arXiv:2602.01318v1 [math.GR] 1 Feb 2026

# 凸组合下刘维尔测度的不稳定性

作者： Behrang Forghani 和 Joshua Frisch

**摘要**

对于每个非超 FC 中心可数顺从群以及每个 $k \geq 2$，我们都给出一列对称、全支撑概率测度，使得它们的凸组合是非刘维尔的（也就是说，该凸组合存在非常数有界调和函数，等价地说，其泊松边界非平凡），当且仅当至少 $k$ 个测度出现在该凸组合中。特别地，我们的结果表明，刘维尔测度的集合在凸组合下不封闭，从而回答了 Kaimanovich 提出的问题。对于具有“每个对称有限支撑概率测度都是刘维尔测度”这一性质的非超 FC 中心可数群，在额外假设有限熵的情况下，我们也给出了类似结果。这些群是目前已知的唯一非平凡可数群例子，且它们存在有限熵的刘维尔测度。例子包括定义在 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}^2$上的灯笼群，以及 $\mathbb{Z}$上的有限置换所构成的无限对称群。

**目录**

1. 引言 12. 记录时刻、FitTimes、长间隔 43. 切换与 Følner集合 74. ICC顺从群的刘维尔测度 95. 有限熵下的刘维尔与非刘维尔 12参考文献 17

## 1. 引言

设 $G$ 是一个赋有概率测度 $\mu$ 的可数群。除非另有说明，我们假设概率测度是非退化的（即， $\mu$ 的支撑作为半群生成 $G$ ）。有界函数 $f\colon G \to \mathbb{R}$ 称为 $\mu$–调和，如果对每个 $g \in G$,

$$f(g) = \sum_{h \in G} f(gh)\,\mu(h).$$

容易看出，常数函数是有界调和函数。概率测度 $\mu$ 在 $G$ 上称为刘维尔，当每个有界 $\mu$–调和函数都是常数时；等价地，与 $G$ 上由$\mu$ 的法则所决定的随机游走相关联的泊松边界是平凡的（参见 [Fur63] 和 [Kai00] ，以了解调和函数与泊松边界之间的联系）。类似地，一个群称为刘维尔，当它容许一个非退化刘维尔概率测度时。一个群称为*Choquet–Deny* ，当它对每一个概率测度都是刘维尔的。

关键词：随机游走、ICC、刘维尔、泊松边界、顺从的、秘密共享、FC-中心 

Blackwell [Bla55]证明了整数格 $\mathbb{Z}^d$ 是 Choquet–Deny 的，并且 Choquet 和 Deny 对阿贝尔群证明了类似的结果 [CD60]。Dynkin 和 Maljutov [DM61]证明了可数幂零群也是 Choquet–Deny 的。另一方面，Furstenberg [Fur71] 证明了非 amenable 群上的每一个非退化概率测度都是非刘维尔的，并猜想每一个 amenable 群都是刘维尔的。Rosenblatt [Ros81]以及 Kaimanovich–Vershik [KV83] 独立地证明了 Furstenberg 的猜想。Kaimanovich 和 Vershik [KV83] 给出了并非 Choquet–Deny 的 amenable 群（灯笼群）的首批例子。换言之，存在既容许刘维尔概率测度又容许非刘维尔概率测度的群。他们还猜想，每一个具有指数增长的群都不是 Choquet–Deny 的。Erschler 给出了更多刘维尔群的例子，例如有限呈示可解群 [Ers04b] 以及中间增长群 [Ers04a], ，它们都不是 Choquet–Deny 的。

事实证明，群的共轭类结构在判定一个可数群是否具有 Choquet–Deny 性质方面起着关键作用。当每个非单位元都有无穷多个共轭元时，这个群称为 *ICC* 群 。Jaworski [Jaw04]证明，如果一个群没有任何 ICC 商群（这类群称为超 FC 中心群），那么它具有 Choquet–Deny 性质。第二作者与 Hartman、Tamuz 和 Vahidi Ferdowsi 合作 [FHTVF19], 证明了，每个具有 ICC 商群的可数群都是非刘维尔的。因此，一个群具有 Choquet–Deny 性质，当且仅当它是超 FC 中心群，从而解决了 Kaimanovich 和 Vershik 提出的猜想。

人们已投入大量精力，研究一个群对于某个、所有或某一类概率测度是否具有刘维尔性质；参见 [BKN10], [AAV13], [AV14], [AAMBV16],[EK23], 以及 [BNZ25] 及其中的参考文献。当一个概率测度是非刘维尔的，许多研究致力于根据给定群的几何或代数性质来描述其泊松边界（这称为边界识别问题）。更多详情参见 [Kai00], [Ers10], [Zhe 23], [CFFT25], 以及 [FS24] 及其中的参考文献。

对于有限生成群，关于给定有限生成群上的所有对称有限支撑概率测度是否会同时全都是刘维尔的，或同时全都是非刘维尔的，目前仍是一个开放问题；这称为稳定性问题。稳定性问题若得到肯定回答，则立即可知：给定有限生成群上有限支撑对称概率测度的刘维尔（或非刘维尔）性质在有限凸组合下封闭。这个问题自然属于更广泛的背景。Kaimanovich 曾在波兰罗兹大学举行的群（半群）作用动力学会议上提出这样的问题：给定群的刘维尔概率测度集合是否在有限凸组合下封闭；另见 [FK25], 中对等价的泊松边界背景下该问题类似情形的讨论。对于非 amenable 群或超 FC 中心群，Kaimanovich 的问题的答案是明确的。然而，对于任何顺从的（非超 FC 中心）群，这个问题此前都未有定论。

本文旨在对 Kaimanovich 的问题给出否定答案。此外，我们证明，对于每一个非双曲 FC 中心可数恰当群，刘维尔测度的凸性都不成立。我们甚至证明了一个更强的结论：在刘维尔测度的凸组合背景下，秘密共享竟会出现。这表明，测度的凸空间中可能存在极其灵活多样的刘维尔子集。

**定理 A** (=定理4.3). 对于每个非双曲 *FC* 中心可数恰当群以及每个 $k \geq 2$，都存在一个对称的，非退化概率

测度，使得这些测度中任意 $k-1$ 个的凸组合都是刘维尔的，而它们的任意其他(有限或无限) 凸组合都是非刘维尔的。

我们的证明同时使用了*Følner* 集和切换集，其定义见第3 节。Følner 集的存在性等价于群的可和性。Kaimanovich– Vershik [KV83] 利用它们构造了刘维尔概率测度。另一方面，切换集由 Hartman–Frisch-Tamuz–Vahidi Ferdowsi [FHTVF19]引入，用于构造非刘维尔测度。我们通过交织来自 Følner 集和切换集的测度，归纳地构造我们的测度。凸组[EK23]合是非刘维尔的这一证明遵循 Erschler–Kaimanovich 的一般框架。另一方面，极点的刘维尔性质遵循 Kaimanovich–Vershik [KV83]的策略。主要的新意来自测度本身的构造。这一构造依赖于概率概念，我们称之为长间隔（见定义2.5）和拟合时刻（见定义2.9）。

利用 Følner 集得到的刘维尔概率测度通常具有无限熵。群上的无限熵概率测度往往表现出奇特的行为。例如，Kaimanovich [Ki83] 给出了群 $L$ 上的测度实例，使得左随机游走具有刘维尔性质，而右随机游走则不具有。Kaimanovich [Kai24]在一个直积群 $G\times H$ 上找到了非刘维尔测度，其在 $G$ 和 $H$ 上的投影均为刘维尔测度。Alpeev [Alp21] 和 [Alp24] 证明，当且仅当 $L$、$G$和 $H$ 是顺从的非超 FC 中心群时，这些结果才有可能成立。Chawla–Frisch [CF25] 找到了自由群上的概率测度，其泊松边界大于几何边界。当我们将范围限制为有限熵概率测度时，所有这些结果都不可能成立 [KV83], [EF22],以及 [CFFT25]。

或许令人惊讶的是，我们的结果并非纯粹是无限熵现象。对于所有顺从的非超 FC 中心群，无法将我们的结果推广到有限熵测度。Erschler [Ers04a] 证明，定义在 $\mathbb{Z}^d$ 上 $d\geq 3$的灯笼群对于所有非退化有限熵测度都是非刘维尔的。然而，当群是有限刘维尔群时，我们在有限熵假设下建立了定理*A*的一个类似结果；也就是说，该群上的每个对称有限支撑概率测度都是刘维尔的。具有次指数增长的群、定义在 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}^2$上的灯笼群，以及由 $\mathbb{N}$ 的有限置换构成的无限对称群，都是有限刘维尔群的例子。目前尚不清楚，非有限刘维尔群上是否可能存在有限熵刘维尔测度（如果确实不可能，那么这一结果将完整分类这类群）。

**定理 B**(=定理5.11)。对于每个有限刘维尔的非超 *FC* 中心群以及 $k\geq 2$，存在一列对称的、非退化有限熵概率测度，使得这些测度的任意凸组合 $k-1$ 都是刘维尔的，而它们的任何其他(有限或无限) 凸组合都是非刘维尔的。

根据 Derriennic [、Derr80] 或 Kaimanovich–Vershik [KV83], ，有限熵概率测度是刘维尔的，当且仅当其渐近熵为零；详见第 5 节，其中给出了详细内容和定义。我们对定理 B （即定理 A）的证明采用 Kaimanovich-Erschler[EK23] 的方法，证明凸组合具有非刘维尔性质。然而，证明刘维尔性质时采用的是完全不同的方法。我们通过证明渐近熵为零来证明定理 B。证明中使用了 $\mathcal{D}$–度量，见定义 5.3；该度量使得将概率测度映射到其 $n$ 重卷积的熵的映射是连续的（与 $\ell^1$–范数相反，见备注5.7）。我们利用$\mathcal{D}$–度量的连续性，用有限支撑测度逼近全支撑测度的熵，并在此处应用有限刘维尔假设。

