_0}{2}+w_d)w_{tt}^2(0,t) + (c_1+w_d)w_{tt}^2(1,t)\\ &+ \frac{2}{6c_0}w^2(0,t)w_{tt}^2(0,t) + \frac{2}{6c_1}w^2(1,t)w_{tt}^2(1,t)\\ &\le \frac{4}{3c_0}w_t^4(0,t) + \frac{4}{3c_1}w_t^4(1,t) + C\left\|\left|w\right|\right\|^2\left\|w_{tt}\right\|^2 + Cw_t^2(0,t)\left\|w_{tx}\right\|^2.\end{aligned}$$

将所得不等式乘以 $2e^{2\alpha t}$，并在 $[0,t]$ 上对时间积分，利用定理 1.1 可得

$$e^{2\alpha t}\left\|w_{tt}\right\|^2 + \int_0^t e^{2\alpha s}\Big(\nu\left\|w_{ttx}\right\|^2 + E_4(s)\Big)ds \le C(\left\|w_0\right\|_3)\exp(C\left\|w_0\right\|_2^2) + \left\|w_{tt}(0)\right\|^2.$$

对 (1.6) 关于时间求导，代入 $t = 0$ 后得到

$$\left\|w_{tt}(0)\right\| \le C\left(\left\|w_0\right\|_3 + \left\|w_0\right\|_1\left\|w_0\right\|_2\right).$$

将 $e^{-2\alpha t}$ 相乘，即完成证明。 □

第 ***3*** 部分. 在本部分中，我们证明 $w_{ttx} \in L^\infty(0,T;\, L^2(0,\,1))$ 和 $w_{ttt} \in L^2(0,T;\, L^2(0,\,1))$

$$\nu\left\|w_{ttx}\right\|^2 + E_5(t) + e^{-2\alpha t}\int_0^t e^{2\alpha s}\left\|w_{ttt}(s)\right\|^2 ds \le e^{-2\alpha t}C(\left\|w_0\right\|_3)\exp(C\left\|w_0\right\|_2^2),$$

其中

$$E_5(t) = (c_0+w_d)w_{tt}^2(0,t) + (c_1+w_d)w_{tt}^2(1,t) + \frac{1}{3c_0}w^2(0,t)w_{tt}^2(0,t) + \frac{1}{3c_1}w^2(1,t)w_{tt}^2(1,t).$$

证明。 证明由第1和第2部分得出。 □

参考文献

[1] E. Allen、*J. Burns*、*D. Gilliam*、*J. Hill* 和 *V. Shubov*。有限精度算术及敏感性对偏微分方程数值解的影响，《数学与计算机建模》，*35*，*1165-1195*，*2002*年。*[2] E. J. Allen*、*J. A. Burns* 和 *D. S. Gilliam*。具有 *Neumann-Dirichlet*边界条件的 *Burgers* 方程所生成动力系统的数值逼近，《*ESAIM*. 数学建模与数值分析》，*47*，*1465–1492*，*2013*。*[3] W. Akram* 和 *D. Mitra*。具有记忆项的黏性*Burgers*方程的局部稳定化，《演化方程与控制理论》，*11*，*939-973*，*2022*。*[4] F. Abbasi* 和 *J. Mohammadpour*。利用本征正交分解对 *Burgers* 方程进行非线性模型降阶，《美国控制会议》*(ACC)*，*IEEE*，*583–588*，*2015*。*[5] J. A. Burns* 和 *H. Marrekchi*。具有无界输入/输出算子的 *Burgers* 方程的最优固定有限维补偿器，《计算与控制》，*III*（*Bozeman*，*MT*，*1992*），《系统控制理论进展》，*15*，*83–104*，*Birkh¨auser Boston*，*Boston*，*MA*，*1993*。*[6] A. Balogh* 和 *M. Krstic*。具有非线性边界反馈的 *Burgers* 方程： H^1 稳定性、适定性与仿真，《工程中的数学问题：理论、方法与应用》，*6*，*189–200*，*2000*年。*[7] C. I. Byrnes*、*D. S. Gilliam* 和 *V. I. Shubov*。受控黏性*Burgers*方程的全局动力学，《动力系统与控制系统杂志》，*4*，*457–519*，*1998*。*[8] J. Burns*、*A. Balogh*、*D. S. Gilliam* 和 *V. I. Shubov*。黏性 *Burgers* 方程的数值稳态解，《数学系统、估计与控制杂志》，*8*，*16*页，*1998*。*[9] J. M. Buchot*、*J. P. Raymond* 和 *J. Tiago*。二维*Burgers*型方程的耦合估计与控制，《*ESAIM*：控制、优化与变分法》，*21*，*535–560*，*2015*。*[10] J. A. Burns* 和 *S. Kang*。具有有界输入/输出的 *Burgers* 方程控制问题，《非线性动力学》，*2*，*235-262*，*1991*。*[11] L. C. Evans*。《偏微分方程》，《数学研究生教材》，美国数学学会，*Providence*，*RI*，*19*，*xviii+662*，*1998*。*[12] J. G. Heywood* 和 *R. Rannacher*。非定常 *Navier–Stokes*问题的有限元逼近。第四部分：二阶时间离散的误差分析，《*SIAM* 数值分析杂志》，*27*，*353-384*，*1990*。*[13] K. Ito* 和 *S. Kang*。流体动力学系统的耗散反馈控制综合，《*SIAM* 控制与优化杂志》，*32*，*831–854*，*1994*。*[14] K. Ito* 和 *Y. Yan*。具有非线性通量反馈和全局吸引子的黏性标量守恒律，《数学分析与应用杂志》，*227*，*271–299*，*1998*。*[15] F. Jurado* 和 *O. F. Murillo-Garc´ıa*。某类修正*Burgers*方程的自适应反步边界控制，《分形与分数》，*7*，*834*，*2023*。*[16] P. C. Jain*、*R. Shankar* 和 *T. V. Singh*。半线性边界条件下 *Burgers* 方程数值求解的三次样条技术，《应用数值方法通讯》，*8*，*235–242*，*1992*。*[17] H. A. Levine*。具有半线性边界条件的 *Burgers* 方程解的稳定性与不稳定性，《*SIAM* 数学分析杂志》，*19*，*312–336*，*1988*。*[18] S. Kundu* 和 *A.K. Pani*。利用 *Neumann* 边界反馈控制律对 *Burgers* 方程进行全局稳定化的有限元逼近，《计算数学进展》，*44*，*541–570*，*2018*年。