在有限生成群的背景下，研究定理A 在有限支撑概率测度这一类中的情形，将极具意义，但可能非常困难。目前尚不清楚哪些顺从群存在非退化的有限支撑刘维尔概率测度。此外，除 Choquet–Deny 群之外，唯一已知的例子是有限 Liouville 群。因此，所有已知例子都涵盖在定理 B所涉及的群之中。

**本文结构：** 在第 2 节中，我们只考虑 $\mathbb{N}$ 上的概率测度，以回顾有关记录时刻的基本结果。我们还定义长间隔和拟合时刻，这些概念将用于证明某个概率测度是刘维尔测度。第 3 节专门讨论 Følner 集和切换集，并回顾可数 ICC 群上非刘维尔测度的一般构造。在第4节中，我们利用长间隔构造刘维尔概率测度，并证明定理 A。在最后一节中，我们回顾熵的基本性质，定义 $\mathcal{D}$–度量，并应用它证明定理 B。

**致谢**。B. Forghani 得到了美国国家科学基金会资助项目 DMS-2246727 的支持，J. Frisch 得到了美国国家科学基金会资助项目 DMS-2348981 的支持。

## 2. 记录时刻、拟合时刻与长间隔

我们主要关注 $\mathbb{N}$ 上的概率测度，它们可以写成两个测度的凸组合，其中至少有一个在 $\mathbb{N}$ 上是全支撑的。本节将为 $\mathbb{N}$ 上的概率测度引入记录时刻、长间隔和拟合时刻的概念。稍后我们将把这些概念用于群上的随机游走。

**记号**。 我们将整数值函数或概率测度$f$ 在 $\mathbb{N}$ 上的取值，交替记作 $f_n$ 或 $f(n)$。

**2.1. 记录时刻**。 设 $\alpha$ 是 $\mathbb{N}$上的概率测度。设 $(\xi_i)_{i\geq 1}$ 是服从 $\alpha$的独立同分布（i.i.d.）随机变量序列。记录时刻是序列中其取值首次超过截至该时刻所观察到的所有取值的时刻。我们通过归纳定义记录时刻序列 $(\tau_n)_{n\geq 1}$ 和记录值序列 $(\xi_{\tau_n})_{n\geq 1}$，令 $\tau_1 = 1$，并对 $n \geq 2$

$$M_n = \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\}, \quad \tau_k = \min\{i > \tau_{k-1} \ : \xi_i = M_i\}. \tag{2.1}$$

我们将需要以下引理，它是经典 Borel–Cantelli 引理的一个应用，用于控制记录时刻和记录值。

**引理 2.1**。 ([EK23，引理 2.12，引理 217]) 设 $\alpha$ 是定义在 $\mathbb{N}$上的无限支撑概率测度。 那么，存在非恒定的非递减函数$\varphi$，$\Phi:\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 使得几乎必然

$$\varphi_n < M_n\,, \qquad \tau_{n+1} \leq \Phi(\xi_{\tau_n})\,,$$

对于所有充分大的 $n$。

**定义 2.2 （阶梯）**。引理 $\Phi$ 中的非递减函数 2.1 称为$\alpha$–阶梯。

我们希望找到一个通用阶梯，以控制当一个概率测度可以写成两个概率测度的凸组合时的记录时刻。

**引理 2.3**。 设 $\bar{\alpha}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的全支撑概率测度。 那么存在一个统一的 $\bar{\alpha}$-阶梯 $\Phi$，它对于任意满足 $d\bar{\alpha} \leq \alpha$ 的概率测度 $\alpha$ 也是一个 $\alpha$–阶梯，其中某个 $0 < d \leq 1$。

证明。设 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 按照 $\bar{\alpha}$ 独立同分布，设 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 按照 $\alpha$ 独立同分布。根据引理 2.1，存在 $\bar{\varphi}$，使得对于充分大的 $n$，几乎处处有 $\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} > \bar{\varphi}_n$。由于 $\alpha \geq d\bar{\alpha}$，我们可以将 $\alpha$ 重写为 $\bar{\alpha}$ 与另一个概率测度的凸组合；$\alpha = d\bar{\alpha} + (1-d)\alpha'$。设 $Z_n$ 为二项随机变量，它统计了在按照 $\alpha$ 进行的 $n$ 次相互独立的随机抽样中，按照 $\bar{\alpha}$ 抽取的样本数量。根据大数定律，对于充分大的 $n$，几乎处处有 $2Z_n \geq dn$。因此，

$$\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \geq \bar{\varphi}(Z_n) \geq \bar{\varphi}(\lfloor \frac{dn}{2} \rfloor) \geq \bar{\varphi}(\lfloor \sqrt{n} \rfloor)$$

对于足够大的 $n$。因此，只需定义 $\varphi(n) = \bar{\varphi}(\lfloor \sqrt{n} \rfloor)$。现在我们可以通过以下条件定义 $\Phi$：

$$\{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \varphi_i < j\} = \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : i < \Phi_j\}.$$

□

2.2. **长间隔与拟合时间**。我们引入长间隔和拟合时间这两个新概念，稍后将用它们来构造刘维尔概率测度。

**定义 2.4**。设 $p$ 和 $q$ 是定义在 $\mathbb{N}$ 上的两个具有无限支集的概率测度，且 $q$ 的支撑为 $\mathbb{N}$。对于 $0 < t < 1$，我们定义

$$\alpha_{t,p,q} = tp + (1-t)q.$$

设 $(\xi_i)_{i \geq 1}$ 是一列独立同分布的随机变量，其分布为 $\alpha_{t,\ p,\ q}$。我们可以利用定义在 $\{0,1\}$ 上的伯努利随机变量 $\zeta_i$ 来研究 $\xi_i$，使得

$$P(\xi_i = n, \zeta_i = 1) = tp_n, \quad P(\xi_i = n, \zeta_i = 0) = (1-t)q_n, \quad P(\zeta_i = 1) = t.$$

**定义 2.5 (长间隔)**。概率测度$\alpha_{t,\ p,\ q}$ (定义2.4) 具有长间隔 当 $q$ 存在无穷多个 $m$ 使得

$$t \sum_{i=m}^{\infty} p_i \leq (1-t)q_m.$$

我们将在下文证明，“条件性”的长间隔是可能存在的。对于给定的 $A \subseteq \mathbb{N}$ with$p(A) > 0$, 我们将概率测度 $p^A$ 定义为 $p$在给定 $A$条件下的条件测度。因此，对于每个 $n \in A$, $p^A(n) = p_n/p(A)$，其他情况下则为零。

**定义 2.6 ($k$–覆盖)**。设 $k \in \mathbb{N}$ 和 $(A_j)_{j \in J}$ 是 $\mathbb{N}$中的一族子集。若对于 $J$中任意互不相同的 $i_1, \ldots, i_k$：
(1) $A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_k} = \mathbb{N}$,
(2) $\mathbb{N} \backslash \left( A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_{k-1}} \right)$ is infinite.

我们关注那些能够构造出具有长间隔的概率测度的 $k$–覆盖。首先请注意，对于 $\mathbb{N}$ 的每个划分，都可以轻易构造一个$k$–覆盖。

**引理 2.7**。设 $(D_i)_{i \geq 1}$ 是 $\mathbb{N}$的一个划分。设 $k \in \mathbb{N}$和 $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ 是一个双射。定义

$$B_i = \left\{ (l_1, \ldots, l_k) \in \mathbb{N}^k \ : \ l_j = i \text{ for some } j \geq 2 \right\}.$$

则$(A_i)_{i \geq 1}$ 是一个 $k$–覆盖，用于

$$A_i = \bigcup_{\psi_j \notin B_i} D_j.$$

证明。设 $i_1$，……，$i_k$ 互不相同。容易验证 $B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_k} = \emptyset$。对每个 $x \in \mathbb{N}$，存在 $j$ 使得 $x \in D_j$，因此 $B_{i_1}$，……，$B_{i_k}$ 中至少有一个不包含 $\psi_j$，从而推出 $A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_k} = \mathbb{N}$。同样容易验证$B = B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_{k-1}}$是一个无限集且 $\mathbb{N}^k \neq B$。因此，$k$–覆盖的第二条性质对$(A_i)_{i\geq 1}$成立。故$(A_i)_{i\geq 1}$ 是一个 $k$–覆盖。□

**引理 2.8**。设 $p$ 和 $q$ 是定义在 $\mathbb{N}$ 上的两个无限支撑概率测度。对于每个 $k \geq 2$，存在 $k$– 覆盖 $(A_j)_{j\geq 1}$，使得每个 $k-1$ 概率测度的凸组合 $\alpha_j = t_j p^{A_j} + (1-t_j)q$ 对于 $q$ (定义 2.5) 均具有$0 < t_j < 1$。

$\infty$证明。由于 $q$ 具有无限支撑，并且 $\sum p_m \to 0$ 满足 $i \to \infty$，因此存在严格$m=i$递增序列 $(n_i)_{i\geq 1}$，使得 $n_1 = 1$，且对于每个 $i \geq 1$

$$\frac{q_{n_i}}{n_i} \geq \sum_{m=n_{(i+1)}}^{\infty} p_m \,.$$

我们定义 $D_i = [n_i, n_{(i+1)}) \cap \mathbb{N}$。通过将引理 2.7 应用于划分 $(D_i)_{i\geq 1}$，我们构造 $k$–覆盖 $(A_j)_{j\geq 1}$。设 $\alpha$ 是 $\alpha_j$ 的一个 $k-1$ 凸组合。不失一般性，设 $\alpha = b_1\alpha_1 + \cdots + b_{k-1}\alpha_{k-1}$，其中 $b_1 + \cdots + b_{k-1} = 1$ 和 $b_i \geq 0$。我们将证明 $\alpha$ 对于 $q$ 具有长间隔。由于 $A_j \neq \mathbb{N}$，对于每个 $j \in \mathbb{N}$，我们有 $0 < p(A_j) < 1$。对于每个 $0 < t_m < 1$ 和 $m = 1$，……，$k-1$，存在 $n_{m_0}$（取决于$t_1$，……，$t_{k-1}$），使得

$$\frac{(1-t_m)p(A_m)}{t_m} > \frac{1}{n_{m_0}} \,.$$

令 $i > m_0$ 和 $n_i \notin (A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1})$（这是一个无限集，因为 $(A_j)_{j\geq 1}$ 是一个$k$覆盖），于是对于无穷多个 $i$ 以及每个 $m = 1$，…… $k-1$，都有 $p^{A_m}(D_i) = 0$：

$$(1-t_m)q_{n_i} \geq \frac{q_{n_i}}{n_i}\frac{t_m}{p(A_m)} \geq \frac{t_m}{p(A_m)} \sum_{k=n_{(i+1)}}^{\infty} p_k = t_m \sum_{k=n_i}^{\infty} p_k^{A_m} \,. \tag{2.2}$$

将不等式（2.2）两边乘以 $b_m$，并将它们从 $m = 1$ 到 $k-1$相加，可得 $\alpha$ 在 $q$ 处存在一个长间隔。□

**定义 2.9 (拟合时间)**。设 $(\xi_i, \zeta_i)_{i\geq 1}$ 是根据$\alpha_{t,p,q}$ (定义 2.4) 的独立同分布随机变量序列。假设 $\Phi$ 是一个 $\alpha_{t,p,q}$阶梯，如引理 2.1所述。若满足以下条件，我们称 $(\xi_i, \zeta_i)_{i\geq 1}$ 在时刻 $n$ 对 $m$ 具有拟合时间：
(1) $n < \Phi_m$，(2) $(\xi_n, \zeta_n)$ $= (m, 0)$，(3) 对所有 $i < n$，$\xi_i < m$。

定理 *2.10.* 设 $(\xi_i, \zeta_i)_{i\geq 1}$ 是一个按照$\alpha_{t,p,q}$（定义 *2.4*）取值的独立同分布随机变量序列。如果 $\alpha_{t,p,q}$ 对 $q$存在长间隔（定义 *2.5*），那么 $(\xi_i, \zeta_i)_{i\geq 1}$ 有无穷多个拟合时刻。

证明。由于 $\alpha_{t,p,q}$ 是无限支撑的，对于几乎所有的 $(\xi_i, \zeta_i)_{i\geq 1}$，由引理 2.1，存在一个严格递增的记录时刻序列 $(\tau_n)_{n\geq 1}$，使得几乎必然对充分大的 $n$ 满足 $\tau_n < \Phi(\xi_{\tau_n})$。此外，当 $\alpha_{t,p,q}$ 是无限支撑的时，记录值最终趋于无穷。因此，只需证明：当$\alpha_{t,p,q}$ 对 $q$存在长间隔时，对于几乎所有的 $(\xi_i, \zeta_i)_{i\geq 1}$，存在无穷多个记录时刻 $\tau_n$ 使得 $\zeta_{\tau_n} = 0$。因此，只需证明 $E_m$——由所有满足以下条件的 $(\xi_i, \zeta_i)_{i\geq 1}$ 构成的事件：$(m, 0)$ 在 $\{(m, 1)$、$(m+1, 1)$ …$\}$ 之前出现，且只需考虑有限时刻——

以概率为一的方式，对无穷多个 $m$发生。我们有

$$E_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{n,m}, \tag{2.3}$$

其中 $E_{n,m}$是所有满足以下条件的 $(\xi_i, \zeta_i)_{i\geq 1}$的集合：它们的第 $n$ 个增量为 $(m,0)$，且前 $n-1$ 个增量不属于 $\{(j,1): j \geq m\}$:

$$E_{n,m} = \Big\{(\xi_i,\zeta_i)_{i\geq 1} : (\xi_n,\zeta_n) = (m,0), \forall i < n\ \xi_i < m\Big\}.$$

由于 $\alpha_{t,p,q}$ 对于 $q$存在长间隔，因此存在无穷多个 $m$，使得对每个$i \geq 1$

$$P(\xi_i = m, \zeta_i = 0) \geq \sum_{n=m}^{\infty} P(\xi_i = n, \zeta_i = 1). \tag{2.4}$$

因此，$\alpha_{t,p,q}$ 对于 $q$ 存在长间隔，意味着 $m$满足 (2.4)：增量 $(m, 0)$ 在来自 $\{(j, 1): j \geq m\}$ 的增量之前出现的概率，高于它在来自 $\{(j, 1): j \geq m\}$ 的增量之后出现的概率。因此，对于无穷多个 $m$，$P(E_m) \geq 1 - P(E_m)$ 且$P(E_m) \geq 1/2$ 。因此，

$$P(\limsup_{m\to\infty} E_m) \geq \frac{1}{2}.$$

注意，lim sup $E_m$ 是一个具有正概率的尾事件，因此，根据零一引理，所需结果$m\to\infty$成立。□

## 3. 切换与 Følner 集

本节首先回顾切换集和 Følner 集的定义。

**定义 3.1(切换集)。** 设 $B$ 是 $G$ 的非空子集，且 $g$ 属于 $G$。当 $i, j \in \{1, -1\}$ 时，我们称 $g$ 是 $B$ 的一个切换元素

$$g^i B g^j \cap B \subseteq \{e\}.$$

当 $S$ 是 $G$ 的非空子集时，若对每个 $g \in S$，$g$ 都是切换元素，我们称 $S$ 对 $B$ 是切换的。

**注 3.2.** 请注意，我们对切换元素的定义等价于超切换元素，见 [FHTVF19]。此外，根据 [FHTVF19，命题 2。5] 每个可数 amenable ICC 群的非空对称有限子集都有无穷多个切换元素。EK23 [EK23，命题 4。25] 也证明了所有可数 ICC 群都具有相同的结论。

**定义 3.3 (Følner 性质)。** 设 $K$ 和 $F$ 是 $G$ 的有限子集。对于 $\varepsilon > 0$，若 $F$ 满足以下条件，则称其为 $K$ 的 $\varepsilon$–Følner 集

$$|gF\Delta F| < \varepsilon|F|$$

对所有 $g \in K$。

**注 3.4.** 注意到 $G$ 是顺从的，当且仅当对于每个 $\varepsilon > 0$以及有限子集$K$， $G$都存在一个 $\varepsilon$–Følner 集 $K$。此外，根据 [Nam64，定理 5，2], 可以选取 $F$ 使其对称，并包含任意给定的有限子集 $A$，该子集属于 $G$，另见 [Eme74，定理 1"]。

**定义 3.5 (Følner–切换集)。** 设 $(F_n)_{n\geq 1}$ 和 $(S_n)_{\geq 1}$ 是 $G$ 中的子集序列，满足 $S_n = \{s_n, s_n^{-1}\}$ 和 $e \in F_1$。假设 $\Phi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是非递减的。我们称 $(F_n, S_n, \Phi_n)_{n\geq 1}$ 是 *Følner*-切换，当

(1) $F_n$ is symmetric,
(2) $(F_n)_{n\geq 1}$ is pairwise disjoint,
(3) $F_n$ is $\frac{1}{n}$–Følner for $\left(S_1 \cup \cdots \cup S_{n-1} \cup F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1}\right)^{5\Phi_n}$,
(4) $S_n$ is switching for $\left(S_1 \cup \cdots \cup S_{n-1} \cup F_1 \cup \cdots \cup F_n\right)^{5\Phi_n}$,
(5) $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

注意，由于 $e \in F_1$ 和 $\Phi$ 是非递减的，性质 (4)和切换元素的定义意味着 $(S_n)_{n\geq 1}$ 两两不相交，而且 $F_n$ 和 $S_n$ 也两两不相交。

**引理 3.6.** 设 $G$ 是一个可数 *amenable ICC* 群。若 $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$单调不减，则存在 *Følner*-切换 $(F_n, S_n, \Phi_n)_{n\geq 1}$。

证明。该证明直接源于可和性以及 ICC 群中切换元素的存在。记 $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ 和 $G = \{a_i, a_i^{-1} : i \geq 1\}$，其中 $a_1 = e$ 是 $G$的单位元。假设 $s_1 \neq e$。定义 $F_1 = \{e\}$ 和 $S_1 = \{s_1, s_1^{-1}\}$。显然， $F_1$ 和 $S_1$ 满足性质 (1)-(5)。用归纳法，假设已构造出 $(F_i, S_i)_{1\leq i<n}$，并满足所需性质 (1)–(4)。令$K_i = S_1 \cup \cdots \cup S_i \cup F_1 \cdots \cup F_i$。由于 $G$ 是顺从的，根据注 3.4，存在一个对称有限集 $F_n$，它是 $(K_{n-1})^{5\Phi_n}$的 $\varepsilon_n$–Følner 集；此外，可以选取 $F_n$，使得 $F_n \cap (F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1}) = \emptyset$且 $a_{i_n} \in F_n$，其中 $i_n = \min\{i : a_i \notin F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1}\}$。由于 $G$ 是一个 ICC 群，根据注 3.2，$(K_{n-1} \cup F_n)^{5\Phi_n}$ 有无穷多个切换元素。因此，存在一个 $S_n = \{s_n, s_n^{-1}\}$，它是 $(K_{n-1} \cup F_n)^{5\Phi_n}$的切换元素。由此通过归纳法得到所需结论。□

3.1. **非刘维尔测度的构造**。我们先回顾以下结果，它将用于在 ICC 群上构造非刘维尔测度。

定理 *3.7.* [*EK23*，定理 *3.*10] 设 $G$ 是一个可数 *ICC* 群，$\mu$ 是其上的一个非退化概率测度。假设 $\alpha$ 是 $\mathbb{N}$ 上的一个无限支撑概率测度，且 $\Phi$ 是一个 $\alpha$–阶梯。设 $(G_n)_{n\geq 1}$ 和 $(S_n)_{n\geq 1}$ 是 $G$ 中的有限集序列，满足 $G = \cup_{n=1}^{\infty} G_n$ 且 $e \in G_1$，并且 $S_n$ 对于 $(S_1 \cup \cdots \cup S_{n-1} \cup G_1 \cup \cdots \cup G_n)^{5\Phi_n}$ 是切换集。令 $\mu(G_n \cup S_n) = \alpha_n$ 对每个 $n \geq 1$ 都成立，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_n + \alpha_{n+1} + \cdots}\right)^2 < \infty\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(G_n)}{\alpha_n} < \infty\,. \tag{3.1}$$