[19] S. Kundu 和 *A.K. Pani*。通过非线性 *Neumann* 边界反馈控制实现二维黏性 *Burgers* 方程的全局稳定化及其有限元分析，*Journal of Scientific Computing*，*84*，*45*，*29*，*2020*年。*[20] M. Krstic*。通过边界控制实现 *Burgers* 方程的全局稳定化，*Systems and Control Letters*，*37*，*123–141*，*1999*年。*[21] K. Kunisch* 和 *S. Volkwein*。采用本征正交分解的降阶方法控制 *Burgers* 方程，*Journal of Optimization Theory and Applications*，*102*，*345–371*，*1999*年。*[22] H. V. Ly*、*K. D. Mease* 和 *E. S. Titi*。黏性 *Burgers* 方程的分布式与边界控制，*Numerical Functional Analysis and Optimization. An International Journal*，*18*，*143–188*，*1997*年。*[23] W. J. Liu* 和 *M. Krstic*。具有未知黏度的 *Burgers* 方程自适应控制，*International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*，*15*，*745–766*，*2001*年。*[24] W. J. Liu* 和 *M. Krstic*。具有执行器动力学的 *Burgers* 方程反步边界控制，*Systems and Control Letters*，*41*，*291–303*，*2000*年。*[25] P. Merino*。由 *Burgers* 方程支配的最优控制问题的有限元误差估计，*Computational Optimization and Applications. An International Journal*，*63*，*793–824*，*2016*年。*[26] G. N. Milstein* 和 *M.V. Tretyakov*。采用概率方法求解非线性抛物方程 *Neumann* 问题，*IMA Journal of Numerical Analysis*，*22*，*599–622*，*2002*年。*[27] V. Q. Nguyen*。具有罗宾边界条件的 *Burgers* 方程数值研究，博士论文，弗吉尼亚理工大学，*2001*年。*[28] S. M. Pugh*。*Burgers* 方程的有限元近似，博士论文，弗吉尼亚理工大学，*1995*年。*[29] N. Smaoui*。广义 *Burgers* 方程的非线性边界控制，*Nonlinear Dynamics. An International Journal of Nonlinear Dynamics and Chaos in Engineering Systems*，*37*，*75–86*，*2004*年。*[30] N. Smaoui*。黏性 *Burgers* 方程的边界与分布式控制，*Journal of Computational and Applied Mathematics*，*182*，*91–104*，*2005*年。*[31] Z. Sabeh*、*M. Shamsi* 和 *M. Dehghan*。通过勒让德伪谱方法实现黏性 *Burgers* 方程的分布式最优控制，*Mathematical Methods in the Applied Sciences*，*39*，*3350–3360*，*2016*年。.*[32] M. Seydao ̆glu*、*U. Erdo ̆gan* 和 *T. Oziṡ*。采用高阶分裂方法求解 *Burgers* 方程，*Journal of Computational and Applied Mathematics*，*291*，*410-421*，*2016*年。*[33] D. Sharma* 和 *K. Goyal*。采用第二代小波优化有限差分法求解具有不同边界条件的 *Burger* 方程，*International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*，*16*，*1850032*，*29*，*2018*年。*[34] L. Thevenet*、*J. M. Buchot* 和 *J. P. Raymond*。二维 *Burgers* 方程的非线性反馈稳定化，*ESAIM. Control, Optimisation and Calculus of Variations*，*16*，*929–955*，*2010*年。*[35] V. Thomee*。抛物问题的 *Galerkin* 有限元方法，*25*，*Springer Science and Business Media*，*2007*年。*[36] S. Volkwein*。*Burgers* 方程的分布式控制问题，*Computational Optimization and Applications. An International Journal*，*18*，*115–140*，*2001*年。*[37] M. Zhu* 和 *Z. Zhao*。*Neumann* 边界条件下非线性强度 *Burgers* 方程的最优控制，*International Journal of Nonlinear Science*，*1*，*111–118*，*2006*年。