那么，概率测度 $\mu$ 是非刘维尔。

**注释 3.8.** 条件（3.1）中的第一个条件确保概率测度 $\alpha$在 $\mathbb{N}$ 上最终会出现简单记录——也就是说，对于足够大的记录值，每个值都恰好出现一次。第二个条件确保这些简单记录最终由切换集产生。这正是该构造中测度变为非刘维尔的关键所在，详见 [EK23] 。

我们使用定理 3.7 中的构造来处理两种不同情形。在第一种情形中，我们关注使用 Følner–切换集，见第 4 节。在第二种情形中，我们关注有限熵测度，见第5节

我们用 $|F|$ 表示 $F$ 的基数。设 $F$ 是一个有限集，用 $\mathbb{U}(F)$ 表示 $F$ 上的均匀概率测度：

$$\mathbb{U}(F)(g) = \begin{cases} \frac{1}{|F|} & g \in F\,, \\ 0 & \text{otherwise}\,. \end{cases}$$

定义 3.9. 设 $p$ 和 $q$ 是定义在$\mathbb{N}$ 上的两个无限支撑概率测度，且 $q$ 在 $\mathbb{N}$上全支撑。假设 $\Phi$是引理 2.3 中的一个 $q$–通用阶梯。设$G = \{a_i, a_i^{-1}\colon\ i \in \mathbb{N}\}$满足 $a_1 = e$。定义 $G_n = \{a_n, a_n^{-1}\}$。假设 $S_n = \{s_n, s_n^{-1}\}$是 $(S_1 \cup \cdots \cup S_{n-1} \cup G_1 \cup \cdots \cup G_n)^{5\Phi_n}$的切换。设 $\mathbb{U}(G_n)$和$\mathbb{U}(S_n)$分别是 $G_n$ 和 $S_n$上的均匀概率测度。对于 $0 < t < 1$，我们定义概率测度

$$\mu^{t,p,q} = t\sum_{n=1}^{\infty} p_n \mathbb{U}(S_n) + (1-t)\sum_{n=1}^{\infty} q_n \mathbb{U}(G_n)\,. \tag{3.2}$$

注意 $\mu^{t,\ p,\ q}$ 是对称且全支撑的。当 $p$和 $q$ 都具有有限熵时， $\mu^{t,\ p,\ q}$ 具有有限熵。

**定义 3.10.** 设 $q$ 为 $\mathbb{N}$上的全支撑概率测度，且 $\Phi$ 为通用 $q$–阶梯，如引理 2.3所述。设（$F_n$， $S_n$， $\Phi_n$）$_{n\geq 1}$ 为一个 Følner-切换，其存在性由引理3.6保证。设 $p$ 为 $\mathbb{N}$上的无限支撑概率测度。对于$0 < t < 1$，我们定义概率测度

$$\mu_{t,p,q} = t\sum_{n=1}^{\infty} p_n \mathbb{U}(S_n) + (1-t)\sum_{n=1}^{\infty} q_n \mathbb{U}(F_n). \tag{3.3}$$

显然，$\mu_{t,\ p,\ q}$ 是对称的。由于 $G = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ 与 $q$ 在$\mathbb{N}$上是全支撑的，概率测度$\mu_{t,\ p,\ q}$ 是全支撑的。注意，由 Følner-切换集的构造，每个 $S_n$ 至多有两个元素。但是，我们无法控制 $F_n$中元素的个数。因此，$\mu_{t,\ p,\ q}$ 的熵无法被控制，并且可能为无穷。

注意，在上述两种构造中，阶梯依赖于某个测度。然而，可以用一类共享同一阶梯的测度来替换该测度。

**引理 3.11.** 设 $p$ 和 $q$ 是定义在$\mathbb{N}$上的无限支撑概率测度，满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{p_n + q_n}{p_n + q_n + p_{n+1} + q_{n+1} + \cdots}\Big)^2 < \infty\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n}{q_n + p_n} < \infty\,. \tag{3.4}$$

若 $\tilde{p}$和 $\tilde{q}$是定义在 $\mathbb{N}$上的概率测度，且对于某些$0 < d \leq 1$ 和$d' > 0$，有 $d(p+q) \leq \tilde{p} + \tilde{q} \leq d'(p+q)$，则对每个 $0 < t < 1$， $\mu^{t,\tilde{p},\tilde{q}}$ （定义 3.9）和 $\mu_{t,\tilde{p},\tilde{q}}$ （定义 3.10）都是非刘维尔的。

证明。根据 $\mu^{t,p,q}$ 和 $\mu_{t,p,q}$的定义，阶梯 $\Phi$ 是一个 $q$–通用阶梯。由于 $(1-t)dq \leq (1-t)\tilde{q} + t\tilde{p}$，根据引理 2.3 $\Phi$，它也是一个 $t\tilde{p} + (1-t)\tilde{q}$–阶梯。现在， $d(p+q) \leq \tilde{p} + \tilde{q} \leq d'(p+q)$意味着性质 (3.4) 对 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$也成立。因此，对每个$0 < t < 1$，定理 3.7 中的所有条件都得到满足。因此，$\mu_{t,\tilde{p},\tilde{q}}$ 和 $\mu^{t,\tilde{p},\tilde{q}}$ 都是非刘维尔的。□

## 4. ICC顺从群的刘维尔测度

我们将证明，根据赋予 Følner集或切换集的权重方式，概率测度 $\mu_{t,\ p,\ q}$ （定义 3.10）可能成为刘维尔测度；尤其是在 $\mu_{t,\ q,\ p}$ 并非在所有切换集上都全支撑时，情况正是如此。为此，以下述方式研究 $\mu_{t,\ p,\ q}$ 会更容易。设 $(\xi_i,\ \zeta_i)_{i\geq 1}$ 是一个独立同分布随机

变量序列，其取值于 $\mathbb{N}\times\{0,1\}$，服从 $\alpha_{t,p,q}$（定义 2.4）。当 $(\xi_i,\zeta_i)=(k,0)$ 时，我们从 $F_k$ 中均匀选取 $h_i$；当 $(\xi_i,\zeta_i)=(k,1)$ 时，则从 $S_k$ 中均匀选取。显然，$(h_i)_{i\geq 1}$ 是一个独立同分布随机变量序列，其中 $h_i$ 服从 $\mu_{t,p,q}$。这一构造使我们能够传递拟合时刻（定义 2.9）的性质。因此，当相应的 $(\xi_i,\zeta_i)_{i\geq 1}$ 在时刻 $n$ 对于 $m$有一个拟合时刻时，我们称 $(h_i)_{i\geq 1}$ 在时刻 $n$ 对于 $m$有一个拟合时刻。

当 $\theta$ 是群 $G$ 上的有限测度时，我们用 $\theta^{*n}$ 表示 $\theta$ 与自身的 $n$ 重卷积。我们用 $\|\theta\|=\sum_{g\in G}\theta(g)$ 表示 $\theta$ 的 $\ell^1(G)$ 范数。

**定理 4.1(有无穷多个拟合时刻的 $\rightarrow$ 刘维尔性质）**。假设$\alpha_{t,\ p,\ q}$（定义 2.4）有无穷多个拟合时刻。那么，相应的$\mu=\mu_{t,\ p,\ q}$（定义 3.10）是刘维尔的。

证明。首先，我们将证明对每个 $g\in G$，当 $n\to\infty$ 时，$\|g\mu^{*n}-\mu^{*n}\|\to 0$。

令 $M_n=\max\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$，其中 $(\xi_i,\ \zeta_i)_{i\geq 1}$ 是基于$\alpha_{t,\ p,\ q}$ 的独立同分布随机变量序列，并且 $\varphi$ 如引理2.1中所述为非恒定且非递减的。令 $T_n$ 表示该随机游走的增量集合，其中这些增量在时刻 $n$ 对于 $M_n$或 $M_n\leq\varphi_n$没有拟合时刻。

滥用记号，我们也将 $T_n$ 在 $(h_i)_{i\geq 1}\to h_1\dots h_n$ 下的像记为 $T_n$。我们根据 $T_n$ 及其补集 $T_n^c$ 将 $\mu^{*n}$ 分成两部分：

$$\mu^{*n}=\mu^{*n}|_{T_n^c}+\mu^{*n}|_{T_n}. \tag{4.1}$$

注意到，$\mu^{*n}|_{T_n^c}$ 可以写成

$$\mu^{*n}|_{T_n^c}=\sum_{k_1,\cdots,k_n\in\mathbb{N}} c_{k_1,\cdots,k_n}\beta_{k_1}*\cdots*\beta_{k_n}|_{T_n^c}, \tag{4.2}$$

其中每个 $\beta_{i_j}$ 都是 $\mathbb{U}(F_{i_j})$ 或 $\mathbb{U}(S_{i_j})$。然而，$T_n^c$ 的定义意味着，对于每个 $\beta_{k_1}*\cdots*\beta_{k_n}|_{T_n^c}$，都存在概率测度 $\lambda$ 和 $\vartheta$，使得

$$\beta_{k_1}*\cdots*\beta_{k_n}|_{T_n^c}=\lambda*\mathbb{U}(F_m)*\vartheta,$$

其中 $\varphi_n<m=$ 是满足 $n<\Phi_m$ 的 $\{k_1,\dots,k_n\}$ 的最大值，并且

$$\text{support of }\lambda\subseteq\Big(\bigcup_{j=1}^{m-1}(S_j\cup F_j)\Big)^{n-1}\subseteq\Big(\bigcup_{j=1}^{m-1}(S_j\cup F_j)\Big)^{5\Phi_m}. \tag{4.3}$$

因此，根据 Følner–切换集的性质

$$\|\lambda*\mathbb{U}(F_m)*\vartheta-\mathbb{U}(F_m)*\vartheta\|\leq\|\lambda*\mathbb{U}(F_m)-\mathbb{U}(F_m)\|\leq\frac{1}{m}. \tag{4.4}$$

另一方面，对于 $T_n^c$ 中的每个 $(h_i)_{i\geq 1}$，都有 $\varphi_n<m$。因此，

$$g\in\Big(\bigcup_{j=1}^{\varphi_n}(S_j\cup F_j)\Big)\subseteq\Big(\bigcup_{j=1}^{m-1}(S_j\cup F_j)\Big).$$

此外，$g\lambda$ 的支撑至多为 $\Big(\bigcup_{j=1}^{m-1}(S_j\cup F_j)\Big)^n$ 和 $n<5\Phi_m$，因此根据 Følner–切换集的性质

$$\|g\lambda*\mathbb{U}(F_m)-\mathbb{U}(F_m)\|\leq\frac{1}{m}<\frac{1}{\varphi_n}. \tag{4.5}$$

结合（4.4）和（4.5）可知

$$\lim_{n\to\infty}\|g\mu^{*n}|_{T_n^c}-\mu^{*n}|_{T_n^c}\|=0\quad\forall g\in\Big(\bigcup_{j=1}^{\varphi_n}(S_j\cup F_j)\Big). \tag{4.6}$$

另一方面，几乎每个增量都有无穷多个拟合时刻，并且根据引理 2.1$M_n > \varphi_n$ 对所有充分大的 $n$，我们可以找到一个子序列 $(T_{n_j})_{j\geq 1}$ 使得

$$\lim_{j\to\infty} \mathbb{P}(T_{n_j}) = \|\mu^{*n_j}|_{T_{n_j}}\| = 0\,. \tag{4.7}$$

我们有

$$\|g\mu^{*n} - \mu^{*n}\| \leq \|g\mu^{*n}|_{T_n^c} - \mu^{*n}|_{T_n^c}\| + 2\|\mu^{*n}|_{T_n}\|\,. \tag{4.8}$$

结合（4.6）、（4.7）和（4.8）可知，$\|g\mu^{*n} - \mu^{*n}\|$ 的一个子列对每个 $g \in G$ 都收敛到零，当 $\varphi_n$ 是非递减的时。由于 $\|g\mu^{*n} - \mu^{*n}\|$ 是递减的，我们对每个 $g \in G$得到 $\lim_{n\to\infty} \|g\mu^{*n} - \mu^{*n}\| = 0$。现在假设 $f$ 是有界的$\mu$–调和的。因此，

$$|f(g) - f(e)| \leq \sum_{h\in G} |f(gh)\mu^{*n}(h) - f(h)\mu^{*n}(h)| \leq \|f\|_\infty \|g\mu^{*n} - \mu^{*n}\|\,.$$

我们有 $\lim_{n\to\infty} \|g\mu^{*n} - \mu^{*n}\| = 0$，因此 $f$ 必为常数，且 $\mu$ 是刘维尔的。 □

**推论 4.2.** 假设$\alpha_{t,\ p,\ q}$（定义2.4）对 $q$ 具有长间隔（定义2.5）。则，相应的概率测度$\mu_{t,\ p,\ q}$（定义3.10）是刘维尔的。

证明。由于 $\alpha_{t,\ p,\ q}$ 对于 $q$有一个长间隔，定理2.10 推出 $\alpha_{t,\ p,\ q}$ 有无穷多个拟合时刻。因此，定理4.1 推出 $\mu_{t,\ p,\ q}$ 是刘维尔的。□

4.1. **刘维尔测度的凸组合。** 现在我们可以证明定理 A。

**定理 4.3**（=定理A）。设 $G$ 是一个可数的非超 *FC* 中心化 *amenable* 群。对于任意 $k \geq 2$，存在一个由对称且非退化的概率测度组成的序列 $(\mu_m)_{m\geq 1}$ 使得 $\mu = \sum b_m\mu_m$ 是非刘维尔的，当且仅当$m\geq 1$概率测度 $b$ 在 $\mathbb{N}$ 上至少有 $k$ 个原子。

证明。注意，$G$ 上的非退化概率测度是刘维尔的，当且仅当它在 $G$ 模 $G$ 的超 FC 像是刘维尔的 [EK23，命题 5.10]。因此，不失一般性，我们可以假设 $G$是一个可数 amenable ICC 群。设 $p$ 和 $q$是 $\mathbb{N}$ 上的全支撑概率测度，且满足条件 (3.4)。假设 $(F_n, S_n, \Phi_n)_{n\geq 1}$ 是 Følner-切换，其中 $\Phi$ 是引理 2.3 中的一个通用 $q$阶梯。设 $(A_j)_{j\geq 1}$ 是引理 2.8 中的一个 $k$覆盖。令 $p^j = p^{A_j}$, $t_j = p(A_j)$，以及

$$\mu_j = \mu_{t_j,p^j,q} = t_j \sum_{n=1}^{\infty} p_n^j \mathbb{U}(S_n) + (1-t_j)\sum_{n=1}^{\infty} q_n \mathbb{U}(F_n)\,. \tag{4.9}$$

由于 $\Phi$ 是一个通用的 $q$–阶梯，且 $\alpha_j = t_j p^j + (1-t_j)q \geq (1-t_j)q$，由引理 2.3 $\Phi$ 也是一个 $\alpha_j$–阶梯。由引理 2.8，每个 $k-1$ 凸组合 $\alpha_j$ 都存在一个关于 $q$的长间隔，因此推论 4.2 蕴含每个 $k-1$ 凸组合 $\mu_j$ 都是刘维尔的。

反过来，设 $b$ 是 $\mathbb{N}$ 上的一个概率测度，其至少有 $k$ 个原子，且 $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} b_i\mu_i$，其中 $\mu_i$ 的定义与（4.9）中的相同。容易看出 $\mu = \mu_{c,\ \tilde{p},\ q}$，其中

$$c = \sum_{i=1}^{\infty} b_i t_i, \quad c_n = \sum_{i=1}^{\infty} b_i 1_{A_i}(n), \qquad \tilde{p}_n = \frac{c_n p_n}{c}\,.$$

回顾一下，$(A_i)_{i\geq 1}$ 是一个 $k$覆盖，因此 $k$ 个互不相同的集合 $A_i$s的并集为 $\mathbb{N}$。由于 $b$ 至少有 $k$ 个原子，概率测度 $\tilde{p}$ 在 $\mathbb{N}$上全支撑。令 $b = b_1 + \cdots + b_{k-1}$，其中 $b_1 \geq \cdots \geq b_{k-1}$是 $\{b_i$的前 $k-1$ 个最大值：$i \in \mathbb{N}\}$。我们声称$c_n \geq 1 - b$对每个 $n \geq 1$都成立。假设对某个 $l_1$，……，$l_{k-1}$，有 $n \notin (A_{l_1} \cup \cdots \cup A_{l_{k-1}})$。

因为（$A_i$）$_{i\geq 1}$是一个 $k$覆盖，所以我们得出 $n \in A_i$对每个 $i \notin \{l_1, \ldots, l_{k-1}\}$都成立。因此 $\bar{c}_n \geq 1 - b_{l_1} - \cdots - b_{l_{k-1}} \geq 1 - b$。所以，（$1-b$）$p_n \leq c\bar{p}_n \leq p_n$，根据引理3.11$\mu = \mu_{c,\ \tilde{p},\ q}$ 是非刘维尔的。□

## 5. 有限熵下的刘维尔与非刘维尔

我们回顾熵的基本结果。设 $X$ 是概率空间 $(\Omega\ P)$ 上的一个可数随机变量。那么，$X$ 的熵定义为

$$H(X) = -\sum_{x\in\Omega} P(X = x) \log P(X = x)\,,$$

其中 0log 0 定义为 0。设 $Y$ 是一个可数随机变量。那么，给定结果 $y$ 的条件熵定义为

$$H(X|Y = y) = -\sum_{x\in X} P(X = x|Y = y) \log P(X = x|Y = y)\,,$$

$X$ 在给定 $Y$ 条件下的条件熵定义为

$$H(X|Y) = \sum_{y} H(X|Y = y)P(Y = y)\,.$$

**引理 5.1**。设 $X$ 和 $Y$ 是两个具有有限熵的离散随机变量，则

$$H(X|Y) \leq H(X) \leq H(X|Y) + H(Y)\,.$$

设 $\mu$ 是可数群 $G$ 上的一个概率测度。设 $w_n = g_1 \cdots g_n$，其中$g_1$、.....、$g_n$ 按照 $\mu$ 独立同分布。因此，$w_n$的分布为 $\mu^{*n}$，记作$H(\mu^{*n}) = H(w_n)$。容易验证熵的次可加性：$H(\mu^{*(m+n)}) \leq H(\mu^{*n}) + H(\mu^{*m})$。因此，$\mu$ 的渐近熵定义为

$$h(\mu) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\mu^{*n}) = \inf_n \frac{1}{n} H(\mu^{*n}).$$

下面将利用熵的这一经典结果，判断有限熵概率测度是否为刘维尔。

**定理 5.2**。 [KV83，定理 1。1][Der80，定理，页码 255] 设 $\mu$ 是可数群 $G$ 上的有限熵概率测度。那么，$\mu$ 是刘维尔测度当且仅当$h(\mu) = 0$。

我们将 $\mathcal{P}(A)$（以及 $\mathcal{P}_{sym}(A)$）记为 $A$ 上的概率测度（以及对称概率测度）的集合。

**定义 5.3 ($\mathcal{D}$–度量）**。设 $\lambda$ 和 $\theta$ 是可数群 $G$ 上的两个概率测度。我们定义 $\theta$ 和 $\lambda$ 之间的 $\mathcal{D}$-度量为

$$\mathcal{D}(\theta, \lambda) = \|\theta - \lambda\| + |H(\theta) - H(\lambda)|\,.$$

容易验证，$\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{P}(G)$ 上的度量。

**引理 5.4**。设 $G$ 是一个可数群，且 $n \in \mathbb{N}$。映射 $\lambda \to H(\lambda^{*n})$ 在 $\mathcal{P}(G)$ 上关于 $\mathcal{D}$。连续。

证明。设 $\lambda \in \mathcal{P}(G)$。如果 $n = 1$，证明显然成立。设 $n > 1$。我们利用极大（最优）耦合的存在性。设 $\theta \in \mathcal{P}(G)$ 使得 $0 < 2t = \|\theta - \lambda\| < 2$。令

$$\tilde{w} = \min\{\lambda, \theta\}\,, \qquad \tilde{\lambda} = \lambda - \tilde{w}\,, \qquad \tilde{\theta} = \theta - \tilde{w}\,.$$

~ ~现在定义概率测度 $w = \frac{\tilde{w}}{\|\tilde{w}\|}$, $\lambda_0 = \frac{\lambda}{\|\tilde{\lambda}\|}$ 和 $\theta_0 = \frac{\theta}{\|\tilde{\theta}\|}$。因此,

$$\lambda = t\lambda_0 + (1-t)w, \qquad \theta = t\theta_0 + (1-t)w\,.$$

令 $b_1^t$ 为一个伯努利随机变量，其中 $b_1^t = 1$ 以概率 $t$ 按照 $\theta_0$ 进行抽样，而 $b_1^t = 0$ 以概率 $1-t$ 按照 $w$ 进行抽样。

我们现在估计 $H(\theta^{*n})$。令 $b^t = b_1^t + \cdots + b_n^t$，其中 $b_1^t, \ldots, b_n^t$ 是按照$b_1^t$独立同分布的。因此， $b^t$ 服从二项分布，计数按照 $\theta_0$进行抽样的次数。利用引理5.1中的熵的性质,

$$H(\theta^{*n}) \le H(\theta^{*n}|b^t \neq 0)P(b^t \neq 0) + H(\theta^{*n}|b^t = 0)P(b^t = 0) + H(b^t)\,.$$

根据次可加性,

$$H(\theta^{*n}|b^t \neq 0) \le nH(\theta)\,, \quad H(b^t) \le nH(b_1^t)\,.$$

由于 $H(\theta^{*n}|b^t = 0)P(b^t = 0) = (1-t)^n H(w^{*n}) \le \min\{H(\lambda^{*n}), H(\theta^{*n})\}$，我们得出

$$H(\theta^{*n}) \le n(1-(1-t)^n)H(\theta) + H(\lambda^{*n}) + nH(b_1^t). \tag{5.1}$$

注意，我们可以为 $H(\lambda^{*n})$ 写出类似的上界:

$$H(\lambda^{*n}) \le n(1-(1-t)^n)H(\lambda) + H(\theta^{*n}) + nH(b_1^t)\,. \tag{5.2}$$

使用 $H(\theta) \le \mathcal{D}(\theta, \lambda) + H(\lambda)$ 以及 $1-(1-t)^n \le 1$ 于 (5.1) 并考虑 (5.2)，我们得到

$$|H(\theta^{*n}) - H(\lambda^{*n})| \le n\mathcal{D}(\theta,\lambda) + n(1-(1-t)^n)H(\lambda) + nH(b_1^t)\,.$$

注意，当 $t \to 0$ 时， $H(b_1^t) = -t\log t - (1-t)\log(1-t)$ 和 $n(1-t)^n H(\lambda)$ 趋于零，这意味着映射 $\lambda \to H(\lambda^{*n})$ 关于 $\mathcal{D}$–度量是连续的。□

**定义 5.5**。 若群 $G$ 满足任意有限支撑的对称概率测度在 $G$ 上都是刘维尔的，则称其为有限刘维尔的 。

例如，具有次指数增长的群、 $\mathbb{Z}$ 和$\mathbb{Z}^2$上的灯笼群，以及 $S_\infty$，即 $\mathbb{N}$上有限置换的无限对称群，都是有限刘维尔的。

**引理 5.6**。 设 $G$ 是有限刘维尔的，且 $V$ 是 $G$的对称有限子集。 那么，对于每个 $\varepsilon > 0$ ，都存在依赖于 $V$ 和 $\varepsilon$的 $N$ () 使得

$$H(\mu^{*N}) < \varepsilon N$$

对于 $V$ 上的每个对称概率测度 $\mu$ 。

证明。设 $\varepsilon > 0$ 和 $n \in \mathbb{N}$。考虑集合

$$B(n\varepsilon) = \{\mu \in \mathcal{P}_{sym}(V) \ : \ H(\mu^{*n}) < n\varepsilon\},$$

根据引理 $\mathcal{D}$–度量，这是一个开集 5.4。由于 $G$ 是有限刘维尔的，$(B(n\varepsilon))_{n\ge 1}$ 构成 $\mathcal{P}_{sym}(V)$ 的一个开覆盖。由于 $V$ 是有限的， $\mathcal{P}_{sym}(V)$ 关于 $\mathcal{D}$是紧致的。因此，存在 $N$ 使得

$$\mathcal{P}_{sym}(V) = \bigcup_{n=1}^{N} B(n\varepsilon)\,.$$

我们声称，对于每个 $i \le j$，都有 $B(i\varepsilon) \subseteq B(j\varepsilon)$，因此， $P_{sym}(V) = B(N\varepsilon)$。为证伪，假设 $H(\mu^{*n}) < n\varepsilon$ ，但 $H(\mu^{*(n+1)}) \ge (n+1)\varepsilon$。

由次可加性， $H(\mu^{*(n+1)}) \leq (n+1)H(\mu)$，可得 $H(\mu) \geq \varepsilon$。另一方面，$(H(\mu^{*n+1}) - H(\mu^{*n}))_{n\geq 1}$ 是一个递减序列，参见 [KV83，命题 1。3]，因此

$$H(\mu^{*2}) - H(\mu) \geq H(\mu^{*(n+1)}) - H(\mu^{*n}) \geq \varepsilon .$$

因此， $H(\mu^{*2}) \geq 2\varepsilon$。类似地，我们可以证明，对于 $i = 1$、……、$n+1$， $H(\mu^{*i}) \geq i\varepsilon$，这与 $H(\mu^{*n}) < n\varepsilon$ 矛盾。因此，对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$， $B(n\varepsilon) \subseteq B((n+1)\varepsilon)$。因此，$\mathcal{P}_{sym}(V) = B(N\varepsilon)$。□

**注 5.7**。注意，当 $V'$（一个概率测度集）满足一致一阶矩时，映射 $V' \ni \mu \to H(\mu^{*n})$ 在 $\ell^1(G)$ [Tan24，引理 A.1]中是连续的。对于群的附加条件， $\mu \to h(\mu)$ 的连续性已在 [EK13] 和 [Sil25]中得到证明。然而，使用 $\mathcal{D}$–度量的优势在于，连续性不需要矩条件 $\mu \to H(\mu^{*n})$。

记 $\mathcal{D}(\theta, P_{sym}(V)) = \inf\{\mathcal{D}(\theta, \lambda) : \lambda \in \mathcal{P}_{sym}(V)\}$，其中 $\theta \in \mathcal{P}(G)$，且 $V$是 $G$的对称子集 $V$。

**引理 5.8**。设 $G$ 是有限刘维尔。那么对每个 $\varepsilon > 0$ 以及 $G$ 的每个有限对称子集 $V$，都存在 $\delta(V, \varepsilon) > 0$，使得

$$h(\theta) < \varepsilon$$

对每个满足 $\mathcal{D}(\theta, \mathcal{P}_{sym}(V)) < \delta(V, \varepsilon)$。的 $\theta \in \mathcal{P}(G)$，

证明。假设 $N$ 如引理 5.6 中所述，对应于 $\varepsilon/2 > 0$ 以及有限对称子集$V$。令 $\lambda \in \mathcal{P}_{sym}(V)$，于是由引理 5.6

$$H(\lambda^{*N}) < \frac{N\varepsilon}{2} . \tag{5.3}$$

另一方面，由引理 5.4 可知，对于 $N\varepsilon/2$ 存在 $\delta_\lambda > 0$ 使得

$$\forall \theta \in \mathcal{P}(G) \quad \text{if} \quad \mathcal{D}(\theta, \lambda) < \delta_\lambda \quad \text{then} \quad H(\theta^{*N}) < H(\lambda^{*N}) + \frac{N\varepsilon}{2} . \tag{5.4}$$

对于 $\lambda \in \mathcal{P}_{sym}(V)$，考虑开集

$$B(\lambda) = \left\{\theta \in \mathcal{P}(G) : \mathcal{D}(\theta, \lambda) < \frac{\delta_\lambda}{2}\right\} .$$

由于 $\mathcal{P}_{sym}(V)$ 是紧致的，对于某个 $j \geq 1$

$$\mathcal{P}_{sym}(V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{j} B(\lambda_i) .$$

定义 $\delta(V, \varepsilon) = \min\{\delta_i/2 : i = 1, \ldots\ldots, j\}$. 假设存在 $\theta \in \mathcal{P}(G)$ 使得 $\mathcal{D}(\theta, \lambda) < \delta(V, \varepsilon)$ 对某个 $\lambda \in P_{sym}(V)$ 成立，则对于某个 $1 \leq i \leq j$ 有 $\lambda \in B(\lambda_i)$，并且根据三角不等式 $\mathcal{D}(\theta, \lambda_i) < \delta_{\lambda_i}$。因此，对 $\lambda_i$ 应用（5.3）、（5.4），并结合 $h(\theta) = \inf_n \frac{1}{n} H(\theta^{*n})$，得到

$$h(\theta) \leq \frac{H(\theta^{*N})}{N} < \frac{H(\lambda^{*N})}{N} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

由此，我们得到了所需的结果。 □

对于次概率测度 $\theta$，定义 $H(\theta) = -\sum_{g\in G} \theta(g) \log \theta(g)$。

**引理 5.9**。假设 $G$ 是有限刘维尔的。设 $\mu$为一个全支撑、对称且具有有限熵的概率测度，定义在 $G$。设 $C_0 > 0$ 为一个常数。则，存在 $(V_n)_{n\geq 1}$，即 $G$ 的有限对称子集的互不相交序列，使得 $G = \bigcup_{n\geq 1} V_n$，以及递减序列 $(r_n)_{n\geq 1}$，使得 $0 < r_n \leq 1$，从而对每个 $n \geq 1$，子概率测度 $\tilde{\mu}_n = \mu|_{V_n}$，即 $\mu$ 在 $V_n$上的限制，满足以下性质：

(1) $\|\tilde{\mu}_1\| \geq \frac{1}{2}$,
(2) $C_0 \sum_{i=n+2}^{\infty} \|\tilde{\mu}_i\| < \delta_n$,
(3) $C_0 \sum_{i=n+2}^{\infty} H(\tilde{\mu}_i) < \delta_n$,
(4) $C_0 r_{n+1} \|\tilde{\mu}_{n+1}\| < \delta_n$,
(5) $C_0 r_{n+1} H(\tilde{\mu}_{n+1}) < \delta_n$,
其中 $\delta_n = \delta\ (V = V_1 \cup \cdots \cup V_n,\ \varepsilon = \dfrac{1}{n})$ 如引理 5.8所述递减。

∞证明。设 $\mu = \sum \tilde{\theta}_i$，其中每个 $\tilde{\theta}_i$ 都是有限支撑的对称子-$i=1$~概率测度。显然，我们可以选择支撑两两不相交的 $\theta_i$。我们取足够大的 $m_1 \geq 1$，使得 $\sum_{i=1}^{m_1} \|\tilde{\theta}_i\| \geq \frac{1}{2}$.。

令 $\tilde{\mu}_1 = \sum_{i=1}^{m_1} \tilde{\theta}_i$，并令 $V_1$ 为 $\tilde{\mu}_1$ 的支撑。假设通过归纳，我们构造了 $V_1$、.....、$V_n$、

$m_1 < m_2 < \ldots m_n$，以及 $\tilde{\mu}_i$、和 ... $C_0 \sum_{i>m_{(j+1)}} \|\tilde{\theta}_i\| < \delta_j$ 成立，并且

$$\tilde{\mu}_{j+1} = \sum_{i>m_j}^{m_{j+1}} \tilde{\theta}_i \qquad j = 1, \ldots, n-1\,.$$

我们现在构造 $\tilde{\mu}_{n+1}$。令 $\delta_n = \delta(V_1 \cup \cdots \cup V_n,\ 1/n)$ 如引理 5.8 中所述，取 $V = V_1 \cup \cdots \cup V_n$ 以及 $\|\tilde{\theta}_i\| < 1/n$ 和 $C_0 \sum_{i>m_{(n+1)}} H(\tilde{\theta}_i) < \delta_n$。现在，我们选取 $m_{n+1}$ 足够大，使得

$$\tilde{\mu}_{n+1} = \sum_{i>m_n}^{m_{n+1}} \tilde{\theta}_i\,, \qquad V_{n+1} = \text{ support of } \tilde{\mu}_{n+1}\,.$$

显然，$(\mu_n)_{n\geq 1}$ 满足性质 (1)–(3)。最后，我们可以选取足够小的 $(r_n)_{n\geq 1}$，使得性质 (4) 和 (5) 得以满足。□

引理 *5.10.* 设 $G$ 为有限刘维尔，且 $\mu$ 是定义在 $G$上的具有有限熵的对称概率测度。假设序列 $(r_i)_{i\geq 1}$ 和 $(\tilde{\mu}_i)_{i\geq 1}$ 按照引理 *5.9* 中针对 $C_0 = 30H(\mu) + 30$ 的方式构造。设 $\nu = \sum c_i \tilde{\mu}_i$ 是 $G$ 上的概率测度，满足$_{i\geq 1}$ $c_1 \geq 1$，并且对每个 $i \geq 1$ 都有 $0 \leq c_i \leq 2$。若对某个 $n \geq 1$ 有 $c_{n+1} \leq 2r_{n+1}$，则

$$h(\nu) < \frac{1}{n}\,.$$

$_n$证明。令 $\tilde{\lambda} = \sum c_i \tilde{\mu}_i$ 并令 $\lambda = \tilde{\lambda}/\|\lambda\|$。令 $V$为 $\tilde{\mu}_1 + \cdots + \tilde{\mu}_n$ 的支撑。它$_{i=1}$只需证明 $\mathcal{D}(\nu, \lambda) < \delta_n = \delta(V, 1/n)$，那么由引理 5.8，结论立即成立。注意

$$H(\nu) = \sum_{i=1}^{\infty} H(c_i\tilde{\mu}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i H(\tilde{\mu}_i) - \sum_{i=1}^{\infty} \|\tilde{\mu}_i\| c_i \log c_i\,.$$

由于 $H(\mu)$ 是有限的，且对于 $0 \leq c_i \leq 2$ for $i \geq 1$,

$$H(\nu) \leq 2\sum_{i=1}^{\infty} H(\tilde{\mu}_i) + 2\log 2 < 2H(\mu) + 1\,. \tag{5.5}$$

另一方面，

$$H(\lambda) = \frac{1}{\|\tilde{\lambda}\|} \sum_{i=1}^{n} H(c_i \tilde{\mu}_i) + \log \|\tilde{\lambda}\| .$$

注意到 $\frac{1}{2} \leq \|\tilde{\lambda}\| \leq 1$，因此

$$|H(\nu) - H(\lambda)| \leq \Big( \frac{1}{\|\tilde{\lambda}\|} - 1 \Big) \sum_{i=1}^{n} H(c_i \tilde{\mu}_i) - \log \|\tilde{\lambda}\| + \sum_{i=n+1}^{\infty} H(c_i \tilde{\mu}_i) \tag{5.6}$$

$$\leq 2H(\nu) \Big( 1 - \|\tilde{\lambda}\| \Big) + H(c_{n+1} \tilde{\mu}_{n+1}) + \sum_{i=n+2}^{\infty} H(c_i \tilde{\mu}_i) . \tag{5.7}$$

式（5.7）中的不等式源于 $x^{-1} - 1 - \log x < 2(1-x)$，其中 $1/2 \leq x \leq 1$。这里˜我们用到了 $c_1 \geq 1$ 和 $\|\tilde{\mu}_1\| \geq 1/2$ 来确保 $\|\lambda\| \geq 1/2$。利用 $c_{n+1} \leq 2r_{n+1}$ 以及 $(\tilde{\mu}_i)_{i \geq 1}$ 和 $r_{n+1}$，如引理 5.9所示，我们可以进一步估计 $|H(\nu) - H(\lambda)|$：

$$1 - \|\tilde{\lambda}\| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i \|\tilde{\mu}_i\| < \frac{4\delta_n}{C_0} \tag{5.8}$$

$$H(c_{n+1} \tilde{\mu}_{n+1}) \leq 2r_{n+1} H(\tilde{\mu}_{n+1}) + 2r_{n+1} \|\tilde{\mu}_{n+1}\| < \frac{4\delta_n}{C_0} \tag{5.9}$$

$$\sum_{i=n+2}^{\infty} H(c_i \tilde{\mu}_i) \leq \sum_{i=n+2}^{\infty} 2H(\tilde{\mu}_i) + \sum_{i=n+2}^{\infty} \|\tilde{\mu}_i\| \; c_i |\log c_i| < \frac{3\delta_n}{C_0} \tag{5.10}$$

结合上述不等式可得

$$|H(\nu) - H(\lambda)| < \frac{8}{5C_0} (2H(\mu) + 1)\delta_n + \frac{7}{C_0} \delta_n .$$

另一方面，

$$\|\nu - \lambda\| = 2(1 - \|\lambda\|) \leq \frac{8}{C_0} \delta_n .$$

注意到 $C_0 = 30H(\mu) + 30$。因此，$\mathcal{D}(\nu, \lambda) = \|\nu - \lambda\| + |H(\nu) - H(\lambda)| < \delta_n$ . □

现在我们已准备好证明定理 B。

**定理 5.11**。设 $G$ 是有限刘维尔的非超 *FC* 中心群，且 $k \geq 2$。则存在一列非退化对称概率测度$(\nu_n)_{n \geq 1}$定义在 $G$ 上，且具有有限熵，使得它们的任意 $k-1$ 凸组合都是刘维尔的，而它们任意非平凡的 $k$ 或更多个(有限或无限) 凸组合都是非刘维尔的。

证明。与定理 4.3 类似，不失一般性，设 $G$ 是可数 amenable ICC 群。设 $p$ 和 $q$ 是定义在 $\mathbb{N}$ 上的两个全支撑概率测度，且具有有限熵。假设 $p$ 和 $q$ 满足引理 3.11 中的性质 (3.4)。设 $0 < t < 1$ 和 $\mu = \mu^t$、$_p$、$^q$ 如定义 3.9 中所述。因此，$\mu$ 是定义在 $G$ 上的全支撑对称概率测度，且具有有限熵。设 $(r_i)_{i \geq 1}$ 和 $(\tilde{\mu}_i)_{i \geq 1}$ 如引理 5.9 中对概率测度 $\mu$所述。设 $(A_n)_{n \geq 1}$ 是一个 $k$–覆盖（见引理 2.7），不失一般性（将 1 加入每个 $A_n$ 后），我们可以假设对 $n \geq 1$ 有 $1 \in A_n$。定义

$$\tilde{\nu}_n = \sum_{i \in A_n} \tilde{\mu}_i + \sum_{i \notin A_n} r_i \tilde{\mu}_i , \qquad \nu_n = \frac{\tilde{\nu}_n}{\|\tilde{\nu}_n\|} .$$

注意，$\nu_n$ 是全支撑且对称的。假设 $b$ 是 $\mathbb{N}$上的概率测度。因此，每个 $\tilde{\mu}_i$ 都以某些正系数出现在

$$\nu = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \nu_n = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \tilde{\mu}_i . \tag{5.11}$$

注意，$1 \in A_n$ 和 $\|\tilde{\mu}_1\| \geq \frac{1}{2}$，因此 $\|\tilde{\nu}_n\| \geq \|\tilde{\mu}_1\| \geq \frac{1}{2}$。另一方面，$r_i \leq 1$，因此

$$\frac{1}{2} \leq \|\tilde{\nu}_n\| \leq 2\,. \tag{5.12}$$

**$k-1$ 凸组合是刘维尔的：**不失一般性，假设 $b_n = 0$对于 $n \geq k$。显然，$0 < c_i \leq 2$ 对于每个 $i \geq 1$。若 $i \notin \bigcup_{n=1}^{k-1} A_n$，则由（5.12）

$$c_i = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{b_n r_i}{\|\tilde{\nu}_n\|} \leq 2r_i\,.$$

因此，由引理5.10 $h(\nu) < \frac{1}{i-1}$。由于 $(A_n)_{n\geq 1}$ 是一个 $k$–覆盖，$\mathbb{N}\backslash(\bigcup_{n=1}^{k-1} A_n)$是一个无限集。因此，$h(\nu) = 0$，且 $\nu$ 是刘维尔的。

**至少 $k$ 个凸组合是非刘维尔的：**现在假设至少有 $k$ 个$\{b_n : n \geq 1\}$ 非零。不失一般性，假设 $b_1 b_2 \cdots b_k > 0$。令 $\tilde{b} = \min\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$。由于 $\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{k} A_n$，对于每个 $i \in \mathbb{N}$，都存在某个$n \in \{1, \ldots, k\}$ 使得

$$c_i \geq \frac{b_n}{\|\tilde{\nu}_n\|} \geq \frac{\tilde{b}}{2} > 0\,.$$

另一方面，根据引理 $\tilde{\mu}_i)_{i\geq 1}$ 的构造5.9，

$$\mu^{t,p,q} = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}_i\,.$$

因此，$\nu = \mu^{\bar{t},\,\bar{p},\,\bar{q}}$ 对于某个 $0 < \bar{t} < 1$，以及一些全支撑概率测度 $\bar{p}$ 和 $\bar{q}$ 在 $\mathbb{N}$上。由于 $\frac{\tilde{b}}{2} \leq c_i \leq 2$，我们得到 $\frac{\tilde{b}}{2}\bar{p} \leq p \leq 2\bar{p}$ 和 $\frac{\tilde{b}}{2}\bar{q} \leq q \leq 2\bar{q}$. 因此，引理 3.11表明 $\nu$ 是非刘维尔的。□

## 参考文献

[AAMBV16] Gideon Amir、Omer Angel、Nicol´as Matte Bon 和 B´alint Vir´ag，《群作用于有根树的刘维尔性质》，Ann. Inst. Henri Poincar´e Probab. Stat. 52 (2016)，第 4 期，1763–1783。MR 3573294[AAV13] Gideon Amir、Omer Angel 和 B´alint Vir´ag，《线性活动自动机群的可和性》，J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 15 (2013)，第 3 期，705–730。MR 3085088[Alp21] Andrei Alpeev，《左随机游走尾边界平凡而右随机游走尾边界非平凡的测度示例》，arXiv 预印本 arXiv:2105.11359 (2021)。[Alp24] ，《泊松-弗斯滕伯格边界上的秘密共享 I》，arXiv 预印本 arXiv:2406.01580 (2024)。[AV14] Gideon Amir 和 B´alint Vir´ag，《高次数自动机群的正速度》，Groups Geom. Dyn. 8 (2014)，第 1 期，23–38。MR 3209701[BKN10] Laurent Bartholdi、Vadim A. Kaimanovich 和 Volodymyr V. Nekrashevych，《关于自动机群的可和性》，Duke Math. J. 154 (2010)，第 3 期，575–598。MR 2730578[Bla55] David Blackwell，《具有可数多个状态和平稳转移概率的暂态马尔可夫过程》，Ann. Math. Statist. 26 (1955)，654–658。MR 0075479 (17,754d)[BNZ25] Nicol´as Matte Bon、Volodymyr Nekrashevych 和 Tianyi Zheng，《群的刘维尔性质与共形维数》，即将在 Inventiones Mathematicae 发表 (2025)，arXiv:2305.14545。[CD60] Gustave Choquet 和 Jacques Deny，《关于卷积方程 $\mu = \mu * \sigma$》，C. R. Acad. Sci. Paris 250 (1960)，799–801。MR 0119041 (22 #9808)

[CF25] Kunal Chawla 和 Joshua Frisch，《泊松边界不可实现性》，arXiv 预印本 arXiv:2506.14029 (2025)。[CFFT25] Kunal Chawla、Behrang Forghani、Joshua Frisch 和 Giulio Tiozzo，《无矩条件的双曲群泊松边界》，Ann. Probab. 53 (2025)，第 5 期，1897–1918。[Der80] Yves Derriennic，《次可加遍历定理的若干应用》，随机游走会议（Kleebach，1979）（法文），Ast´erisque，第 74 卷，法国数学会，巴黎，1980，第 183–201 页，4。MR 588163 (82e:60013)[DM61] E. B. Dynkin 和 M. B. Maljutov，《有限生成元群上的随机游走》，Dokl. Akad. Nauk SSSR 137 (1961)，1042–1045。MR 0131904 (24 # A1751)[EF22] Anna Erschler 和 Joshua Frisch，《群扩张的泊松边界》，arXiv 预印本 arXiv:2206.11111 (2022)。[EK13] Anna Ershler 和 Vadim Kaimanovich，《双曲群上随机游走渐近特征的连续性》，Funktsional. Anal. i Prilozhen. 47 (2013)，第 2 期，84–89。MR 3113872[EK23] Anna Erschler 和 Vadim A. Kaimanovich，《群上的树状结构及其相关边界》，Geom. Funct. Anal. 33 (2023)，第 3 期，694–748。MR 4597640[Eme74] William R. Emerson，《可和群中的大型对称集与个体遍历定理》，Amer. J. Math. 96 (1974)，242–247。MR 354925[Ers04a] Anna Erschler，《次指数增长群的边界行为》，Ann. of Math. (2) 160 (2004)，第 3 期，1183–1210。MR 2144977[Ers04b] ，《群与流形的刘维尔性质》，Invent. Math. 155 (2004)，第 1 期，55–80。MR 2025301[Ers10] ，《泊松-弗斯滕伯格边界、大尺度几何与群的增长》，《国际数学家大会论文集》第二卷，Hindustan Book Agency，新德里，2010，第 681–704 页。MR 2827814[FHTVF19] Joshua Frisch、Yair Hartman、Omer Tamuz 和 Pooya Vahidi Ferdowsi，《Choquet-Deny 群与无限共轭类性质》，Ann. of Math. (2) 190 (2019)，第 1 期，307–320。MR 3990605[FK25] Behrang Forghani 和 Vadim Kaimanovich，《复合平稳测度的奇异性》，arXiv 预印本 arXiv:2503.09770 (2025)。[FS24] Joshua Frisch 和 Eduardo Silva，《圈积的泊松边界》，2024。[Fur63] Harry Furstenberg，《半单李群的泊松公式》，Ann. of Math. (2) 77 (1963)，335–386。MR 0146298[Fur71] ，《李群的随机游走与离散子群》，《概率及相关主题进展》，第 1 卷，Dekker，纽约，1971，第 1–63 页。MR 0284569 (44 #1794)[Jaw04] Wojciech Jaworski，《可数的恒等排除可和群》，Canad. Math. Bull. 47 (2004)，第 2 期，215–228。MR 2059416[Kai00] V. A. Kaimanovich，《具有双曲性质群的泊松公式》，Ann. of Math. (2) 152 (2000)，第 3 期，659–692。MR 1815698 (2002d:60064)[Kai24] Vadim A. Kaimanovich，《无限熵随机游走的刘维尔性质与泊松边界：问题何在？》，Funktsional. Anal. i Prilozhen. 58 (2024)，第 2 期，72–99，英文译本发表于 Functional Analysis and Its Applications, 58(2):160–181, 2024。[Ki83] V. A. Kaˇ imanovich，《具有非平凡出口边界的非交换离散群示例》，第 123 卷，1983，《微分几何、李群与力学 V》，第 167–184 页。MR 697250[KV83] V. A. Kaimanovich 和 A. M. Vershik，《离散群上的随机游走：边界与熵》，Ann. Probab. 11 (1983)，第 3 期，457–490。MR 704539 (85d:60024)[Nam64] I. Namioka，《顺从半群的 Følner 条件》，Math. Scand. 15 (1964)，18–28。MR 180832

[Ros81] Joseph Rosenblatt, 《局部紧群上的遍历与混合随机游走》, Math. Ann.**257** (1981), 第 1 期, 31–42。MR 630645[Sil25] Eduardo Silva, 《圈积上渐近熵的连续性》, 2025。[Tan24] Ryokichi Tanaka, 《词双曲群的非噪声敏感性》, 图卢兹科学学院数学年刊**第 6 辑, 33** (2024), 第 5 期, 1487–1510（英文）。[Zhe23] Tianyi Zheng, 《可数群上随机游走的渐近行为》, EMS Press, 国际数学家大会论文集（2023）, 3340–3365。

Behrang Forghani查尔斯
顿学院*E-mail*:
forghanib@cofc.edu

Joshua Frisch加利福尼亚大学圣迭
戈分校*E-mail*:
joshfrisch@gmail.com